

Chapitre 6

Indicateurs numériques de l'apprentissage du modèle d'entrées

Sommaire

6.1	Introduction	136
6.2	Éléments de théorie de l'information	136
6.2.1	Entropie et information mutuelle	136
6.2.2	Méthodes d'estimation	138
6.3	Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le coefficient d'incertitude	139
6.3.1	Définition	140
6.3.2	Application du coefficient d'incertitude à CxSOM	142
6.3.3	Discussion	143
6.4	Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le ratio de corrélation	143
6.4.1	Définition	143
6.4.2	Application du ratio de corrélation à CxSOM	144
6.4.3	Discussion	147
6.5	Comment utiliser l'information mutuelle continue comme indicateur d'un apprentissage ?	148
6.5.1	Évolution de l'information mutuelle entre U et Π au cours d'un apprentissage	148
6.5.2	Ouvertures possibles	150
6.6	Conclusion	151

6.1 Introduction

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons identifié des mécanismes caractérisant l'apprentissage d'un modèle d'entrées au sein de l'architecture de cartes en s'appuyant sur les représentations graphiques des poids et des BMU. Nous avons souligné l'importance de développer des indicateurs numériques pour mesurer cet apprentissage, afin de faciliter la comparaison entre différentes expériences et l'optimisation des paramètres d'apprentissage.

Nous avons représenté les modèles d'entrées à apprendre grâce une variable latente U , qui traduit les paramètres libres du modèle d'entrées. Les représentations graphiques que nous avons étudiées nous ont permis de constater que l'apprentissage du modèle d'entrées dans les architectures de cartes se caractérise par une relation fonctionnelle entre U et la position du BMU Π dans chaque carte. Dans ce chapitre, nous envisageons deux méthodes mesurant la qualité de la relation fonctionnelle entre U et Π , à savoir le coefficient d'incertitude, qui est une version normalisée de l'information mutuelle, et le ratio de corrélation. Ces méthodes s'appuient sur la représentation des entrées et réponses des cartes en tant que variables aléatoires. Nous comparerons leur capacité à traduire la relation fonctionnelle que nous avons observée dans les architectures de deux cartes, afin de déterminer l'indicateur numérique le plus adapté et identifier leurs limites.

Cependant, nous avons également souligné que pour des architectures de grande taille ou lorsque U est de grande dimension, U pourrait ne pas être une fonction de Π dans chaque carte. De plus, une représentation distribuée de U entre les cartes, tout en présentant une certaine redondance en terme d'information, pourrait être préférable. Nous discuterons donc en dernière partie de chapitre des possibilités d'utilisation de l'information mutuelle comme indicateur de l'apprentissage du modèle dans une structure de cartes.

6.2 Éléments de théorie de l'information

6.2.1 Entropie et information mutuelle

Les notions d'entropie et les valeurs associées, telle que l'information mutuelle entre des variables aléatoires, sont des notions fondamentales de la théorie de l'information de Shannon (Shannon 1948). Ces quantités sont calculées à partir de la distribution des variables aléatoires. L'entropie de Shannon d'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble Ω_X discret, de

distribution P_X , est notée $H(X)$ et définie par :

$$H(X) = - \sum_{x \in \Omega_X} P_X(x) \log(P_X(x)) \quad (6.1)$$

L'entropie de Shannon concerne uniquement des variables discrètes. Une autre version de l'entropie est définie pour des variables continues, l'entropie différentielle :

$$h(X) = - \int_{x \in \Omega_X} p_X(x) \log(p_X(x)) dx \quad (6.2)$$

Avec p_X la densité de probabilité de X . Notons que l'entropie différentielle n'est pas la limite de l'entropie de Shannon calculée par discréétisation de X en N intervalles, $N \rightarrow \infty$. L'entropie différentielle peut prendre des valeurs négatives.

L'existence d'une relation quelconque entre deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans Ω_X, Ω_Y se mesure par leur information mutuelle.

Elle est définie par :

$$I(X, Y) = \sum_{x, y \in \Omega_X, \Omega_Y} P_{XY}(x, y) \log\left(\frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)}\right) \quad (6.3)$$

Avec P_{XY} la distribution de la variable aléatoire jointe (X, Y) . Cette valeur mesure la quantité d'information moyenne partagée entre les distributions X et Y : en moyenne, quelle information sur la valeur de Y donne une valeur de X et inversement, quelle information sur la valeur de X donne une valeur de Y .

L'information mutuelle possède notamment les propriétés suivantes :

1. $I(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ et Y sont indépendantes. L'information mutuelle peut être vue comme une mesure de la distance entre la distribution jointe de (X, Y) , $P_{XY}(X, Y)$ et la distribution correspondant à l'indépendance des variables, $P_X(X)P_Y(Y)$.
2. Elle s'exprime à partir de l'entropie de Shannon : $I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
3. Elle est symétrique : $I(X, Y) = I(Y, X)$
4. Pour toute fonction f , $I(X, Y) \geq I(X, f(Y))$. L'égalité est atteinte si et seulement si f est bijective.

L'information mutuelle se calcule également à partir des densités de probabilité pour des variables à valeur continues de densités de probabilité p_X et p_Y :

$$I(X, Y) = \int_{x \in \Omega_X} \int_{y \in \Omega_Y} p_{XY}(x, y) \log\left(\frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)p_Y(y)}\right) dx dy \quad (6.4)$$

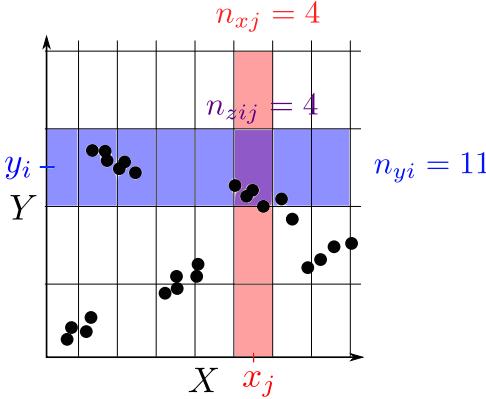


FIGURE 6.1 – Méthode d'estimation par histogrammes des distributions des variables X et Y . Les distributions sont estimées à partir de n_{xj} , n_{yi} et n_{zij} , ce qui permet d'estimer l'information mutuelle et l'entropie de Shannon selon 6.3 et 6.1

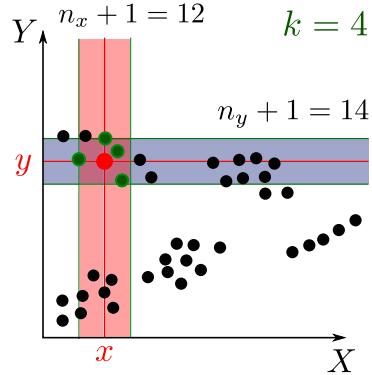


FIGURE 6.2 – Méthode d'estimation d'information mutuelle par k -nearest neighbors. Les plus proches voisins de chaque point (indiqués en vert pour le point marqué en rouge) déterminent une fenêtre selon chaque axe. Les valeurs de n_x et n_y permettent d'estimer directement l'information mutuelle (voir équation 6.5).

