

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho ΔPAB đều, biết $P(2;5)$.

2) Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15m$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x+1)^2 + 4\sqrt{y} = y^2 + 4\sqrt{3x+1} \\ 3xy = 4x + 4 + 2\sqrt{x+3} \end{cases}$$

2) Trong cuộc thi: "Thiết kế và trình diễn các trang phục dân tộc" do Đoàn trường THPT tổ chức vào tháng 3 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng 26 tháng 3. Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n}, \forall n \geq 1$. Xét tính đơn điệu và bị chặn của (u_n) .

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD, AB > CD$) có $AD = DC, D(3;3)$. Đường thẳng AC có phương trình $x - y - 2 = 0$, đường thẳng AB đi qua $M(-1;-1)$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Câu IV (3,0 điểm)

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông.

1) Gọi S là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. SA, BC có trung điểm lần lượt là M và N . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a , biết MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° và $AB = a$.

2) Khi $AA' = AB$. Gọi R, S lần lượt nằm trên các đoạn thẳng $A'D, CD'$ sao cho RS vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$ và $RS = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

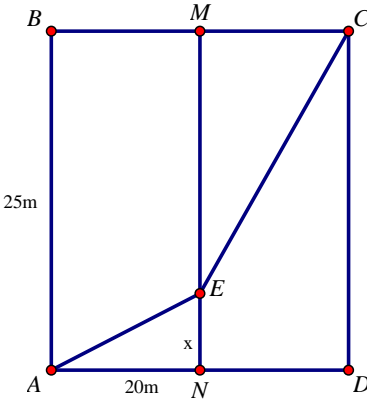
3) Cho $AA' = AB = a$. Gọi G là trung điểm BD' , một $mp(P)$ thay đổi luôn đi qua G cắt các đoạn thẳng $AD', CD', D'B'$ tương ứng tại H, I, K . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$T = \frac{1}{D'H.D'I} + \frac{1}{D'I.D'K} + \frac{1}{D'K.D'H}.$$

Câu V (1,0 điểm)

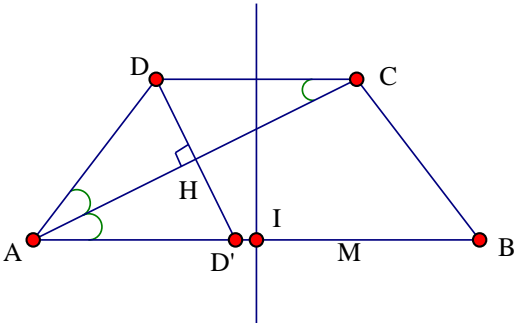
Cho các số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}.$$

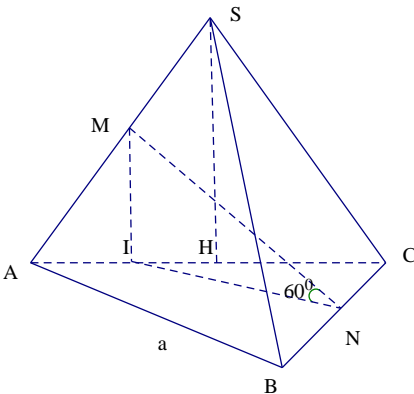
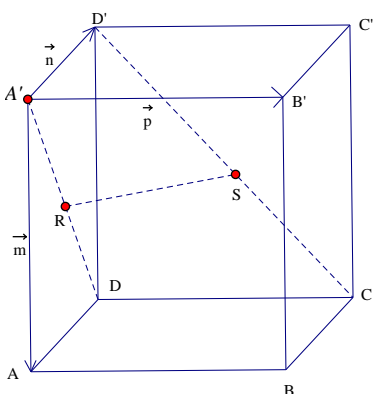
--- Hết ---

