



ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 5

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

MỤC TIÊU

- Giải thích về nghiệm và sự tồn tại nghiệm của phương trình
- Mô tả khái niệm, định lý về khoảng phân ly nghiệm của phương trình
- Trình bày về các phương pháp giải gần đúng phương trình:
 - Phương pháp chia đôi
 - Phương pháp lặp đơn
 - Phương pháp Newton
 - Phương pháp dây cung

NỘI DUNG

1. Nghiệm và khoảng phân ly nghiệm
2. Phương pháp chia đôi
3. Phương pháp lặp đơn
4. Phương pháp Newton (tiếp tuyến)
5. Phương pháp dây cung

1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

1. Nghiệm thực của phương trình một ẩn

Xét phương trình một ẩn:

$$f(x)=0 \quad (1)$$

Nghiệm thực của phương trình (1) là số thực α thỏa mãn $f(\alpha) = 0$

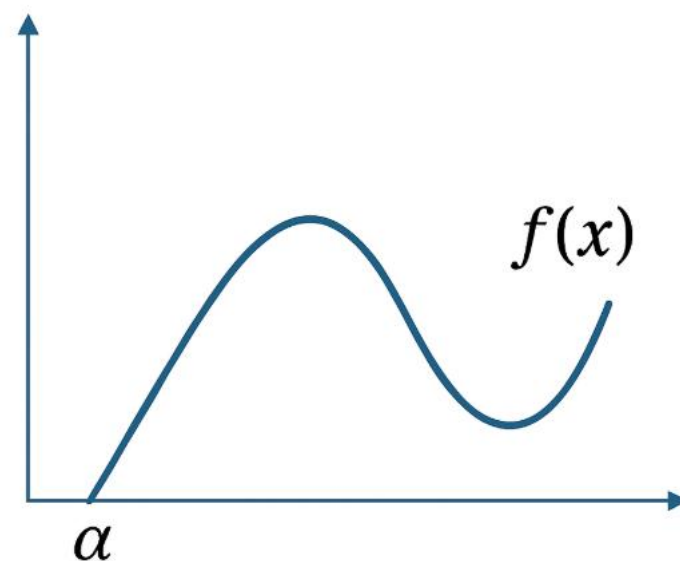
2. Ý nghĩa hình học của nghiệm

- Vẽ đồ thị của (1), cắt trục hoành

Tại M ($y_M=0$ và $x_M = \alpha$)

Khi đó: $f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha$ là nghiệm của phương trình



1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

3. Tìm nghiệm của phương trình bằng PP đồ thị

- **Trường hợp $f(x) = 0$ đơn giản**
 - Vẽ đồ thị $f(x)$
 - Nghiệm pt là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành \Rightarrow Số nghiệm, khoảng nghiệm
- **Trường hợp $f(x) = 0$ phức tạp**
 - Biến đổi $f(x) = 0$ thành phương trình $g(x) = h(x)$
 - Vẽ đồ thị hàm $g(x)$ và $h(x)$
 - Hoành độ giao điểm của hàm số $g(x), h(x)$ là nghiệm của pt \Rightarrow Số nghiệm, khoảng nghiệm

1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

4. Sự tồn tại nghiệm thực của phương trình

Ý nghĩa:

Có tồn tại nghiệm thực của phương trình hay không? (trước khi tìm nghiệm gần đúng)

Định lý:

Nếu có hai số thực a và b ($a < b$) sao cho $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu tức là $f(a) \cdot f(b) < 0$. Đồng thời $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì trên (a, b) có ít nhất một nghiệm thực của phương trình (1)

NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

4. Khoảng phân ly nghiệm (khoảng cách ly nghiệm/ khoảng tách nghiệm)

Định nghĩa 1:

Khoảng (a, b) được gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1) nếu nó chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó

Định lý 1:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, đơn điệu trên khoảng (a, b) và $f(a).f(b) < 0$ thì (a, b) là một khoảng phân ly nghiệm của (1)

NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

Định lý 2:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) , $f'(x)$ không đổi dấu và $f(a).f(b) < 0$ thì (a, b) là một khoảng phân ly nghiệm của (1)

Quy tắc:

Muốn tìm khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1) cần:

- Nghiên cứu sự biến thiên của hàm số
- Áp dụng định lý 2

1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

5. Ví dụ

Cho phương trình:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

- Chứng tỏ phương trình cho có nghiệm thực
- Tìm khoảng phân ly nghiệm

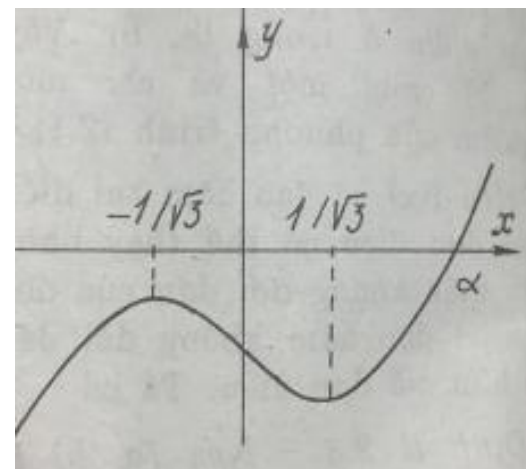
1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

HD: $f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0$. Khi đó $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lập bảng BT

x	$-\infty$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$+\infty$
		+	-	+



Đồ thị cắt trục hoành tại duy nhất điểm α

$$f(1) < 0; f(2) > 0.$$

Khoảng $(1,2)$ chứa nghiệm của phương trình và là nghiệm duy nhất

1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

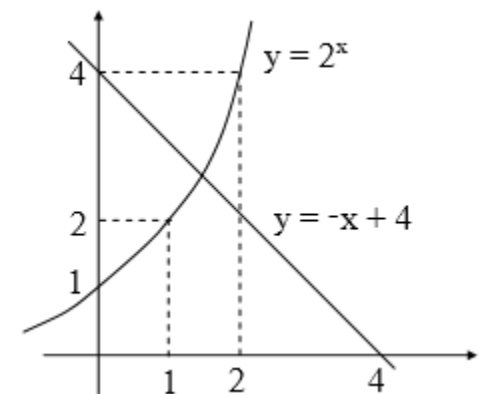
■ Ví dụ

Tìm khoảng phân ly nghiệm cho phương trình:

$$2^x + x - 4 = 0$$

HD:

1. Biến đổi pt cho về dạng : $2^x = -x + 4$
2. Vẽ đồ thị hai hàm số
3. Chỉ ra (1,2) là khoảng phân ly nghiệm



2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

1. Mô tả:

- Xét pt một ẩn $f(x) = 0$; giả sử có nghiệm α phân ly trong (a, b)
- Lấy $\bar{\alpha} \in (a, b)$ làm giá trị gần đúng của α
- $|\alpha - \bar{\alpha}| < b - a$ là sai số tuyệt đối
- Để sai số nhỏ dần ta tìm cách làm nhỏ dần khoảng phân ly nghiệm bằng cách chia đôi liên tiếp khoảng phân ly nghiệm đã tìm ra

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Phương pháp

1. Chia khoảng (a, b) với điểm chia $c = \frac{(a+b)}{2}$.

Ta được hai khoảng phân ly là: (a, c) hoặc (c, b)

2. Tính $f(c)$

- Nếu $f(c) = 0$ thì c chính là nghiệm α

- Nếu $f(c) \neq 0$ ta tính:

- ✓ Nếu $f(c) \cdot f(a) < 0$ khoảng phân ly nghiệm là (a, c)

- ✓ Nếu $f(c) \cdot f(a) > 0$ khoảng phân ly nghiệm là (c, b)

3. Ta thu được khoảng phân ly thu nhỏ của (a, b) là (a, c) hoặc (c, b) .

Ta kí hiệu khoảng đó là $(a_1, b_1) \in (a, b)$ và dài bằng nửa khoảng (a, b) .

Tức là: $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

4. Tiếp tục quá trình trên ta thu được khoảng mới (a_2, b_2) và

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2} (b - a)$$

5. Lặp lại quá trình này đến bước n ta thu được khoảng (a_n, b_n) và

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a)$$

Suy ra: $a_n \leq \alpha \leq b_n$

6. Có thể lấy a_n là giá trị gần đúng của α

$$\text{Sai số: } |\alpha - a_n| \leq b_n - a_n \leq \frac{(b-a)}{2^n}$$

Cũng có thể lấy b_n là giá trị gần đúng của α

$$\text{Sai số: } |\alpha - b_n| \leq b_n - a_n \leq \frac{(b-a)}{2^n}$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì $a_n \rightarrow \alpha$, $b_n \rightarrow \alpha$. Phương pháp hội tụ

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của $f(x) = x^3 - x - 1$

- Khoảng phân ly nghiệm $(1,2)$ vì $f(1) < 0 ; f(2) > 0$
- Chia đôi khoảng $(1,2)$ tại điểm chia bằng $\frac{3}{2}$
- Tính $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ trái dấu với $f(1)$ nên nghiệm $\in (1, \frac{3}{2})$
- Chia đôi khoảng $(1, \frac{3}{2})$ tại điểm chia bằng $\frac{5}{4}$
- Tính $f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$ cùng dấu với $f(1)$ nên nghiệm $\in (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$
- Chia đôi khoảng $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ tại điểm chia bằng $\frac{11}{8}$
- Tính $f\left(\frac{11}{8}\right) > 0$ trái dấu với $f\left(\frac{5}{4}\right)$ nên nghiệm $\in (\frac{5}{4}, \frac{11}{8})$