Contrairement à l'entropie, la valeur de l'information mutuelle pour des variables continues correspond bien à une limite des valeurs de l'information mutuelle discrète lorsque le nombre de catégories tend vers l'infini (Cover et Thomas 2005). Cependant, dans le cas continu, les propriétés 2 et 4 ne sont pas vérifiées. L'information mutuelle n'est en effet pas directement liée à l'entropie différentielle h .

6.2.2 Méthodes d'estimation

L'information mutuelle et l'entropie sont des grandeurs définies à partir de la distribution des variables aléatoires. Nous ne connaissons pas leur distribution et devons donc estimer ces quantités à partir des échantillons de données. Nous nous intéresserons en particulier à l'information mutuelle entre les variables U et Π , qui sont des variables continues. Nous présentons deux méthodes classiques d'estimation de l'information mutuelle pour des variables continues.

Une première méthode d'estimation classique est la méthode des histogrammes (*binning*). Cette méthode s'appuie sur une estimation de la distribution des variables X , Y et la distribution de la variable jointe (X, Y) en discrétilisant chacune des variables. Cette méthode est représentée en figure 6.1. Les variables X et Y sont discrétilisées en *bins* de centres x_k et y_k choisis. La distribution de chaque variable est alors estimée par :

$$P(X = x_i) = \frac{n_{xi}}{N}$$

6.3. Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le coefficient d'incertitude

où n_{xi} est le nombre d'échantillons de X tombant dans le *bin* de centre x_i et N le nombre de points. Le même procédé est réalisé pour Y et (X, Y) . La précision de l'estimation peut être améliorée en choisissant des tailles de *bins* variables ; nous utilisons ici la méthode simple avec des *bins* de taille fixe. Après cette discrétisation, l'estimation de l'entropie et l'information mutuelle des variables est calculée selon les équations 6.1 et 6.3. La valeur de cet indicateur est très sensible à la résolution choisie pour le calcul des histogrammes, c'est-à-dire le nombre de *bins*. Par ailleurs, plus ce nombre de *bins* augmente, plus le nombre de points disponibles pour l'estimation doit augmenter. C'est en particulier le cas lorsque la dimension des entrées augmente : le nombre d'échantillons disponibles pour l'estimation doit alors augmenter exponentiellement avec la dimension des variables. En effet, à cause de la faible densité des données, de nombreux *bins* ne contiendront pas de points pour l'estimation alors qu'ils auraient dû en contenir d'après leur distribution théorique, ce qui fausse l'estimation.

Une deuxième méthode plus régulièrement utilisée pour l'estimation de l'information mutuelle est l'estimateur par *K-Nearest Neighbors* (Kraskov et al. 2004). Cet estimateur ne passe pas par l'estimation de la densité de probabilité, contrairement aux histogrammes, mais estime directement l'information mutuelle. Le découpage de l'espace se fait en recherchant, pour N valeurs d'échantillons d'un couple (X, Y) , les k plus proches voisins. Une information mutuelle locale est calculée dans cette zone de l'espace, suivant une formule permettant d'approximer les différences de logarithme par la fonction digamma ψ :

$$i_j(X, Y) = \psi(k) - \psi(n_{x_j} + 1) - \psi(n_{y_j} + 1) + \psi(N)$$

Cette information mutuelle locale est ensuite moyennée sur l'ensemble des points (en notant $\langle \rangle$ l'opérateur de moyenne) :

$$\hat{I}(X, Y) = \psi(k) - \langle \psi(n_{x_j} + 1) + \psi(n_{y_j} + 1) \rangle + \psi(N) \quad (6.5)$$

L'estimateur de Kraskov est moins sensible aux paramètres choisis pour son estimation qui sont le nombre de voisins k considérés (Ross 2014). Enfin, l'information mutuelle étant une grandeur largement utilisée en théorie de l'information, il existe de nombreuses autres méthodes d'estimation possibles (Doquière et Verleysen 2012).

6.3 Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le coefficient d'incertitude

Nous explorons d'abord un indicateur permettant d'évaluer une relation fonctionnelle entre U et Π , le coefficient d'incertitude (Theil et al. 1961). Cet indicateur est une version normalisée

de l'information mutuelle et mesure une relation générale entre deux signaux.

6.3.1 Définition

L'information mutuelle $I(U, \Pi)$ mesure une relation quelconque entre les variables U et Π . Nous souhaitons normaliser $I(U, \Pi)$ par la valeur maximale qu'elle peut prendre dans une carte, afin d'obtenir un indicateur à valeurs dans $[0, 1]$. $I(U, \Pi)$ est en effet égale à 0 lorsque les deux variables sont indépendantes et maximale lorsqu'il existe une bijection entre U et Π .

Si on considère des variables discrètes, cette valeur maximale est $H(U)$, atteinte lorsque U est une fonction de Π . En effet, par construction, Π est une fonction de U dans une carte de Kohonen : la recherche de BMU est déterministe. C'est-à-dire, $I(U, \Pi) = I(U, f(U))$. Par propriété de l'information mutuelle, $I(U, \Pi) \leq I(U, U) = H(U)$. Cette valeur est atteinte si et seulement si U et Π sont en bijection, autrement dit, si et seulement si U est aussi une fonction de Π .

Nous définissons donc l'indicateur U_c , marquant la relation fonctionnelle entre U et Π comme :

$$U_c(\Pi|U) = \frac{I(\Pi, U)}{H(U)} \quad (6.6)$$

Ce coefficient n'est pas symétrique et mesure l'information portée par le second terme sur le premier, relativement à la valeur maximale qu'il peut prendre, $H(U)$. On a $U_c(\Pi|U) \in [0, 1]$. Cette variante normalisée de l'information mutuelle correspond en fait au *coefficient d'incertitude* entre U et Π et introduit en [Theil et al. 1961](#).

U_c vaut 1 lorsque U est une fonction de Π , et 0 lorsque les deux distributions sont indépendantes. Cependant, l'égalité $I(U, U) = H(U)$ est uniquement vraie dans le cas de variables aléatoires discrètes. Pour l'utilisation de U_c comme indicateur de la relation fonctionnelle, il sera donc nécessaire de considérer Π et U comme des variables discrètes et d'estimer l'information mutuelle et l'entropie par la méthode des histogrammes. L'indicateur que nous envisageons sera donc très dépendant des paramètres d'estimation (nombre de *bins*).

