LÝ THUYẾT LAB 04

1. Thư viện Sympy
2. Định nghĩa các biến số trong hàm số
3. Giải phương trình
4. Tính giá trị hàm số f(x) tại điểm x0
5. Vẽ đồ thị của nhiều hàm số trên cùng 1 hệ tọa độ
6. Exercise 0: Vẽ điểm giao nhau của 2 đồ thị
7. Tìm giới hạn của hàm số
8. Khảo sát sự liên tục của hàm số
9. Tài liệu tham khảo

Định nghĩa thư viện sympy và định nghĩa hàm số

```
#update pip: python.exe -m pip install --upgrade pip
#python -m pip install sympy
#Cách 1
from sympy import symbols
x, y = symbols("x y")
f = x + 2*y
print(f)
print(f + 2*x)
print(f - x)

#Cách 2
import sympy as sp
x, y = sp.symbols("x y")
f = x + 2*y
print(f)
print(f + 2*x)
print(f - x)
```

Giải phương trình f(x) = 0

```
#1.3 Practice examples:
#Solve x^2 + 4x + 4 = 0
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
root1 = sp.solve(x**2 + 4*x + 4)
print("Nghiệm PT: x**2 + 4*x + 4 = 0 là:",root1)

#VD2: Giải PT: f1(x) - f2(x) = 0
f1 = x**2 + 4*x + 4
f2 = 2*x**2 + 5
root = sp.solve(f1 - f2) #giai PT: f1(x) - f2(x) = 0
print("Tập nghiệm của PT:",f1 - f2," là:",root)
x1 = root[0]
x2 = root[1]
```

```
print("Nghiệm x1 = ",x1)
print("Nghiện x2 = ",x2)
```

Kết quả thực hiện

```
Nghiệm PT: x**2 + 4*x + 4 = 0 là: [-2]
Tập nghiệm của PT: -x**2 + 4*x - 1  là: [2 - sqrt(3), sqrt(3) + 2]
Nghiệm x1 =  2 - sqrt(3)
Nghiện x2 =  sqrt(3) + 2
```

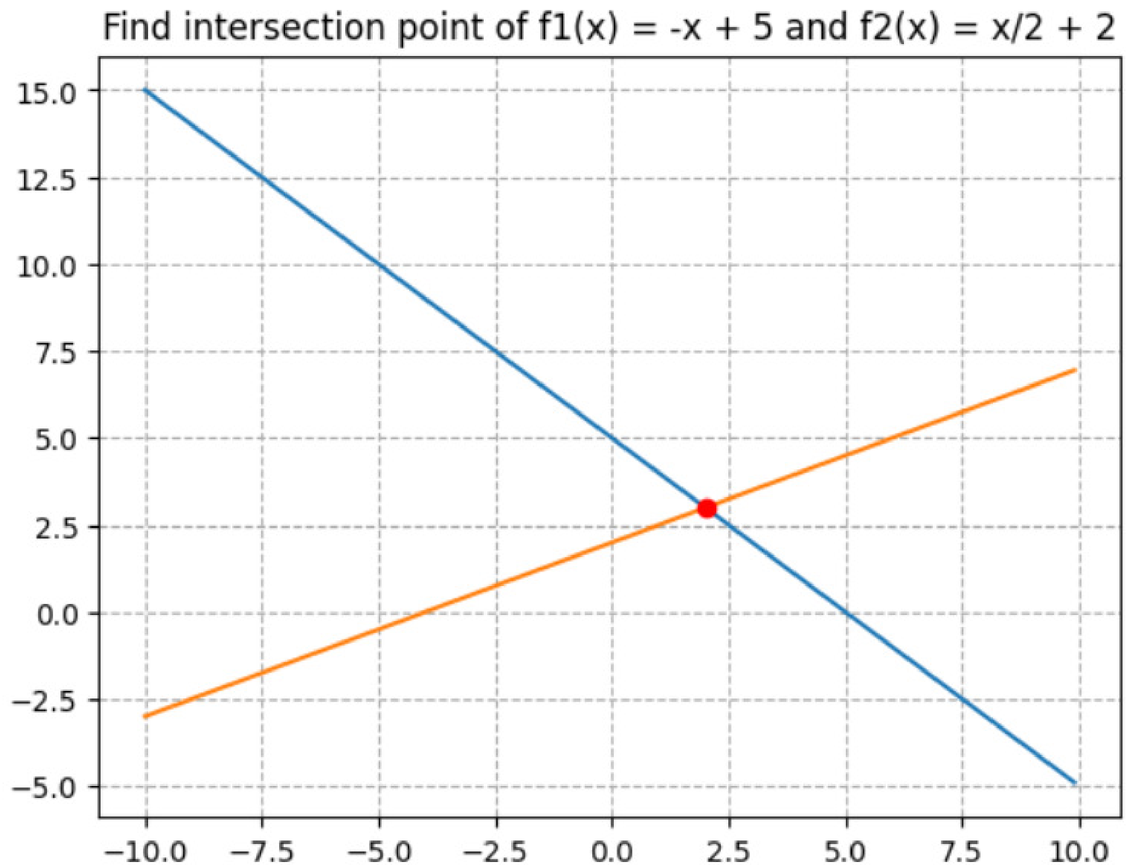
Tính giá trị của hàm số f(x) tại điểm x0

```
import sympy as sp

x = sp.symbols('x')
f = x**2 - x + 1
print(f.subs(x, 2) ) # f(2) = ?

t = sp.symbols('t')
f1 = t**2 - 2*t + 1
a = f1.subs(t,2)
print(a)
x,y = sp.symbols('x y')
f3 = 3*x + 2*y +1
b = f3.subs(x,2)
c = f3.subs(y,-2)
print(b)
print(c)
```

```
3
1
2*y + 7
3*x - 3
```

