

## Spezielle Fertigungsverfahren und Mikrofertigungstechnik

### Design of Experiments - DoE

Prof. Dr.-Ing. Alexander Brosius

6. Januar 2016



## Erzeugung von Informationen in Versuchen

**Inputs  
werden variiert**

$X_1$  →  
 $X_2$  →  
 $X_3$  →  
⋮  
 $X_n$  →

Prozess



**Outputs  
werden beobachtet**

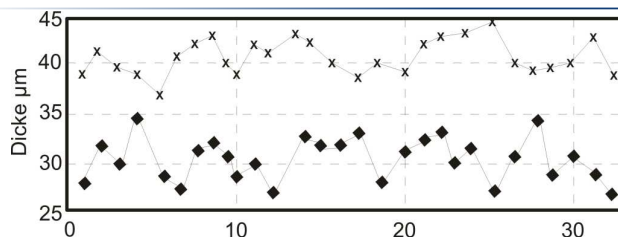
$Y_1; Y_2, \dots$

**Ziel der Informationssammlung ist es, die wichtigsten Prozessinputs ( $x_1, \dots, x_n$ ) zu finde, um den Prozessoutput (Y) in Abhängigkeit der Inputfaktoren mathematisch zu beschreiben.**

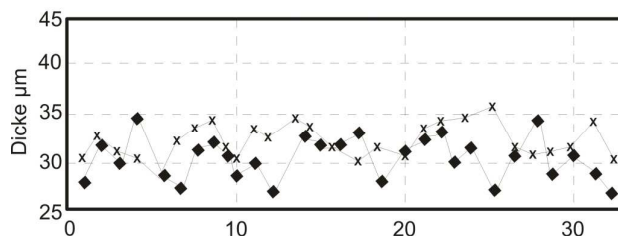
$$Y = f(x_1, \dots, x_n)$$

- **Genauer Zahlenwert kann in den Versuchen aufgrund zufälliger Unterschiede nicht reproduziert werden**
  - Streuung der Werte stellt ein Problem dar
  - Außer: Die Streuung der Werte ist kleiner, als die Unterschiede die erkannt werden sollen
  
- **Statistische Verfahren sind erforderlich, wenn**
  - Unterschiede erkannt werden sollen, die kleiner sind als ca. das Fünffache der Standardabweichung der Zufallsstreuung
  - Unterschiede quantitativ ermittelt werden sollen. Z. B. in welchem Bereich der wahre Unterschied mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt

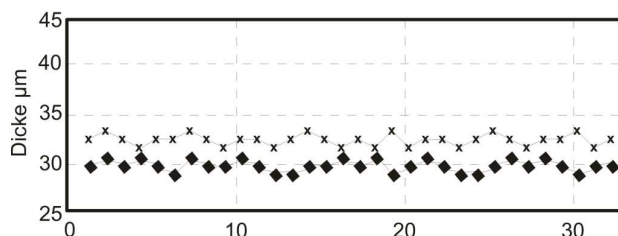
## Gründe für die statistische Versuchsplanung



Zwei Messreihen mit Mittelwerten von 30µm bzw. 40 µm und einer Standardabweichung von 2µm

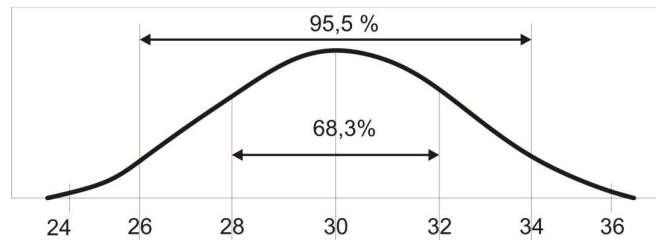


Zwei Messreihen mit Mittelwerten von 30 µm bzw. 32 µm und einer Standardabweichung von 2µm



Einstellungen wie in Bild 2, jedoch mit den Mittelwerten von je 30 Einzelwerten

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{0,5} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$\mu$  = Mittelwert

$\sigma$  = Standardabweichung (bzw.  $\sigma^2$  = Varianz)

$g(x)$  = Dichtefunktion der Normalverteilung

- Dichte der Normalverteilung ist symmetrisch zum Mittelwert
- 68,3 % der Gesamtfläche liegt im Bereich  $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$
- 95,5 % der Gesamtfläche liegt im Bereich  $\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma$
- 99,73 % der Gesamtfläche liegt im Bereich  $\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma$

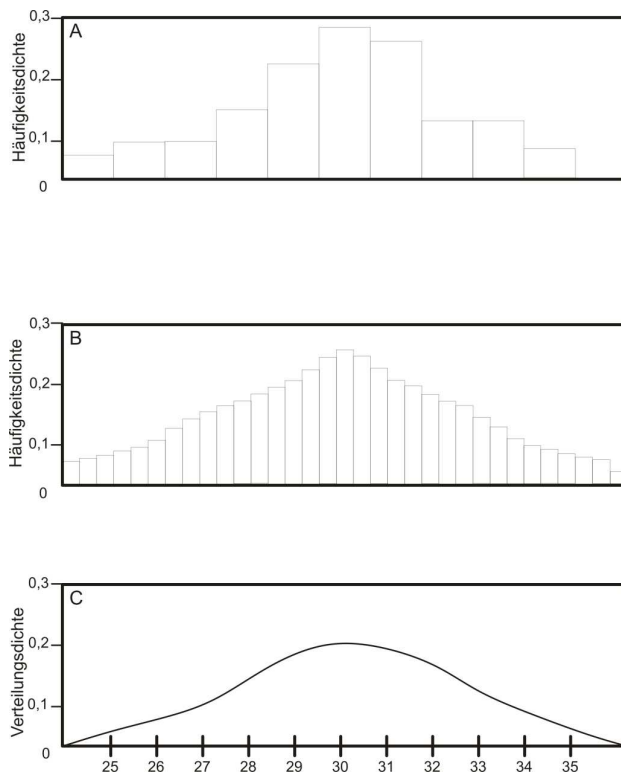
Mittelwert  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  ist ein Schätzwert für den

Mittelwert  $\mu$  und die Varianz  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

ein Schätzwert für die Varianz  $\sigma^2$  der Verteilung.