Afin de choisir ces paramètres d'estimation, décrivons le type de relation fonctionnelle que nous cherchons à mesurer dans une carte de l'architecture. Nous présentons en figure 6.3 deux exemples de relations entre des variables aléatoires X et Y . Dans le cas de gauche, la relation se rapproche d'une relation fonctionnelle, mais cette relation est bruitée. Une même valeur de X correspond à un intervalle de valeurs de Y . Dans le cas de droite, la relation n'est pas une fonction, mais une valeur de X correspond à exactement deux valeurs de U . En haut de la figure, nous indiquons le coefficient d'incertitude, calculé pour deux résolutions de discréétisation de Y . Dans les deux cas, X est discréétisé en 500 *bins*.

L'indicateur que nous voulons utiliser avec CxSOM doit privilégier la fonction bruitée (à

6.3. Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le coefficient d'incertitude

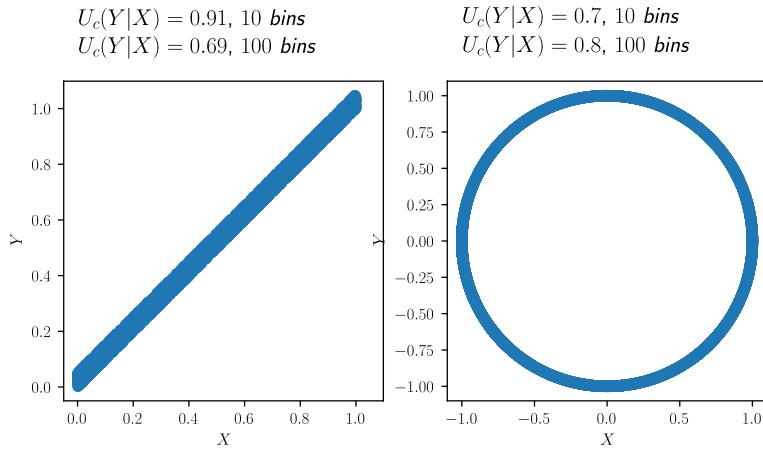


FIGURE 6.3 – Comparaison de la mesure du coefficient d'incertitude $U_c(Y|X)$ entre deux distributions. À gauche, la relation entre les variables Y et X est proche d'une fonction, bien qu'elle soit bruitée. À droite, la relation n'est pas fonctionnelle, mais telle qu'une valeur de X correspond à exactement deux valeurs de Y . Dans les deux cas, X est discréétisé en 500 bins, et nous présentons les valeurs U_c calculées pour des discréétisations de Y en 10 et 100 bins. Le choix de paramètre pour la discréétisation de Y a un impact significatif sur la valeur du coefficient d'incertitude mesuré.

gauche de la figure) par rapport à la relation qui n'est pas fonctionnelle (à droite). Dans le cadre de l'analyse de CxSOM, nous cherchons en effet à mesurer si une valeur de Π correspond à un unique intervalle de U , et non plusieurs intervalles comme dans le cas d'une carte simple, dans laquelle deux valeurs de U éloignées sont codées par une même position de BMU, voir figure 6.6. Lorsque nous utilisons une discréétisation fine, par exemple de 100 bins sur la figure, le coefficient d'incertitude calculé dans le cas où la relation est non-fonctionnelle est inférieur à celui calculé dans le cas de la relation fonctionnelle bruitée. En effet, une valeur de X correspond à seulement 2 valeurs de bins pour Y dans le cas du cercle, mais 10 dans le cas de la fonction bruitée. La proximité de ces points n'est pas représentée dans le calcul. Lorsque nous élargissons la taille de discréétisation de Y , $U_c(Y|X)$ s'améliore dans le cas de la relation bruitée. Cette discréétisation à gros grain pour Y , permet d'ignorer la dispersion locale des valeurs de Y .

Pour que $U_c(U|\Pi)$ ne prenne pas en compte un bruit local sur les valeurs de U , il faudra donc choisir une discréétisation de U à gros grains. Ces paramètres de discréétisation dépendent de l'organisation des données. L'indicateur U_c défini ici doit plutôt être considéré comme un indicateur statistique s'inspirant du coefficient d'incertitude que comme une estimation d'une valeur théorique, à cause de ce choix de paramètres et de la discréétisation des variables.

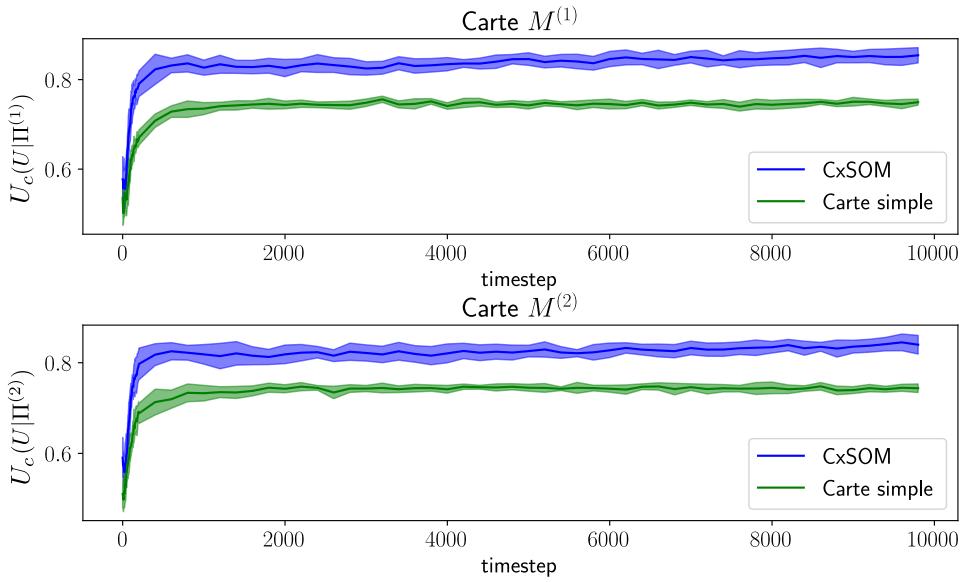


FIGURE 6.4 – Évolution du coefficient d'incertitude $U_c(U|\Pi)$ dans chaque carte au long de l'apprentissage. L'intervalle de discréttisation choisi pour U est de 0.02 (50 bins). La courbe bleue correspond à $U_c(U|\Pi)$ dans l'architecture de cartes $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$, que nous comparons à l'évolution de U_c dans une carte simple apprenant sur les mêmes entrées $X^{(1)}$ ou $X^{(2)}$.

