

Bài 1 (4 điểm).

1. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + m^2 + m - 1$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác đều.

2. Một hộ gia đình cần xây dựng một bể chứa nước, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $24(m^3)$. Tỉ số giữa chiều cao của bể và chiều rộng của bể bằng 4. Biết rằng bể chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có mặt trên). Chiều dài của đáy bể bằng bao nhiêu để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Bài 2 (4 điểm).

1. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, $AB = c$ thỏa mãn $\sqrt{2a-c} \cdot \cos \frac{B}{2} = \sqrt{2a+c} \cdot \sin \frac{B}{2}$, với $2a > c$.

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

2. Có hai chuồng nhốt thỏ, chuồng thứ nhất nhốt 19 con thỏ lông màu đen và 1 con thỏ lông màu trắng. Chuồng thứ hai nhốt 13 con thỏ lông màu đen và 2 con thỏ lông màu trắng. Bất ngẫu nhiên mỗi chuồng đúng một con thỏ. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ có màu lông khác nhau.

Bài 3 (3 điểm). Cho x, y là các số thực dương, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (y+1)\log_4[(x+1)(y+1)] = 16 - (x-1)(y+1) \\ 4x^2 + 7xy - 3x + y^2 = 99 \end{cases}$$

Bài 4 (3 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2AD$. Điểm N

thuộc cạnh AB sao cho $AN = \frac{1}{4}AB$, M là trung điểm của DC . Gọi I là giao điểm của MN và BD .

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN . Biết điểm $A(2;1)$, đường thẳng BD có phương trình $11x - 2y + 5 = 0$, điểm B có hoành độ là số nguyên.

Bài 5 (4 điểm). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Mặt bên $BCC'B'$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Góc giữa hai mặt phẳng

$(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng α , với $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, hãy tính theo a :

1. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Bài 6 (2 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

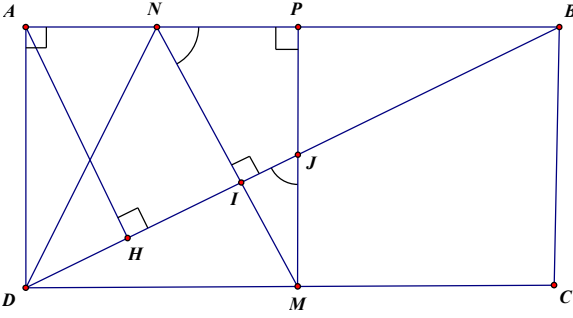
$$P = \frac{1}{16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz}} - \frac{10}{45 + x + y + z}.$$

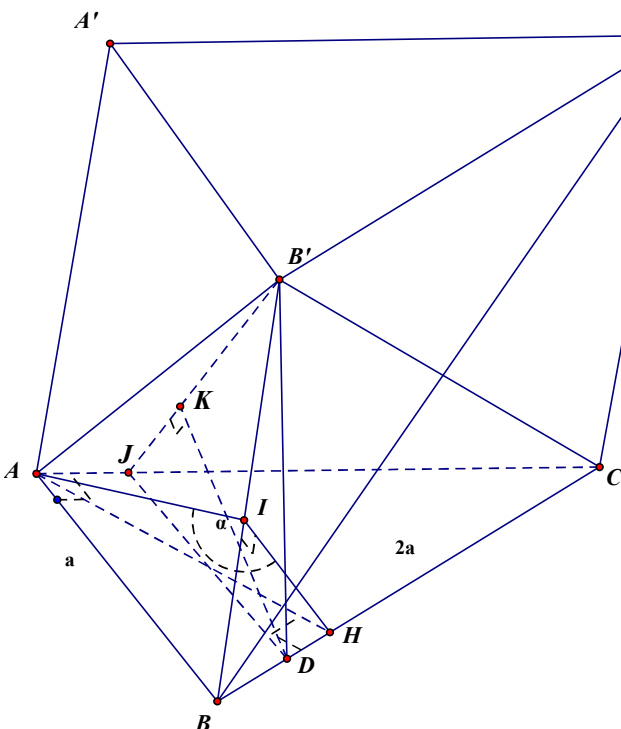
----- Hết -----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: Chữ ký của cán bộ coi thi 2:

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm											
Bài 1 4 điểm	1.	2,0											
	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ $y' = 4x^3 + 4(m+1)x$	0,5											
	Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m < -1$	0,25											
	Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là: $A(0; m^2 + m - 1), B(\sqrt{-m-1}; -m - 2), C(-\sqrt{-m-1}; -m - 2)$	0,5											
	Ta có $\begin{cases} AB = \sqrt{(m+1)^4 - (m+1)} = AC \\ BC = 2\sqrt{-m-1} \end{cases} \Rightarrow$ Tam giác ABC cân tại A với $\forall m < -1$	0,25											
	Xét: $AB = BC \Leftrightarrow (m+1)^4 + 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = -1 - \sqrt[3]{3}$ Vậy với $m = -1 - \sqrt[3]{3}$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác đều	0,5											
	2.	2,0											
	Gọi chiều cao, chiều rộng, chiều dài của bể lần lượt là h, x, y (m); ($h > 0, x > 0, y > 0$) Ta có: $\begin{cases} \frac{h}{x} = 4 \\ xyh = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4x \\ y = \frac{6}{x^2} \end{cases}$	0,5											
	Tổng diện tích xung quanh và diện tích một đáy của bể là: $S = xy + 2xh + 2yh = 8x^2 + \frac{54}{x}$ Xét hàm số $S(x) = 8x^2 + \frac{54}{x}, x > 0$	0,5											
	Tính $S' = 16x - \frac{54}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ Ta có bảng biến thiên	0,25											
	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>S'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>S</td><td>$+\infty$</td><td>\searrow 54 \nearrow</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	S'	-	0	+	S	$+\infty$	\searrow 54 \nearrow	$+\infty$
x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$										
S'	-	0	+										
S	$+\infty$	\searrow 54 \nearrow	$+\infty$										
Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{2}$													
Xây bể tốn nguyên vật liệu ít nhất khi diện tích xung quanh cộng với diện tích một mặt đáy có giá trị nhỏ nhất. Vậy chiều dài của đáy là $y = \frac{8}{3}(m)$ là giá trị cần tìm.	0,25												
Bài 2	1.	2,0											
	Bình phương hai vế và hạ bậc ta được: $(2a - c)\cos^2 \frac{B}{2} = (2a + c)\sin^2 \frac{B}{2} \Leftrightarrow (2a - c)(1 + \cos B) = (2a + c)(1 - \cos B)$	0,5											
	Rút được: $2a \cos B = c$	0,5											
	Biến đổi ra được $\sin(A - B) = 0$	0,5											

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
4 điểm	Kết luận $A = B$ vì $0 < A, B < \pi$	0,5
	2.	2,0
	Chuồng 1: Có 20 cách; Chuồng 2: Có 15 cách Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con nên ta có: $n(\Omega) = 15.20 = 300$	0,5
	Gọi biến cố A: “Bắt được hai con thỏ khác màu” khi đó \bar{A} : “Bắt được hai con thỏ cùng màu” +) Hai con thỏ cùng màu đen: có $19.13 = 247$ (cách) +) Hai con thỏ cùng màu trắng có $1.2 = 2$ (cách)	0,5
	$\Rightarrow n(\bar{A}) = 247 + 2 = 249 \Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{249}{300}$	0,5
	Vậy $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{17}{100}$	0,5
Bài 3 3 điểm	$(y+1)\log_4[(x+1)(y+1)] = 16 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{x+1}{16}\right) + x+1 = \log_4\left(\frac{1}{y+1}\right) + \frac{16}{y+1}$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = \log_4 t + 16t$ với $t > 0$ Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 4} + 16 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$	0,5
	Khi đó ta có $f\left(\frac{x+1}{16}\right) = f\left(\frac{1}{y+1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+1}{16} = \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 16$	0,5
	Ta có hệ pt: $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 16 \\ 4x^2 + 7xy - 3x + y^2 = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y) + x(y-1) = 15 \\ (2x+y)^2 + 3x(y-1) = 99 \end{cases}$	0,5
	Rút ra ta được $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x(y-1) = 6 \end{cases}$	0,5
	Tập nghiệm của hệ pt là: $T = \{(3;3); (1;7)\}$	0,5
Bài 4 3 điểm		
	Gọi P là trung điểm của AB, J là giao điểm của PM và BD Chứng minh được $\widehat{MNP} = \widehat{DJM} \Rightarrow MN \perp BD$	0,25
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD, ta có $AH = d(A, BD) = \sqrt{5}$	0,5
	Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AB = 5$	0,5
	$B \in BD \Rightarrow B(t; \frac{11t+5}{2})$; Từ $AB = 5 \Rightarrow B(-1; -3)$ (t là số nguyên)	0,5
	Ta có $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow N(\frac{5}{4}; 0)$	0,5