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

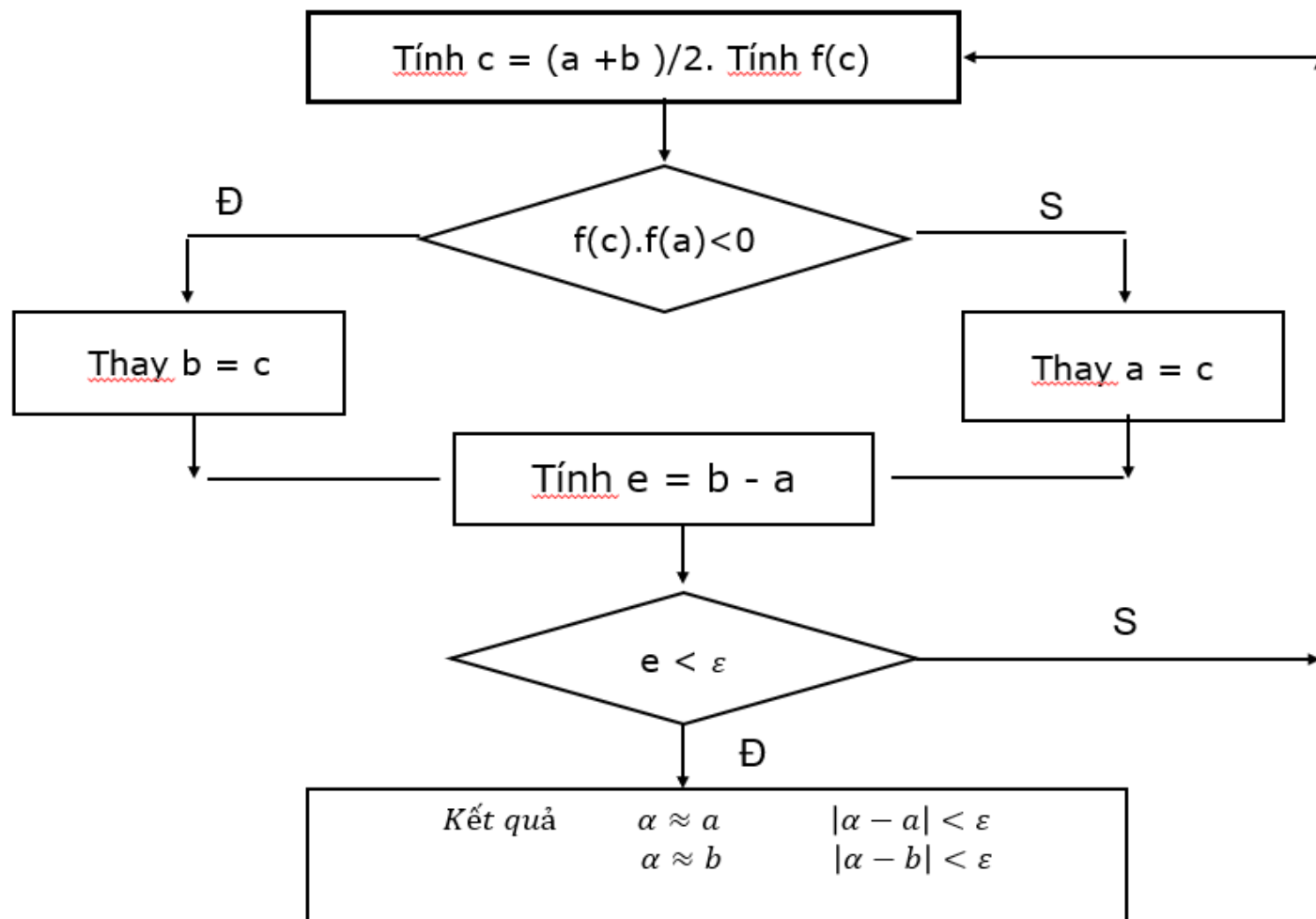
- Chia đôi khoảng $(\frac{5}{4}, \frac{11}{8})$ tại điểm chia bằng $\frac{21}{16}$
- Tính $f\left(\frac{21}{16}\right) < 0$ cùng dấu với $f\left(\frac{5}{4}\right)$ nên nghiệm $\in (\frac{21}{16}, \frac{11}{8})$
- Chia đôi khoảng $(\frac{21}{16}, \frac{11}{8})$ tại điểm chia bằng $\frac{43}{32}$
- Tính $f\left(\frac{43}{32}\right) > 0$ trái dấu với $f\left(\frac{21}{16}\right)$ nên nghiệm $\in (\frac{21}{16}, \frac{43}{32})$
- Dừng quá trình chia đôi lấy $\frac{21}{16} = 1,3125$ hoặc $\frac{43}{32} = 1,34375$ làm giá trị gần đúng của nghiệm
- Đánh giá sai số: Không vượt quá $\frac{2-1}{2^5} = 0,03125$