Vẽ đồ thị của 2 hàm số và vẽ giao điểm của chúng (nếu có)

```
#Exercise 0
#Write a Python program to plot the following functions on a graph, and mark the intersection point of
#f1 and f2: f1(x) = -x + 5; f2(x) = x/2 + 2
```




```
import sympy as sp
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
# ve f1 va f2

x = np.arange(-10,10,0.1)
f1 = lambda x: -x + 5
f2 = lambda x: x/2 + 2
y1 = list(map(f1,x))
y2 = list(map(f2,x))
plt.plot(x, y1)
plt.plot(x, y2)
plt.grid()
x_root = 2
y_root = 3
plt.plot(x_root, y_root, 'ro')
plt.show()
```

Cách tìm điểm giao nhau có tọa độ (x,y) và vẽ các điểm giao nhau

Bước 1: Giải phương trình 2 của đồ thị C1 (f1(x)) và đồ thị C2 (f2(x)): f1(x) – f2(x) = 0

x_root = sp.solve(f1x – f2x)

Tìm được danh sách hoành độ giao điểm: x_root = [x1, x2, v.v…]

Bước 2: Tương ứng các hoành độ x1, x2, v.v… tìm các tung độ tương ứng bằng cách thế giá trị x = x1 vào hàm f1x hoặc f2x ta sẽ tìm được tung độ tương ứng y1 = f1x(x1) bằng hàm subs: y1 = f1x.subs(x,x_root[0])

Bước 3: Sau khi có các giao điểm A(x1,y1); B(x2,y2); v.v… ta sẽ vẽ các chấm điểm tương ứng bằng hàm:

```
plt.plot(x1, y1, 'ro')
plt.plot(x2, y2, 'ro')
```

(VD Cụ thể: x = 2 và y = 3 là giao điểm 2 đường thẳng f1x = -x + 5; f2x = x/2 + 2)

```
x = sp.symbols('x')
f1x = -x + 5
f2x = x/2 + 2
x_root = sp.solve(f1x - f2x)
print("x = ",x_root)
print(x_root[0])
y_root = f1x.subs(x,x_root[0]) #f1(x_root[0]) = f1(2)
#y_root = f1x(x_root)
print("y = ",y_root)
plt.plot(x_root, y_root, 'ro')

#plt.plot(x_root, y_root, 'ro')
plt.title('Find intersection point of f1(x) = -x + 5 and f2(x) = x/2 + 2')
plt.grid(linestyle='--')
plt.show()
```

Tìm giới hạn hàm số f(x) : lim f(x) {x -> x0}

```
#Limit of a function
import sympy as sp
import math
x = sp.symbols('x')
#1c
f1c = math.e**(1/x)
x0 = 1
lm = limit(f1c, x, x0) #lim(f1x) (x -> x0)
print("1c - The limit of f(x) at x -> 1: ",round(lm,5))
```

Kết quả: `1c - The limit of f(x) at x -> 1:  2.71828`

Ký hiệu tiến tới vô cùng và giai thừa

```
#infinity: sp.oo ; math.inf
#factorial: sp.factorial(...)  VD: x! = sp.factorial(x)
```

Tìm giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của hàm số

Right/Left limit:

Theorem.