6.3.2 Application du coefficient d'incertitude à CxSOM

Nous traçons maintenant l'évolution de $U_c(U|\Pi)$ au cours de l'apprentissage dans un système de deux cartes apprenant sur le cercle en deux dimensions, afin de vérifier comment U_c reflète la qualité de l'apprentissage du modèle dans une carte. L'organisation finale de U selon Π correspond à celle représentée en figure 6.6.

Pour cela, nous calculons $U_c(U|\Pi^{(1)})$ et $U_c(U|\Pi^{(2)})$ sur des phases de test réalisées tout au long de l'apprentissage d'une architecture de cartes, comparée à celles calculées sur des cartes simples. Cette évolution est tracée en figure 6.4. Ces tracés correspondent à une valeur moyennée sur 10 expériences. Nous avons discréttisé U en 50 bins, et en 500 pour $\Pi^{(i)}$: comme soulevé au paragraphe précédent, il est nécessaire d'utiliser un intervalle plus large pour les valeurs de U , afin de ne pas prendre en compte la dispersion des points au niveau local.

Ces tracés montrent que les quantités $U_c(U|\Pi^{(1)})$ et $U_c(U|\Pi^{(2)})$ sont bien toutes deux plus élevées pour CxSOM, tout au long de l'apprentissage, que dans le cas où les cartes sont séparées. Les valeurs pour CxSOM s'approchent de 1 à la fin de l'apprentissage, reflétant bien l'observation réalisée sur les tracés que U est une fonction de Π dans chaque carte.

6.3.3 Discussion

D'après nos observations, U_c peut certes être utilisé comme indicateur d'une relation fonctionnelle entre U et Π dans chaque carte, mais sous réserve de choisir correctement la taille de l'intervalle de discrétisation pour U lors de l'estimation (nombre de *bins*). La taille de cet intervalle de discrétisation doit être assez élevée pour englober un bruit local sur les U , mais l'intervalle doit rester suffisamment faible pour détecter une séparation entre deux intervalles de U codés par une même position de BMU. Le choix de cet intervalle de discrétisation de U a une grande influence sur la valeur de l'indicateur, rendant difficile son utilisation comme valeur quantifiée permettant de comparer des expériences. Par ailleurs, la discrétisation de U pour des variables de grande dimension nécessiterait un échantillon de grande taille, ce qui limite également son utilisation. Enfin, l'aspect originellement continu des variables Π et U n'est pas pris en compte par cet indicateur, qui nécessite la discrétisation des variables.

Le coefficient d'incertitude n'est donc pas un indicateur adapté à la mesure de la relation fonctionnelle existant entre U et Π . Bien qu'il s'appuie sur l'information mutuelle, qui mesure une relation quelconque entre des signaux, il ne traduit pas la relation fonctionnelle de la façon dont nous voulons la mesurer dans CxSOM. En particulier, nous voulons prendre en compte l'aspect continu des valeurs de U .

Cependant, l'utilisation de l'information mutuelle continue pour évaluer l'apprentissage nous paraît pertinente, mais afin d'évaluer une relation plus générale que la relation fonctionnelle. Nous explorerons ce calcul en section [6.5.1](#).

6.4 Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le ratio de corrélation

Au vu des limitations montrées par l'indicateur U_c , nous avons choisi de considérer un autre indicateur de la relation fonctionnelle entre U et Π : le ratio de corrélation, qui s'appuie sur l'espérance conditionnelle de U sachant Π .

6.4.1 Définition

Le ratio de corrélation $\eta(Y; X)$ est un coefficient mesurant une relation fonctionnelle non-linéaire entre deux variables. Il atteint la valeur de 1 lorsque Y est fonction de X , et est nul lorsque les deux variables sont statistiquement indépendantes.

La mesure de la dépendance fonctionnelle entre deux variables X et Y peut se décomposer en deux étapes :

1. Trouver une fonction $\varphi(X)$ qui approxime les valeurs de Y

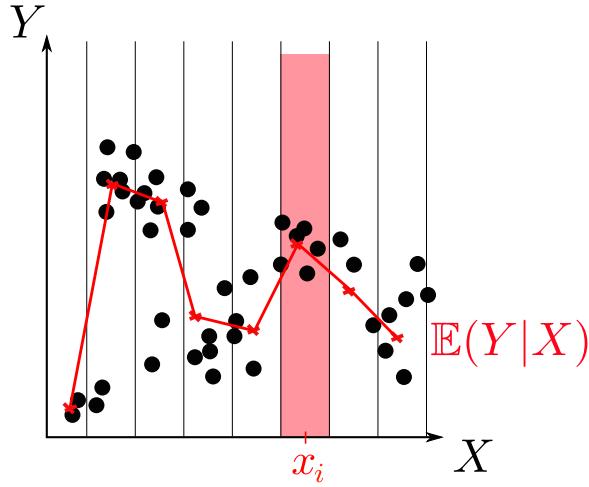


FIGURE 6.5 – Exemple d'approximation non-linéaire de la relation entre X et Y par $\varphi(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$. Cette approximation est ici réalisée en discréétisant les valeurs de X .

2. Mesurer la qualité de l'approximation.

La fonction approchant le mieux l'ensemble des valeurs (x, y) d'un échantillon de deux variables ($X \in \Omega_X$, $Y \in \Omega_Y$), au sens des moindres carrés, est la fonction :

$$\varphi(x) = \mathbb{E}(Y|X = x), x \in \Omega_X \quad (6.7)$$

Le ratio de corrélation η se définit à partir de φ et mesure alors la qualité de l'approximation des valeurs de Y par la fonction φ :

$$\eta(Y; X) = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))}{\text{Var}(Y)} \quad (6.8)$$

Une possibilité d'estimation de $\varphi(x)$ est illustré en figure 6.5 : nous discréétiserons les valeurs de X en n valeurs (x_1, \dots, x_n) et prendrons $\varphi(x_i)$ comme la moyenne des valeurs de Y dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Le ratio de corrélation n'est pas symétrique. Par le fait qu'il s'appuie sur un rapport, il n'est pas sensible à une transformation linéaire de Y et est sans unité.

6.4.2 Application du ratio de corrélation à CxSOM

Nous utilisons à présent le ratio de corrélation pour quantifier la relation fonctionnelle entre U et $\Pi^{(i)}$, sur une architecture de deux cartes après apprentissage. Le but ici est d'illustrer comment cet indicateur traduit les observations réalisées graphiquement sur le modèle CxSOM, afin de valider son utilisation et de comprendre ce qu'il représente.