### Vorteile der berechneten Mittelwerte und Varianzen:

- a) Je größer der Stichprobenumfang  $n$ , desto geringer die Streuung der Schätzwerte
- b) Der Mittelwert vieler Schätzwerte nähert sich immer mehr dem wahren Wert



Mit zunehmender Anzahl der Messwerte  $n$  und immer feinerer Unterteilung in Klassen geht die Häufigkeitsdichte über in die Verteilungsdichte

(Quelle: Taschenbuch Versuchsplanung)

Sondergebiete Umformtechnik WS2015/16 | DoE

- 8 -

## Erkennen wichtiger Störgrößen

- Zur Erkennung von Störgrößen während der Fertigung
- Kann mit einer systematischen Beobachtung der Fertigung und einfachen Versuchen ermittelt werden

## Gleichzeitiges fertigen und lernen

- Systematische Veränderung der Prozessparameter, um während der laufenden Fertigung Verbesserungsmöglichkeiten zu erkennen
- Mit Evolutionary Operations (EVOP) möglich

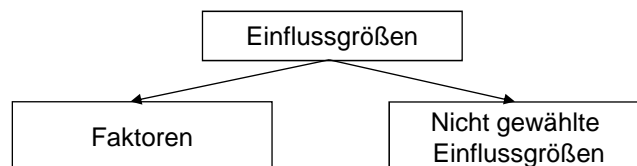
## Funktion und Zuverlässigkeit nachweisen

- Mit Hilfe spezieller Verfahren können mit wenigen Einzelversuchen die Extremkombinationen untersucht werden

- Bei Versuchsplänen mit vielen Faktoren ( $> 6$  Faktoren) wird die Untersuchung i. d. R. mit zwei Stufen begonnen
- Dabei kann ermittelt werden
  - welche Faktoren von Relevanz sind,
  - wie groß der **lineare Effekt** auf die Zielgrößen ist, und
  - welche Stufe für die einzelnen Faktoren sinnvoll ist.
- Soll der lineare Effekt der Faktoren bestimmt werden oder wird nur ein linearer Effekt erwartet, so können 2 Stufen verwendet werden
- Wird eine nichtlineare Abhängigkeit erwartet, so müssen 3 bis 5 Stufen verwendet werden
- Bei qualitativen Faktoren ergibt sich die Anzahl der Stufen aus der Problemstellung

### Faktoren

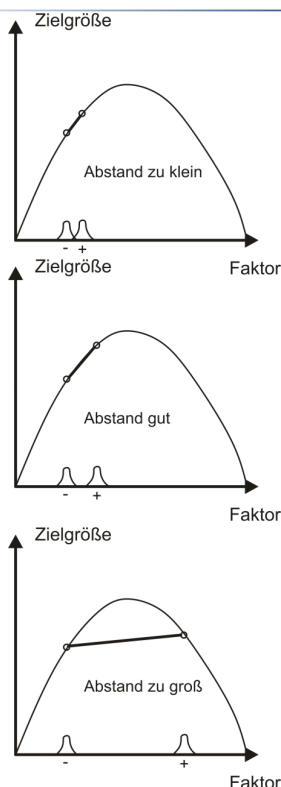
- Einflussgrößen, die für den Versuche als wesentlich vermutet werden



### Faktorstufen

- Legen fest, welche Werte die Faktoren im Versuch annehmen sollen
- Die ausgewählten Werte werden als Stufen bezeichnet

- Ausgangspunkt ist der bisher beste Prozess
  - Untersucht wird der Bereich der symmetrisch dazu liegt
- Je kleiner der Abstand zwischen den Stufen desto größer der Versuchsumfang
- Kann ein Faktor nicht genau gemessen werden, so sollte der Abstand der Faktorstufen mind.  $6\sigma$  sein (mit  $\sigma$  als Standardabweichung der Messung)
- Eine **Extrapolation** der Ergebnisse über den untersuchten Bereich ist **nicht zulässig**
- Zur Behandlung von Störgrößen sollten realistische Werte verwendet werden