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$

$$f(x) \to L \Leftarrow x \to a \Longleftrightarrow \begin{cases} x \to a^+ & \Rightarrow f(x) \to L \\ x \to a^- & \Rightarrow f(x) \to L \end{cases}$$

```
import sympy as sp
import math
#3.2
x = sp.symbols('x')
f32 = (x**2 + x)/sp.sqrt(x**3 + x**2)
lmRight = sp.limit(f32, x, 0, '+')     #lim f(x) {x -> 0+}
print ("Right limit = " , lmRight )
lmLeft = sp.limit(f32, x, 0, '-')      #lim f(x) {x -> 0-}
print ("Left limit = " , lmLeft )
lm_f32 = sp.limit(f32, x, 0)           #lim f(x) {x -> 0}
print ("limit f32 = " , lm_f32 )
```

Kết quả thực hiện

```
Right limit =  1
Left limit =  -1
limit f32 =  1
```

Kiểm tra hàm số liên tục tại điểm x0 = a

Continuity

Definition of Continuity

- A function f is **continuous at a number** a if

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

  If f is not continuous at a, we say f is **discontinuous** at a.
- **Remark.** The definition consists of the 3 properties:

  i) f is defined at a (i.e., a is in the domain of f), and

  ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ exists, and

  iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

HƯỚNG DẪN THỰC HÀNH LAB 04

Exercise 1:

```
#Exercise 1: Write a computer program to find the limit of functions
import sympy as sp
import numpy as np
import math

#Cách 1
x = sp.symbols('x')
f1a = abs(x**2 - x - 7)
limit_expr = limit(f1a, x, 3)
print("a) Cách 1: lim f1a = abs(x**2 - x - 7), (x->3) = {}".format(limit_expr))
#-------------------------------------------------------
#Cách 2
def limf(f,x0):
  lim_f = limit(f,x,x0)
  #print("lim",f,"x->",x0,":",round(lim_f,6))
  return round(lim_f,6)
print("a) Cách 2: lim f1a = abs(x**2 - x - 7), {x->3} = ",limf(f1a,3))
#-------------------------------------------------------
#Cách 3
def p_limf(c,f,x0):
  lim_f = limit(f,x,x0)
  print(f"Câu {c}) lim",f,"{x->",x0,"} =",round(lim_f,6))
  #return round(lim_f,6)
print("a) Cách 3:")
p_limf("a",f1a,3)
```

Kết quả thực hiện:

```
a) Cách 1: lim f1a = abs(x**2 - x - 7), (x->3) = 1
a) Cách 2: lim f1a = abs(x**2 - x - 7), {x->3} =  1
a) Cách 3:
Câu a) lim Abs(-x**2 + x + 7) {x-> 3 } = 1
```

Hướng dẫn làm theo cách 3 cho câu c, ta chỉ cần khai báo hàm cần tính giới hạn, sau đó gọi hàm `p_limf` truyền vào các tham số: câu: "c", hàm: `f1c`, giá trị x0 = 1

```
x = sp.symbols('x') #Khai báo biến x có trong hàm trước khi khai báo hàm
f1c = pow(np.e,1/x) #Khai báo hàm
p_limf("c",f1c,1)   #Gọi hàm tính lim
```

Kết quả thực hiện câu c)

```
Câu c) lim 2.71828182845905**(1/x) {x-> 1 } = 2.718282
```