Nous reprenons trois exemples de modèles d'entrées tirés du chapitre précédent :

6.4. Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le ratio de corrélation

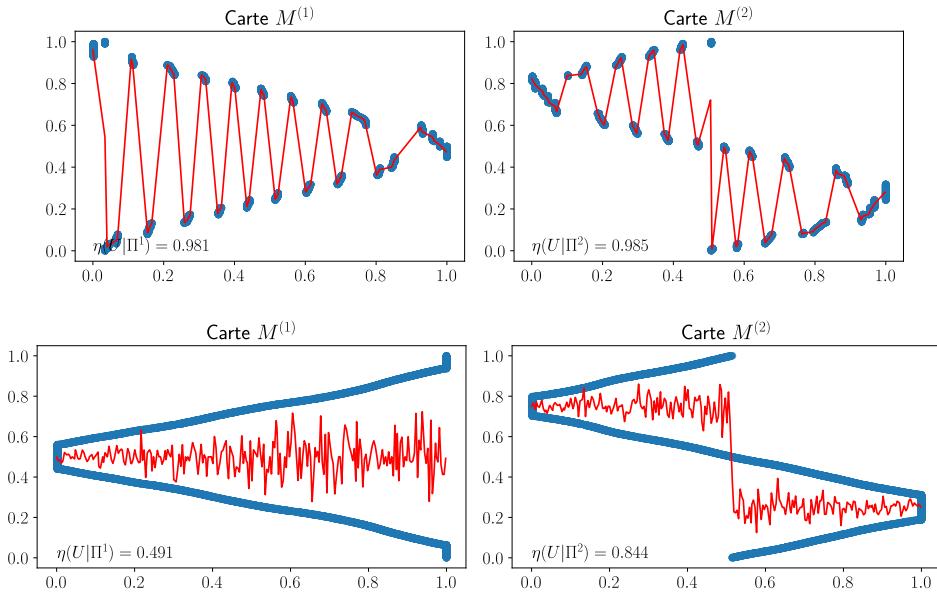


FIGURE 6.6 – Tracé du ratio de corrélation et de φ sur des entrées placées sur un cercle, dans le cas de CxSOM et d'une carte simple. $\varphi(p) = \mathbb{E}(U|\Pi = p)$ est tracée en rouge. Nous observons que $\varphi(p)$ permet bien d'approximer la relation fonctionnelle entre U et Π dans chaque carte, en haut, ce qui se traduit sur la valeur du ratio de corrélation : $\eta(U; \Pi^{(1)}) = 0.98$, $\eta(U; \Pi^{(2)}) = 0.99$. Au contraire, le ratio de corrélation est plus faible dans le cas des cartes simples, en bas.

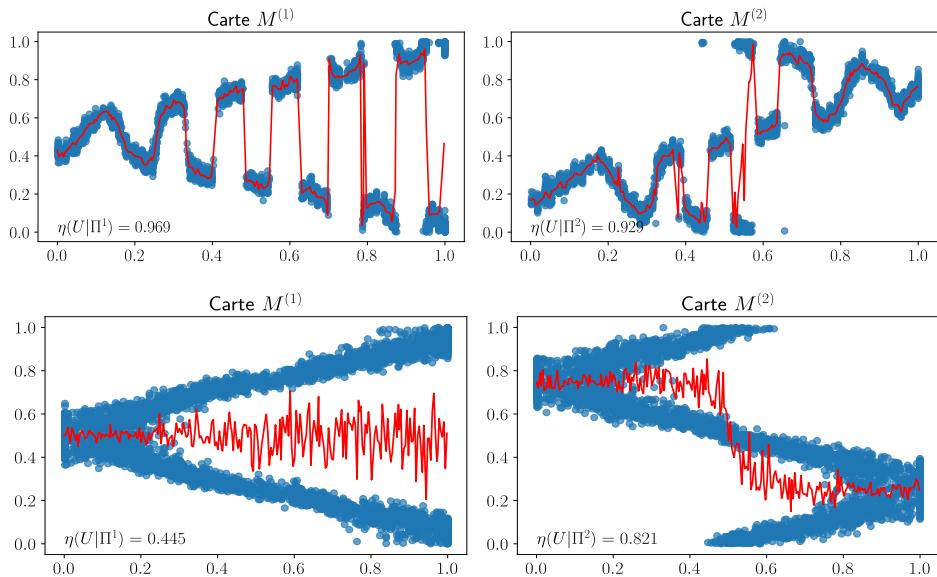


FIGURE 6.7 – Tracé du ratio de corrélation et de φ sur des entrées placées sur un anneau, dans le cas de CxSOM et d'une carte simple. Les données d'entrées sont bruitées, ce qui conduit à une dispersion plus élevée de U pour chaque valeur de Π , tout en restant dans un seul intervalle. Le ratio de corrélation traduit toujours correctement que la relation entre U et Π s'approche d'une fonction et reste plus élevé que dans le cas des cartes simples.

- Lorsque les entrées sont tirées sur le cercle de centre 0.5 et de rayon 0.5 (Entrées **A**, figure 4.7). U correspond à l'angle du point sur le cercle.
- Lorsque les entrées sont tirées sur un anneau, construit en ajoutant un bruit aux points de centre 0.5 et de rayon 0.5. (Entrées **F**). U correspond également à l'angle du point sur le cercle et l'indicateur doit pouvoir refléter l'apprentissage de U malgré le bruit sur les entrées.
- Lorsque les entrées sont tirées sur une courbe de Lissajous (Entrées **D**). U est le paramètre de la courbe.

Nous comparerons les valeurs du ratio de corrélation obtenues dans l'architecture, à celles obtenu dans le cas de deux cartes simples qui prennent $X^{(1)}$ ou $X^{(2)}$ en entrées. Dans ce dernier cas, les cartes ne présentent pas de relation fonctionnelle entre U et Π .

Nous représentons d'abord le tracé de U selon Π dans chaque carte, après apprentissage, en figure 6.6 pour le cercle et en figure 6.7 pour l'anneau. (Voir figure 5.13 pour la courbe de Lissajous). Nous y traçons également la fonction $\mathbb{E}(U|\Pi)$, qui approxime le nuage de points par une fonction. Les valeurs des ratios de corrélation calculés dans chacun des cas sont indiqués au tableau 6.1. Nous y ajoutons également les valeurs de $\eta(U; X^{(1)})$ et $\eta(U; X^{(2)})$, qui quantifient la relation initiale entre chaque entrée et U .

Nous observons sur les tracés que la relation fonctionnelle entre U et Π est bien approximée par $\mathbb{E}(U|\Pi)$ dans le cas de l'architecture de cartes. Les valeurs de $\eta(U; \Pi^{(1)})$ et $\eta(U; \Pi^{(2)})$ sont alors proches de 1. Dans le cas de l'anneau, $\mathbb{E}(U|\Pi)$ approxime également bien la relation fonctionnelle, même bruitée, ce qui se traduit sur la valeur de l'indicateur qui reste élevée : $\eta(U; \Pi^{(1)}) = 0.96$ et $\eta(U; \Pi^{(1)}) = 0.94$. L'indicateur différencie donc bien le bruit local sur U , de l'existence de deux intervalles de valeurs séparés de U pour une même position Π .

