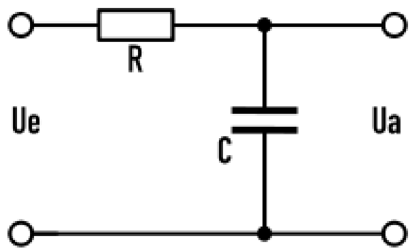
WIKIPEDIA

RC-Glied

Unter **RC-Gliedern** versteht man in der Elektrotechnik Schaltungen, die aus einem ohmschen Widerstand (R – engl. *resistor*) und einem Kondensator (C – engl. *capacitor*) aufgebaut sind. RC-Glieder sind lineare, zeitinvariante Systeme. Im engeren Sinne sind damit die Filter wie der Tiefpass oder Hochpass gemeint. Bei einem Tiefpass, wie in nebenstehendem Bild, ist der Kondensator parallel am Signalausgang geschaltet, beim Hochpass sind Kondensator und Widerstand vertauscht.

Zum Potentialausgleich beziehungsweise bei der Funktionserdung finden sich Parallelschaltungen von Kondensator und Widerstand. Zur Begrenzung von elektromagnetischen Störungen finden sich Reihenschaltungen von Kondensator und Widerstand, wie beispielsweise bei dem Snubber.



Einfacher RC-Tiefpass
U_e: Eingangsspannung
U_a: Ausgangsspannung

Inhaltsverzeichnis

1 Verhalten im Zeitbereich
- 1.1 Allgemeine Systemtheoretische Beschreibung des RC-Tiefpasses
- 1.2 Allgemeine Systemtheoretische Beschreibung des RC-Hochpasses
- 1.3 Ladevorgang
- 1.4 Differentialgleichung des Ladevorgangs
- 1.5 Entladevorgang
- 1.6 Differentialgleichung der Entladung
- 1.7 Impulsantwort
- 1.8 Periodische Signale

2 Verhalten im Frequenzbereich
- 2.1 Tiefpass
- 2.2 Hochpass

3 Beschreibung im Spektralbereich

4 Weblinks

Verhalten im Zeitbereich

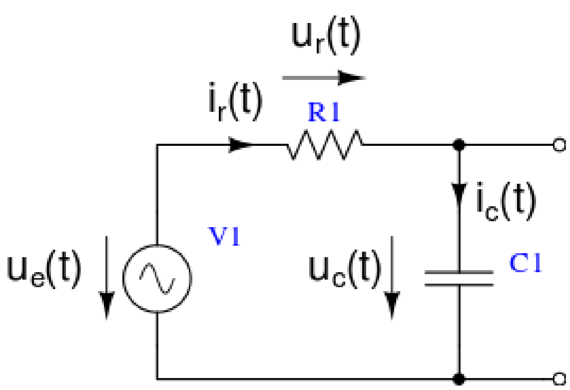
Allgemeine Systemtheoretische Beschreibung des RC-Tiefpasses

Das RC-Glied in Tiefpasskonfiguration ist ein integrierendes, zeitkontinuierliches, lineares, zeitinvariantes Übertragungsglied. Die allgemeine systemtheoretische Beschreibung ergibt sich aus den Kirchhoffschen Gesetzen, sowie den Strom-/Spannungs-Beziehungen an Kondensator bzw. Widerstand. Die Maschengleichung ergibt

$$-u_\mathrm{e}(t) + u_\mathrm{r}(t) + u_\mathrm{c}(t) = 0.$$

Da es sich um einen unverzweigten Stromkreis handelt, gilt $i_\mathrm{c}(t) = i_\mathrm{r}(t)$. Für den Spannungsabfall am Widerstand gilt

$$u_\mathrm{r}(t) = R i_\mathrm{r}(t)$$



Spannungen und Ströme am RC-Tiefpass

und der Strom durch den Kondensator ist durch die Beziehung

$$i_\mathrm{c}(t) = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t}$$

festgelegt. Setzen wir nun die Gleichung der Spannung über den Widerstand in die Maschengleichung ein, so erhalten wir

$$-u_\mathrm{e}(t) + Ri_\mathrm{r}(t) + u_\mathrm{c}(t) = 0.$$

Einsetzen des Stroms ergibt letztendlich die Differentialgleichung

$$RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{c}(t) = u_\mathrm{e}(t),$$