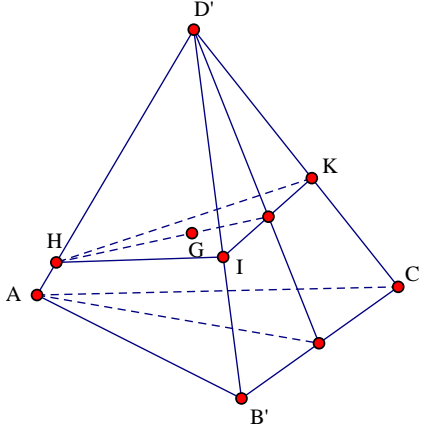
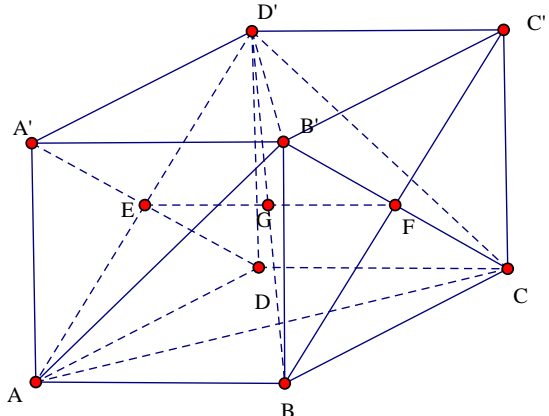
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:
Chữ kí giám thị coi thi số 1: Chữ kí giám thị coi thi số 2:

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.1 1,0 đ	Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho ΔPAB đều, biết $P(2;5)$.	
	hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là nghiệm phương trình $\frac{2x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0$ (1) ($x = -1$ không là nghiệm của (1))	0,25
	Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 13 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$	0,25
	Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$ Giả sử $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ Khi đó ta có: $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$ $PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2}$, $PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}$ Suy ra ΔPAB cân tại P	0,25
	Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1 x_2 - 8 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$. Vậy giá trị cần tìm là $m = 1, m = -5$.	0,25
Câu I.2 1,0 đ	Một mảnh đất hình chữ nhật ABCD có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền ABMN mỗi giờ làm được $15m$ và khi làm trong miền CDNM mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.	
	 <p>Giả sử con đường đi từ A đến C gặp vạch chắn MN tại E đặt $NE = x(m) (x \in [0; 25]) \Rightarrow AE = \sqrt{x^2 + 10^2}$; $CE = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$</p>	0,25
	Thời gian làm đường đi từ A đến C là $t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{CE}{30} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30} (h)$	0,25
	$t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{(25-x)}{30\sqrt{(25-x)^2 + 100}}$;	0,25