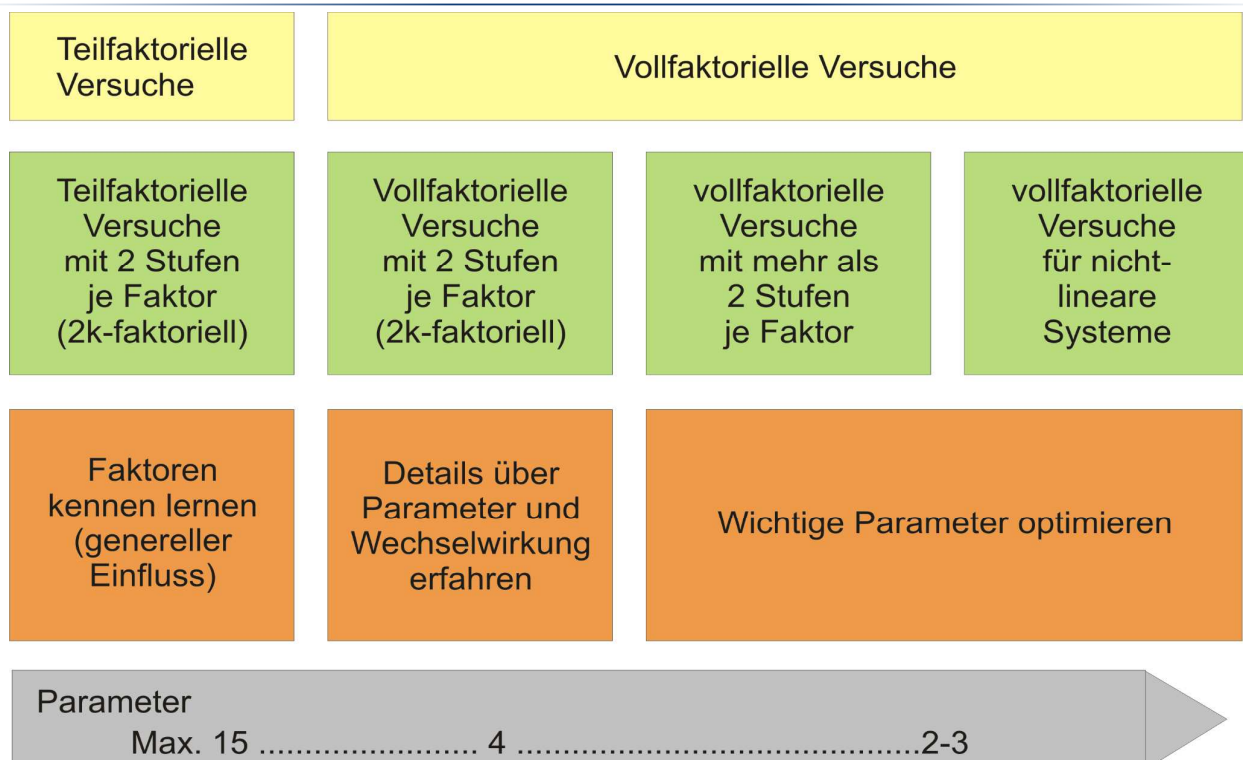
- Abstand zu klein  
Die Stufenwerte des Faktors liegen zu nah beieinander, dadurch wird sein Effekt von der Zufallsstreuung verdeckt
- Abstand gut
- Abstand zu groß  
Die Stufenwerte liegen zu weit auseinander, dadurch wird der Zusammenhang schlecht beschrieben

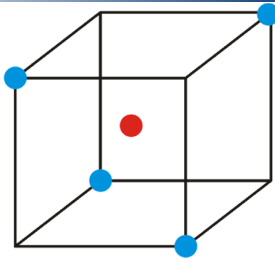
## Six-Sigma-Strategie

Besteht aus fünf Phasen (DMAIC):

- Definieren (**D**efine)  
Anforderungen identifizieren, den Prozess beschreiben und das Verbesserungsziel festlegen
- Messen (**M**easure)  
Zielgrößen festlegen, Messmittelfähigkeit und Prozessfähigkeit bestimmen
- Analysieren (**A**nalyse)  
**Beobachtung des Prozesses, Datensammlung und Suche nach Zusammenhängen zwischen Prozessparametern und Zielgrößen**
- Verbessern (**I**mprove)  
Versuchsplanung und –auswertung, um Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge quantitativ zu bestimmen und daraus Verbesserungen zu erzielen
- Regeln (**C**ontrol)  
Prozessregelung, um die Verbesserungen auf Dauer beizubehalten

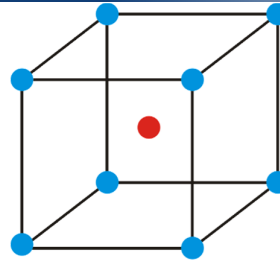
## Übersicht verschiedener Versuchspläne





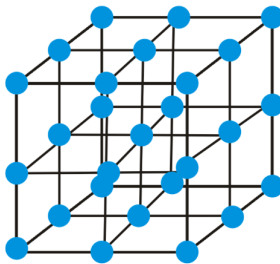
## 2k-teilfaktorieller Versuch

reduziert Versuchsplan mit 3 Faktoren auf 2 Stufen plus Center Point (C.P.)



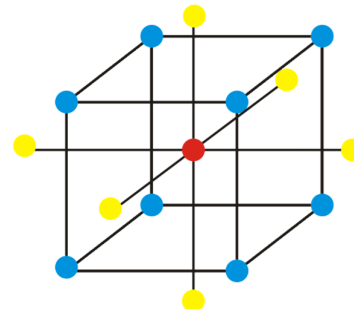
## 2k-vollfaktorieller Versuch

Versuchsplan auf 2 Stufen mit C.P.



