

Câu 1.(3,50 điểm) Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số  $m$ :

$$\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0.$$

Câu 2.(3,50 điểm) Cho bốn số thực  $p, q, m, n$  thỏa mãn hệ thức

$$(q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0.$$

Chứng minh rằng hai phương trình

$$x^2 + px + q = 0 \text{ và } x^2 + mx + n = 0$$

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

Câu 3.(4,00 điểm) Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng  $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$ .

b) Chứng minh rằng  $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$ .

Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

Câu 4.(4,00 điểm) Cho  $x, y, z$  là 3 số thực thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = xy + yz + 2019zx$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = xy + yz + 2zx$ .

Câu 5.(3,00 điểm) Cho dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng  $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm giới hạn của dãy  $(x_n)$ .

Câu 6.(2,00 điểm) Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn

i)  $f(2020) = 2019$ ;

ii)  $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , trong đó kí hiệu  $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$ .

Hãy tính  $f(2018)$ .

—————Hết—————

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....