	$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{x^2+100}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(25-x) \geq 0 \\ 4x^2[(25-x)^2+100] = (25-x)^2(x^2+100) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x^2-25) + x^2[400-(25-x)^2]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ (x-5)[4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)]=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 5;$															
	$t(0) = \frac{20+\sqrt{725}}{30}, t(25) = \frac{10+2\sqrt{725}}{30}, t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{Thời gian ngắn nhất làm con đường từ A đến C là } \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ (giờ)}.$	0,25														
CâuII.1 1,0 đ	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (3x+1)^2 + 4\sqrt{y} = y^2 + 4\sqrt{3x+1} & (1) \\ 3xy = 4x+4+2\sqrt{x+3} & (2) \end{cases}$															
	<p>Điều kiện $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$.</p> <p>(1) $\Leftrightarrow (3x+1)^2 - 4\sqrt{3x+1} = y^2 - 4\sqrt{y}$ (*)</p> <p>xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t$ ($t \in [0; +\infty)$); từ (*) ta có $f(\sqrt{3x+1}) = f(\sqrt{y})$</p> <p>$f'(t) = 4t^3 - 4$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$</p> <p>bảng biến thiên</p> <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(t)</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(t)</td><td colspan="4"></td></tr></table> <p>Từ bảng biến thiên ta thấy : hàm số nghịch biến trên $[0;1]$; đồng biến trên $[1; +\infty)$</p> <p>+ Nếu $\sqrt{3x+1}$ và \sqrt{y} cùng thuộc $[0;1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì ta có $\sqrt{3x+1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = 3x+1$</p> <p>thay vào (2) ta có</p> $3x(3x+1) = 4x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x+3}+1 \\ 3x = -\sqrt{x+3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ <p>+Nếu $\sqrt{3x+1}$ và \sqrt{y} không cùng thuộc $[0;1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì</p> $(\sqrt{3x+1}-1)(\sqrt{y}-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} \cdot \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \leq 0 \Leftrightarrow x(y-1) \leq 0$ <p>từ (2) $\Leftrightarrow 3x(y-1) = (\sqrt{x+3}+1)^2 > 0$ vô lý. Vậy hệ có 2 nghiệm (x; y) là (1; 4)</p>	t	0	1	$+\infty$	f(t)	-	-	0	+	f(t)					0,25
t	0	1	$+\infty$													
f(t)	-	-	0	+												
f(t)																
	Từ bảng biến thiên ta thấy : hàm số nghịch biến trên $[0;1]$; đồng biến trên $[1; +\infty)$ <p>+ Nếu $\sqrt{3x+1}$ và \sqrt{y} cùng thuộc $[0;1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì ta có $\sqrt{3x+1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = 3x+1$</p> <p>thay vào (2) ta có</p> $3x(3x+1) = 4x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x+3}+1 \\ 3x = -\sqrt{x+3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ (thỏa}$ <p>mãn)</p>	0,25														
	+Nếu $\sqrt{3x+1}$ và \sqrt{y} không cùng thuộc $[0;1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì $(\sqrt{3x+1}-1)(\sqrt{y}-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} \cdot \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \leq 0 \Leftrightarrow x(y-1) \leq 0$ <p>từ (2) $\Leftrightarrow 3x(y-1) = (\sqrt{x+3}+1)^2 > 0$ vô lý. Vậy hệ có 2 nghiệm (x; y) là (1; 4)</p>	0,25														
CâuII.2 1,0 đ	Trong cuộc thi: "Thiết kế và trình diễn các trang phục dân tộc" do Đoàn trường THPT tổ chức vào tháng 3 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng 26 tháng 3. Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12.															
	Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$	0,25														
	Gọi A là biến cố “ Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12”															

	Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là : + 2 tiết mục khối 12, hai tiết mục khối 10, một tiết mục khối 11 + 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11 + 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11	0,25
	Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 = 330$.	0,25
	Xác suất cần tìm là $P = \frac{330}{792} = \frac{5}{12}$.	0,25
Câu III.1 1,0 đ	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n}, \forall n \geq 1$. Xét tính đơn điệu và bị chặn của (u_n) .	
	Chứng minh $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*(1)$. (1) $u_1 = 1 > 0$ (1) đúng khi $n = 1$.	0,25
	Giả sử $u_k > 0, k \geq 1 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{\sqrt{1+u_k^2} - 1}{u_k} = \frac{u_k}{\sqrt{1+u_k^2} + 1} > 0$ Vậy (1) đúng khi $n = k + 1 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n} - u_n = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1 - u_n^2}{u_n} < 0, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ \Rightarrow dãy số (u_n) giảm	0,25
	Do dãy số (u_n) giảm nên $u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn	0,25
Câu III.2 1,0 đ	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD, AB > CD$) có $AD = DC, D(3;3)$. Đường thẳng AC có phương trình $x - y - 2 = 0$, đường thẳng AB đi qua $M(-1;-1)$. Viết phương trình đường thẳng BC .	
	 <p>Gọi H là hình chiếu của D trên AC và D' là giao điểm của DH với AD. Vì $DC = AD$ nên $\triangle ADC$ cân tại D $D \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ mà $\widehat{CAB} = \widehat{DCA}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{D'AH} \Rightarrow H$ là trung điểm của BB'. BB' qua B và vuông góc với AC. Ta viết được phương trình BB': $x + y - 6 = 0$ $H = BB' \cap AC \Rightarrow H(4;2)$. Có H là trung điểm của DD'. Do đó $D'(5;1)$.</p>	0,25
	AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{MD'}$ làm vtcp nên phương trình $AB: x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow AC \cap AB = A(2;0)$ Ta có $ADCD'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'C}$. Do đó, $C(6;4)$.	0,25
	Gọi d là đường trung trực của DC , suy ra $d: 3x + y - 17 = 0$. Gọi $I = d \cap AB$, I là trung điểm của AB . $AB \cap d = I\left(\frac{53}{10}; \frac{11}{10}\right) \Rightarrow B\left(\frac{43}{5}; \frac{11}{5}\right)$.	0,25
	Đường thẳng BC đi qua C và nhận \overrightarrow{CB} làm vector chỉ phương nên $BC: 9x + 13y - 106 = 0$.	0,25
Câu III.1 1,0 đ	Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. 1) Gọi S là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. SA, BC có trung điểm lần lượt là M và N . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a , biết MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° và $AB = a$.	