## Vollfaktorieller Versuch

mit 3 Faktoren auf 3 Stufen



## Reponse Surface Design

mit 3 Faktoren auf 2 Stufen ergänzt durch sog. Star Points

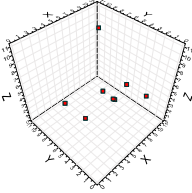
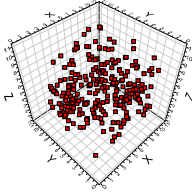
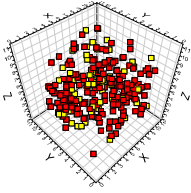
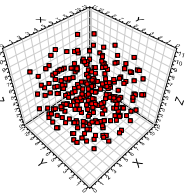
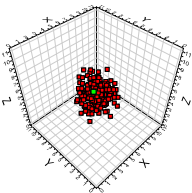
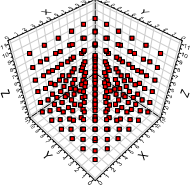
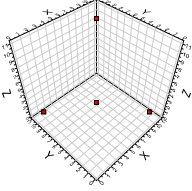
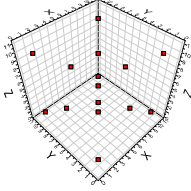
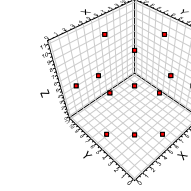
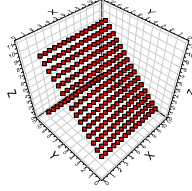
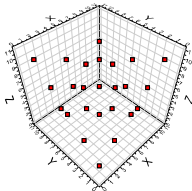
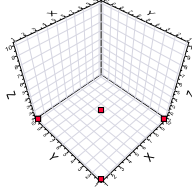
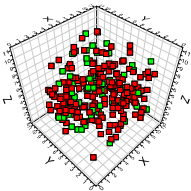
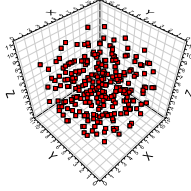
Bei vollfaktoriellen Versuchsplänen können immer **alle Haupteffekte** und **alle Wechselwirkungen** analysiert und quantifiziert werden.

Faktorstufen	Faktoren	Symbol	Teilversuche
3	2	$3^2$	9
3	3	$3^3$	27
3	4	$3^4$	81
3	7	$3^7$	2187
2	2	$2^2$	4
2	3	$2^3$	8
2	7	$2^7$	128
2	10	$2^{10}$	1024

- Die Anzahl der benötigten Teilversuche steigt mit der Anzahl der Faktoren exponentiell an!

**Anzahl Versuche = Stufen<sup>Faktoren</sup>**



User Sequence	Random Sequence	Constraint Satisfaction Problem	Sobol	Latin Hypercube Monte Carlo
				
Full Factorial	Reduced Factorial	Cubic Face Centered	Box-Behnken	Latin Square
				
Taguchi Matrix	Plackett Burman	D-Optimal	Cross Validation	
				

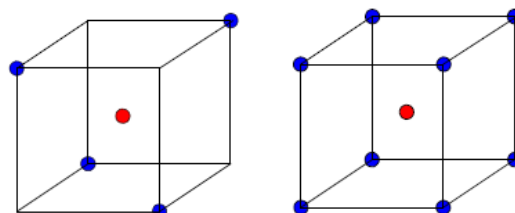
(Quelle: Engin Soft)

Sondergebiete Umformtechnik WS2015/16 | DoE - 22 -

## Nicht-Linearität bei Versuchen auf 2 Stufen

- Wird ein Faktor auf nur zwei Stufen (Einstellungen) untersucht, so läuft man Gefahr, einen möglichen **nicht linearen Zusammenhang** (Krümmung) zwischen Input und Ergebnis zu übersehen.
- Mit der Hinzunahme von sog. Center Points (C.P.) lässt sich mit wenig zusätzlichem Aufwand überprüfen, ob alle Inputfaktoren einen linearen Einfluss auf das Ergebnis ausüben.
- Ist der Center Point signifikant, dann hat mind. ein Faktor nicht linearen Einfluss.

**Versuche auf 2 Stufen  
sollten wenn immer möglich  
mit Center Points  
durchgeführt werden.**



**Vorgehen :** Ein Faktor wird variiert und das Ergebnis beobachtet. Die bessere Einstellung wird beibehalten und der nächste Faktor untersucht

Geschw.	Reifendruck	Oktanzahl	Verbrauch
80	2.5	96	8.4
100	2.5	96	9.8
80	3.0	96	<b>8.2</b>
80	3.0	91	8.8

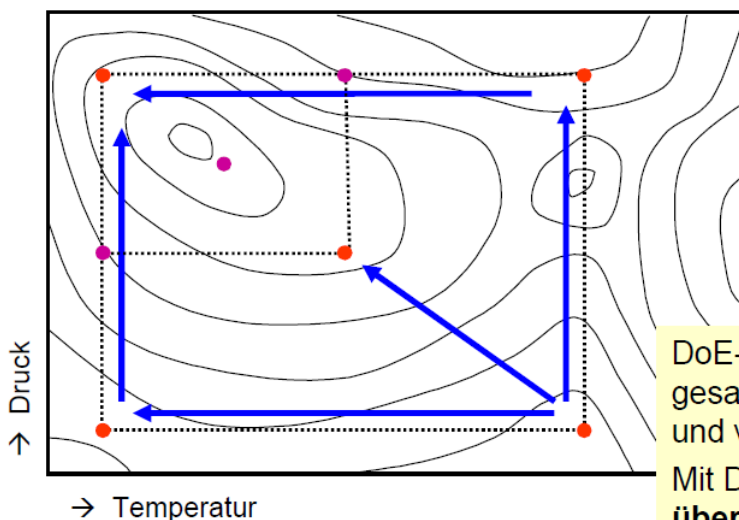
**Vorteil :**

- einfache Vorgehensweise
- mit **viel Glück** ist man schnell am Ziel

**Nachteil :**

- wenig systematisches System
- **ein Optimum wird nur durch Zufall entdeckt**
- die Einzelwirkungen bleiben unerkannt
- Wechselwirkungen werden nicht erkannt

- Mit dem Aufspannen von Versuchsfeldern / -räumen erhält man eine Richtung, in der das **Optimum** liegt.



