ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 2

NỘI SUY ĐA THỨC

MỤC TIÊU

- Giới thiệu về bài toán nội suy và sự duy nhất của đa thức nội suy
- Nội suy đa thức bằng công thức Lagrange
- Nội suy đa thức bằng công thức Newton

NỘI DUNG

1. Bài toán nội suy
2. Nội suy đa thức
3. Đa thức nội suy Lagrange
4. Đa thức nội suy Newton

BÀI TOÁN NỘI SUY

- **Mục đích:** Phục hồi hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị của x trên đoạn $[a, b]$ mà chỉ biết một số hữu hạn các điểm rời rạc của đoạn đó

- Các giá trị được cung cấp qua thực nghiệm hoặc tính toán

- **Bài toán:** Trên đoạn $[a, b]$, cho một lưới các điểm chia x_i,

  $i = 0, 1, 2, \dots, n \; sao \; cho \; a \leq x_0, x_{,1}, x_{2,\dots,} x_n \leq b.$

- Tại các nút x_i cho giá trị của hàm số là $y_i = f(x_i)$ mô tả như sau:

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

NỘI SUY ĐA THỨC

1. **Bài toán:**

- Hãy xây dựng đa thức bậc n:

$$\boldsymbol{p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0} \quad (1)$$

  sao cho: $p_n(x)$ trùng với y_i tại các nút x_i

- Đa thức $\boldsymbol{p_n(x)}$ gọi là đa thức nội suy của hàm $\boldsymbol{f(x)}$
- Lý do chọn đa thức để nội suy hàm $f(x)$ vì đa thức là loại hàm đơn giản, luôn có đạo hàm, nguyên hàm và tính giá trị đơn giản

NỘI SUY ĐA THỨC

2. Sự duy nhất của đa thức nội suy

- *Định lý*:

Đa thức nội suy $p_n(x)$ của hàm số $f(x)$ định nghĩa ở trên nếu có thì duy nhất

ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

- Gọi $l_i(x)$ là:
- $\boldsymbol{l_i(x)} = \dfrac{(\boldsymbol{x-x_0})\ldots(\boldsymbol{x-x_{i-1}})(\boldsymbol{x-x_{i+1}})\ldots(\boldsymbol{x-x_n})}{(\boldsymbol{x_i-x_0})\ldots(\boldsymbol{x_i-x_{i-1}})(\boldsymbol{x_i-x_{i+1}})\ldots(\boldsymbol{x_i-x_n})}$
- Ta gọi nó là đa thức Lagrange cơ bản
- Biểu thức

$$\boldsymbol{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . l_i\,(x)} \qquad (3)$$

Gọi là đa thức nội suy Lagrange

ĐA THỨC NÔI SUY LAGRANGE

Nội suy bậc nhất

Với n=1 ta có bảng:

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$
$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{y_0}$	$\boldsymbol{y_1}$

Đa thức nội suy là:

$$\boldsymbol{p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)}$$

$$\boldsymbol{l_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)};\ l_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$$

Do đó: $\boldsymbol{p_1(x) = y_0.\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1.\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$

Đa thức $p_1(x)$ là đa thức bậc nhất đối với x có dạng: $Ax + B$

ĐA THỨC NÔI SUY LAGRANGE

Nội suy bậc hai

Với n=2 ta có bảng:

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0	y_1	y_2

Đa thức nội suy là:

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)};$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}; \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Do đó: Đa thức $p_2(x)$ là đa thức bậc hai đối với x có dạng:

$$Ax^2 + Bx + C$$

ĐA THỨC NÔI SUY LAGRANGE

Ví dụ

Cho bảng:

x	1	2	3	4
y	17	27.5	76	210.5

Lập đa thức nội suy tương ứng

HD: Vì n=3 nên đa thức nội suy là đa thức bậc 3.

Áp dụng công thức (3)

$$\boldsymbol{p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)}$$

$$\boldsymbol{= 17.\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 27,5.\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 76.\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}}$$

$$\boldsymbol{+ 210,5.\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}}$$

Rút gọn ta được: $\boldsymbol{p_3(x) = 8x^3 - 29x^2 + 41,5x - 3,5}$

ĐA THỨC NÔI SUY LAGRANGE

Bài 1: Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	0	1	2	4
y = f(x)	2	3	-1	0

Lập đa thức nội suy Lagrange

Bài 2: Cho bảng giá trị sau của hàm số f(x)

a. Lập đa thức nội suy Lagrange

b. Tính f(3) bằng công thức vừa tìm được

c. So sánh kết quả nội suy với giá trị thật của f(3) biết rằng $f(x) = \frac{10}{x+1}$

x	y = f(x)
1	2
2	3
4	1

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Sai phân

Cho hàm f(x), ta định nghĩa:

Sai phân cấp 1 tại i

$$\Delta y_i = \Delta f(x_i) = y_{i+1} - y_i$$

Sai phân cấp 2 tại i

$$\Delta^2(y_i) = \Delta(\Delta y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

Sai phân cấp n tại i

$$\Delta^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{y}_i) = \Delta(\Delta^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{y}_i)$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Cách lập bảng sai phân:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	…	$\Delta^n f(x_i)$
x_0	y_0					
x_1	y_1	$\Delta f(x_0)$				
x_2	y_2	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$			
x_3	y_3	$\Delta f(x2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta f^3(x_0)$		
….	….	…	…	…	…	
x_n	y_n	$\Delta f(x_{n-1})$	…	…	…	$\Delta^n f(x_0)$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Xây dựng đa thức nội suy Newton

- Giả sử hàm $f(x)$ nhận giá trị y_i tại các mốc x_i cách đều một khoảng h. Khi đó hàm nội suy Newton là một đa thức bậc n được xác định như sau:

$$L_n(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\,\varphi_n(x)\ (*)$$

  - $\varphi_0(x) = 1;$
  - $\varphi_1(x) = \frac{x-x_0}{h};\qquad \varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2.2!}$
  - $\varphi_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{h^n.n!}$

- Lớp các hàm $\varphi_i(x)$ có tính chất sau:
  - $\varphi_{i(x_0)} = 0;$
  - $\Delta\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x)$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Xác định các hệ số C_i (i = n ,0)

- **Sai phân cấp 1 của $L_n(x)$**

(1) $\Delta L_n(x) = C_0\Delta\varphi_0(x) + C_1\Delta\varphi_1(x) + C_2\Delta\varphi_2(x) + \dots + C_n\Delta\varphi_n(x)$

$= C_1\varphi_0(x) + C_2\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_{n-1}(x)$

- **Sai phân cấp 2 của $L_n(x)$**

(2) $\Delta^2 L_n(x) = \Delta^2 L_n(x) = C_1\Delta\varphi_0(x) + C_2\Delta\varphi_1(x) + \dots + C_n\Delta\varphi_{n-1}(x)$

$= C_2\varphi_0(x) + C_3\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_{n-2}(x)$

- **Sai phân cấp n của $L_n(x)$**

(n) $\Delta^n L_n(x) = C_n\varphi_0(x) = C_n$

Thay $x = x_0$ vào (*), (1), (2), (n) ta được

- $C_0 = L_n(x_0)$; $C_1 = \Delta L_n(x_0)$; $C_2 = \Delta^2 L_n(x_0)$; …; $C_n = \Delta^n L_n(x_0)$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

- Vì $Ln(x) \approx f(x)$ nên

$$L_{\mathrm{n}}(x_0) \approx f(x_0); \qquad \Delta L_{\mathrm{n}}(x_0) \approx \Delta f(x_0);$$

$$\Delta^2 L_{\mathrm{n}}(x_0) \approx \Delta^2 f(x_0); \qquad \dots \qquad \Delta^{\mathrm{n}} L_{\mathrm{n}}(x_0) \approx \Delta^{\mathrm{n}} f(x_0)$$

- Vậy:

$$L_{\mathrm{n}}(x) \approx f(x^0) + \Delta f(x^0) \cdot \frac{(x - x^0)}{h} + + \Delta^2 f(x^0) \cdot \frac{x - x_0)(x - x_1)}{h^2 \cdot 2!} + \dots$$

$$+ \Delta^{\mathrm{n}} f(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{\mathrm{n-1}})}{h^{\mathrm{n}} \cdot n!}$$

Đa thức nội suy Newton

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Ví dụ: Cho hàm $f(x)$ thoả mãn:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	7	8

Lập bảng sai phân

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
1	2				
2	4	2			
3	5	1	-1		
4	7	2	1	2	
5	8	1	-1	-2	-4

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Áp dụng công thức nội suy Newton ta được

$$\boldsymbol{L_n(x)}$$

$$\boldsymbol{\approx 2 + 2.\frac{x - x_0}{1} - \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} + 2\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!}}$$

$$\boldsymbol{- 4\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{4!}}$$

BÀI TẬP

Cho hàm số y=f(x) thỏa mãn bảng dữ liệu sau:

x	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
$f(x)$	2,116	2,127	2,138	2,150	2,161

Thực hiện:

1. Xây dựng đa thức nội suy Newton
2. Tính gần đúng giá trị của $f(0{,}16)$

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Bài toán nội suy
- Sự duy nhất của đa thức nội suy
- Đa thức nội suy Lagrange
  - Nội suy bậc nhất
  - Nội suy bậc hai
  - Nội suy bậc cao
- Đa thức nội suy Newton