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Các bước thực hiện phương pháp chia đôi

1. Cho phương trình $f(x) = 0$
2. Ấn định sai số cho phép ε
3. Xác định khoảng phân ly nghiệm (a,b)
4. Thực hiện các bước trong sơ đồ

2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI



2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Bài tập:

Giải phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng phương pháp chia đôi

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

1. Mô tả:

- Xét pt một ẩn $f(x) = 0$ (1) với giả thiết có nghiệm α phân ly trong (a, b)
- Biến đổi (1) thành dạng $x = \varphi(x)$ (2)
- Chọn điểm $x_0 \in (a, b)$ làm xấp xỉ đầu
- Tính dần dãy x_n theo quy tắc:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \text{ với } n=1, 2, 3, \dots (3)$$

- Quy trình được lặp đi lặp lại \Rightarrow PP lặp
- Hàm $\varphi(x)$ gọi là hàm lặp

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

2. Sự hội tụ

Định nghĩa:

- Nếu $x_n \rightarrow \alpha$ khi $n \rightarrow \infty$ ta nói PP lặp đưa ra trong công thức (2)(3) hội tụ
- Nếu PP lặp hội tụ thì x_n càng gần tới nghiệm đúng α khi n lớn
- Nếu PP lặp không hội tụ thì x_n ở rất xa nghiệm α

KL: Chỉ có lặp hội tụ mới có giá trị

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Kiểm tra sự hội tụ

Định lý:

Xét CT lặp (3) và giả sử

1. Khoảng (a, b) là khoảng phân ly nghiệm của (2)/(1)
2. Mọi x_n tính theo (3) đều thuộc khoảng (a, b)
3. Hàm $\varphi(x)$ tm:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1; \quad a < x < b \text{ ở đó, } q \text{ là hằng số}$$

=> Khi đó PP lặp (2)(3) hội tụ

3. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

3. Đánh giá sai số:

Dựa trên việc CM định lý cho công thức đánh giá sai số:

1. $|\alpha - x_n(x)| \leq q^n(b - a)$ (sai số lớn)

2. $|\alpha - x_n(x)| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|$

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

3. Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - x - 1$ (*)

Bằng phương pháp lặp đơn

HD:

- Biến đổi (*) thành: $x = x^3 - 1$
- Đặt $\varphi(x) = x^3 - 1$
- $\varphi'(x) = 3x^2 \geq 3 \forall x \in (1, 2)$
- PP lặp khó hội tụ

3. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

3. Ví dụ (...)

- Biến đổi (*) thành: $x^3 = x + 1$
- Đặt $\varphi(x) = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$
- $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
- $0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3} < 1 \forall x \in (1, 2)$
- Thỏa mãn đk của ĐL

3. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

3. Ví dụ (...)

- Tìm nghiệm:
- Chọn $x_0 = 1$ và sử dụng công thức (3)
- $x_1 = 1.25992105$ với $|\alpha - x_1| \leq 0.13$
- $x_2 = 1.312293837$ với $|\alpha - x_2| \leq 0.027$
- $x_3 = 1.322353819$ với $|\alpha - x_3| \leq 0.05$
- $x_4 = 1.324268745$ với $|\alpha - x_4| \leq 0.00096$
- $x_5 = 1.324632625$ với $|\alpha - x_5| \leq 0.000182$

3. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

Quy tròn đến 4 chữ số:

- $\alpha - 1.3246 = \alpha - x_5 + x_5 - 1.3246$
- $|\alpha - 1.3246| \leq |\alpha - x_5| + |x_5 - 1.3246|$
- $|\alpha - 1.3246| \leq 0.000182 + 0.0003265$
- $|\alpha - 1.3246| \leq 0.00025$

Vậy nghiệm $\alpha = 1.3246 \pm 0.00025$

Nx: PP này hội tụ nhanh hơn PP chia đôi

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Sai số:

Trong thực tế ta dừng quá trình tính toán khi:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \text{sai số cho phép } \varepsilon$$

3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Tóm tắt:

1. Cho phương trình $f(x) = 0$
2. Ấn định sai số ε
3. Xác định khoảng phân ly nghiệm
4. Tìm hàm lặp hội tụ $\varphi(x)$
5. Chọn giá trị xấp xỉ đầu x_0
6. Tính $x_n = \varphi(x_{n-1})$ với $n=1, 2, 3$ cho tới khi
 $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ thì dừng
7. Kết quả: $\alpha \approx x_n$ với sai số:

$$|\alpha - x_n(x)| \leq \frac{q}{1-q} \varepsilon$$

Trong đó q là số dương <1 thỏa mãn $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ tại mọi x thuộc

3. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

VD: Giải phương trình: $x - \cos x = 0$

- Tìm khoảng phân ly nghiệm $(0, 1)$
- Biến đổi: $x = \cos x$
- Đặt $\varphi(x) = \cos x$
- $\varphi'(x) = -\sin x$
- Đánh giá: $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$ với $x \in (0, 1)$

ở đó q chọn là $\sin 1$

- Dãy hội tụ
- Chọn $x_0 = 0$

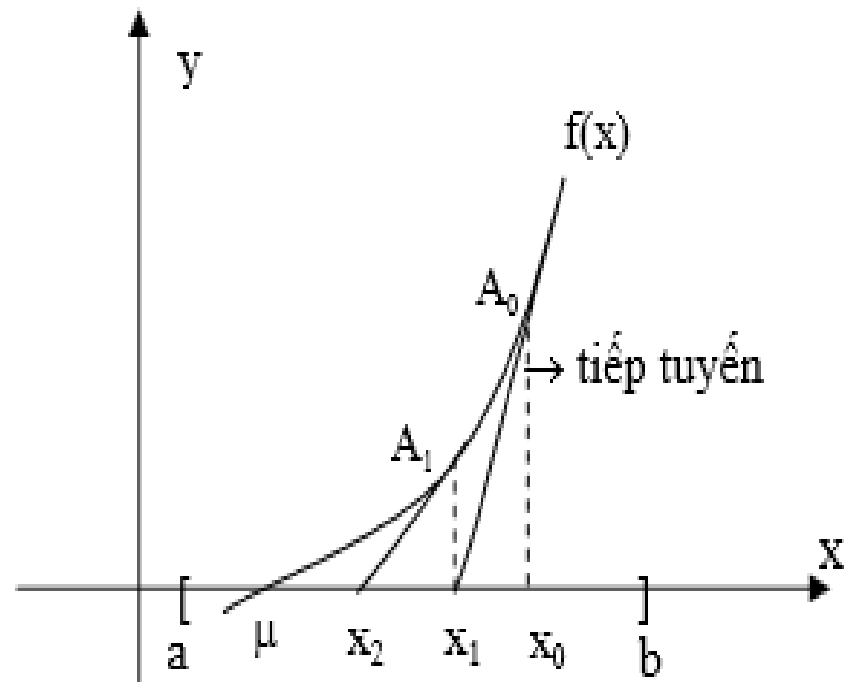
4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

1. Ý tưởng

- Chọn $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a, b)
- Tiếp tuyến tại $A_0 (x_0, f(x_0))$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_1
- Tiếp tuyến tại $A_1 (x_1, f(x_1))$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2
-
- Tiếp tuyến tại $A_k (x_k, f(x_k))$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_k
- Cứ tiếp tục quá trình trên ta có thể tiến dần đến nghiệm μ của phương trình.

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

2. Ý nghĩa hình học



4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

3. Xây dựng công thức lặp:

Phương trình tiếp tuyến tại $A_k (x_k, f(x_k))$

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Tiếp tuyến cắt trục x tại điểm có tọa độ $(x_{k+1}, 0)$

$$\text{Do vậy: } 0 - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Từ đó ta được:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (5)$$

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

4. Sự hội tụ và sai số

Điều kiện hội tụ Furie:

Giả sử $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1). Giả sử rằng:

- f có đạo hàm f' ;
- f, f', f'' liên tục trên $[a, b]$
- f', f'' không đổi dấu trên (a, b)

Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hoặc b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f'' . Khi đó x_n tính theo công thức (5) hội tụ đến nghiệm khi $n \rightarrow \infty$

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

4. Sự hội tụ và sai số

Công thức tính sai số:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \quad (6)$$