DoE-Versuche benötigen insgesamt **weniger Versuche** und weniger Zeit.

Mit DoE **lernt man sehr viel über das System** und seine Zusammenhänge.

**Vorgehen :** Für die zu untersuchenden Parameter werden jeweils 2 Stufen festgelegt. Alle möglichen Kombinationen werden durchgeführt.

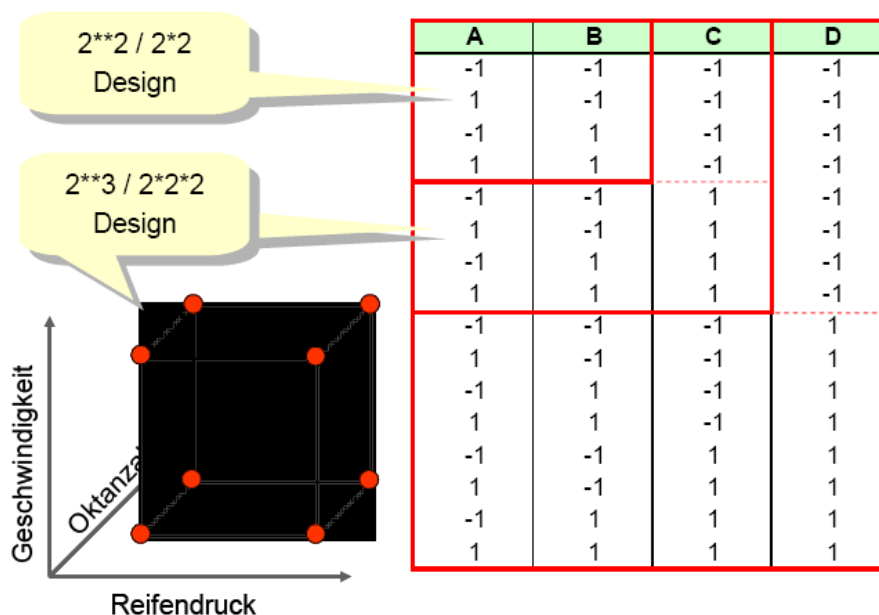
Geschw.	Reifendruck	Oktanzahl	Verbrauch
80 (-1)	2,5 (-1)	91 (-1)	7,6
100 (+1)	2,5 (-1)	91 (-1)	9,0
80 (-1)	3,0 (+1)	91 (-1)	8,8
100 (+1)	3,0 (+1)	91 (-1)	9,4
80 (-1)	2,5 (-1)	96 (+1)	8,4
100 (+1)	2,5 (-1)	96 (+1)	9,8
80 (-1)	3,0 (+1)	96 (+1)	8,2
100 (+1)	3,0 (+1)	96 (+1)	9,6

**Vorteil :** - Alle Haupteffekte und alle Wechselwirkungen lassen sich berechnen

**Nachteil :** - Hoher Versuchsaufwand bei zunehmender Anzahl Einflussgrößen

**Frage :** - Wie viele Versuche benötigen sie insgesamt?

## Schema vollfaktorieller Versuchspläne auf 2 Stufen



- 3 Faktoren auf je 2 Stufen
- $2^3 = 8$  mögliche Kombinationen vollfaktoriell
- 3 Haupteffekte, 3 Zweifach-Wechselwirkungen, 1 Dreifach-Wechselwirkung

A	B	C	A*B	A*C	B*C	A*B*C
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

## DoE: Teilfaktorieller Versuch (auf 2 Stufen)

**Vorgehen :** Für die zu untersuchenden Parameter werden jeweils 2 Stufen festgelegt. Es werden jedoch nicht mehr für alle Kombinationen der Einstellungen Versuche durchgeführt.

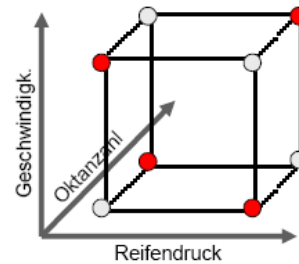
Geschw.	Reifendruck	Oktanzahl	Verbrauch
80 (-1)	2,5 (-1)	96 (+1)	8,4
100 (+1)	2,5 (-1)	91 (-1)	9,0
80 (-1)	3,0 (+1)	91 (-1)	8,8
100 (+1)	3,0 (+1)	96 (+1)	9,6

**Vorteil :** - Deutlich weniger Versuchsaufwand gegenüber vollfaktoriellen Versuch

**Nachteil :** - Haupteffekte sind bei völliger Reduktion durch Wechselwirkungseffekte überlagert. Hier ist die 2-fach Wechselwirkung (WW) mit dem Hauptfaktor C überlagert. Die Wirkung A\*B kann nicht mehr von C unterschieden werden.

**Vorgehen :** Für die zu untersuchenden Parameter werden jeweils 2 Stufen festgelegt. Es werden jedoch nicht mehr für alle Kombinationen der Einstellungen Versuche durchgeführt.