Dans le tableau, nous notons par contre que $\eta(U; X^{(2)}) \approx 0.8$ dans chacun des modèles d'entrées ; cette valeur est proche de 1, alors que la relation n'est pas « plus fonctionnelle » que celle existant entre U et $X^{(1)}$, pour laquelle $\eta(U; X^{(1)}) \approx 0.4$. Intuitivement, on s'attendrait à ce qu'un indicateur prenne une valeur similaire pour $\eta(U; X^{(1)})$ et $\eta(U; X^{(2)})$. Cette observation suggère que la valeur seule du ratio de corrélation nous permet mal de quantifier de valeur absolue la qualité de la relation fonctionnelle. Le ratio de corrélation apparaît donc comme un bon indicateur de la relation fonctionnelle entre U et $\Pi^{(i)}$, mais sa valeur devra être comparée à $\eta(U; X^{(i)})$ pour pouvoir l'interpréter.

Enfin, nous traçons en figure 6.8 l'évolution du ratio de corrélation sur les 200 premiers pas d'apprentissage des cartes. Nous observons que $\eta(U; \Pi)$ garde une valeur élevée tout au long de l'apprentissage pour CxSOM. Le ratio de corrélation ne traduit donc pas l'organisation des poids. En effet, il ne prend pas en compte la proximité des positions. Deux valeurs discrétisées de Π ont la même influence dans le calcul, qu'elles soient proches ou distantes dans la carte. Or, chaque carte définit son BMU en fonction de $X^{(1)}$ et de son entrée contextuelle $\Pi^{(2)}$, qui représente

6.4. Évaluation de la relation fonctionnelle entre U et Π par le ratio de corrélation

TABLE 6.1 – Comparaison des valeurs du ratio de corrélation sur plusieurs expériences.

	Entrées		CxSOM		Cartes Simples	
	$\eta(U; X^{(1)})$	$\eta(U; X^{(2)})$	$\eta(U; \Pi^{(1)})$	$\eta(U; \Pi^{(2)})$	$\eta(U; \Pi^{(1)})$	$\eta(U; \Pi^{(2)})$
Cercle	0.45	0.84	0.98	0.99	0.49	0.84
Anneau	0.43	0.83	0.97	0.93	0.44	0.82
Lissajous	0.81	0.80	0.96	0.94		

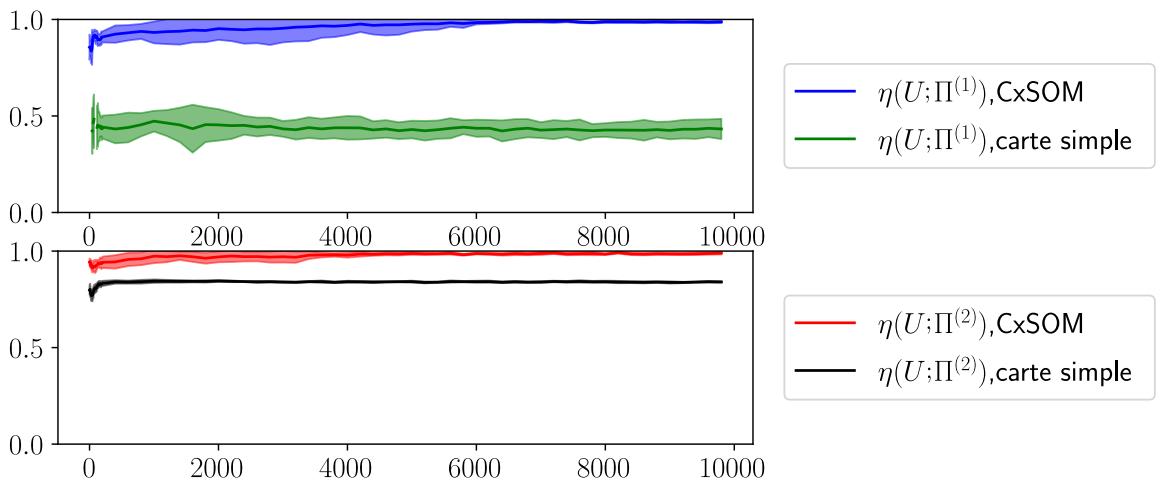


FIGURE 6.8 – Évolution du ratio de corrélation pendant l'apprentissage d'une architecture de deux cartes sur des entrées en cercle. Les tracés correspondent à la moyenne et l'écart-type du ratio, calculés sur 10 expériences. Le ratio de corrélation reste plus faible dans les cartes simples que dans les cartes CxSOM. Il garde une valeur élevée tout au long de l'apprentissage : le ratio de corrélation ne traduit pas l'organisation des poids, mais vérifie simplement si une carte a un BMU différent pour chaque valeur de U .

directement $X^{(2)}$, même au début de l'apprentissage. U est donc une fonction du BMU dans chaque carte dès le début de l'apprentissage, ce qui est observé sur la courbe d'évolution. Nous pourrions par exemple remplacer la discréétisation de Π par une fenêtre glissante afin de mieux représenter la continuité des positions.

6.4.3 Discussion

En conclusion, nous cherchions un indicateur numérique permettant de quantifier l'encodage du modèle d'entrées dans chaque carte, afin de caractériser des expériences pour lesquelles U est de grande dimension, et d'avoir une valeur numérique permettant de comparer plusieurs expériences et d'optimiser les paramètres de l'architecture. Le ratio de corrélation $\eta(U; \Pi)$ est une mesure statistique qui exprime par définition la relation fonctionnelle existante entre U et

Π . Cette mesure nécessite de discréteriser les valeurs de Π , mais pas celles de U ; l'aspect continu de U est donc bien traduit par η , contrairement à U_c . Il est adaptable pour des cartes en 2D, ainsi que des U en grande dimension. Il s'agit donc d'une mesure appropriée de la relation fonctionnelle entre U et Π dans chaque carte. Cette relation fonctionnelle est caractéristique de l'apprentissage de la relation entre les entrées dans des architectures de deux et trois cartes. Cependant, il faut noter que sa valeur devra être comparée à la valeur qu'il prend initialement dans le modèle d'entrées.

6.5 Comment utiliser l'information mutuelle continue comme indicateur d'un apprentissage ?

Le ratio de corrélation et le coefficient d'incertitude ont proposé deux manières différentes de mesurer le fait que U est une fonction du BMU dans chaque carte. Bien que le coefficient d'incertitude U_c s'appuie sur l'information mutuelle, l'indicateur que nous avons présenté n'en est pas une véritable estimation, par la discréétisation à gros grains de U .