	 <p>Gọi H là trung điểm của AC \Rightarrow SH là trung tuyến trong tam giác ΔSAC. Mặt khác ΔSAC cân tại S \Rightarrow SH là đường cao $\Rightarrow SH \perp AC$</p> $\left. \begin{aligned} (SAC) &\perp (ABC); (SAC) \cap (ABC) = AC \\ SH &\subset (SAC); SH \perp AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC)$	0,25
	<p>Gọi I là trung điểm của AH, mà M là trung điểm của SA \Rightarrow IM là đường trung bình trong tam giác SAH \Rightarrow</p> $\begin{cases} IM \parallel SH \\ IM = \frac{1}{2} SH \end{cases}$ $\left. \begin{aligned} SH &\perp (ABC) \\ IM &\parallel SH \end{aligned} \right\} \Rightarrow IM \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{MNI} = (\widehat{MN, (ABC)}) = 60^\circ$	0,25
	<p>ΔABC vuông cân tại B, có $AB = a \Rightarrow BC = a$; $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$.</p> <p>$NC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$; ΔABC vuông cân tại B $\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$.</p> <p>Xét ΔCNI CÓ: $NI = \sqrt{CI^2 + CN^2 - 2CI \cdot CN \cdot \cos \widehat{ICN}} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow MI = IM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$</p>	0,25
	$\Rightarrow SH = 2MI = \frac{a\sqrt{30}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{30}}{12}$	0,25
Câu III.2 1,0 đ	<p>Khi $AA' = AB$. Gọi R, S lần lượt nằm trên các đoạn thẳng $A'D$, CD' sao cho RS vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$ và $RS = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.</p>	
	<p>Đặt $\overrightarrow{A'A} = \vec{m}, \overrightarrow{A'D'} = \vec{n}, \overrightarrow{A'B'} = \vec{p} \Rightarrow \vec{m} = \vec{n} = \vec{p} = b; \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{m} = 0$</p> <p>và $\overrightarrow{A'R} = x \cdot \overrightarrow{A'D'}; \overrightarrow{D'S} = y \cdot \overrightarrow{D'C'}$</p> <p>Ta có</p> $\overrightarrow{A'R} = x \cdot \vec{m} + x \cdot \vec{n}; \overrightarrow{D'S} = y \cdot \vec{m} + y \cdot \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'S}$ $= (y - x) \vec{m} + (1 - x) \vec{n} + y \vec{p}$ 	0,25
	<p>Do đường thẳng RS vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$ nên ta có</p> $\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{D'C} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0 \\ ((y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}) \cdot (\vec{m} + \vec{p}) = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y - 2x = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ <p>Vậy R, S là các điểm sao cho $\overrightarrow{A'R} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'D'}; \overrightarrow{D'S} = \frac{1}{3} \overrightarrow{D'C'}$</p>	0,25

