ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 7

GIẢI GẦN ĐÚNG

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

MỤC TIÊU

- Giới thiệu về bài toán Cauchy
- Trình bày phương pháp chuỗi Taylor
- Mô tả các cách giải phương trình vi phân bằng phương pháp:
  - Euler
  - Runge - Kutta

NỘI DUNG

1. Phát biểu bài toán Cauchy

2. Phương pháp chuỗi Taylor

3. Phương pháp Euler

4. Phương pháp Runge – Kutta

1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

a. Mở đầu:

- Xét phương trình vi phân thường cấp 1:

$$y' = 2x + 1 \qquad (1)$$

- Dễ thấy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng: $y = x^2 + x + C$ (2)
- Ở đây, mỗi giá trị cụ thể của C cho một nghiệm cụ thể (nghiệm riêng)
- Để có nghiệm xác định => tìm được giá trị của C
- Ngoài (2), bổ sung điều kiện phụ

ví dụ: $y(1) = 2$ (3)

1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

- Hàm số cho ở (2) phải thỏa mãn điều kiện công thức (3) nên ta có:

  $2 = 1^2 + 1 + C$. Vậy C=0.

- Nghiệm là hàm số: $y = x^2 + x$

- Điều kiện (3) gọi là điều kiện ban đầu hay đk Cauchy của bài toán.

- Bài toán tìm hàm số y thỏa mãn (1) và (3) gọi là bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường

1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

b. Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1

Cho khoảng $[x_0, X]$. Tìm hàm số $y = y(x)$ xác định trên khoảng này và thoả mãn:

$$y' = f(x, y), \qquad x_0 \leq x \leq X \quad (4)$$

$$y(x_0) = \mu \qquad\qquad\qquad (5)$$

Trong đó:

- $f(x, y)$ là một hàm số đã biết của hai đối số
- μ là số thực cho trước

Điều kiện (5) được gọi là điều kiện Cauchy hay điều kiện giá trị đầu

1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

c. Ví dụ

Xét bài toán

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

$$y(0) = 1$$

d. Vấn đề gần đúng nghiệm

Việc tìm nghiệm của bài toán Cauchy không đơn giản. Ta phải nghiên cứu để tìm nghiệm gần đúng.

Đk:

- Bài toán đặt ra có nghiệm nghiệm duy nhất

- Nghiệm đủ trơn (nghĩa là có đạo hàm đến cấp đủ cao)

2. PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR

a. Mô tả phương pháp

- Xét bài toán Cauchy (4)(5)

$$y' = f(x,y), \qquad x_0 \le x \le X \quad (4)$$

$$y(x_0) = \mu \qquad (5)$$

- Ta tìm nghiệm $y(x)$ khai triển thành chuỗi Taylor tại $x = x_0$

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ \ldots \qquad (6)$$

- Ta tính các đạo hàm $y^{(k)}(x_0)$ của y tại x_0

Theo (5) ta có $y(x_0) = \mu$

Theo (4) ta có: $y'(x_0) = f\big(x_0, y(x_0)\big) = f(x_0, \mu)$ (7)

2. PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR

- Muốn tính các đạo hàm tiếp theo ta phải lấy đạo hàm liên tiếp của (4)
  - *Với đạo hàm cấp 2 ta có:*

$$y''= (y')' = f\big((x), y(x)\big)' = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x)\big).y'(x) \ (8)$$

Thay $x = x_0$ vào (8) và chú ý (4) (7) ta được:

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \mu).f(x_0, \mu)$$

  - *Tương tự ta tính $y'''(x_0)$ bằng cách lấy đạo hàm của (8) sau đó thay $x = x_0$. Và cứ tiếp tục như vậy*
- Với x gần với x_0 người ta chứng minh được chuỗi hội tụ về nghiệm của bài toán

2. PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR

- Khi đó tổng của n số hạng đầu của (6) là nghiệm xấp xỉ.
- Mức độ chính xác của nghiệm phụ thuộc vào n. Độ chính xác càng cao khi n càng lớn

b. Ví dụ:

- Xét bài toán:

$$y' = \frac{y}{x+y} \qquad (9)$$

$$y(1) = 2 \qquad (10)$$

- Ta tìm nghiệm dạng chuỗi Taylor ở công thức (6)
- Từ (10) ta có:

x_0=1; $y(x_0) = y(1) = 2.$ Thay vào (9) ta được

$$y'(1) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

- Lấy đạo hàm của (9) ta được:

2. PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR

$$y'' = \left(\frac{y}{x+y}\right)' = \frac{(x+y)y' - y(x+y)'}{(x+y)^2} = \frac{xy' - y}{(x+y)^2}$$

- Ta suy ra:

$$y''(1) = \frac{1.\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{(1+2)^2} = \frac{-4}{27}$$

- Tương tự ta tính đạo hàm cấp 3 và thay vào thu được $y'''(1) = \frac{4}{27}$
- Thay các giá trị tìm được vào (6) ta có

$$y(x) = 2 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 + \ldots$$

2. PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR

- Dùng công thức này tính y(x) tại x=1.1
- *Xét hiệu :* $|1.1\ -1|\ = 0.1$ đủ *bé.*
- *Bỏ đi các số hạng cuối*

$$y(1.1) = 2 + \frac{2}{3}(0.1) - \frac{2}{27}(0.1)^2 + \frac{2}{81}(0.1)^3 \approx 2{,}06584$$

Nhận xét:

- Phương pháp chuỗi Taylor là phương pháp tìm nghiệm dưới dạng một chuỗi
- Phương pháp Euler (phương pháp số) tìm nghiệm dưới dạng bảng số

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

a. Mô tả phương pháp

- Chia $[x_0, X]$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia x_i.