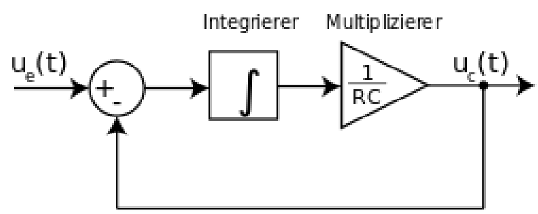
welche das Übertragungsglied vollständig beschreibt. Um den integrierenden Charakter des Tiefpassfilters zu verdeutlichen, nehmen wir noch einige Umformungen vor. Die Gleichung wird auf beiden Seiten integriert

$$\int RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int u_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t = \int u_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei sich Differential- und Integraloperator in einem Term direkt aufheben und folgt

$$RCu_\mathrm{c}(t) + \int u_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t = \int u_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Umstellen nach der Ausgangsspannung $u_\mathrm{c}(t)$ ergibt letztendlich



Blockschaltbild des RC-Tiefpasses

$$u_\mathrm{c}(t) = \frac{1}{RC}\left(\int u_\mathrm{e}(t)\,\mathrm{d}t - \int u_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{RC}\int u_\mathrm{e}(t) - u_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Integralgleichung im Zeitbereich kann direkt der Laplace-Transformation unterzogen werden, wodurch sich

$$u_\mathrm{c}(s) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\mathrm{s}}\left(u_\mathrm{e}(s) - u_\mathrm{c}(s)\right)$$

ergibt. Durch Division des Ausgangssignals $u_\mathrm{c}(t)$ durch das Eingangssignal $u_\mathrm{e}(t)$ ergibt sich die Übertragungsfunktion des RC-Tiefpass:

$$G_\mathrm{TP}(s) = \frac{u_\mathrm{c}(s)}{u_\mathrm{e}(s)} = \frac{1}{1+RCs}.$$

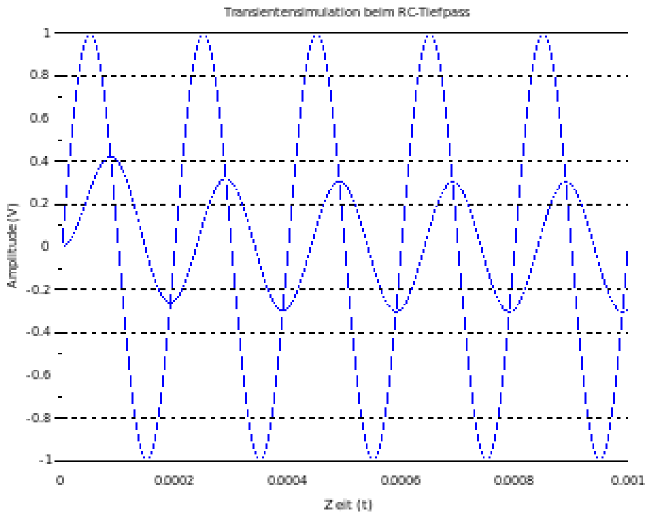
Durch Setzen von $s = \mathrm{j}\omega$ (mit der imaginären Einheit j und der Kreisfrequenz ω) ergibt sich die Fourier-Transformation und damit die spektrale Repräsentation des Systems:

$$G_\mathrm{TP}(\mathrm{j}\omega) = \frac{u_\mathrm{c}(\mathrm{j}\omega)}{u_\mathrm{e}(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}.$$

Die wohl wichtigste Klasse von Signalen zur Betrachtung des Filterverhaltens sind harmonische Signale, deshalb ist es häufig von großem Interesse, welches Dämpfungsverhalten das Filter auf ein Sinussignal hat. Durch das Eingangssignal

$$u_\mathrm{e}(t) = \hat{u}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

folgt in der zuvor hergeleiteten Differential- bzw. Integralgleichung dann



Transientensimulation bei sinusförmigem Eingangssignal, R = 1 kΩ, C = 100 nF, f = 5 kHz

$$RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{c}(t) = u_\mathrm{e}(t) = \hat{u}\,\sin(\omega t + \varphi)\,.$$