Yêu cầu: Sinh viên thực hiện các câu b,d,e,… của Exercise 1 theo cách 3

Kết quả thực hiện để so sánh kết quả:

```
Câu b) lim Abs(x - 1)/(x**2 - 1) {x-> 1 } = 0.500000
Câu c) lim 2.71828182845905**(1/x) {x-> 1 } = 2.718282
Câu d) lim (x**4 - 16)/(x - 2) {x-> 2 } = 32
Câu e) lim (x**3 - x**2 - 5*x - 3)/(x + 1)**2 {x-> -1 } = -4
Câu f) lim (x**2 - 9)/(sqrt(x**2 + 7) - 4) {x-> 3 } = 8
Câu g) lim Abs(x)/sin(x) {x-> 1 } = 1.188395
Câu h) lim (1 - cos(x))*sin(x)/x {x-> 0 } = 0
Câu i) lim 2*x**2/(3 - 3*cos(x)) {x-> 0 } = 1.333333
Câu j) lim ((x + 3)/(x - 1))**x {x-> inf } = 54.598150
Câu k) lim (1 - 2/(x + 3))**x {x-> oo } = 0.135335
Câu l) lim (1/x)**(1/x) {x-> inf } = 1
Câu m) lim (-x**0.33 + (x + 1)**0.33)/(-sqrt(x) + sqrt(x + 1)) {x-> oo } = 0
Câu n) lim factorial(x)/x**x {x-> inf } = 0
```

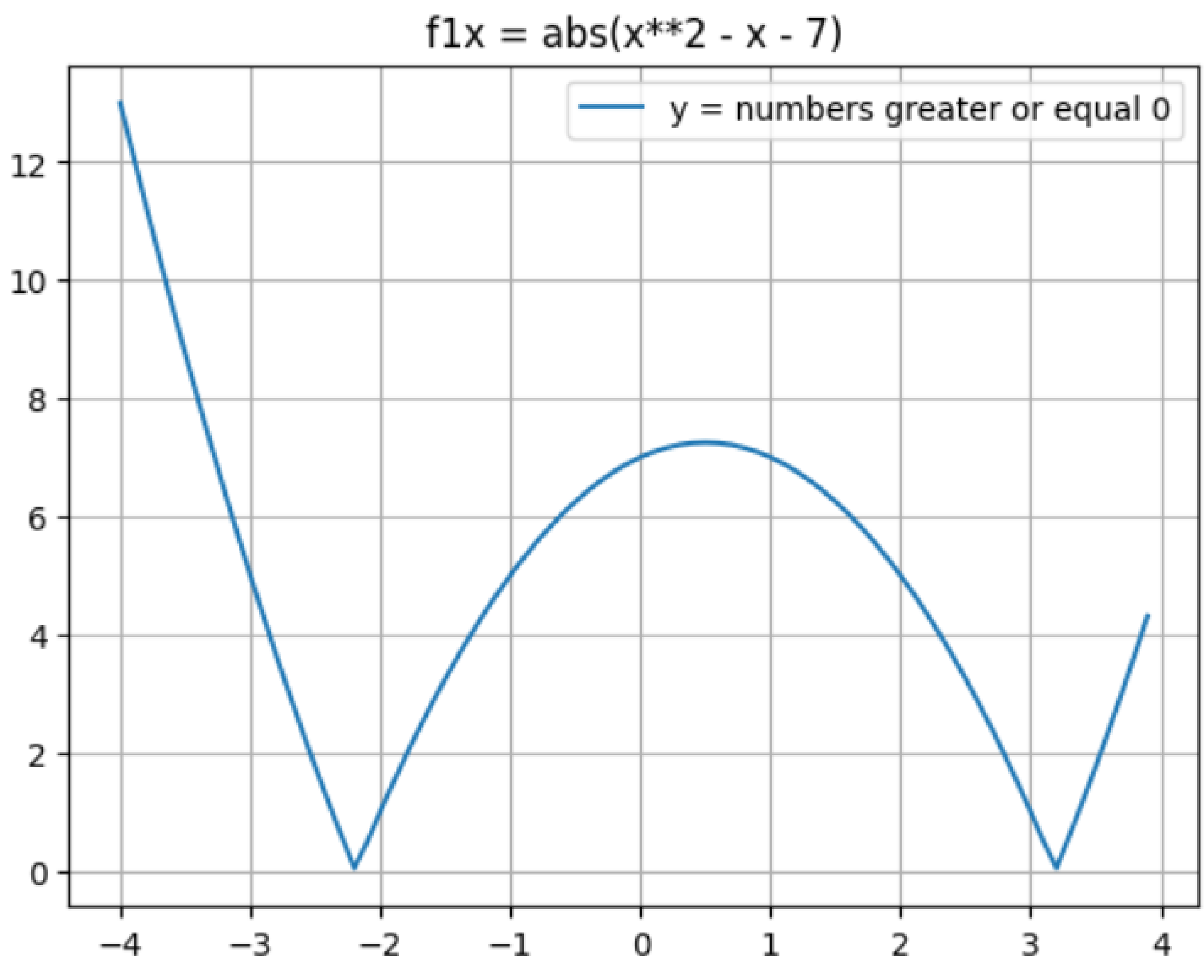
Nếu gặp khó khăn hoặc phát sinh lỗi khi thực hiện cần lưu ý các vấn đề sau:

- Ký hiệu x -> "vô cùng" thì sẽ được định nghĩa: x -> sp.oo hoặc x -> math.inf (nghĩa là "vô cùng" sẽ được ký hiệu 2 chữ o viết liền nhau thành oo hoặc math.inf
- Nếu dùng hàm math.sin; math.cos; math.sqrt bị lỗi khi tính lim thì chuyển hết sang sp.sin; sp.cos; sp.sqrt trong thư viện sympy
- x giai thừa (x!) thì dùng hàm: sp.factorial(x)

Exercise 2: Graph the functions which were defined in the previous exercise, and then show the limit points on the graph if possible.

```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Cách 1
#--------câu a--------
x = np.arange(-4,4,0.1)
f1x = lambda x: abs(x**2 - x - 7)
y1 = list(map(f1x,x))
plt.plot(x,y1,label='y = numbers greater or equal 0')
plt.title("f1x = abs(x**2 - x - 7)")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
#Cách 2
#--------câu a--------
def plot_f2a(a,b):
  x = np.arange(a,b,0.1)

  fx = lambda x: abs(x**2 - x - 7)
  y = list(map(fx,x))
  plt.plot(x,y,label='y = numbers greater or equal 0')
  plt.title("fx = abs(x**2 - x - 7)")
  plt.legend()
  plt.grid()
  plt.show()
```

```
#Gọi hàm để vẽ đồ thị
plot_f2a(-4,4)
```
Kết quả thực hiện:



Thực hiện các yêu cầu b,c,e,f, v.v.. chỉ cần thực hiện như sau:

- Copy nội dung hàm plot_f2a sang nội dung mới thành hàm mới (VD: plot_f2b)
- Sau đó sửa tên hàm thành plot_f2b, v.v…
- Sửa công thức hàm fx trong hàm vừa tạo (VD: sửa `fx = lambda x: abs(x**2 - x - 7)` thành `fx = lambda x: abs(x - 1)/(x**2 - 1)`
- Sửa các nội dung trong label, title cho phù hợp với hàm đang vẽ
- Gọi hàm thực thi

Yêu cầu: Sinh viên thực hiện các câu b,c,d… của Exercise 2 theo cách 2

Exercise 3: The f functions are defined; Find limx→0+ f(x), limx→0− f(x), limx→0 f(x) if they exist then show on the graph.