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$h = \frac{(X - x_0)}{n} \quad (12)$$

- Ta gọi tập các điểm $\{x_i\}$ là một lưới sai phân trên $[x_0, X]$;
- Các điểm x_i là các nút của lưới
- h là bước đi của lưới. Nếu $h = \text{const}$ nên ta có lưới đều

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

- Giả sử y(x) là nghiệm đúng của bài toán Cosi (4) (5).
- Mục đích của PP Euler là tìm cách tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại các đầu mút x_i chứ không phải tại toàn bộ các điểm x thuộc $[x_0, X]$
- x_i là nút của một lưới sai phân nên phương pháp này cũng được gọi là *phương pháp sai phân*

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

b. Xây dựng công thức tính

- Giả sử $y(x)$ là nghiệm đúng của bài toán (4) (5).
- $y(x_i)$ là giá trị của $y(x)$ tại điểm $x = x_i$
- u_i là giá trị gần đúng của $y(x_i)$ mà ta muốn tính.
- Ta xây dựng công thức tính u_i như sau:

- *Giả sử đã biết u_i tại nút x_i. Ta muốn tính u_{i+1} tại nút x_{i+1}.*
- *Tiến hành khai triển Taylor hàm $y(x)$ tại x_i*

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots$$
$$+ \frac{y^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k + \ \dots$$

- *(Bỏ qua các số hạng từ đạo hàm cấp 3 trở đi)*

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

- Thay $x = x_{i+1} = x_i + h$; $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ vào công thức

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2$$

- Ta được: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h.f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!}y''(c) + \dots$

- Khi h bé, số hạng cuối ở vế phải được coi là bé, có thể bỏ qua.

- Thay $y(x_i)$ bằng u_i ta được

$$u_{i+1} = u_i + h_i f(x_i, u_i) \quad (13)$$

- Công thức này cho phép tính u_{i+1} khi đã biết u_i

- Điều kiện Cauchy gợi ý cho ta đặt $u_0 = \mu$ (14)

- Tiếp tục tính các giá trị u_i theo công thức (13)

Phương pháp tính dựa trên (13) và (14) là PP Euler

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

c. Sự hội tụ và sai số

- Ta gọi $e_i = u_i - y(x_i)$ là sai số của PP Euler tại x_i

- Định nghĩa:

  Nếu tại x_i xác định, $e_i \to 0$, khi $\mathrm{h} \to 0$, tức là $u_i \to y(x_i)$ khi $\mathrm{h} \to 0$ thì ta nói PP Euler hội tụ

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

c. Sự hội tụ và sai số

- Định lý:

Giả sử: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L; \ |y''| \leq K;$

Trong đó K, M là những hằng số. Khi đó PP Euler hội tụ và

sai số $e_i = u_i - y(x_i)$ được đánh giá

- $|\ e_i| = |u_i - y(x_i)| \leq M(|e_0| + \alpha h)$
- $M = e^{L(x_i - x_0)}$
- $\alpha = \frac{K}{2}$

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

VD:

Xét bài toán:

$$y' = y - \frac{2x}{y}; \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1$$

HD: $\quad f(x,y) = y - \frac{2x}{y};\;\; x_0 = 0;\;\; X = 1;\;\; \mu = 1$

Xác định lưới:

$x_i = ih;\;\; h = \frac{1}{n};$

Công thức tính: $\quad u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) = u_i + h\left(u_i - \frac{2x_i}{u_i}\right)$

Chọn $u_0 = 1; n = 10$

3. PHƯƠNG PHÁP EULER

Kết quả

i	x_i	u_i	Nghiệm đúng y_i $y = \sqrt{2x+1}$
0	0.0	1	1
1	0.1	1.1	1.09
2	0.2	1.19	1.18
3	0.3	1.27	1.26
4	0.4	1.35	1.34
5	0.5	1.43	1.41
6	0.6	1.50	1.48
7	0.7	1.58	1.54
8	0.8	1.64	1.61
9	0.9	1.71	1.67
10	1.0	1.78	1.73

PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA

BÀI TẬP

Bài 1:

Giải bài toán sau bằng phương pháp Euler

$$\boldsymbol{y' = \frac{xy}{2};}$$

$$\boldsymbol{x \epsilon [0, 1]; \;\; y(0) = 1; \quad h = 0.2}$$

Bài 2:

Giải bài toán sau bằng phương pháp chuỗi Taylor

$$\boldsymbol{y' = x^2 + y^2;}$$

$$\boldsymbol{y(0) = 0;}$$

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Phát biểu bài toán Cauchy trong tìm nghiệm của phương trình vi phân thường
- Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor giải phương trình vi phân
- Sử dụng các phương pháp số như Euler, Runge – Kutta đưa ra kết quả cho bài toán Cauchy