Sur des architectures à plus de trois cartes, il n'est pas certain ni même souhaitable que U soit une fonction de la position du BMU dans toutes les cartes d'une architecture, mais plutôt que la représentation de U soit distribuée entre les cartes, tout en présentant de la redondance en terme d'information. Nous envisageons donc dans cette section des perspectives d'utilisation de l'information mutuelle entre U et les positions des BMU ($\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$) pour analyser l'apprentissage du modèle dans une architecture de cartes.

6.5.1 Évolution de l'information mutuelle entre U et Π au cours d'un apprentissage

Nous nous intéressons à l'information mutuelle continue entre U et Π , que nous estimons grâce à la méthode des KNN, présentée en section 6.2.2. Contrairement à l'estimation à gros grains réalisée en section précédente pour U_c , il s'agit maintenant d'une véritable estimation de la valeur de l'information mutuelle entre les deux variables continues que sont Π et U .

En figure 6.9, nous traçons l'évolution de l'information mutuelle dans les deux cartes au cours de phases de test réalisées tout au long de l'apprentissage. Nous observons que l'information mutuelle entre U et Π évolue vers une valeur qui est plus élevée dans une carte isolée que dans une architecture CxSOM. Ce résultat est étonnant : cela signifie donc que chaque carte au sein de CxSOM encode en fait moins d'information sur le modèle d'entrées qu'une carte isolée, qui ne reçoit pourtant que l'entrée $X^{(1)}$ ou $X^{(2)}$, c'est-à-dire une partie du modèle. Nous interprétons ce résultat par le fait que l'information apprise sur le modèle par une carte n'est pas répartie de la même façon dans les deux expériences. Dans une carte indépendante, le niveau de quantification

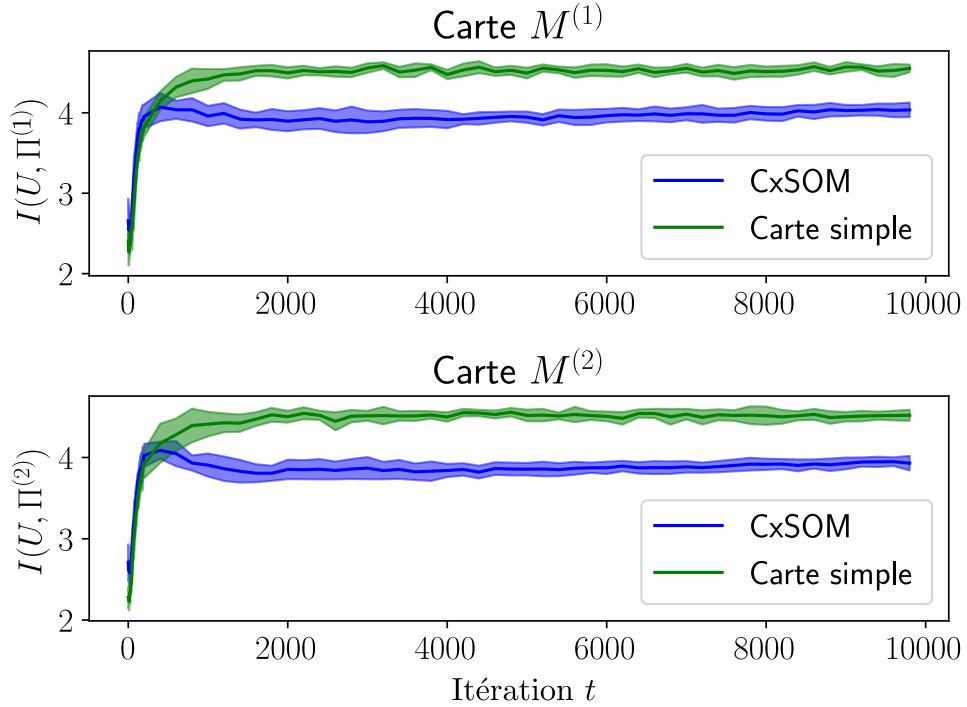


FIGURE 6.9 – Évolution de $I(U, \Pi)$ dans chaque carte au long de l'apprentissage, estimé par la méthode des KNN (cf.équation 6.5). Sa valeur est moyennée sur 10 expériences. Nous comparons les valeurs obtenues dans une architecture CxSOM, en bleu, au cas d'une carte apprenant indépendamment sur les mêmes entrées $X^{(1)}$ ou $X^{(2)}$. Le même échantillon U a été utilisé lors de chaque phase de test pour une même expérience. Nous observons que les positions des BMU d'une carte indépendante partagent plus d'information avec U que dans le cas de CxSOM.

vectorielle sur X est plus précis que celui que nous avions observé dans CxSOM. Or, l'encodage de la valeur X donne déjà beaucoup d'information sur le modèle U . Dans CxSOM, on perd ce niveau de quantification sur X , ce qu'on a observé en figure 4.6. On perd donc de l'information sur X .

Le fait que l'information mutuelle soit plus élevée dans une carte indépendante dans les deux expériences traduirait ainsi une perte d'information sur l'entrée X dans CxSOM par rapport à une carte simple, à cause de la perte de précision en quantification vectorielle. La valeur de l'information mutuelle comprend à la fois le gain d'information qui existe sur $X^{(2)}$ au sein de $M^{(1)}$, donc sur U (et inversement), et la perte d'information sur $X^{(1)}$. Il est probable que cette perte d'information domine dans le calcul, d'où la perte globale d'information. Les cartes effectueraient donc un compromis : chacune gagne de l'information sur le modèle U , au détriment de l'information apprise sur l'entrée externe.

Afin de mieux analyser l'apprentissage du modèle d'entrées par les cartes, nous pouvons envisager des méthodes permettant de séparer l'information entre variables. Elles nous permettraient de mesurer le gain d'information sur U dans une ou plusieurs cartes sans s'intéresser à

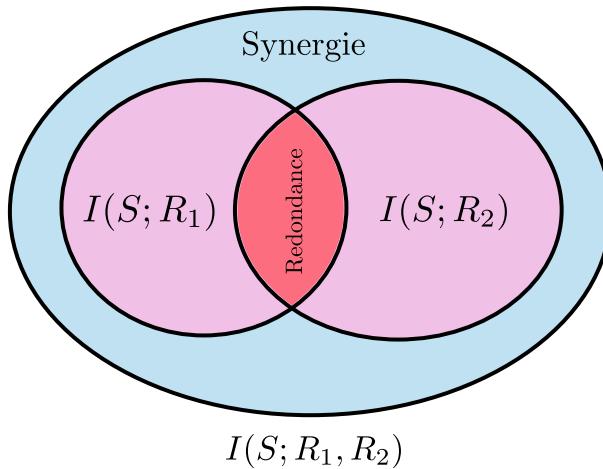


FIGURE 6.10 – Illustration des notions d’information *redondante* et *synergique* entre une variable S et deux variables R_1 et R_2 , schéma adapté de [Williams et Beer 2010](#). Ces travaux définissent une façon de séparer l’information que portent des variables R_1 et R_2 sur une source S . La redondance est l’information apportée à la fois par R_1 et R_2 ; la synergie est celle qui n’est apportée que par leur jointure (R_1, R_2).

l’information gagnée ou perdue sur l’entrée externe X . Nous avions en fait utilisé une méthode de séparation de cette information lors de l’estimation du coefficient d’incertitude U_c : le fait de discréteriser grossièrement la distribution de U a permis de mesurer le gain d’information sur U , sans prendre en compte l’affaiblissement de la précision de la quantification de l’entrée externe.