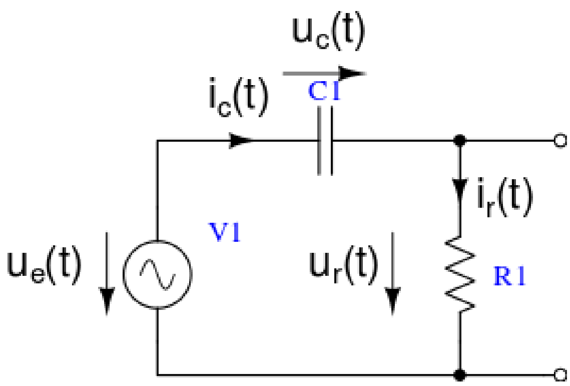
Um die Ausgangsspannung zu finden, muss nach $u_\mathrm{c}(t)$ umgestellt werden, dies ist analytisch möglich. Es handelt sich um eine Lineare gewöhnliche Differentialgleichung, zu der es viele verschiedene Lösungsmethoden gibt. Betrachtet man die Anfangsbedingung $u_\mathrm{c}(0) = 0$, also den Fall, dass das System beim Einschwingen zunächst energielos ist, dann ergibt sich die Lösung zu

$$u_{\mathrm{c,sin}}(t) = \frac{\hat{u}\,(\sin(\omega t + \varphi) - RC\omega\cos(\omega t + \varphi)) - \hat{u}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,(\sin(\varphi) - RC\omega\cos(\varphi))}{(\omega RC)^2 + 1}\,.$$

Allgemeine Systemtheoretische Beschreibung des RC-Hochpasses

Auch beim RC-Hochpass handelt es sich um einen unverzweigten Stromkreis, hierbei wird die Ausgangsspannung jedoch am Widerstand abgegriffen. Systemtheoretisch handelt es sich um ein differenzierendes Übertragungsglied. Die Maschengleichung ergibt

$$-u_\mathrm{e}(t) + u_\mathrm{r}(t) + u_\mathrm{c}(t) = 0.$$



Spannungen und Ströme am RC-Hochpass

Für die Spannung über dem Kondensator gilt die Integralbeziehung

$$u_\mathrm{c}(t) = \frac{1}{C}\int i_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgrund der Unverzweigtheit des Stromkreises gilt $i_\mathrm{c}(t) = i_\mathrm{r}(t)$, daraus folgt nach Einsetzen

$$-u_\mathrm{e}(t) + \frac{1}{C}\int i_\mathrm{r}(t)\,\mathrm{d}t + u_\mathrm{r}(t) = 0.$$

Der Strom im Integral lässt sich schreiben als $i_\mathrm{r}(t) = \frac{u_\mathrm{r}(t)}{R}$, eingesetzt in die Gleichung folgt

$$-u_\mathrm{e}(t) + \frac{1}{C} \int \frac{u_\mathrm{r}(t)}{R} \,\mathrm{d}t + u_\mathrm{r}(t) = 0,$$

dabei handelt es sich um eine Integralgleichung, welche das System nun vollständig beschreibt. Um den differenzierenden Charakter des Hochpassfilters zu verdeutlichen, nehmen wir noch einige Umformungen vor Die Gleichung wird auf beiden Seiten differenziert

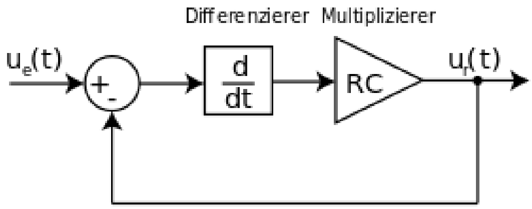
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_\mathrm{e}(t) + \frac{1}{C} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \frac{u_\mathrm{r}(t)}{R} \,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_\mathrm{r}(t) = 0,$$

wobei sich der Differential- und der Integraloperator wieder gegenseitig aufhebt

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_\mathrm{e}(t) + \frac{1}{RC} u_\mathrm{r}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_\mathrm{r}(t) = 0.$$

Umstellen zur Ausgangsgröße ergibt dann

$$u_\mathrm{r}(t) = RC \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(u_\mathrm{e}(t) - u_\mathrm{r}(t)\right),$$



Blockdiagramm des RC-Hochpasses.

wodurch das differenzierende Verhalten offensichtlich wird. Die Gleichung kann der Laplace-Transformation unterzogen werden, wodurch

$$u_\mathrm{r}(s) = RCs \left(u_\mathrm{e}(s) - u_\mathrm{r}(s)\right)$$

folgt. Durch Division des Ausgangssignals $u_\mathrm{r}(t)$ durch das Eingangssignal $u_\mathrm{e}(t)$ ergibt sich die Übertragungsfunktion des RC-Hochpass:

$$G_\mathrm{HP}(s) = \frac{u_\mathrm{r}(s)}{u_\mathrm{e}(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

