Giới hạn của hàm số

Hai định nghĩa tương đương:

Định nghĩa 4

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.
Tương tự như vậy, hãy nêu các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Định nghĩa 5

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\}, x_n \neq x_0,$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ *thì* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$

Các tính chất của giới hạn

Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, nếu tồn tại, là duy nhất.

Các phép toán trên giới hạn

Nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ hữu hạn thì

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

e) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Định lý 2.1 (Tiêu chuẩn kẹp)

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *trong một lân cận nào đó của* x_0*, và tồn tại các giới hạn* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.
Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Ví dụ 2.1

Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0, \\ \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$.

Áp dụng $\lim\limits_{x \to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} B(x) \ln A(x)}$.

Vô cùng lớn - Vô cùng bé

Vô cùng bé

Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

Ví dụ 3.1

$f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, h(x) = x^{2017}$ *là các VCB khi* $x \to 0$.

Các tính chất

a) Tổng, hiệu, tích của hai VCB là một VCB.

b) Tuy nhiên, thương của hai VCB chưa chắc đã là một VCB, vì chúng thuộc dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

So sánh các VCB

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$.

a) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

b) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Ví dụ 3.2

a) $f(x) = x^a$ $(a > 0)$ *là VCB bậc cao hơn* $g(x) = x^b$ $(b > 0) \Leftrightarrow a > b$.

b) $\sin x \sim x$.

Quy tắc thay tương đương

Quy tắc thay tương đương

Nếu ta có các VCB tương đương $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Các VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x),\ (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

Ví dụ 3.3

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2 + x^3}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x + x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1 + \alpha x}.\sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x}$.

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Cho $\alpha(x), f(x), \beta(x), g(x)$ là các VCB khi $x \to a$. Nếu $\alpha(x) = o(f(x)), \beta(x) = o(g(x))$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) + \alpha(x)}{g(x) + \beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ví dụ 3.4

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\tan^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}.$

Vô cùng bé

Ví dụ 3.5 (Giữa kì, K61)

So sánh cặp vô cùng bé sau đây khi $x \to 0$

a) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 + x^3}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - 1.$

b) $\alpha(x) = \sqrt[5]{x^4 - x^5}, \quad \beta(x) = \ln(1 + \tan x).$

c) $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad \beta(x) = \sqrt{x + x^2}.$

d) $\alpha(x) = e^{x^2} - 1, \quad \beta(x) = x^2 + x^3.$

e) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x.$

Chú ý 3.1

KHÔNG thay tương đương với hiệu hai VCB, $\alpha(x) = \sin x - \tan x + x^3$.

a) *Thay tương đương* $\alpha(x) \sim x^3, (SAI),$

b) *Thực tế,* $\alpha(x) \sim \dfrac{x^3}{2}$ *(ĐÚNG).*

Vô cùng lớn

Vô cùng lớn

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

b) $f(x)$ là một VCL khi $x \to a \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là một VCB khi $x \to a$.

So sánh các VCL

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL khi $x \to a$.

a) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Vô cùng lớn

Quy tắc thay tương đương và ngắt bỏ VCL bậc thấp

a) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ là các VCL khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$.

b) Cho $\alpha(x), f(x), \beta(x), g(x)$ là các VCL khi $x \to a$. Nếu $\alpha(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$, $\beta(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+\alpha(x)}{g(x)+\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ví dụ 3.6

Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2^x}{x+3^x}.$$