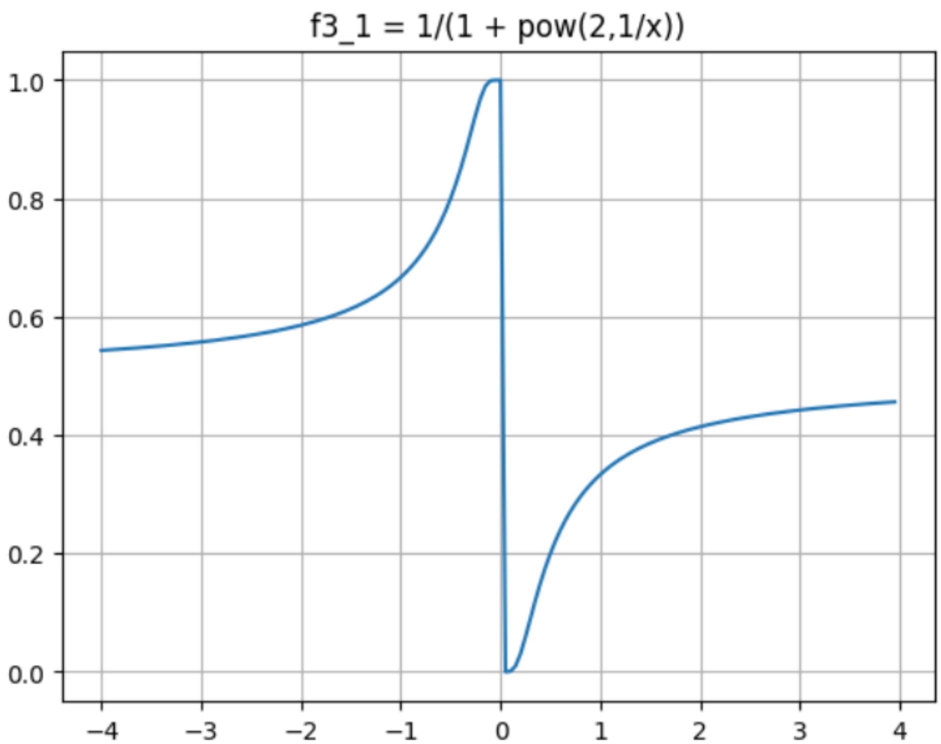
```
import sympy as sp
import math
#3.1
x = sp.symbols('x')
f3_1 = 1/( 1 + 2**(1/x) )
lmRight = sp.limit(f3_1, x, 0, '+') #lim f(x) {x -> 0+}
```

```
print ("Right limit = " , lmRight )
lmLeft = sp.limit(f3_1, x, 0, '-')  #lim f(x) {x -> 0-}
print ("Left limit = " , lmLeft )
lm_f31 = limit(f3_1, x, 0)          #lim f(x) {x -> 0}
print ("limit f3_1 = " , lm_f31 )
```

Kết quả thực hiện:

```
Right limit =  0
Left limit =  1
limit f3_1 =  0
```

```
Thực hiện vẽ đồ thị hàm số theo kiến thực về vẽ đồ thị
```



Yêu cầu: Sinh viên thực hiện câu a, b của Exercise 3 theo hướng dẫn như trên

Exercise 4: Let f(x) = 0 if x <= 0; f(x) = sin(1/x) if x > 0

$$\text{Let } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases}$$

1. Does limx→0+ f(x) exist? If so, what is it? If not, show on the screen to explain

2. Does limx→0− f(x) exist? If so, what is it? If not, show on the screen to explain

3. Does limx→0 f(x) exist? If so, what is it? If not, show on the screen to explain

```python
#Exercise 4: Let f(x) = 0 (x <= 0); f(x) = sin(1/x) x > 0
from sympy import *
def limlr(f,x0):
  lim_l = limit(f,x,x0,'-')
  lim_r = limit(f,x,x0,'+')
  if lim_l == AccumBounds(-1, 1) and lim_r == AccumBounds(-1, 1):
    print("Khong ton tai gioi han ben trai va ben phai!",lim_l)
    return lim_l
  elif lim_l == AccumBounds(-1, 1):
    print("Khong ton tai gioi han ben trai!",lim_r)
    return lim_r
  elif lim_r == AccumBounds(-1, 1):
    print("Khong ton tai gioi han ben phai!",lim_r)
    return lim_l
  elif lim_l == lim_r:
    lim = limit(f,x,x0)
    print("lim",f,"x->",x0,":",round(lim,6))
  return lim
x = symbols('x')
f4 = sin(1/x)
#print("lim f1b, x->1:",limf(f1b,1))
limlr(f4,0)
#Gia tri : AccumBounds(-1, 1) (Nghĩa là: Không tồn tại giới hạn)
```

Exercise 5: Prove that the function is continuous at c.

(a) $f(x) = x^2 - 7, c = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{2x - 3}, c = 2$

```python
#Exercise 5: Prove that the function is continuous at c.
# a) f(x) = x^2 - 7, c=1        b) f(x) = sqrt(2x - 3), c=2
x = symbols('x')
f5a = x**2 - 7
f5b = sqrt(2*x - 3)
lm5a = limit(f5a, x, 1)
lm5b = limit(f5b, x, 2)
print('The limit of f(x) at x = 1: {}'.format(lm5a))
print('The limit of f(x) at x = 2: {}'.format(lm5b))
```

```
The limit of f(x) at x = 1: -6
The limit of f(x) at x = 2: 1
```

Exercise 6: Write a program computer to verify at what points are the functions following continuous?