Durch Setzen von $s = \mathrm{j}\omega$ ergibt sich die Fourier-Transformation und damit die spektrale Repräsentation des Systems:

$$G_\mathrm{HP}(\mathrm{j}\omega) = \frac{u_\mathrm{r}(\mathrm{j}\omega)}{u_\mathrm{e}(\mathrm{j}\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC}.$$

Auch hier betrachten wir wieder die Lösung der Differentialgleichung für ein harmonisches Eingangssignal, dazu kann die Laplace-Transformation genutzt werden. Das Eingangssignal sei

$$u_\mathrm{e,sin}(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi),$$

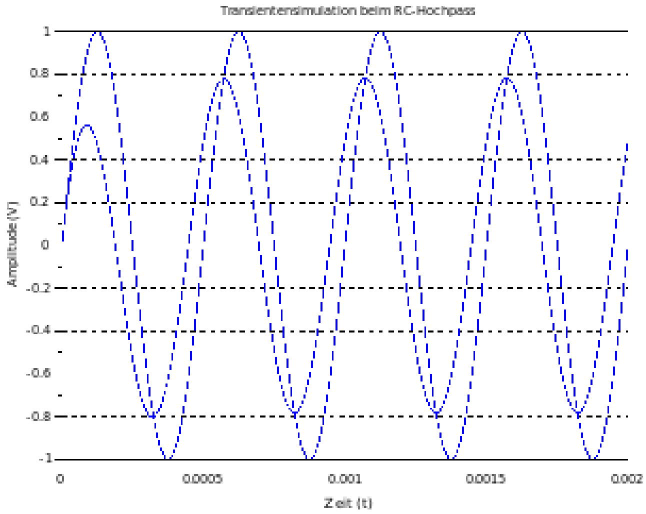
dessen Laplace-Transformierte lautet

$$\mathcal{L}\left\{\hat{u} \sin(\omega t + \varphi)\right\} = \hat{u} \frac{\omega \cos(\varphi) + s \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Einsetzen in die Übertragungsfunktion liefert

$$u_\mathrm{r,sin}(s) = \frac{RCs}{1 + RCs} \hat{u} \frac{\omega \cos(\varphi) + s \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Durch eine Umfangreiche Rücktransformation ergibt sich dann die Lösung der Differentialgleichung und damit das Transientenverhalten bei sinusförmigen Eingangssignal:



Transientensimulation bei sinusförmigen Eingangssignal, R = 1 kΩ, C = 100 nF, f = 2 kHz

$$u_{\mathrm{r,sin}}(t) = \frac{\hat{u}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(\sin(\varphi) - \omega RC\cos(\varphi)\right) + \hat{u}\omega RC\left(\cos(\omega t + \varphi) + \omega RC\sin(\omega t + \varphi)\right)}{(\omega RC)^2 + 1}$$

Ladevorgang

Exemplarisch ist hier die Systemantwort auf eine Sprungfunktion dargestellt. Die Spannung beträgt null Volt bis zum Zeitpunkt null und steigt dann unmittelbar auf $U_{\max}$. In den Kondensator fließt so lange Strom, bis die Platten elektrisch aufgeladen sind und keine weitere Ladung annehmen. Das tritt auf, wenn die Kondensatorspannung $U(t)$ genauso groß wie die angelegte Spannung $U_{\max}$ ist. Die eine Platte ist dann elektrisch positiv, die andere negativ geladen. Auf der negativ geladenen Seite herrscht ein Elektronenüberschuss

Die Ladezeit des Kondensators ist proportional zur Größe des Widerstands R und zur Kapazität C des Kondensators. Das Produkt von Widerstand und Kapazität nennt man die Zeitkonstante τ.

$$\tau = R \cdot C$$

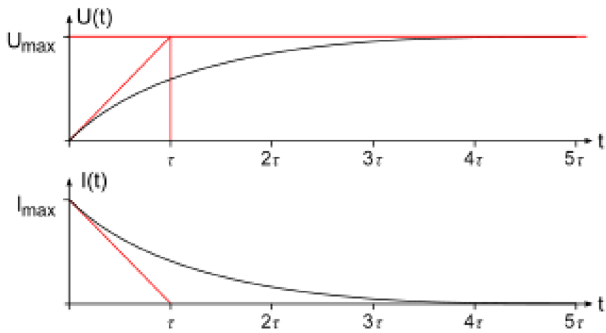
Theoretisch dauert es unendlich lange, bis $U(t)=U_{\max}$ ist. Für praktische Zwecke kann man als Ladezeit t_L verwenden, nach der der Kondensator näherungsweise als vollständig (mehr als 99 %) geladen angesehen werden kann.

