**ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA**

**BÀI TẬP LỚN MÔN HỌC**

**ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH**

***ĐỀ TÀI 5***

# NÊU CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA PHÂN TÍCH A = QR BẰNG PHÉP QUAY GIVEN. VIẾT CHƯƠNG TRÌNH DÙNG PHÂN TÍCH A = QR BẰNG PHÉP QUAY GIVEN. TÌM ỨNG DỤNG PHÂN TÍCH A = QR

**LỚP: L16 - NHÓM: 5, HK212**

**GVHD: NGUYỄN XUÂN MỸ**

**SINH VIÊN THỰC HIỆN**

| STT | MSSV | HỌ | TÊN | % ĐIỂM BTL | ĐIỂM BTL | GHI CHÚ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2011421 | LƯƠNG | KHOA | 100% | | |
| 2 | 2110269 | LƯƠNG NGỌC | KHIÊM | 100% | | |
| 3 | 2113748 | HỒ KHẮC ANH | KHOA | 100% | | |
| 4 | 2111538 | TH袂ĀI NGUYỄN ĐĂNG | KHOA | 100% | | |
| 5 | 2113820 | NGUYỄN TRUNG | KIÊN | 100% | | |
| 6 | 2113822 | NGUYỄN VĂN | KIÊN | 100% | | |
| 7 | 2113838 | LÊ ĐỨC ANH | KIỆT | 100% | | |

**TP. HỒ CHÍ MINH, NĂM 2021**

## BÁO CÁO KẾT QUẢ LÀM VIỆC NHÓM

| STT | Mã số SV | Họ | Tên | Nhiệm vụ được phân công | Ký tên |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2011421 | LƯƠNG | KHOA | Nhóm trưởng, kiểm tra tiến độ, phân việc, tổng hợp báo cáo và thuyết trình | |
| 2 | 2110269 | LƯƠNG NGỌC | KHIÊM | Chi tiết phân tích QR bằng phép quay Given | |
| 3 | 2113748 | HỒ KHẮC ANH | KHOA | Khái niệm phân tích A = QR, thuật toán QR, Lịch sử, giới thiệu các cách tính phân tích QR | |
| 4 | 2111538 | TH袂ĀI NGUYỄN ĐĂNG | KHOA | Làm phần code | |
| 5 | 2113820 | NGUYỄN TRUNG | KIÊN | Làm ppt | |
| 6 | 2113822 | NGUYỄN VĂN | KIÊN | Làm phần code | |
| 7 | 2113838 | LÊ ĐỨC ANH | KIỆT | Tìm hiểu các ứng dụng của phân tích QR | |

# MỤC LỤC

## PHẦN MỞ ĐẦU

### 1. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Phân tích A = QR có rất nhiều ứng dụng trong thực tế từ việc nó làm nền tản của thuật toán QR, đến giải phương trình bình phương tối thiểu. Nhưng do nhận thấy là ít người biết đên cũng như quan tâm về phân tích A = QR, nhóm 5 môn ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH lớp L16 đã chọn đề tài "NÊU CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA PHÂN TÍCH A = QR BẰNG PHÉP QUAY GIVEN. VIẾT CHƯƠNG TRÌNH DÙNG PHÂN TÍCH A = QR BẰNG PHÉP QUAY GIVEN. TÌM ỨNG DỤNG PHÂN TÍCH A = QR" để làm rõ cơ sở lý thuyết phân tích A = QR bằng phép quay Given cũng như khám phá các ứng dụng của phân tích A = QR đồng thời viết một ứng dụng để phân tích A = QR bằng phép quay Given trong chương trình matlab.

**2. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU**: phân tích A = QR, phép quay Given, ứng dụng phân tích A = QR.

### 3. PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Không gian: Việt Nam

Thời gian: 2021

### 4. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

*Thứ nhất*, nêu khái niệm phân tích A = QR, lịch sử thuật toán QR, cách phương pháp tính phân tích A = QR bao gòm cách tính phân tích A = QR bằng phép quay Given.

*Thứ hai*, nêu ứng dụng phân tích A = QR.

*Thứ ba*, viết ứng dụng phân tích A = QR bằng phép quay given.

### 5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Đọc và phân tích lý thuyết cũng như thử nghiệm cách viết chương bằng chương trình matlab.