$$\text{Với } 0 \leq m \leq |f'(x)|, a \leq x \leq b \quad (7)$$

Chú ý: Thực tế ta dừng quá trình tính sai số khi

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

5. Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

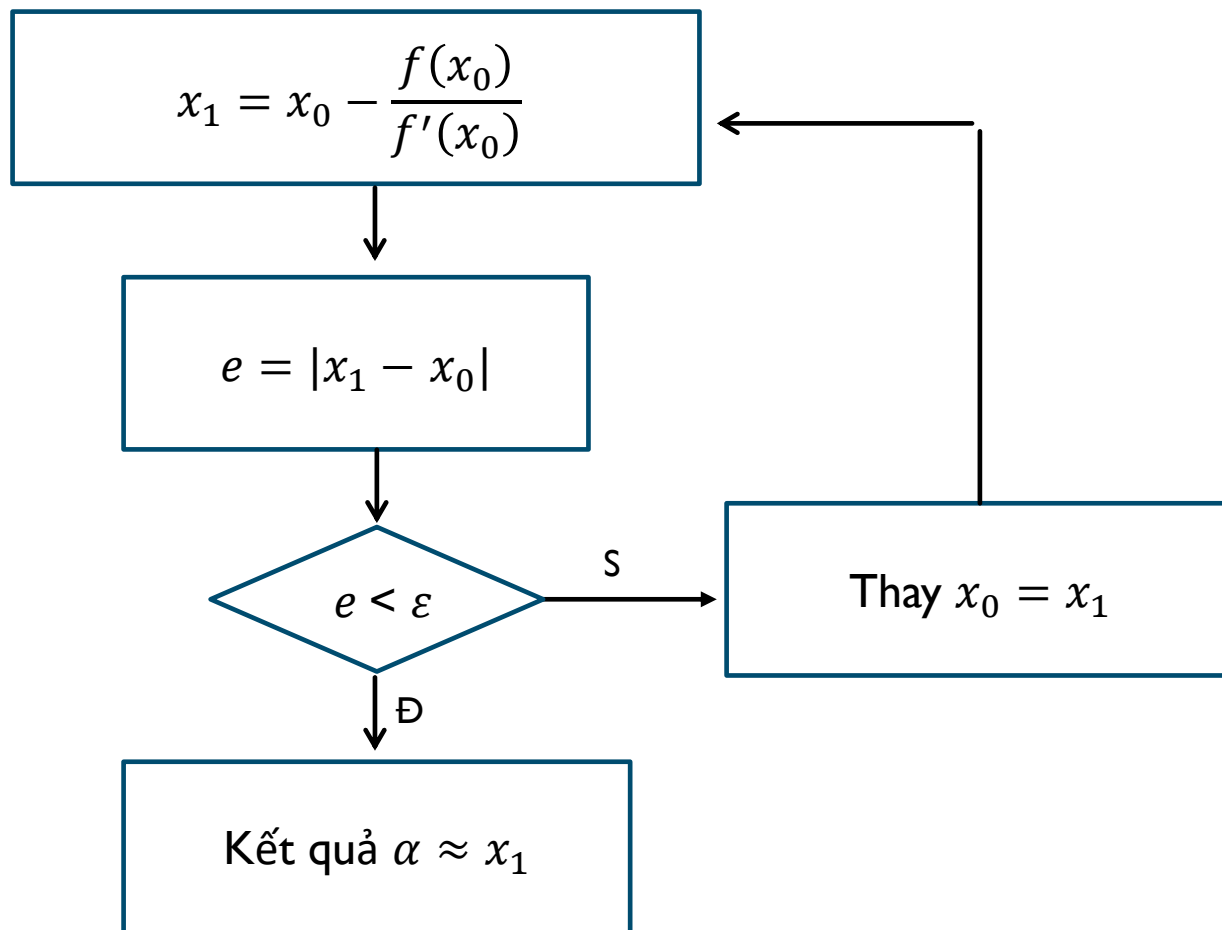
- Khoảng phân ly nghiệm $[1, 2]$
- $f' = 3x^2 - 1 > 0$ với x thuộc khoảng phân ly nghiệm
- $f'' = 6x > 0$ với x thuộc khoảng phân ly nghiệm
- Chọn x_0 sao cho $f''(x_0)$ cùng dấu với $f(x_0)$
- Chọn $x_0 = 2$ vì $f(2) > 0$ và $f''(2) > 0$
- Áp dụng CT (5) ta có bảng sau:

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

n	x_n
0	2
1	1.5454
2	1.3596
3	1.3258
4	1.3247
5	1.3247

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

Sơ đồ



4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

Bài tập:

Tìm nghiệm phương trình sau bằng Phương pháp tiếp tuyến

$$f(x) = x^3 + x - 5$$

Gợi ý: Khoảng phân ly : $[1,2]$

Bài tập : Tính $\sqrt{2}$ bằng cách giải phương trình sau:

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Gợi ý: Khoảng phân ly $[1,2]$

5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

1. Mô tả

- Giả sử (a, b) là khoảng phân ly nghiệm của $f(x) = 0$.
- Gọi A, B là 2 điểm trên đồ thị $f(x)$ có hoành độ tương ứng là a, b .
- Phương trình đường thẳng qua 2 điểm $A(a, f(a)); B(b, f(b))$ có dạng:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

