23.

a) Chứng minh S & S' là cơ sở của $\mathbb{R}^4$

- Ta có: $|S| = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow S$ span $\mathbb{R}^4$ (1)

Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{4} c_i u_i = 0$$

Ta có matrận mở rộng:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 9 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S ~~đây~~ độc lập tuyến tính (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$\Rightarrow$ S là cơ sở của $\mathbb{R}^4$

• Ta có $|S'| = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow S' \neq \text{span } R^4$ (3)

Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{4} c_i u'_i = 0$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S'$ độc lập tuyến tính (4)

Từ (3) và (4) ta có:

$\Rightarrow S'$ là cơ sở của R^4

b) $v = (-5, 2, 1, 0)$

Xét tổ hợp tuyến tính

$$v = \sum_{i=1}^{4} a_i u_i$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -9 & 1 & 4 & 1 & -5 \\ 7 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow [v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{22} \\ \frac{13}{77} \\ \frac{-61}{154} \\ \frac{15}{154} \end{bmatrix}$$

Được quét bằng CamScanner

c)

Xét tổ hợp tuyến tính:

$$u_1' = \sum_{i=1}^{4} a_i u_i \quad ; \quad u_3' = \sum_{i=1}^{4} c_i u_i$$

$$u_2' = \sum_{i=1}^{4} b_i u_i \quad ; \quad u_4' \sum_{i=1}^{4} d_i u_i$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c} -9 & 1 & 4 & 1 & 1 & -2 & \cancel{8}3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 = -2/11 \\ a_2 = 15/77 \\ a_3 = -50/77 \\ a_4 = 136/77 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_1 = 1/22 \\ b_2 = -79/154 \\ b_3 = -19/154 \\ b_4 = -45/77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -3/22 \\ c_2 = 36/77 \\ c_3 = -9/154 \\ c_4 = 237/154 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = 5/11 \\ d_2 = 145/154 \\ d_3 = 15/77 \\ d_4 = 57/154 \end{cases}$$

Ta có:

$$[u'_1]_S = \begin{bmatrix} -2/11 \\ 15/77 \\ -50/77 \\ 136/77 \end{bmatrix} ; \quad [u'_3]_S = \begin{bmatrix} -3/22 \\ 36/77 \\ -9/154 \\ 237/154 \end{bmatrix}$$

$$[u'_2]_S = \begin{bmatrix} 1/22 \\ -79/154 \\ -19/154 \\ -45/77 \end{bmatrix} ; \quad [u'_4]_S = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 145/154 \\ 15/77 \\ 57/154 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow P_{S' \to S} = \begin{bmatrix} -2/11 & 1/22 & -3/22 & 5/11 \\ 15/77 & -79/154 & 36/77 & 145/154 \\ -50/77 & -19/154 & -9/154 & 15/77 \\ 136/77 & -45/154 & 237/154 & 57/154 \end{bmatrix}$$

26c. Let $V = \text{span}\{x, y, z, t\}$. Find basis & dimension of V

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 + 2R_1 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_4 + 2R_2 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - 6R_3 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

The basis of V is $w = \{(1,1,0,0), (0,-3,0,3), (0,0,1,1), (0,0,0,6)\}$

$\text{Dim}\ w = \cancel{3}\,4$