### 6. KẾT CẤU CỦA ĐỀ TÀI

Ngoài mục lục, phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, đề tài gồm 03 phần:

- Phần 1: Cơ sở lý thuyết của phân tích A = QR bằng phép quay Given.

- Phần 2: Ứng dụng của phân tích A = QR

- Phần 3: Ứng dụng matlab phân tích A = QR bằng phép quay Given

## Phần 1: Cơ sở lý thuyết của phân tích A = QR bằng phép quay Given.

### 1.1. Khái niệm phân tích A = QR, thuật toán QR.

#### 1.1.1. Khái niệm phân tích A = QR.

Trong đại số tuyến tính, phân rã QR, còn được gọi là phân tích nhân tố QR hoặc phân tích nhân tố QU là phân rã ma trận A thành tích A = QR của ma trận trực giao Q và ma trận tam giác trên R. Phân rã QR thường được sử dụng để giải quyết vấn đề bình phương tối thiểu tuyến tính và là cơ sở cho một thuật toán giá trị riêng cụ thể, thuật toán QR.

Các trường hợp:

- Ma trận vuông:

+ Mọi ma trận vuông thực A có thể được phân tích thành A = QR, trong đó Q là ma trận trực giao (các cột của nó là vectơ đơn vị trực giao nghĩa là $Q^T = Q^{-1}$) và R là ma trận tam giác trên (còn gọi là ma trận tam giác vuông). Nếu A khả nghịch, thì thừa số là duy nhất nếu chúng ta yêu cầu các phần tử đường chéo của R là số dương.

+ Nếu thay vào đó A là một ma trận vuông phức, thì có một sự phân rã A = QR trong đó Q là một ma trận đơn nhất (do đó $Q^*= Q^{-1}$).

+ Nếu A có n cột độc lập tuyến tính, thì n cột đầu tiên của Q tạo thành cơ sở trực chuẩn cho không gian cột của A. Nói chung, k cột đầu tiên của Q tạo thành cơ sở trực chuẩn cho khoảng của k cột đầu tiên của A cho bất kỳ $1 \le k \le n$. Thực tế là bất kỳ cột k nào của A chỉ phụ thuộc vào k cột đầu tiên của Q sẽ có dạng tam giác của R.

- Ma trận hình chữ nhật:

+ Tổng quát hơn, chúng ta có thể nhân tử ma trận phức $m\times n$ A, với $m\geq n$, là tích của ma trận đơn nhất $m\times m$ Q và ma trận tam giác trên $m\times n$ R. Vì (m - n) hàng dưới cùng của ma trận tam giác trên $m\times n$ bao gồm hoàn toàn 0, nó thường hữu ích để phân vùng R, hoặc cả R và Q:

$$A = QR = Q\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1,$$

trong đó $R_1$ là ma trận tam giác trên n×n, 0 là ma trận 0 (m - n) ×n, $Q_1$ là m×n, $Q_2$ là m× (m - n) và $Q_1$ và $Q_2$ đều có một trực giao.

+ Golub & Van Loan (1996, §5.2) gọi $Q_1R_1$ là kẻ mỏng QR thừa số hóa của A; Trefethen và Bau gọi đây là quá trình phân tích nhân tử QR giảm. Nếu A có hạng n đầy đủ và chúng ta yêu cầu rằng các phần tử đường chéo của $R_1$ là ‘dương thì $R_1$ và $Q_1$ là duy nhất, nhưng nói chung $Q_2$ thì không. Khi đó $R_1$ bằng hệ số tam giác trên của phép phân tích Cholesky của A* A (= $A^TA$ nếu A là thực).

**1.1.2. Khái niệm thuật toán QR.**

Trong đại số tuyến tính, thuật toán QR hoặc lặp lại QR là một thuật toán giá trị riêng: tức là một thủ tục để tính toán các giá trị riêng và hiệu riêng của một ma trận.

Lịch sử:

- Thuật toán QR có tiền thân là thuật toán LR, sử dụng phân tích LU thay vì phân tích QR. Thuật toán QR ổn định hơn, vì vậy thuật toán LR hiếm khi được sử dụng ngày nay. Tuy nhiên, nó có thể là một bước quan trọng trong sự phát triển của thuật toán QR.