- Versuche werden durchgeführt
- Versuche werden weggelassen



Geschw.	Reifendruck	Oktanzahl	Verbrauch
80 (-1)	2,5 (-1)	96 (+1)	8,4
100 (+1)	2,5 (-1)	91 (-1)	9,0
80 (-1)	3,0 (+1)	91 (-1)	8,8
100 (+1)	3,0 (+1)	96 (+1)	9,6

**Vorteil :** - Deutlich weniger Versuchsaufwand gegenüber vollfaktoriellen Versuch  
**Nachteil :** - Wegen Überlagerungen können nicht mehr alle WW aufgelöst werden

## Beispiel eines teilfaktoriellen Versuchsplans

4 Faktoren mit je 2 Stufen

$2^4 = 16$  mögliche Kombinationen vollfaktoriell, 8 Kombinationen teilfaktoriell

A	B	C	A*B	A*C	B*C	<sup>D</sup> (A*B*C)
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Bei teilfaktoriellen Versuchen werden Wechselwirkungsspalten mit einem oder mehreren zusätzlichen Hauptfaktoren belegt. Dadurch sind Wirkungen überlagert und es können nicht mehr alle WW analysiert werden.

### ● Einschränkung der Auswertung

- Wechselwirkungen können nicht oder nur eingeschränkt analysiert werden, da sie durch Einzelwirkungen überlagert sind.

### ● Umgang mit möglichen Wechselwirkungen

- Wechselwirkungstabellen geben Auskunft darüber, welche Parameter sich mit welchen Wechselwirkungen überlagern.
- Überlegung, welche Wechselwirkungen aufgelöst werden sollen (2-fach, 3-fach etc.) und entsprechende Designauswahl mit nur teilweiser Reduktion.
  - Die Praxis zeigt das vor allem Hauptwirkungen und ihre Wechselwirkungen signifikant sind.
  - Dominante Wechselwirkungen höherer Ordnung (> 2-fach) kommen in der Praxis selten vor und können i.d.R vernachlässigt werden.
  - Teilfaktorielle Pläne führen auch bei relativ starker Reduktion (Res. IV) in der Regel zur sehr guten Ergebnissen.

### Nach DoE gelpante Experimente:

- ... benötigen **weniger Einzelversuche** als „OFAT“ – Experimente.
- ... erlauben die **Untersuchung von Haupteffekten und Wechselwirkungen**.
- ... ermöglichen eine **Quantifizierung der Effekte** der Hauptfaktoren sowie der Wechselwirkungen.
- ... erlauben eine **statistische Auswertung** und damit eine Aussage darüber, ob die untersuchten Faktoren einen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis haben.
- ... ermöglichen die **Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs** zwischen den Inputfaktoren und dem Ergebnis in einem mathematischen Modell.
- ... führen zu einem **ungleich größeren Know-how-Zuwachs**

→ **Nie wieder "trial and error"- oder "one-factor-at-a-time"-Versuche !!**

## Inputfaktoren

- Temperatur      160°C(-1)    /      180°C (+1)
- Konzentration    20% (-1)    /      40% (+1)
- Katalysator      KatA (-1)    /      KatB (+1)

Die drei Inputfaktoren – zwei quantitative und ein qualitativer – werden in einem vollfaktoriellen Versuch auf zwei Faktorstufen variiert.

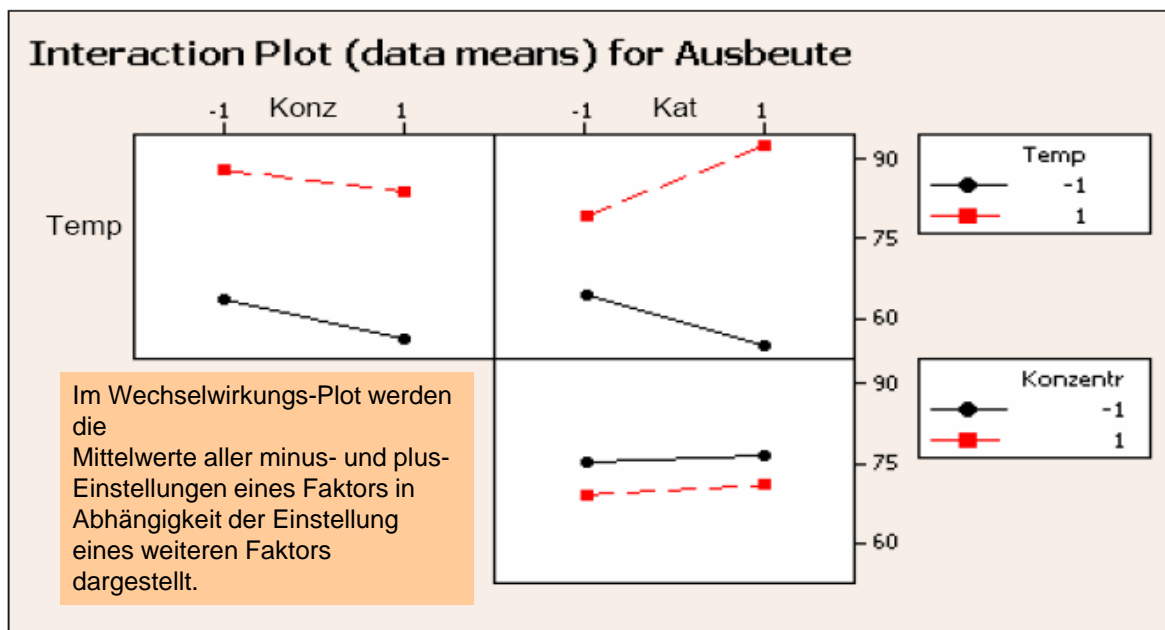
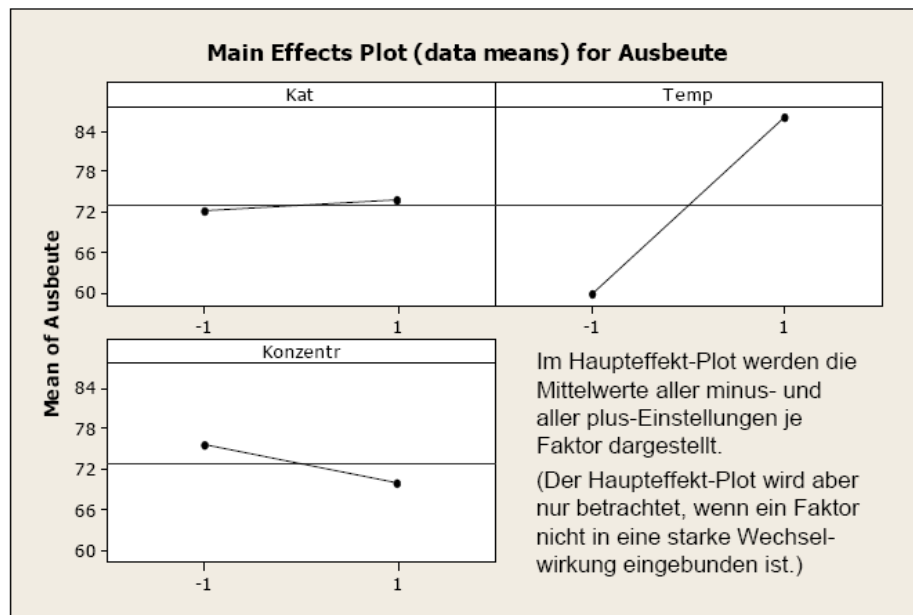
Temp	Konzentr	Kat	Ausbeute
-1	-1	-1	68
1	-1	-1	82
-1	1	-1	61
1	1	-1	77
-1	-1	1	59
1	-1	1	94
-1	1	1	51
1	1	1	91

