ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 3

XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

MỤC TIÊU

- Cách thiết lập hệ phương trình chính tắc và tính toán xấp xỉ.
- Xấp xỉ bằng một số dạng hàm số:
  - Hàm đa thức
  - Một số dạng hàm số khác

NỘI DUNG

1. Mở đầu

2. Nghiên cứu trường hợp các hàm số:

   a. $y = a + bx$

   b. $y = a + bx + cx^2$

   c. $y = ae^{bx}$

   d. $y = ax^b$

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Giả sử có 2 đại lượng x và y (vật lý, hoá học, …) có liên hệ phụ thuộc nhau theo một trong các dạng sau:

1. $y = a + bx$
2. $y = a + bx + cx^2$
3. $y = ae^{bx}$
4. $y = ax^b$

Trong đó: a, b, c là các giá trị chưa biết

Mục đích: Tìm các giá trị chưa biết

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Cách xác định:

- Thí nghiệm, đo đạc,… một số cặp giá trị tương ứng (x_i, y_i),

  $i = 1, 2, \dots, n$

x	x_1	x_2	x_n
y	y_1	y_2	y_n

- Áp dụng phương pháp bình phương bé nhất để xác định tham số

TRƯỜNG HỢP $\boldsymbol{y = a + bx}$

- Giả sử y phụ thuộc x dạng $y = a + bx$
- Gọi ε_i là các sai số của x_i

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i, \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$$

- Gọi S là tổng bình phương của các sai số

$$S = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

S phụ thuộc a, b còn x_i , y_i đã biết

- Mục đích của phương pháp bình phương bé nhất là xác định a, b sao cho S là bé nhất.
- Khi đó a, b là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$ (1)

TRƯỜNG HỢP $\boldsymbol{y = a + bx}$

$$S = \sum_{i=1}^{n}({y_i}^2 + a^2 + b^2{x_i}^2 - 2ay_i - 2bx_iy_i + 2abx_i)$$

$$(1) \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}(2a - 2y_i + 2bx_i) \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\left(2bx_i^2 - 2x_iy_i + 2ax_i\right) \end{cases}$$

$$(1) \leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) \end{cases}$$

- Từ các giá trị x_i và y_i đã cho trong bảng ban đầu ta tính được các giá trị:
- $\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i, \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \ \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)$
- Thay vào hệ (1) rồi giải ta được a, b

TRƯỜNG HỢP $y = a + bx$

VD: Cho biết hai đại lượng x và y phụ thuộc vào hàm có dạng $y = a + bx$ và mô tả ở bảng số liệu:

x	-1.1	2.1	3.2	4.4	5.2
y	0.78	7.3	9.2	11.9	13.3

Xác định a, b bằng phương pháp bình phương bé nhất

HD: Lập bảng sau

	x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i y_i$
n=5	-1.1	0.78	1.21	-0.858
	2.1	7.3	4.41	15.33
	3.2	9.2	10.24	29.44
	4.4	11.9	19.36	52.36
	5.2	13.3	27.04	69.16
$\sum$	13.8	42.48	62.26	165.16

TRƯỜNG HỢP $y = a + bx$

VD: Thay các giá trị tìm được vào (1) ta có hệ:

$$\begin{cases} 5a + 13.8b = 42.48 \\ 13.8a + 62.26b = 165.432 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: a=3, b=2

KL: hàm có được $y = 3 + 2x$

Đối chiếu kết quả

x	-1.1	2.1	3.2	4.4	5.2
y ban đầu	0.78	7.3	9.2	11.9	13.3
y mới	0.8	7.2	9.4	11.8	13.4

VÍ DỤ

- Hai đại lượng x và y phụ thuộc theo quy luật $y = a + bx$.

Hãy xác định a, b bằng phương pháp bình phương bé nhất, biết:

x	-1	0	1	3
y	0,5	1	1,5	2,5

TRƯỜNG HỢP $\boldsymbol{y = a + bx + cx^2}$

- Giả sử y phụ thuộc x dạng $y = a + bx + cx^2$
- Gọi ε_i là các sai số của x_i

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i - cx_i^2, \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

- Gọi S là tổng bình phương của các sai số

$$S = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i - cx_i^2\right)^2$$

S phụ thuộc a, b, c còn x_i , y_i đã biết

- Mục đích của phương pháp bình phương bé nhất là xác định a, b, c sao cho S là bé nhất.
- Khi đó a, b, c là nghiệm của hệ:

TRƯỜNG HỢP $y = a + bx + cx^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + c\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + c\sum_{i=1}^{n} x_i 4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được a, b, c

