ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

CHƯƠNG 6

TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

MỤC TIÊU

- Trình bày định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính
- Mô tả các phương pháp giải hệ phương trình Đại số tuyến tính
    - Phương pháp Gauss
    - Phương pháp lặp đơn

NỘI DUNG

1. Giới thiệu
2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ
3. Phương pháp Gauss
4. Phương pháp lặp đơn

1. GIỚI THIỆU

Xét hệ PT: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$ (1)

Trong đó: a_{ij} là hệ số của ẩn x_j ở phương trình thứ i

f_i là vế phải của phương trình thứ i

x_j là các ẩn của hệ phương trình

Ma trận A gọi là ma trận hệ số

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. GIỚI THIỆU

Các vecto:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Được gọi là véc tơ vế phải và vecto ẩn của hệ.

Ta có thể kí hiệu:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Hệ (1) có thể biểu diễn: $Ax = f$

2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA HỆ

Định lý Crame

Nếu định thức $\Delta \neq 0$, tức là nếu hệ không suy biến thì hệ (1) có nghiệm duy nhất cho bởi công thức

$x = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ (2)

Nhận xét:

Kết quả đẹp về mặt lý thuyết nhưng tính nghiệm bằng (2) mất nhiều công sức

=> Phương pháp gần đúng

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Ý tưởng:

Dùng cách khử dần các ẩn để đưa hệ đã cho về một hệ tam giác trên rồi giải hệ tam giác này từ dưới lên trên

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 3 \end{cases}$$

Khử x_1 khỏi phương trình thứ 2 ta được hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ \quad 4x_2 = 1 \end{cases}$$

Hệ có dạng tam giác. Giải hệ từ dưới lên => Nghiệm của phương trình

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Xét phương trình 3 ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \qquad (*)$$

Đưa về dạng tam giác:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 = b_{24} \\ \qquad\qquad x_3 = b_{34} \end{cases} \qquad (**)$$

Quá trình đưa (*) về (**) gọi là quá trình xuôi

Quá trình giải (**) là quá trình ngược

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Quá trình xuôi

Bước 1: Khử x_1.

Giả sử $a_{11} \neq 0$. Chia (1) cho a_{11} ta được

$x_1 + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} = a_{14}^{(1)}$ (4)

Ở đó: $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$

Dùng (4) để khử x_1 ra khỏi phương trình (2) và (3) bằng thao tác nhân và trừ/cộng

Bước 2: Tương tự để khử x_2

Quá trình ngược

Giải hệ tam giác để thu được nghiệm

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Ví dụ: Giải phương trình

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3=4 & (1) \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2 & (2) \\ 4x_1+11x_2+7x_3=7 & (3) \end{cases}$$

1. Quá trình xuôi.

   Bước 1: Khử x_1

   Bước 2: Khử x_2

2. Quá trình ngược

   Giải hệ tam giác

3. Kết luận nghiệm

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

1. Ma trận hệ số mở rộng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

2. Đưa về dạng tam giác trên

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 0 & -5 & -6.5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 0 & 1 & 1.3 & 1.6 \\ 0 & 0 & -2.9 & -5.8 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{-5} R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 0 & 1 & 1.3 & 1.6 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

3. Giải hệ tam giác trên từ dưới lên ta được:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & (1) \\ x_2 = -1 & (2) \\ x_3 = 2 & (3) \end{cases}$$

3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Bài tập: Giải hệ PT

1.
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -3 & (1) \\ 2x + y + 3z = 11 & (2) \\ 4x + 3y - 12z = -15 & (3) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 9 & (1) \\ 2x + y - 4z = 6 & (2) \\ 8x + 3y - 5z = 15 & (3) \end{cases}$$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

a. Mô tả

Xét hệ: $Ax = f$ (1)

Ta tìm cách chuyển hệ này thành hệ tương đương có dạng: $x = Bx + g$ (2)

Ở đó: B và g suy ra từ A và f bằng cách nào đó

Giả sử B= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} & \dots & \boldsymbol{b}_{1n} \\ \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} & \dots & \boldsymbol{b}_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ \boldsymbol{b}_{n1} & \boldsymbol{b}_{n1} & \dots & \boldsymbol{b}_{nn} \end{pmatrix}$

Ta xây dựng công thức lặp:

$x^{(m)} = B.x^{(m-1)} + g$ (3) với $x^{(o)}$ cho trước

Chú ý: $(Bx)_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$

Phương pháp lặp theo CT (3) là phương pháp lặp đơn và B được gọi là ma trận lặp

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

b. Sự hội tụ

Định nghĩa 1:

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ là nghiệm của phương trình (1) đã cho. Nếu $x_i^{(m)} \to \alpha_i \; khi \; m \to \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ thì ta nói phương pháp lặp (3) hội tụ