$$t_L = 5 \cdot \tau$$

Die Zeitkonstante τ markiert zugleich den Zeitpunkt, an dem die am Beginn der Kurve angelegte Tangente den Endwert der Spannung erreicht. Nach dieser Zeit *wäre* der Kondensator auf den Endwert geladen, wenn man ihn mit dem konstanten Strom $I_{\max}$ laden könnte. Tatsächlich nimmt die Stromstärke bei konstanter angelegter Spannung jedoch mit der Zeit exponentiell ab.

Der maximale Strom $I_{\max}$ fließt zum Zeitpunkt t=0. Dieser ergibt sich durch den Widerstand R nach dem ohmschen Gesetz, wobei $U_{\max}$ die angelegte Spannung der Spannungsquelle ist:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$$



Verlauf von Spannung U und Strom I beim Ladevorgang,
$U_{\max}$ ist die Spannung der Spannungsquelle als maximal mögliche Spannung

Der Verlauf der Ladespannung $U(t)$ bzw. deren jeweilige zeitliche Größe wird mit der folgenden Gleichung beschrieben, wobei e die eulersche Zahl, t die Zeit nach Beginn der Ladung und τ die Zeitkonstante sind:

$$U(t) = U_{\max} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass der Kondensator zu Beginn ungeladen war: $U(t=0)=0$. Die Spannung ist also im ersten Moment null und steigt dann in Form einer Exponentialfunktion an. Nach der Zeit $t=\tau$ hat die Spannung etwa 63 % der angelegten Spannung $U_{\max}$ erreicht. Nach der Zeit $t=5\tau$ ist der Kondensator auf mehr als 99 % aufgeladen.

Der Verlauf der Stromstärke $I(t)$ bzw. deren jeweilige zeitliche Größe wird mit der folgenden Gleichung beschrieben:

$$I(t) = I_{\max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Hier beträgt der Strom im ersten Moment $I(t=0)=I_{\max}$ und nimmt dann in Form einer Exponentialfunktion wie beim Entladevorgang ab. Nach der Zeit $t=\tau$ beträgt der Strom nur noch etwa 37 % seines Anfangswertes und nach der Zeit $t=5\tau$ ist er auf weniger als 1 % abgefallen.

Differentialgleichung des Ladevorgangs

Für den Ladevorgang des Kondensators für eine ideale Spannungsquelle mit der Spannung E gilt:

$$Q(t) = EC \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Diese leitet sich wie folgt her Für die Stromstärke gilt:

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}(t)$$

Für die Spannung am ohmschen Widerstand gilt:

$$U_R = R \cdot I(t) = R \cdot \dot{Q}(t)$$

Für die Spannung am Kondensator gilt:

$$U_C = \frac{Q(t)}{C}$$

Für eine einfache Schaltung aus Kondensator und Ohmschem Widerstand gilt gemäß Maschensatz:

$$\begin{array}{rrcl} & U_C + U_R & = & E \\ \Leftrightarrow & \frac{Q(t)}{C} + R \cdot \dot{Q}(t) & = & E \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{RC} \cdot Q(t) + \dot{Q}(t) & = & \frac{E}{R} \end{array}$$

Diese Differentialgleichung löst man, indem man erst die homogene Gleichung löst, indem man vorerst $E/R = 0$ setzt:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t$$

Da $-\frac{1}{RC}$ konstant ist, gilt:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}t$$

Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\ln|Q(t)| - \ln|Q(t_0)| = -\frac{t-t_0}{RC}$$

Q_v ist die vorweggenommene Bezeichnung für die in den nächsten Schritten verwendete Methode Variation der Konstanten, $Q(t)$ ist die elektrische Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t, sie kann nicht negativ werden, t_0 ist der Zeitpunkt zu Beginn der Aufladung und hat den Wert 0 s; es folgt:

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q_v}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Durch Potenzieren zur Basis e erhält man:

$$\frac{Q(t)}{Q_v} = e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow Q(t) = Q_v \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Um jetzt die inhomogene Differentialgleichung lösen zu können, wenden wir die Methode Variation der Konstanten an, indem wir $Q_v(t)$ als zeitlich abhängig betrachten und so wie sie ist und differenziert in die Ausgangsgleichung einsetzen.

$$\dot{Q}(t) = \dot{Q}_v(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{Q_v(t)}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

einsetzen in:

$$\begin{aligned} \frac{E}{R} &= \frac{1}{RC} \cdot Q(t) + \dot{Q}(t) \\ &= \frac{Q_v(t)}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \dot{Q}_v(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{Q_v(t)}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= \dot{Q}_v(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

Das wird nach $\dot{Q}_v(t)$ umgestellt und integriert:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \dot{Q}_v(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t} \frac{E}{R} \cdot e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t \\ Q_v(t) - Q_v(t_0) &= \frac{E}{R} \cdot RC \left(e^{\frac{t}{RC}} - e^{\frac{t_0}{RC}}\right) \end{aligned}$$

Wie oben schon erwähnt, fängt das Aufladen beim Zeitpunkt $t_0 = 0$ an. Zu diesem Zeitpunkt ist die Ladung auf dem Kondensator $Q_v(t_0) = 0$:

$$\begin{aligned} Q_v(t) - 0 &= EC\left(e^{\frac{t}{RC}} - e^{\frac{0}{RC}}\right) \\ Q_v(t) &= EC \cdot \left(e^{\frac{t}{RC}} - 1\right) \end{aligned}$$

Das muss in die Lösung der DGL eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= Q_v \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\
&= EC \cdot \left(e^{\frac{t}{RC}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\
&= EC \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)
\end{aligned}
$$

Das ist die Gleichung wie sie oben steht. Wenn man $EC = Q_E$ als Wert eines theoretisch vollständig geladenen Kondensators wählt, wird aus der Gleichung:

$$Q(t) = Q_E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Analog dazu gilt für die Spannung U:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

und für die Stromstärke $I(t)$:

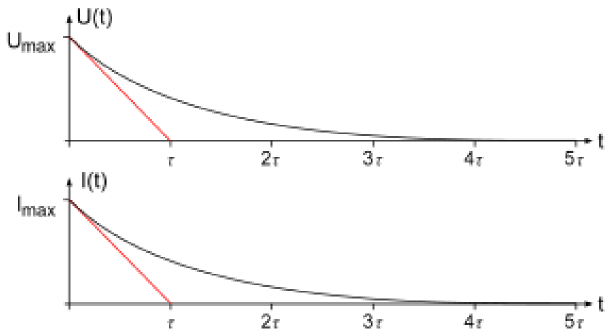
$$I(t) = \dot{Q}(t) = \left(\frac{EC}{RC} \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entladevorgang

Das Bild zeigt den Entladevorgang, wenn der Kondensator zu Beginn auf den Wert U_{max} geladen ist und über den Widerstand R entladen wird. Hier sind sowohl die Spannung als auch die Stromstärke zu Beginn am größten:

Für $t = 0$ gilt: $I_{\max} = \dfrac{U_{\max}}{R}$ und beträgt zu einem beliebigen Zeitpunkt danach

$$I(t) = \frac{U(t)}{R}$$



Verlauf von Spannung U und Strom I beim Entladevorgang,
U_{max} ist die Anfangsspannung

Die Spannung nimmt im Verlauf der Entladung mit der Zeit ab gemäß

$$U(t) = U_{\max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Der Strom, der mit der Spannung $U(t)$ über den Entladewiderstand R verknüpft ist, zeigt den entsprechenden Verlauf

$$I(t) = I_{\max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Der Entladestrom ist bei der vorgegebenen Zählpfeilrichtung negativ.