	$\Rightarrow \overrightarrow{RS} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{m} + \frac{1}{3}\overrightarrow{n} + \frac{1}{3}\overrightarrow{p} \Rightarrow RS^2 = \frac{b^2}{3} \Rightarrow RS = \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$	0,25
Câu III.3 1,0 đ	<p>Cho $AA' = AB = a$. Gọi G là trung điểm BD', một $mp(P)$ thay đổi luôn đi qua G cắt các đoạn thẳng $AD', CD', D'B'$ tương ứng tại H, I, K. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức</p> $T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H}.$	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>Vì $AA' = AB = a$ nên $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có G là trung điểm BD' nên G là tâm của $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là tâm $ADD'A'$ và $BB'C'C \Rightarrow E, F$ lần lượt là trung điểm $A'D$ và $B'C$; G là trung điểm EF</p> $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{D'B'})$ $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{D'G} = \frac{D'A}{D'H} \cdot \overrightarrow{D'H} + \frac{D'C}{D'K} \cdot \overrightarrow{D'K} + \frac{D'B'}{D'I} \cdot \overrightarrow{D'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{a\sqrt{2}}{4D'I} \cdot \overrightarrow{D'I} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'K} \cdot \overrightarrow{D'K} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'H} \cdot \overrightarrow{D'H} \quad (1)$ <p>Vì 4 điểm H, I, K, G đồng phẳng nên</p> $\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{GI} + l\overrightarrow{GK} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'H} - \overrightarrow{D'G} = k(\overrightarrow{D'I} - \overrightarrow{D'G}) + l(\overrightarrow{D'K} - \overrightarrow{D'G})$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{k}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'I} + \frac{l}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'K} - \frac{1}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'H} \quad (2)$ <p>do $\overrightarrow{D'I}, \overrightarrow{D'K}, \overrightarrow{D'H}$ không đồng phẳng nên từ (1) và (2) ta được $\frac{a\sqrt{2}}{4D'I} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'K} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'H} = 1$</p> <p>ta chứng minh được $(ab + bc + ca) \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ nên</p> $T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'K} \right)^2 = \frac{8}{3a^2}$ $\Rightarrow T = \frac{8}{3a^2} \Leftrightarrow D'H = D'I = D'K = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ <p>Nghĩa là: (P) đi qua G và song song với $mp(ABC)$. Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{8}{3a^2}$.</p>	0,25
Câu V 1,0 đ	<p>Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}.$	
	<p>Vì a, b, c là các số dương $\Rightarrow a + 4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} \Leftrightarrow a + 4b \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a + 4b}{4} \quad (1)$.</p> <p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 4b$.</p> <p>Vì a, b, c là các số dương</p> $\Rightarrow a + 4b + 16c \geq 3\sqrt[3]{a \cdot 4b \cdot 16c} \Leftrightarrow a + 4b + 16c \geq 12\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + 4b + 16c}{12} \quad (2)$ <p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 4b = 16c$.</p>	0,25

<p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+4b}{4} + \frac{a+4b+16c}{12}$</p> <p>$\Leftrightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a+4b}{4} + \frac{a+4b+16c}{12} \Leftrightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c).$</p> <p>$\Leftrightarrow \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{4(a+b+c)} \Rightarrow P \geq \frac{3}{4(a+b+c)} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}} \quad (3)$</p>	0,25												
<p>Đặt $t = \sqrt{a+b+c}(t > 0)$</p> <p>Từ (3) xét $f(t) = \frac{3}{4t^2} - \frac{6}{t}(t > 0); f'(t) = -\frac{3}{2t^3} + \frac{6}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$</p> <p>*) Bảng biến thiên :</p> <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$+\infty$</td><td>-12</td><td></td></tr></table> <p>Nhìn vào bảng biến thiên $\Rightarrow P \geq f\left(\sqrt{a+b+c}\right) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = -12, \forall a, b, c > 0$</p>	t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	$f'(t)$	-	0	+	$f(t)$	$+\infty$	-12		0,25
t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$										
$f'(t)$	-	0	+										
$f(t)$	$+\infty$	-12											
<p>đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b = 16c \\ \sqrt{a+b+c} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{21} \\ b = \frac{1}{84} \\ c = \frac{1}{336} \end{cases}$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -12</p>	0,25												

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.