

Bài 1 (6,0 điểm).

a) Cho x và y là các số thực thỏa mãn $2x \geq y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + m$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.

Bài 2 (5,0 điểm).

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 2u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cho dãy số (v_n) thỏa mãn $v_1 = \frac{1}{2018}, v_{n+1} = \frac{2v_n}{1 + 2018v_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $v_{n+1} \geq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3 (4,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy}(x+y-1) = x^2 + y^2 \\ x^2y\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} = x^2y - x \end{cases}$$

Bài 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B, C . Gọi D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) .

a) Chứng minh đường thẳng AD đi qua trung điểm của cạnh BC ;

b) Chứng minh ba đường thẳng EF, BC, HD đồng quy.

----- HẾT -----

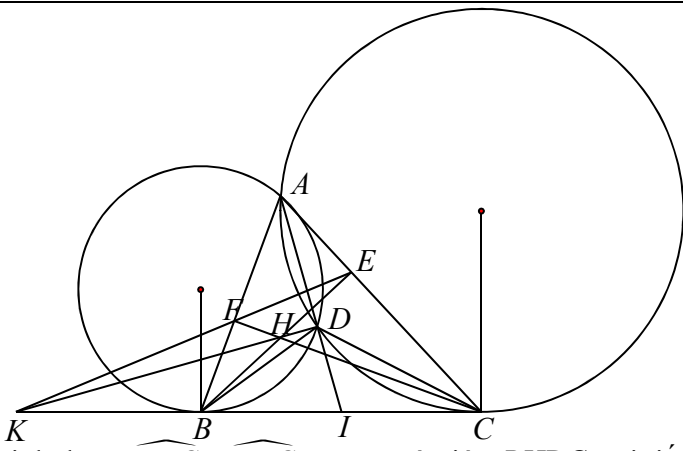
Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
1		6,0
a	<p>Ta có $P = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$, với $t = \frac{x}{y} \geq \frac{1}{2}$.</p> <p>Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \geq \frac{1}{2}$.</p> <p>Tính được $f'(t) = \frac{2t^2 - 2}{(t^2 + t + 1)^2}$, $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$.</p> <p>Bảng biến thiên</p> <p>Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{3}$, không có giá trị lớn nhất.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
b	<p>Tập xác định $D = \mathbb{R}$</p> <p>$y' = 3x^2 - 6x - 3m$</p> <p>Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.</p> <p>Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 + m > 0$ (*)</p> <p>Khi đó đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.</p> <p>Ta có $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot y' - 2(m+1)x$</p> <p>Do đó $y_1 = y(x_1) = -2(m+1)x_1$</p> <p>$y_2 = y(x_2) = -2(m+1)x_2$</p> <p>$y(x_1) \cdot y(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 x_1 \cdot x_2 < 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$</p> <p>Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m > 0$ thỏa mãn bài toán</p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
2		5,0
a	<p>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$</p> <p>Đặt $w_n = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Khi đó $w_{n+1} = 2w_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Do đó (w_n) là cấp số nhân có $w_1 = u_1 + 5 = 7$, công bội $q = 2$.</p> <p>Suy ra $w_n = w_1 \cdot q^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Vậy $u_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
b	<p>Chứng minh được $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Khi đó $v_{n+1} = \frac{2v_n}{1 + 2108v_n^2} \leq \frac{2v_n}{2\sqrt{2018} \cdot v_n} = \frac{1}{\sqrt{2018}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)</p> <p>Mặt khác, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có</p> <p>$v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n}{1 + 2108v_n^2} - v_n = \frac{v_n - 2018v_n^3}{1 + 2108v_n^2} = \frac{v_n(1 - 2018v_n^2)}{1 + 2108v_n^2} \geq 0$</p>	<p>0,5</p> <p>1,0</p> <p>1,0</p>

3	$\begin{cases} 2\sqrt{xy}(x+y-1)=x^2+y^2 & (1) \\ x^2y\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x^2y-x & (2) \end{cases}$	4,0
	<p>Điều kiện $xy \geq 0$</p> <p>Ta có $\sqrt{x^2+1}-x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y=0$ không thỏa mãn (2). Do đó $y \neq 0$. Suy ra $x=0$ không thỏa mãn (1).</p> <p>Nếu x, y cùng âm thì (1) vô lí. Do đó x, y cùng dương.</p> <p>Suy ra (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(\sqrt{x^2+1}-x) = y(\sqrt{y^2+1}-1)$</p> $\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \frac{1}{x} = y\sqrt{y^2+1} - y \quad (3)$ <p>Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+1} - t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.</p> <p>Ta có $f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} - 1 > 0, \forall t > 0$</p> <p>Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$</p> <p>Do đó (3) $\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow xy = 1$</p> <p>Thay $xy = 1$ vào phương trình (1) ta được</p> $2(x+y-1) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$ <p>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$</p>	0,25 0,5 0,25 0,5 0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
4		5,0
a	<p>Gọi I là giao điểm của AD và BC.</p> <p>Ta có $IB^2 = IA \cdot ID = IC^2$.</p> <p>Suy ra $IB = IC$.</p> <p>Do đó I là trung điểm của BC. Hay đường thẳng AD đi qua trung điểm I của BC.</p>	0,25 0,75 0,25 0,25
b	 <p>Chứng minh được $\widehat{BHC} = \widehat{BDC}$. Suy ra tứ giác $BHDC$ nội tiếp.</p> <p>Chứng minh $AFHD$ nội tiếp</p> <p>Chứng minh EF, BC, HD đồng qui</p>	1,0 1,0 1,5