Cette perte d’information pose néanmoins une question concernant la création d’architectures contenant de nombreuses cartes et U de grande dimension : jusqu’à quel point une carte peut-elle se permettre de perdre de l’information sur l’entrée externe pour gagner de l’information sur le modèle ? Cette observation renforce l’idée que l’encodage d’une variable U en grande dimension dans une architecture devra être distribué entre les cartes et ne peut être réalisé indépendamment dans chaque carte. D’après les seules observations réalisées sur deux et trois cartes dans cette thèse, nous ne pouvons pas affirmer ou non si cette propriété sera vérifiée, en raison de la taille de l’architecture. Cela constitue une perspective de travaux futurs pour le développement du modèle.

6.5.2 Ouvertures possibles

Les indicateurs proposés dans ce chapitre ont permis d’évaluer un apprentissage du modèle indépendamment dans chaque carte. La mesure de l’information mutuelle dans une architecture de cartes ne se réduit pas au calcul de $I(U, \Pi)$; de nombreuses grandeurs nous semblent intéressantes à explorer pour une meilleure compréhension de l’apprentissage du modèle dans des architectures comportant plus de cartes.

Nous pouvons tout d'abord noter que la méthode d'estimation par KNN présentée dans ce chapitre est une méthode classique d'estimation de l'information, mais il existe de nombreuses autres méthodes (Doquire et Verleysen 2012). Des méthodes ont également été développées pour la mesure de l'information mutuelle entre variables continues et discrètes (Ross 2014; Gao et al. 2017). Enfin, l'information mutuelle a été utilisée pour analyser l'apprentissage de réseaux de neurones profonds en Shwartz-Ziv et Tishby 2017 ou encore directement comme métrique d'apprentissage en Hjelm et al. 2018. Cette grandeur est ainsi bien documentée et donc pertinente à utiliser dans des travaux futurs.

Ensuite, nous avons soulevé le besoin de séparer les sources d'information sur U et d'étudier son encodage distribué dans l'architecture. Il serait possible de s'intéresser à la notion d'information mutuelle multivariée : étant donné une variable cible S et deux variables R_1 et R_2 , $I(S; R_1, R_2)$ désigne l'information mutuelle entre S et la variable jointe (R_1, R_2) . Nous pourrons par exemple mesurer $I(U; \Pi^{(1)}, \Pi^{(2)})$. Il est également possible de décomposer cette information multivariée : Williams et Beer 2010 définit, en plus de l'information mutuelle, la notion de redondance et de synergie entre variables, illustrée en figure 6.10. La redondance est l'information sur S portée à la fois par R_1 et par R_2 , et la synergie l'information portée seulement par la jointure des variables R_1 et R_2 . Le calcul de telles grandeurs permettrait de séparer l'information gagnée sur U et X dans une carte. Le calcul de ces grandeurs entre les entrées, le modèle d'entrées et les BMU des cartes CxSOM sont donc une piste d'étude pour une compréhension de l'encodage de l'information dans une architecture de cartes et pour la définition d'un indicateur ciblant spécifiquement le gain d'information sur U lors de l'apprentissage.

6.6 Conclusion

Ce chapitre utilise la méthode de représentation des éléments des cartes comme des variables aléatoires proposée au chapitre 4 pour proposer des indicateurs de l'apprentissage multimodal au sein de l'architecture. Les représentations visuelles sont en effet limitées dans des architectures de plus de deux ou trois cartes, et pour des données en plus grande dimension. La définition d'un indicateur permettra également de comparer l'apprentissage d'architecture, autorisant par exemple l'optimisation automatique des paramètres de l'architecture de cartes.

Dans ce chapitre, nous avons introduit deux indicateurs permettant de mesurer que U est une fonction de Π dans chacune des cartes de l'architecture : le ratio de corrélation $\eta(U; \Pi)$ et le coefficient d'incertitude $U_c(U|\Pi)$. Nous avons en effet observé dans les deux chapitres précédents que cette relation fonctionnelle marque l'apprentissage du modèle dans des architectures de deux ou trois cartes en une dimension. Le coefficient d'incertitude est une version normalisée de l'information mutuelle. Il doit être estimé par histogrammes et est donc très sensible aux paramètres d'estimation, ce qui rend son utilisation peu adaptée comme indicateur. De plus, la

discrétisation de U est difficilement réalisable pour des variables de grande dimension. Le ratio de corrélation permet de mesurer directement la relation fonctionnelle entre U et Π , en passant par l'estimation de $\mathbb{E}(U|\Pi)$. Dans un but de mesure de la relation fonctionnelle entre U et Π , nous avons observé que le ratio de corrélation est à privilégier, car il est estimable pour des valeurs de U en toute dimension et ne dépend pas de la taille d'intervalle choisie pour U . Sa valeur devra cependant être comparée aux valeurs du ratio de corrélation sur les données d'entrée $\eta(U; X)$.

La relation fonctionnelle entre U et Π n'est toutefois pas une propriété souhaitable dans des plus grandes architectures ou des U de plus grande dimension, car elle semble induire une forte perte d'information sur l'entrée externe au profit d'un grain d'information sur le modèle. On voudrait plutôt que la représentation de U soit distribuée entre les cartes. Pour étudier l'apprentissage associatif dans un cadre plus général, nous suggérons aux travaux futurs de s'intéresser à des mesures d'information mutuelle multivariée entre U et toutes les valeurs des BMU ($\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(n)}$) au sein des architectures de cartes.

Finalement, ce chapitre montre que la représentation des éléments d'une carte et des entrées comme variables aléatoires, que nous avons proposée au chapitre 4, est une méthode pertinente pour la compréhension des comportements d'apprentissage du modèle CxSOM. Cette approche « comportementale », et non basée sur les poids des cartes, rapproche l'étude des cartes de Kohonen et de CxSOM des algorithmes d'apprentissage supervisés, dont les entrées et sorties sont bien définies. Les représentations proposées et les perspectives d'études par l'information mutuelle mentionnées ci-dessus sont donc générales aux SOMs et à d'autres types d'architectures d'apprentissage.