Differentialgleichung der Entladung

Für den Entladevorgang des Kondensators gilt:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Diese leitet sich wie beim Aufladevorgang her. Die gelöste Differentialgleichung lässt sich von dort entnehmen. Die Anfangsbedingungen sind lediglich andere und die Methode der Variation der Konstanten ist nicht erforderlich:

$$\ln|Q(t)| - \ln|Q(t_0)| = -\frac{t - t_0}{RC}$$

$Q(t)$ ist die elektrische Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t, sie kann nicht negativ werden, t_0 ist der Zeitpunkt zu Beginn der Entladung und hat den Wert 0 s. Hier gibt es keine Entladung, aber eine Anfangsladung Q_0; es folgt:

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Durch Potenzieren zur Basis e erhält man:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Analog dazu gilt für die Spannung U:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

und für die Stromstärke I:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

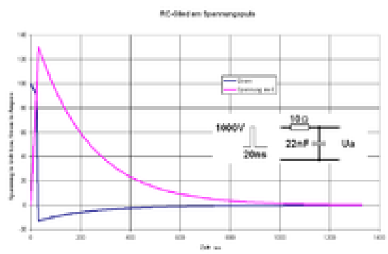
Impulsantwort

Die Impulsantwort beschreibt den Ausgangsspannungsverlauf auf eine diracimpulsförmige Eingangsspannung. Der Ausgangsspannungsverlauf wird durch deren Zeitableitung beschrieben:

$$\dot{U}(t) = \frac{dU}{dt} = \frac{U_q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dabei ist U_q die momentane Spannung am Widerstand, die eine Umladung des Kondensators bewirkt. Der Spannungsimpuls wird durch das RC-Glied integriert und hinterlässt eine Kondensatorladung, die sich anschließend in Form einer e-Funktion entlädt.

Die Spannungsanstiegsgeschwindigkeit $\frac{dU}{dt}$ (Volt pro Sekunde) ist eine wichtige Größe in der Elektronik und Leistungselektronik.



Verlauf von Ladestrom (schwarz) und Kondensatorspannung (rot) an einem RC-Glied an einem Spannungsimpuls

Periodische Signale

Die Filterwirkung wird insbesondere bei Rechtecksignalen deutlich; die Filterantwort setzt sich aus Segmenten des Lade- und Entladeverhaltens zusammen. Die Flankensteilheit wird geringer, dementsprechend fehlen im Frequenzspektrum hohe Frequenzen. RC-Glieder werden dementsprechend zur Entstörung und als Tiefpass eingesetzt.

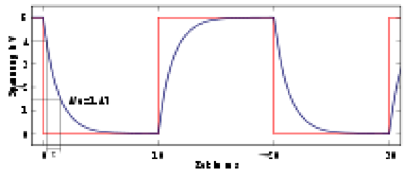
Die Flankensteilheit der Spannung am Kondensator bei einer Amplitude U_0 der Rechteck-Spannungsquelle sinkt vom unendlichen Wert der speisenden Rechteckspannung auf maximal

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_0}{RC} = \frac{U_0}{\tau}.$$

ab. Der maximale Ladestrom (Spitzenstrom, Pulsstrom I_p) beträgt

$$I_p = \frac{U_0}{R}.$$

Diesen Strom müssen zum Beispiel mit einem RC-Entstörglied beschaltete Schaltkontakte oder Halbleiterschalter aushalten können.



Zeitlicher Verlauf der Spannung (schwarz) über einem Kondensator, der periodisch über einen Widerstand aus einer idealen Rechteck-Spannungsquelle (rot) geladen und wieder entladen wird

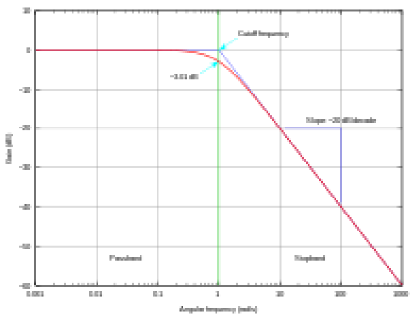
Verhalten im Frequenzbereich

Tiefpass

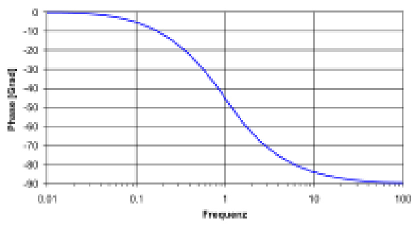
Widerstand und Kondensator bilden einen frequenzabhängigen Spannungsteiler, der auch eine Phasenverschiebung von maximal $\frac{\pi}{2}$ (90°) bewirkt. Die Impedanzen Z sind R bzw. $1/(\mathrm{j}\omega C)$. Für das RC-Glied gilt für eine harmonisch oszillierende Spannung der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$U_a = U_e \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

und somit für das Übertragungsverhalten, das als Quotient von Ausgangs- zur Eingangsspannung definiert ist:



Amplitudengang eines RC-Tiefpassfilters. Die Ordinate zeigt das Amplitudenverhältnis $|H|$ in Dezibel, die Abszisse die normierte Kreisfrequenz Ω in logarithmischer Darstellung.