(a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3 & x = 2 \\ 4 & x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

```
#Exercise 6: Write a program computer to verify at what points are the functions following continuous?
#a) g(x) = (x^2 - x - 6)/(x - 3) if x <> 0; g(x) = 5  if x = 0
# y = f(x) is continuous at x0 if lim{x->x0}f(x) = f(x0)
import numpy as np
from sympy import *
x = symbols('x')
f6a = (x**2 - x - 6)/(x - 3)

#At point x = 0
lm_x_0 = limit(f6a, x, 0)
print("Compare lm_x_0 and f(0):", lm_x_0, 5) #f(0) = 5
if lm_x_0 != 5:
  print("f(x) is not continuous at point x = 0")
#Other points x != 0
for c in np.arange(-100, 100, 1):
  if c != 0:
    lm = limit(f6a, x, c)
    if lm != f6a.subs(x, c): # f6a.subs(x, c) = f(c)
      print("f(x) is not continuous at point x = ",c,"; because lim = ",lm," and f6a(x) = ",f6a.subs(x,c)) #nan: not a number
#f(x) is continuous for all x # 0, 3
```

```
Compare lm_x_0 and f(0): 2 5
f(x) is not continuous at point x = 0
f(x) is not continuous at point x =  3 ; because lim =  5  and f6a(x) =  nan
```

Exercise 7: Write a program computer to verify where are each of the following functions discontinuous?

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$

```
#Exercise 7: Write a program computer to verify where are each of the following functions discontinuous?
import numpy as np
from sympy import *
x = symbols('x')

f7a = (x**2 - x - 2)/(x - 2)
for c in np.arange(-100, 100, 1):
  lm = limit(f7a, x, c)
  if lm != f7a.subs(x, c): # f7a.subs(x, c) = f(c)
    print("f(x) is discontinuous at point x = ",c,"; because lim = ",lm," and f7a(x) = ",f7a.subs(x,c)) #nan: not a number

f7b = (x**2 - 2*x - 3)/(2*x - 6)
for c in np.arange(-100, 100, 1):
  lm = limit(f7b, x, c)
  if lm != f7b.subs(x, c): # f7b.subs(x, c) = f(c)
    print("f(x) is discontinuous at point x = ",c,"; because lim = ",lm," and f7b(x) = ",f7b.subs(x,c))
```

Exercise 8: Write a program computer to verify that the function $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ is continuous on the interval $[-1, 1]$ or not.

Hint:

- Find the limit of function $\lim_{x \to -1} f(x)$
- Find the limit of function $\lim_{x \to 1} f(x)$
- Check $\lim_{x \to -1} f(x)$ equals $\lim_{x \to 1} f(x)$ or not.

Exercise 9: Given *P(1, 0)* lies on $y = sin(10\pi/x)$. Q has $(x, sin(10\pi/x))$, finding slope of secant PQ with x = *2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9.* Write a computer program to show the result.

Exercise 10: Define L so that the functions are continuous

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x}, x \neq 0 \\ L, x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} & x \neq 2 \\ L & x = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Exercise 9:

```
#Exercise 9: Given P(1, 0) lies on y = sin(10π/x). Q has (x, sin(10π/x)), finding slope of secant PQ with
#x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Write a computer program to show the result.
import numpy as np
from sympy import *
from matplotlib import pyplot as plt

list_x = np.array([2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9])
list_x0 = np.array([2, 1.5, 1.4, 1.3])
#P(x1,y1)
x1 = 1
y1 = 0
for x in list_x0:
  y = sin(10*pi/x)
  print("Q(",x,y,")")
  m = (y - y1)/(x - x1)
  print("hsg k = ",m)
  #f = lambda x: m*(x - x1) + y1
  x_points1 = np.array([x1,x])
  y_points1 = np.array([y1,y])
  plt.plot(x_points1,y_points1)
  plt.grid()
x = 10*np.pi/np.array([2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9])
f9 = np.sin(x)
```

Exercise 10:

Bước 1: Tính lim f(x) {x -> x0} ;

Bước 2: Nếu tồn tại giới hạn trên => L = lim f(x) {x -> x0} thì hàm số sẽ liên tục