BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2019

Môn : **TOÁN**
Thời gian : **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất : **13/01/2019**

Bài 1 (5,0 *điểm*). Cho hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(x_n),(y_n)$ với $x_n<y_n\ (n=1,2,\ldots)$ sao cho chúng hội tụ tới cùng một giới hạn và thỏa mãn $f(x_n)=f(y_n)$ với mọi n.

Bài 2 (5,0 *điểm*). Xét dãy số nguyên (x_n) thỏa mãn $0\le x_0<x_1\le 100$ và

$$x_{n+2}=7x_{n+1}-x_n+280,\quad \forall n\ge 0.$$

a) Chứng minh rằng nếu $x_0=2$ và $x_1=3$ thì với mọi số tự nhiên n, tổng các ước nguyên dương của $x_nx_{n+1}+x_{n+1}x_{n+2}+x_{n+2}x_{n+3}+2018$ chia hết cho 24.

b) Tìm tất cả các cặp (x_0,x_1) để $x_nx_{n+1}+2019$ là số chính phương với vô số số tự nhiên n.

Bài 3 (5,0 *điểm*). Với mỗi đa thức $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, đặt

$$\Gamma(f(x))=a_0^2+a_1^2+\cdots+a_m^2.$$

Cho đa thức $P(x)=(x+1)(x+2)\ldots(x+2020)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2^{2019} đa thức đôi một phân biệt $Q_k(x)\ (1\le k\le 2^{2019})$ với các hệ số dương thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\deg Q_k(x)=2020$,

ii) $\Gamma\left(Q_k(x)^n\right)=\Gamma\left(P(x)^n\right)$ với mọi số nguyên dương n.

Bài 4 (5,0 *điểm*). Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn nội tiếp I. Trên các tia AB,AC,BC,BA,CA,CB lần lượt lấy các điểm A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 sao cho $AA_1=AA_2=BC$, $BB_1=BB_2=CA, CC_1=CC_2=AB$. Các cặp đường thẳng $(B_1B_2,C_1C_2),(C_1C_2,A_1A_2),(A_1A_2,B_1B_2)$ lần lượt có các giao điểm là A',B',C'.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không vượt quá diện tích tam giác ABC.

b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Các đường thẳng AJ,BJ,CJ lần lượt cắt các đường thẳng BC,CA,AB tại R,S,T tương ứng. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AST,BTR,CRS cùng đi qua một điểm K. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không cân thì $IHJK$ là hình bình hành.

---HẾT---

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*