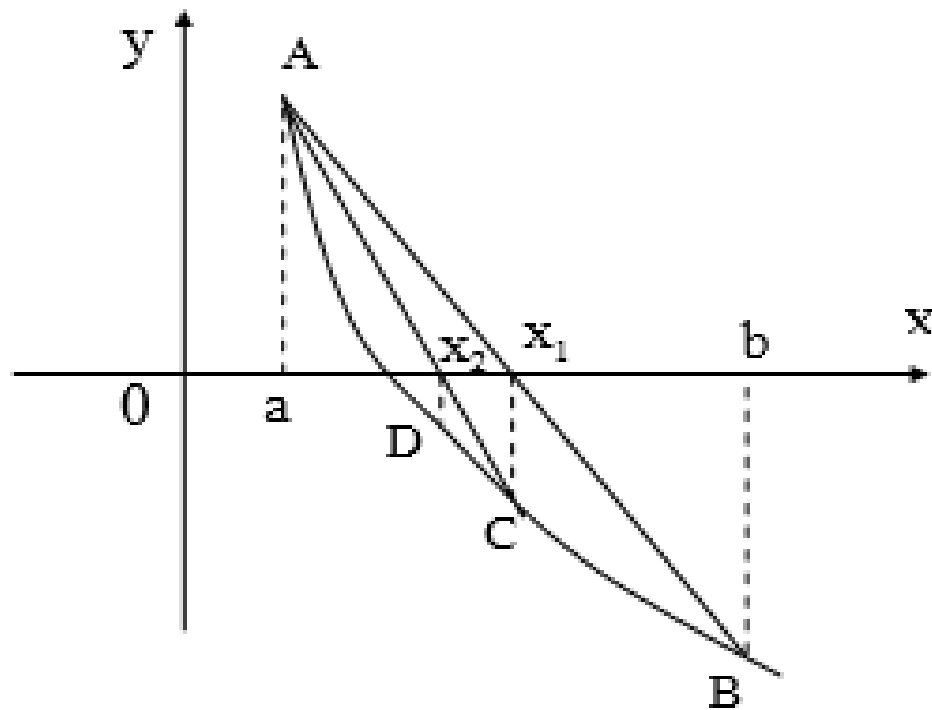
- Dây cung AB cắt trục Ox tại điểm có tọa độ $(x_1, 0)$
- Do đó: $\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$
- Suy ra: $x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$

5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

- Nếu $f(a).f(x_1) < 0$ ta thay $b = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1)
- Nếu $f(b).f(x_1) < 0$ ta thay $a = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b)
- Tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng nghiệm mới ta được giá trị x_2 .
- Lại tiếp tục như thế ta nhận được các giá trị $x_3, x_4 \dots$ càng tiến gần với giá trị nghiệm phương trình.

5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

2. Ý nghĩa hình học



5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

VD: Tìm nghiệm phương trình sau bằng PP dây cung:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