## Berechnung der Haupt- und Wechselwirkungen

- Berechnen der Mittelwerte  $\bar{x}_q$  (+) und  $\bar{x}_q$  (-) für jeden Faktor und jede Wechselwirkung.
- Die Differenz von  $\bar{x}_q$  (+) und  $\bar{x}_q$  (-) ergibt den Effekt des betreffenden Faktors bzw. der entsprechenden Wechselwirkung.

Temp(T)	Konzentr(C)	Kat(K)	T*C	T*K	C*K	T*C*K	Ausbeute
-1	-1	-1	1	1	1	-1	68
1	-1	-1	-1	-1	1	1	82
-1	1	-1	-1	1	-1	1	61
1	1	-1	1	-1	-1	-1	77
-1	-1	1	1	-1	-1	1	59
1	-1	1	-1	1	-1	-1	94
-1	1	1	-1	-1	1	-1	51
1	1	1	1	1	1	1	91

Temp	Konz	Kat	T*Ko	T*Kat	Ko*Kat	T*Ko*Kat	
86.00	70.00	73.75	73.75	78.50	73.00	73.25	$\bar{x}_q$ (+)
59.75	75.75	72.00	72.00	67.25	72.75	72.50	$\bar{x}_q$ (-)
26,25	-5,75	1,75	1,75	11,25	0,25	0,75	Effekt



Der Grad der „Nichtparallelität“ der Geraden ist ein Indikator für die „Stärke“ der Wechselwirkung. Verlaufen die Geraden parallel, so besteht keine Wechselwirkung



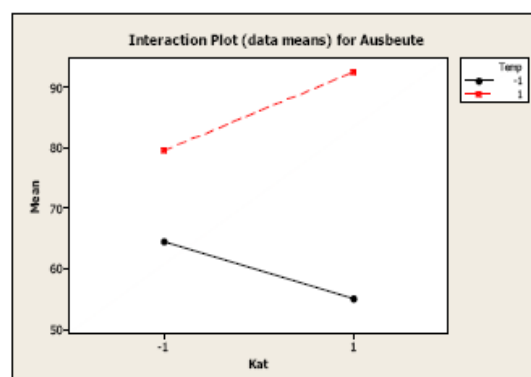
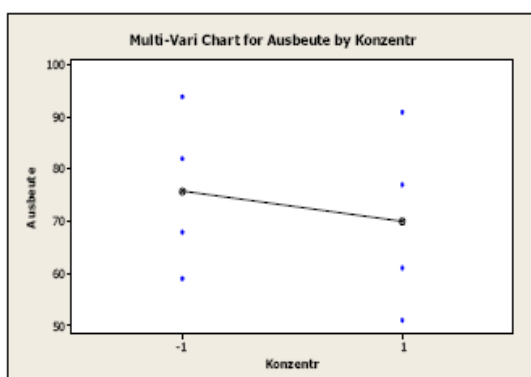
## Auswertung ohne Statistik

- Addition der Ergebnisse mit dem jeweiligen Vorzeichen der Parametereinstellung und Wechselwirkung bzw. Vergleich der Mittelwerte je Einstellung.
- Vorteile : einfach, ohne Statistikkenntnisse berechenbar
- Nachteile : Vertrauensniveau der Aussagen wird nicht ermittelt