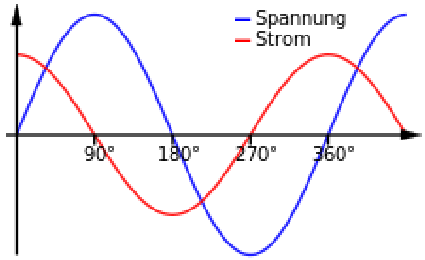
Phasenverschiebung als Funktion der normierten Frequenz Ω am RC-Glied.

$$H = \frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\Omega},$$

wobei die normierte Frequenz $\Omega = \omega/\omega_0$ sich aus der Division von Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und Grenz-Kreisfrequenz (Übergangsfrequenz, Eckfrequenz oder englisch *cutoff frequency*) $\omega_\mathrm{c} = 1/\tau = 1/(RC)$ ergibt. Daraus ergibt sich die Grenzfrequenz f_C, bei der Blindwiderstand und Widerstand den gleichen Wert annehmen, die Phasenverschiebung also $\frac{\pi}{4}$ (45°) und die Dämpfung etwa 3 dB beträgt:

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

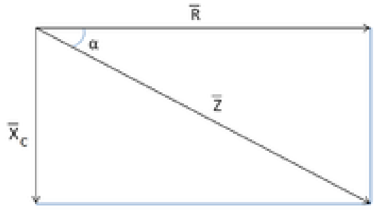
Für tiefe Frequenzen Ω << 1 ist H ungefähr 1, Ein- und Ausgangsspannung etwa gleich, weshalb man den Bereich auch engl. als *Passband* bezeichnet.
Für Frequenzen Ω >> 1 fällt H mit 20 dB pro Dekade = 6 dB pro Oktave ab. Der weggefilterte Bereich wird englisch mit *Stopband* bezeichnet.



Phasenverschiebung von 90° zwischen Strom und Spannung am Kondensator

Bei sehr tiefen Frequenzen, die deutlich kleiner als die Grenzfrequenz sind, fällt der Ladestrom des Kondensators nicht ins Gewicht und Eingangs- und Ausgangsspannung unterscheiden sich nur unmerklich. Die Phasenverschiebung beträgt annähernd 0°.

Steigt die Frequenz, dauert es – im Vergleich zur Schwingungsdauer – immer länger, bis der Kondensator auf die Eingangsspannung aufgeladen ist. Deshalb steigt die Phasenverschiebung.



Z,R,Xc

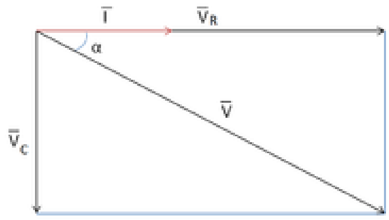
Bei sehr hoher Frequenz strebt diese dem Grenzwert von 90° zu, allerdings wird dann die Spannung am Kondensator auch unmessbar klein.

Hochpass

Die Verschaltung als Hochpass unterscheidet sich von der des Tiefpasses durch Vertauschung von R und C. Demgemäß gilt

$$U_a = U_e \cdot \frac{Z_R}{Z_C + Z_R}$$

und



V,Vr,Vc

$$H = \frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{j}\Omega}{1 + \mathrm{j}\Omega},$$

Der Amplitudengang ist gegenüber dem Tiefpass entlang Ω = 1 gespiegelt, hohe Frequenzen können nahezu ungedämpft passieren.

Beschreibung im Spektralbereich

Mit einer analogen Herleitung erhält man für den Tiefpass

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC},$$

eine Polstelle bei $s = -1/RC$.

Bei dem Hochpass

$$H(s) = \frac{sRC}{1 + sRC},$$

ergibt sich ebenfalls eine Polstelle bei $s = -1/RC$, zusätzlich eine Nullstelle im Ursprung. Das RC-Glied stellt damit einen Butterworth-Filter 1. Ordnung dar.

Weblinks

- RC-Glied Berechnung Übergangsfrequenz und Zeitkonstante
- Animation zum Auf- und Entladen des Kondensators

Abgerufen von „https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=RC-Glied&oldid=170788587“