ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 4

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

VÀ TÍCH PHÂN

MỤC TIÊU

- Trình bày về các công thức tính gần đúng đạo hàm
- Giải thích phương pháp tính gần đúng tích phân xác định

NỘI DUNG

1. Tính gần đúng đạo hàm

2. Tính gần đúng tích phân xác định bằng các công thức:

   - Công thức hình thang
   - Công thức Simpson

1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

1. Áp dụng đa thức nội suy

Phương pháp: Để tính đạo hàm của $f(x)$ tại x tức là $f'(x)$ ta có thể thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy $p(x)$ rồi tính đạo hàm của đa thức nội suy. Lấy $p'(x)$ là giá trị gần đúng của $f'(x)$

- VD: Xét hàm số cho ở bảng: Chương 3_Noi suy.pptx

- Nội suy ta được đa thức:

- Vậy $f'(x)$= $p'(x)$

1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Ví dụ

Cho bảng hàm số mô tả bằng bảng dữ liệu sau

Hãy tính gần đúng đạo hàm cấp 1 của hàm số tại x=1.1 bằng cách:

- Lập đa thức nội suy Newton.
- Lấy đạo hàm đa thức đó để tìm f′(1.1).

x	f(x)
1.0	2.7183
1.1	3.0042
1.2	3.3201
1.3	3.6690

1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

2. Sử dụng công thức khai triển Taylor:

- Công thức khai triển Taylor

$$\boldsymbol{f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(c)}$$

Trong đó : $\boldsymbol{c = (\theta h)}$; $\boldsymbol{0 < \theta < 1}$

- Khi $|h|$ bé thì các số hạng cuối ở vế phải bé và ta có thể bỏ qua nó
- Khi đó: $\boldsymbol{f(x+h) - f(x) \approx h.f'(x)}$
- Vậy có: $\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Ví dụ:

Xét hàm số $\mathrm{f(x)} = sin(x)$ cho bởi bảng:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
sinx	**0.09983**	**0.19867**	**0.29552**	**0.38942**

Tính đạo hàm của hàm số $\mathrm{f}(x)$ với x=0.2

Áp dụng công thức khai triển Taylo

$$\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

$$\boldsymbol{sin'(x=0.2) \approx \frac{f(0.2+0.1)-f(0.2)}{0.1}} = \frac{0.29552-0.19867}{0.1} = 0.9685$$

Đối chiếu: $\boldsymbol{sin'}(\mathrm{x}) = \cos(\mathrm{x})$. Tại x=0.2, cos(0.2)=0.98007

BÀI TẬP 1

Cho bảng số liệu sau:

x	0	1	2
y	-1	3	9

Tính đạo hàm của hàm số cho bởi bảng dữ liệu y tại x=2

a. (Sử dụng nội suy đa thức bằng pp bình phương bé nhất với dạng hàm số bậc 2)

b. Sử dụng phương pháp chuỗi khai triển Taylor

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Giới thiệu

- Xét tích phân: $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$
- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có nguyên hàm $\mathrm{F}(x)$ thì công thức Newton – Lepnit có dạng:

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Nếu không tìm được nguyên hàm $\mathrm{F}(x)$ của $f(x)$ thì ta phải tính gần đúng tích phân I
- Ý tưởng: thay hàm $f(x)$ bằng đa thức nội suy và sử dụng một trong hai công thức:

- Công thức hình thang
- Công thức Simpson

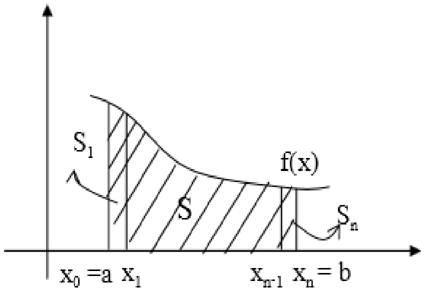
2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2. Công thức hình thang

a. Mô tả

- Chia $[a, b]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



- $x_i = a + ih; \quad h = \frac{(b-a)}{n} \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, n$
- Đặt $y_i = f(x_i)$
- Ta có $\int_a^b f dx = \int_{x_0}^{x_1} f dx + \int_{x_1}^{x_2} f dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f dx$ (1)
- Ý nghĩa hình học của phương pháp:

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

- Để tính các tích phân ở vế phải ta thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy bậc nhất $p_1(x)$
- $\int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx$
- Đổi biến: Đặt $x = x_0 + ht$ thì $dx = hdt$;

  tương ứng x_0 là t=0 và x_1 là t=1
- $\int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = h \int_0^1 (y_0 + t\Delta y_0) dt$

$$= h\left(y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0\right) với\ t =_0^1$$

$$= \ h\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right) = h\frac{y_0 + y_1}{2}$$

Vậy: $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h\frac{y_0 + y_1}{2}$

Tương tự ta có: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = h\frac{y_1 + y_2}{2}$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Với tích phân thứ i+1 ta có:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = h\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$$

- Vậy

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2)+..+ (y_{n-1} + y_n)]$$

Tức là:

I=$\int_a^b f(x)dx \approx I_T$, trong đó

$I_T = h\ [\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 +\ldots +y_{n-1}]$, với $h = \frac{b-a}{n}$

(Công thức hình thang)

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

b. Đánh giá sai số

$$|I - I_T| \leq \frac{M}{12} h^2 (b - a)$$

$$M = max|f''(x)|, a \leq x \leq b \qquad (*)$$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

c. Ví dụ

- Tính $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằn công thức hình thang
- Chia đoạn [0,1] thành 10 đoạn con bằng nhau, h=0.1
- Kết quả mô tả như sau:
- Đối chiếu kết quả chính xác là $\frac{\pi}{4}$

x	f(x)
0	$f(x_0)=y_0$
0.1	$f(x_1)=y_1$
0.2	
0.3	
0.4	
….	
1.0	$f(x_{10})=y_{10}$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

d. Các bước thực hiện

1. Cho tích phân $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$
2. Xác định số khoảng chia n
3. Chia đoạn [a, b] thành n đoạn bằng nhau
4. Tính $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = \mathrm{a} + \mathrm{ih}$; $y_i = f(x_i)$
5. Tính $I_T = h\,[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}]$
6. I cần tìm xấp xỉ I_T với sai số mô tả ở (*)

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3. Công thức Simpson

a. Mô tả

- Chia $[a, b]$ thành 2n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

- $x_i = a + ih; \quad h = \frac{(b-a)}{2n} \quad ; i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$
- Đặt $y_i = f(x_i)$
- Ta có $\int_a^b f dx = \int_{x_0}^{x_2} f dx + \int_{x_2}^{x_4} f dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f dx$ (2)
- Để tính các tích phân ở vế phải ta thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy bậc hai $p_2(x)$

$$\int_{x_0}^{x_2} f dx = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx$$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

- Đổi biến: Đặt $x = x_0 + ht$ thì $dx = hdt$;

  tương ứng x_0 là t=0 và x_1 là t=2

- $\int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = h\int_0^2 (y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0)dt$

$$= h\left(y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Delta^2 y_0\right) với\ t =_0^2$$

$$= h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)\Delta^2 y_0\right)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

  Tương tự ta có: $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2})$

- Thay vào (2) ta được: $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + y_2 + 4y_3 + y_4$+..+ $(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})]$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Vậy I=$\int_a^b f(x)dx \approx I_S$, trong đó

$$I_S = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]$$

Với $h = \frac{b-a}{2n}$

(Công thức Simpson)

b. Sai số

$$|I - I_S| \le \frac{M}{180} h^4 (b - a)$$

$$M = max\left|f^{(4)}(x)\right|, a \le x \le b \qquad (**)$$

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

c. Các bước thực hiện

1. Cho tích phân $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$
2. Xác định số khoảng chia 2n
3. Chia đoạn [a, b] thành 2n đoạn bằng nhau
4. Tính $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2n}}$; $\boldsymbol{x_i} = \mathbf{a} + \mathbf{ih}$; $\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$
5. Tính $I_S = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})+$
   $2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]$
6. Tích phân I cần tìm xấp xỉ với I_S , sai số mô tả ở (**)

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

d. Ví dụ

- Tính $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng công thức Simpson

  (số điểm chia là 10=2 x5)

- Đối chiếu với kết quả của Công thức hình thang

BÀI TẬP

- Dùng công thức hình thang tính gần đúng

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x} dx$$

- Với 2 đoạn chia
- Với 4 đoạn chia
- Với 10 đoạn chia

BÀI TẬP

Dùng công thức Simson tính gần đúng tích phân

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{x-1} dx$$

- Với 2 điểm chia
- Với 10 điểm chia

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Sử dụng công thức khai triển Taylor tính đạo hàm
- Sử dụng các công thức:
  - Công thức hình thang
  - Công thức Simpson

 để tính tích phân xác định