

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỶ THI CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN  
THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT 2018

Môn: TOÁN HỌC

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 28/09/2017

(Đề thi này gồm có 01 trang, có 5 câu)

Câu 1. (4 điểm)

Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- 1) Chứng minh rằng  $x_n \geq n$  với mọi  $n \geq 2$ .
- 2) Chứng minh rằng dãy  $\left(\frac{x_n}{n}\right)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (4 điểm)

Xác định tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 3. (4 điểm)

Cho tam giác  $ABC$ . Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác cân  $ABP$  và  $ACQ$  sao cho  $AB = AP$ ;  $AC = AQ$ ;  $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ} = 30^\circ$ . Các đường thẳng  $BQ$  và  $CP$  cắt nhau tại  $R$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCR$ .

- 1) Tính số đo góc  $\widehat{BOC}$
- 2) Chứng minh rằng các đường thẳng  $OA$  và  $PQ$  vuông góc với nhau.

Câu 4. (4 điểm)

Cho hai đa thức  $P(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 1$  và  $Q(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 1$ . Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  sao cho tồn tại số tự nhiên  $x$  ( $0 \leq x < p$ ) thỏa mãn cả  $P(x)$  và  $Q(x)$  đều chia hết cho  $p$  và tìm các số  $x$  đó.

Câu 5. (4 điểm)

Cho  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{2017}\}$  là tập hợp gồm 2017 điểm phân biệt nằm trong hình tròn tâm  $P_1$  bán kính bằng 1. Với mỗi  $k = 1, 2, \dots, 2017$  đặt  $x_k$  là khoảng cách nhỏ nhất từ  $P_k$  đến một điểm của  $P$  (khác  $P_k$ ). Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2017}^2 \leq 9$$

———— HẾT ————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.