Định nghĩa 2:

Cho vec to $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, các đại lượng sau:

$\|z\|_o$=max$\{|z_i|\}$

$\|z\|_1 = |z_1|$ + $|z_2|$+ … $|z_n|$

$$\|z\|_2 = \left(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gọi là một độ dài mở rộng của vecto z (chuẩn của z)

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Định nghĩa 3:

Đối với ma trận vuông $B = (b_{ij})$ ta định nghĩa chuẩn như sau:

$$\|B\|_o = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$$

Định lý:

Nếu $\|B\|p < 1$ (4) thì phương pháp lặp là hội tụ với bất kì xấp xỉ đầu nào và sai số được đánh giá

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|p}{1-\|B\|p} . \left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p \quad (*)$$

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|p}{1-\|B\|p} . \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p$$

Trong đó: p=0 nếu $\|B\|_o$<1; p=1 nếu $\|B\|_1$<1

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

c. Ví dụ

Xét hệ

$$4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \qquad (1)$$
$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \qquad (2)$$
$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \qquad (3)$$

Đưa về dạng

$$\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$$

Ta có: $x = Bx + g$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

B= $\begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}$ g= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$

Kiểm tra điều kiện hội tụ:

$\sum_{j=1}^{3} |b_{1j}|$=0+0.06+0.02=0.08

$\sum_{j=1}^{3} |b_{2j}|$=0.03+0+0.05=0.08

$\sum_{j=1}^{3} |b_{3j}|$=0.01+0.02+0=0.03

$||B||_o$=max$_i$ $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$=max (0.08, 0.08, 0.03)=0.08 <1

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Theo định lý: phương pháp lặp hội tụ với công thức lặp

$$x^{(m)} = B.x^{(m-1)} + g \qquad \text{với mọi } x^{(0)} \text{ chọn trước.}$$

Giả sử lấy $x^{(0)}$= (0,0,0)^T

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Kết quả:

$$x^{(1)}=B.\,x^{(0)}+g=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$x^{(2)}=B.\,x^{(1)}+g=\begin{pmatrix}1.92\\3.19\\5.04\end{pmatrix}$$

$$x^{(3)}=B.\,x^{(2)}+g=\begin{pmatrix}1.9094\\3.1944\\5.0446\end{pmatrix}$$

$$x^{(4)}=B.\,x^{(3)}+g=\begin{pmatrix}1.90923\\3.19495\\5.04485\end{pmatrix}$$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Đánh giá sai số:

Tính: $\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_o$= max$\left|x_i^{(4)} - x_i^{(3)}\right|$ với i=1, 2, 3

= max $\{0.00017, 0.00055, 0.00025\}$ = 0.00055

Áp dụng công thức (*) với p=0 ta có

$$\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|p \leq \frac{\|B\|p}{1-\|B\|p} . \left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p$$

$$\left\|x^{(4)} - \alpha\right\|_0 \leq \frac{\|B\|_0}{1-\|B\|_0} . \left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_0$$

$$\left\|x^{(4)} - \alpha\right\|_0 \leq \frac{0.08}{1-0.08} 0.00055 \leq 0.00005$$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Kết luận nghiệm:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0.1923 \pm 0.00005 \\ \alpha_2 = 0.19495 \pm 0.00005 \\ \alpha_3 = 5.04485 \pm 0.00005 \end{cases}$$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Tóm tắt phương pháp

1. Xuất phát từ hệ : $Ax = f$
2. Ấn định sai số $\varepsilon > 0$
3. Đưa hệ đã cho thành dạng $x = Bx + g$ sao cho thỏa mãn điều kiện hội tụ
4. Chọn $x^{(0)}$ bất kỳ
5. Tính $x^{(m)} = B.x^{(m-1)} + g$ cho tới khi

   $\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|_p < \varepsilon$ thì dừng

6. Kết quả $x^{(m)} \approx \alpha$

7. Sai số: $\left\|x^{(m)} - \alpha\right\|_p \leq \frac{\|B\|_p}{1-\|B\|_p} . \varepsilon$

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Bài tập:

1. Giải hệ sau bằng phương pháp lặp đơn

Tính lặp 3 lần và cho biết sai số:

$$\begin{cases} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398 \end{cases}$$

2. Giải hệ

$$\begin{cases} 24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.85x_3 = 30.24 \\ 2.311x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$$

Bằng phương pháp lặp đơn cho tới khi

$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\|p < 0.0001$ thì dừng và đánh giá sai số

TÓM TẮT CHƯƠNG

- Điều kiện về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình Đại số tuyến tính
- Sử dụng các phương pháp
  - Phương pháp Gauss
  - Phương pháp lặp đơn

để tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình đại số tuyến tính