## Auswertung mit Statistik

- Varianzanalyse und / oder Regressionsanalyse
- Vorteile :
  - Aussagen über die Signifikanz von Parametern
  - mathematisches Modell für Prognosen oder Toleranzermittlung
  - mehrere Ergebnisse (Y) können gleichzeitig optimiert werden
- Nachteile : Softwareunterstützung notwendig

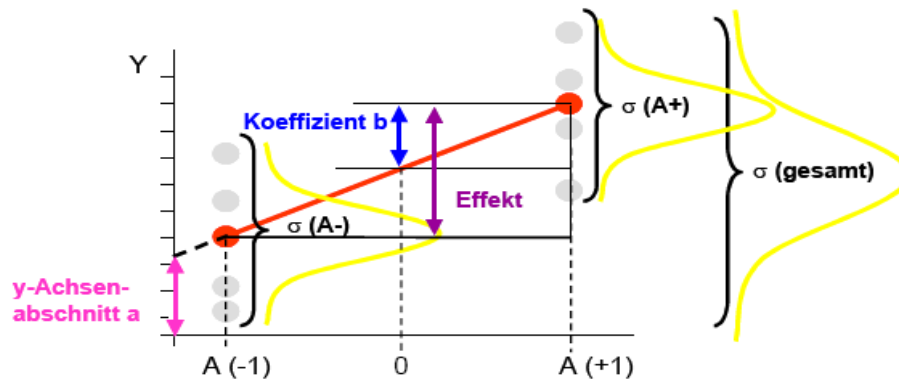
## Auswertung ohne Statistik



### Abschätzen der Ausgangssicherheit

- Sind die sichtbaren Effekte der Konzentration bzw. der Wechselwirkung Temp\*Kat zufällig zustande gekommen oder sind sie statistisch signifikant?
- Ohne präzise statistische Analysewerkzeuge ist diese Frage nur „aus dem Bauch“ zu beantworten. Ansatzpunkte zur Beurteilung sind :
  - Wie stark ist der Effekt?
  - Wie groß ist die Streuung?
  - Wie viele Werte stehen dahinter?

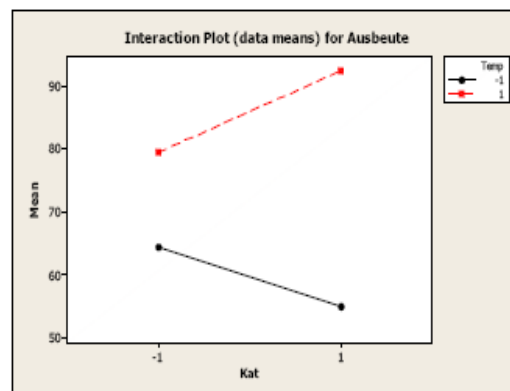
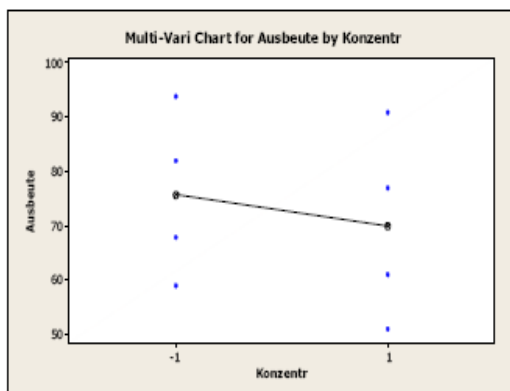
Bei der statistischen Auswertung wird beurteilt, ob sich die Verteilungen auf der minus- (A-) und auf der plus-Seite (A+) signifikant von der Gesamtverteilung unterscheiden.



- Als Ergebnis der statistischen Auswertung erhält man das mathematische Modell:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

## Signifikante Haupt- und Wechselwirkung



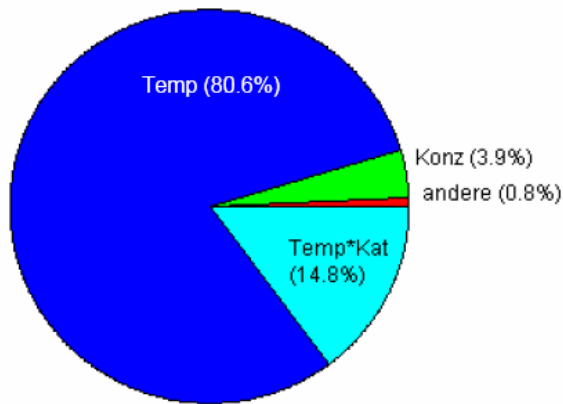
### Signifikante Parameter :

- Die Haupteffekte von Temperatur und Konzentration sowie die Wechselwirkung zwischen Temperatur und Katalysator sind signifikant.
- Da die Temperatur in eine signifikante Wechselwirkung eingebunden ist, betrachten wir nicht den Haupteffekt-, sondern nur den Wechselwirkungsplot.

**Interpretation :** Das beste Ergebnis wird mit folgender Einstellung erzielt:

- Temperatur : 180°C (+1)
- Konzentration : 20% (-1)
- Katalysator : Kat B (+1)

## Interpretation



- Der wichtigste Parameter ist die Temperatur. Durch sie werden gut 80% der im Versuch beobachteten Streuung erklärt.
- Am zweitwichtigsten ist die Wechselwirkung von Temperatur und Katalysator mit knapp 15% Erklärungsanteil.
- Die Konzentration ist zwar statistisch signifikant, jedoch mit einem Erklärungsanteil von >5% für die Praxis kaum relevant.
- Die unerklärte Reststreuung beträgt knapp 1% der in der Versuchsreihe beobachteten Streuung.