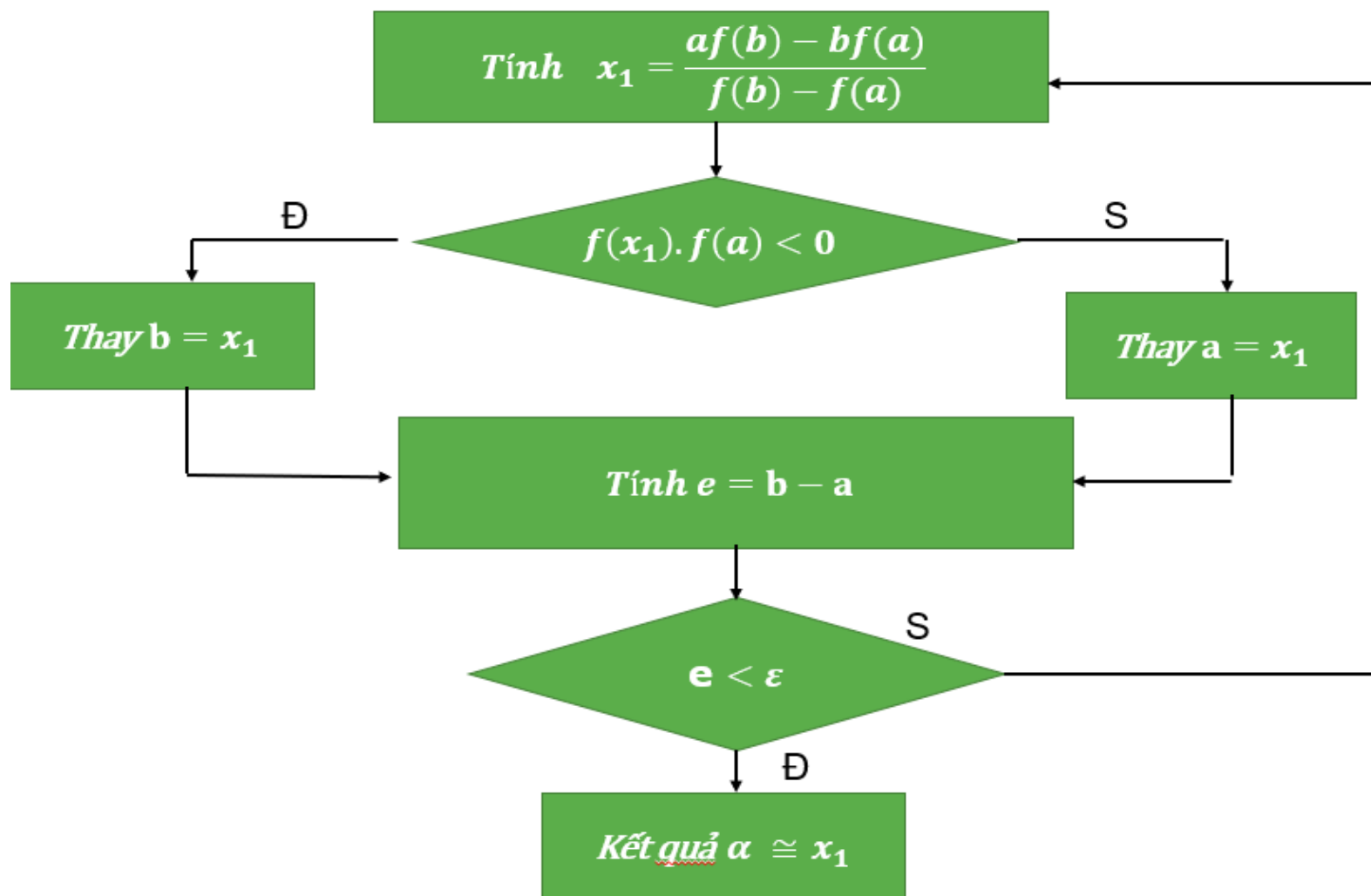
- Khoảng phân ly nghiệm (1,2)
- $f(a) = -1 < 0$
- $f(b) = 5 > 0$
- $x_1 = 1.167$
- $f(x_1) = -0.58 < 0 \Rightarrow$ Khoảng phân ly nghiệm mới là (1.167, 2)
- Áp dụng công thức nghiệm đối với $a=1.167$ và $b=2$ ta được $x_2=1.253$
- Tiếp tục quá trình này ta thu được nghiệm gần đúng của phương trình

5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

Sơ đồ tóm tắt phương pháp dây cung

1. Cho phương trình $f(x) = 0$
2. Ấn định sai số ε
3. Xác định khoảng phân ly nghiệm
4. Sử dụng sơ đồ sau:

SƠ ĐỒ TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG



5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

Ví dụ:

Tìm nghiệm phương trình sau bằng PP dây cung:

$$f(x) = x^3 + x - 5$$

- Khoảng phân ly nghiệm (1, 2)

- Bảng kết quả

$$f(1)=-3; f(2)=5$$

- KL: Nghiệm của
phương trình

a	b	x	f(x)
1	2	1.375	-1.02539063
1.375	2	1.4813614	-0.26789214
1.481361	2	1.5077357	-0.06477823
1.507736	2	1.514032	-0.01536297
1.514032	2	1.5155206	-0.00362754
1.514032	2	1.5143843	-0.01258747

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Tìm được khoảng phân ly nghiệm của phương trình
- Xem xét điều kiện hội tụ của nghiệm
- Sử dụng các phương pháp: chia đôi, lặp, tiếp tuyến, dây cung để giải phương trình

BÀI TẬP

Cho phương trình: $x^4 - 3x + 1 = 0$

1. Kiểm tra khoảng $(1, 2)$ hoặc $(0, 1)$ có là phân ly nghiệm
2. Giải phương trình với độ chính xác 10^{-2} bằng:
 - a. Phương pháp dây cung
 - b. Phương pháp tiếp tuyến
3. Đưa ra nhận xét sau khi thực hiện hai phương pháp

BÀI TẬP

Cho phương trình: $x^3 + 3x^2 + 5 = 0$

1. Kiểm tra khoảng $[-4, -3]$ có là phân ly nghiệm
2. Giải phương trình với độ chính xác 10^{-2} bằng:
 - a. Phương pháp dây cung
 - b. Phương pháp tiếp tuyến

BÀI TẬP

Cho phương trình: $2^x - 4x = 0$

1. Kiểm tra khoảng $[0,1]$ có là phân ly nghiệm
2. Giải phương trình với độ chính xác 10^{-5} bằng phương pháp tiếp tuyến