VÍ DỤ

- Cho giá trị hai đại lượng x, y trong bảng sau:

x	0.56	0.84	1.14	2.44	3.16
y	-0.80	-0.97	-0.98	1.07	3.66

Tìm xấp xỉ hàm dưới dạng bậc 2: $\boldsymbol{y = a + bx + cx^2}$

TRƯỜNG HỢP $y = ae^{bx}$

- Lấy logarit có số e hai vế ta được

$$lny = lna + bx$$

- Đặt $\mathrm{Y} = lny$; $\mathrm{A} = lna$; $\mathrm{X} = \mathrm{x}$; B=b

  Ta đưa về dạng : Y=A + BX

- Từ bảng số liệu về x, y ta suy ra bảng số liệu về X, Y với chú ý $\mathrm{X} = \mathrm{x}$ và $\mathrm{Y} = lny$
- Áp dụng cách giải ở mục 2.2 ta thu được A, B, từ đó suy ra a, b

$$a = e^A; b = B$$

TRƯỜNG HỢP $y = ax^b$

- Lấy logarit cơ số 10 hai vế ta được
- $lgy = lga + blgx$
- Đặt $\mathrm{Y} = lgy$; $\mathrm{A} = lga$; $\mathrm{X} = \mathrm{lgx}$, B= b
- Ta đưa về dạng : Y=A + BX
- Từ bảng số liệu về x, y ta suy ra bảng số liệu về X, Y với chú ý :

  $\mathrm{X} = lg\mathrm{x}$ và $\mathrm{Y} = lgy$

- Áp dụng cách giải ở mục 2.2 ta thu được A, B, từ đó suy ra a, b

  $a = 10^A$; $b = B$

VD: TRƯỜNG HỢP $\boldsymbol{y = ae^{bx}}$

VD: Cho bảng giá trị của x, y theo bảng sau:

x_i	0.65	0.75	0.85	0.95	1.15
y_i	**0.96**	**1.06**	**1.17**	**1.29**	**1.58**

- Lập công thức thực nghiệm của y dạng $\boldsymbol{y = ae^{bx}}$
- Lấy logarit cơ số e hai vế $lny = lna + bx$
- Đặt $\mathrm{Y} = lny$; $\mathrm{A} = lna$; $\mathrm{B} = \mathrm{b}$; $\mathrm{X} = \mathrm{x}$
- Ta đưa về dạng : Y=A + BX

$X=x_i$	0.65	0.75	0.85	0.95	1.15
$Y=\ln(y_i)$	-0.04	0.06	0.16	0.25	0.46

TRƯỜNG HỢP $y = ae^{bx}$

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất

	Xi	Y_i	${X_i}^2$	X_iY_i
$\sum$	**4.35**	**0.89**	**3.93**	**0.92**

A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} nA + B\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ A\sum_{i=1}^{n}(Xi) + B\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_iY_i) \end{cases}$$

TRƯỜNG HỢP $y = ae^{bx}$

Thay vào ta có

$$\begin{cases} 5A + 4.35B = 0.89 \\ 4.35A + 3.93B = 0.92 \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$\begin{cases} A = -0.69 \\ B = 1 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} a = e^A \\ b = B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.5 = 1/2 \\ b = B = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số cho là $y = \frac{1}{2}e^x$

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Phương pháp bình phương bé nhất
- Xấp xỉ bằng một số dạng hàm số:
    a. $y = a + bx$
    b. $y = a + bx + cx^2$
    c. $y = ae^{bx}$
    d. $y = ax^b$

BÀI TẬP 2

- Cho bảng giá trị sau:

x	19	22	25	28	32	35
y	0,66	0,367	0,223	0,14	0,084	0,06

- Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất sau đó đánh giá sai số của hàm xấp xỉ nếu:
  - Quan hệ giữa y và x là tuyến tính: $\boldsymbol{y = a + bx}$
  - Quan hệ giữa y và x là tam thức bậc hai: $\boldsymbol{y = a + bx + cx^2}$
  - Quan hệ giữa y và x là hàm mũ: $\boldsymbol{y = ae^{bx}}$

BÀI TẬP 1

- Cho bảng giá trị sau:

x	2	4	6	8	10	12
y	7.32	8.24	9.20	10.19	11.01	12.05

- Hãy áp dụng các phương pháp bình phương tối thiểu (cực tiểu) xác định các đa thức dạng:
  - $y = a + bx$
  - $y = a + bx + cx^2$
  - $y = ax^b$

  Đối chiếu và bình luận về các kết quả tìm được ở 3 dạng