- Thuật toán LR được phát triển vào đầu những năm 1950 bởi Heinz Rutishauser, người làm việc tại thời điểm đó với tư cách là trợ lý nghiên cứu của Eduard Stiefel tại ETH Zurich. Stiefel gợi ý rằng Rutishauser sử dụng chuỗi khoảnh khắc $y_o^T A^k x_o$, k = 0, 1, …(trong đó $x_o$ và $y_o$ là các vectơ tùy ý) để tìm các giá trị riêng của A. Rutishauser đã lấy một thuật toán của Alexander Aitken cho nhiệm vụ này và phát triển nó vào thuật toán chêch lệch thương số hoặc thuật toán qd. Sau khi sắp xếp phép tính theo một hình dạng phù hợp, ông phát hiện ra rằng thuật toán qd thực chất là phép lặp $A_k = L_kU_k$ (phân tích LU), $A_{k+1} = U_kL_k$, được áp dụng trên ma trận tam giác, từ đó thuật toán LR tuân theo.

**1.2. Các phương pháp tích phân tích QR.**

**1.2.1. Tính bằng Gram-Schmidt process.**

Trong toán học, đặc biệt là trong lĩnh vựa đại số tuyến tính và giải tích số, quá trình Gram-Schmidt là một phương pháp trực chuẩn hóa một tập hợp các vectơ trong một không gian tích trong, thường là không gian Euclid $R^n$ được trang bị tích trong tiêu chuẩn. Quá trình Gram-Schmidt xử lý một tập hợp vectơ hữu hạn và độc lập tuyến tính $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ với $k \leq n$ và tạo ra từ tập đã cho một tập vectơ trực giao

$S' = \{u_1, \ldots, u_k\}$ sinh ra không gian con k chiều của $R^n$ tương tự không gian sinh bởi tập S.

袂Āp dụng quá trình Gram-Schmidt vào các vectơ cột của một ma trận với hạng cột đầy đủ, ta có phép phân rã QR to (ma trận đó được phân rã thành một ma trận trực giao và tam giác).

Vậy phân tích QR có thể được tính bằng Gram-Schmidt.

**1.2.2. Tính bằng Householder reflections**.

Phản xạ Householder (hay chuyển đổi Householder) là một phép biến đổi nhận một vectơ và phản ánh nó về một mặt phẳng hoặc siêu phẳng nào đó. Chúng ta có thể sử dụng phép toán này để tính thừa số QR của ma trận A m-by-n với $m \geq n$.

Q có thể được sử dụng để phản ánh một vectơ theo cách mà tất cả các tọa độ, trừ một tọa độ biến mất.

Vậy phân tích QR cũng có thể được tính bằng Householder reflections.

**1.2.3. Tính bằng phép quay Given**

Phân tích QR cũng có thể được tính bằng phép quay Given và đây cũng chính là đề tài của nhóm.

**Biểu diễn**

- Phép quay Givens được biểu diễn bằng một ma trận có dạng

$$G(i,j,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

trong đó $c = \cos\theta$ và $s = \sin\theta$ xuất hiện tại các giao điểm của hàng và cột thứ $i$ và $j$ . Nghĩa là, với $i > j$ cố định , các phần tử khác 0 của ma trận Givens được cho bởi:

$g_{ii} = g_{jj} = c = \cos\theta$ k=i ,j

$g_{ij} = -g_{ij} = s = \sin\theta \neq$ k i,j

$g_{kk} = 1$

- Tích $G(i, j, \theta)$ **x** đại diện cho chuyển động quay ngược chiều kim đồng hồ của vectơ **x** trong mặt phẳng $(i, j)$ của $\theta$ radian, do đó có tên gọi là phép quay Givens.

**Tính toán, phân tích**

- Các phần tử của ma trận quay để quay một vectơ ngược chiều kim đồng hồ một góc θ là:

$$[Q_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Các phần tử của ma trận quay để quay một vectơ theo chiều kim đồng hồ một góc θ là:

$$[Q_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- VD:

$$\begin{array}{c|cccccc} & & \text{column } i & & \text{column } k & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{row } i & 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{row } k & 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

+ Trong đó

6

$$\cos\theta = c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \sin\theta = s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

+ Do đó

$$[Q_\theta] = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

+ Khi một ma trận xoay Givens, $G(i, j, \theta)$, nhân một ma trận khác ta được

$$[Q_\theta]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 + sx_2 \\ -sx_1 + cx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kỹ thuật quay Givens là một phương pháp để phân tích ma trận [A] thành tích của ma trận [Q] và ma trận [R] tức A=QR bằng cách làm cho các phần tử lần lượt bằng zero cho đến khi có được ma trận tam giác phải.