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
	Gọi K là trung điểm của BN , khi đó $K(\frac{1}{8}; -\frac{3}{2})$, $KB = \frac{15}{8}$	0,5
	Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN là: $(x - \frac{1}{8})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{225}{64}$	0,25
Bài 5 4 điểm	1.	2,0
		0,5
	Vẽ hình, dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$), suy ra được $AH \perp (BCC'B')$	
	Trong tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$; $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25
	Dựng $HI \perp BB'$ ($I \in BB'$), ta có $\begin{cases} BB' \perp HI \\ BB' \perp AH \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AHI)$ Suy ra được góc giữa 2 mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng góc giữa hai đường thẳng AI và HI bằng $\widehat{AIH} = \alpha$ (do tam giác AHI vuông tại H nên \widehat{AIH} là góc nhọn)	0,25
	Trong tam giác vuông ABH tính được $BH = \frac{a}{2}$, ta có $\tan \alpha = \tan \widehat{AIH} = \frac{AH}{IH} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ suy ra $IH = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \sin \widehat{IBH} = \frac{a\sqrt{6}}{5} : \frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$	0,5
	Vậy $V_{ABCA'B'C'} = \frac{3}{2} V_{A.BCC'B'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 4a^2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{6a^3\sqrt{2}}{5}$.	0,5
	2.	2.0
	Dựng $B'D \perp BC$ ($D \in BC$), ta có $B'D \perp (ABC)$ Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $A'C' \parallel (B'AC)$, nên $d(A'C', B'C) = d(A'C', (B'AC))$ $= d(C', (B'AC)) = d(B, (B'AC)) = \frac{BC}{DC} \cdot d(D, (B'AC))$	0,5

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm													
	Dựng $DJ \perp AC$ tại J , có $DJ \parallel AB$ Dựng $DK \perp JB'$ tại K . Chứng minh được $DK \perp (B'AC) \Rightarrow d(D, (B'AC)) = DK$	0,25													
	Ta có $\cos \widehat{B'BD} = \cos \widehat{IBH} = \frac{1}{5}$	0,25													
	mà $\cos \widehat{B'BD} = \frac{BD}{BB'} \Rightarrow BD = \frac{2a}{5} \Rightarrow \frac{DJ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{5} \Rightarrow DJ = \frac{4a}{5}$	0,25													
	Ta có $\sin \widehat{B'BD} = \sin \widehat{IBH} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{B'D}{BB'} \Rightarrow B'D = \frac{4a\sqrt{6}}{5}$	0,25													
	Xét tam giác $B'DJ$ vuông tại D có $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{B'D^2} + \frac{1}{DJ^2} = \frac{25}{96a^2} + \frac{25}{16a^2} = \frac{175}{96a^2}$	0,25													
	Suy ra $d(A'C', B'C) = \frac{BC}{DC} \cdot DK = \frac{5}{4} \cdot \frac{4a\sqrt{42}}{35} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.	0,25													
Bài 6 2 Điểm	Ta có $16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz} \leq 10(x + y + z)$	0,25													
	Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{5}{2}z$	0,25													
	Khi đó $P \geq \frac{1}{10(x + y + z)} - \frac{10}{45 + x + y + z}$	0,25													
	Xét $f(t) = \frac{1}{10t} - \frac{10}{45 + t}, t > 0; f'(t) = -\frac{1}{10t^2} + \frac{10}{(45 + t)^2}$	0,25													
	$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$	0,25													
	Ta có bảng biến thiên	0,5													
	<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\frac{9}{50}$</td><td>0</td></tr></table>	t	0	5	$+\infty$	$f'(t)$		-	0	+	$f(t)$	$+\infty$		$-\frac{9}{50}$	0
t	0	5	$+\infty$												
$f'(t)$		-	0	+											
$f(t)$	$+\infty$		$-\frac{9}{50}$	0											
	Giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{9}{50} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{25}{12} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$	0,25													

Các chú ý khi chấm:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.
- Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.
- Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm.
- Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm. Không làm tròn điểm.
- Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.

----- Hết -----