**Bài làm ví dụ**

- Cho Ma trận [A]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Đưa phần tử (2,1) về 0

- Nhận $x_1=0$ và $x_2=4$

⇨ c=0 và s=-1

$$G_1 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tiếp tục đặt $A_2=G_1A_1$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Đưa phần tử (3,1) về 0

- Nhận $x_1$=4 và $x_2$=3

=> c=0.8 và s=-0.6

$$G_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$G_2A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tiếp tục đặt $A_3=G_2A_2$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Đưa phần tử (3,2) về 0

- Nhận $x_1$=1 và $x_2$=2

=> c=0.8 và s=-0.6

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$$G_3A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.447 & 0.894 \\ 0 & -0.894 & 0.447 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2.236 & -0.447 \\ 0 & 0 & 0.894 \end{bmatrix}$$

- Kết quả cuối cùng

$$Q = G1^T G2^T G3^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.447 & -0.894 \\ 0 & 0.894 & 0.447 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -0.447 & 0.894 \\ 0.8 & -0.537 & -0.268 \\ 0.6 & 0.716 & 0.358 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2.236 & -0.447 \\ 0 & 0 & 0.894 \end{bmatrix}$$

$G_3A_3$ là ma trận tam giác trên => $G_3A_3$= R

- Thỏa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = QR$$

## Phần 2: Ứng dụng của phân tích A = QR

### 2.1. Dùng để tính bình phương nhỏ nhất tuyến tính

Bình phương nhỏ nhất tuyến tính ( LLS ) là sự xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của các hàm tuyến tính đối với dữ liệu. Nó là một tập hợp các công thức để giải quyết các vấn đề thống kê liên quan đến hồi quy tuyến tính , bao gồm các biến thể cho phần dư thông thường (không trọng số), có trọng số và tổng quát (tương quan) . Các phương pháp số cho bình phương nhỏ nhất tuyến tính bao gồm đảo ngược ma trận của các phương trình thông thường và các phương pháp phân tích trực giao.

Ba công thức bình phương nhỏ nhất tuyến tính chính là:

- Bình phương nhỏ nhất thông thường (OLS) là công cụ ước lượng phổ biến nhất. Các ước tính OLS thường được sử dụng để phân tích cả dữ liệu thực nghiệm và dữ liệu quan sát .

- Bình phương nhỏ nhất có trọng số (WLS) được sử dụng khi phương sai thay đổi có trong điều khoản sai số của mô hình.

- Bình phương nhỏ nhất tổng quát (GLS) là một phần mở rộng của phương pháp OLS, cho phép ước tính hiệu quả của β khi phương sai thay đổi hoặc tương quan, hoặc cả hai đều có mặt trong các thuật ngữ sai số của mô hình, miễn là biết dạng phương sai thay đổi và tương quan. độc lập với dữ liệu. Để xử lý phương sai thay đổi khi các thuật ngữ sai số không tương quan với nhau, GLS giảm thiểu một giá trị tương tự có trọng số thành tổng các phần dư bình phương từ hồi quy OLS, trong đó trọng số của thứ i tỷ lệ nghịch với var ( ε i ). Trường hợp đặc biệt này của GLS được gọi là "bình phương nhỏ nhất có trọng số".

### 2.2. Là nền tảng của thuật toán QR

Thuật toán QR được phát triển vào cuối những năm 1950 bởi John GF Francis và Vera N. Kublanovskaya , hoạt động độc lập. **Ý tưởng cơ bản là thực hiện phân rã QR** , viết ma trận dưới dạng tích của ma trận trực giao và ma trận tam giác trên , nhân các thừa số theo thứ tự ngược lại và lặp lại.

Một biến thể của thuật toán QR , thuật toán Golub-Kahan-Reinsch bắt đầu bằng việc giảm ma trận chung thành ma trận hai cạnh. Biến thể này của thuật toán QR để tính toán các giá trị đơn lẻ lần đầu tiên được mô tả bởi Golub & Kahan (1965). Chương trình con LAPACK DBDSQR thực hiện phương pháp lặp lại này, với một số