1. Ma trận và định thức

1.1 Ma trận

1.1.1 Các khái niệm

1.1.2 Các dạng ma trận

1.1.3 Các phép toán trên ma trận

1.2 Định thức

1.2.1 Các khái niệm

1.2.2 Các tính chất cơ bản

1.3 Ma trận nghịch đảo

1.1 Ma Trận

1.1.1 Các khái niệm

Định nghĩa: Một bảng số hình chữ nhật có m hàng n cột được gọi là ma trận cỡ m×n.

Ma trận A cỡ m×n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Phần tử của ma trận A thuộc hàng i cột j ký hiệu là a_{ij} hay $(\mathrm{A})_{ij}$.
- Ta có thể kí hiệu ma trận A như sau: $\mathrm{A}=\left(a_{\mathrm{ij}}\right)_{m\times n}$.

• Tập tất cả các ma trận cỡ m×n ký hiệu là Mat(m×n).

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad 7 = a_{23}$$

là một ma trận cỡ 3×4.

• Hai ma trận $A, B \in Mat(m \times n)$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu A=B khi và chỉ khi:

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

• Ma trận đối của ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ký hiệu -A và xác định như sau: $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$.

Ví dụ: Ma trận đối của ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ là } -A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

• Ma trận cỡ m×n có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận không cỡ m×n ký hiệu: $O_{m\times n}$.

Ví dụ

$$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Ma trận chuyển vị của ma trận A cỡ $m\times n$ ký hiệu A^T là một ma trận cỡ $n\times m$ xác định như sau:

$$\left(A^T\right)_{ij} = \left(A\right)_{ji}.$$

Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Các dạng ma trận

• ***Ma trận hàng:*** Là ma trận chỉ có một hàng. Ma trận hàng cỡ 1×n có dạng

$$X = \left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

- ***Ma trận cột:*** Là ma trận chỉ có một cột. Ma trận hàng cỡ m×1 có dạng

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(y_1, \ldots, y_m\right)^T.$$

- ***Ma trận vuông cấp n:*** là ma trận cỡ n×n (số hàng bằng số cột), nó có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *các phần tử:* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính của A.*
- *các phần tử:* $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ *được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo phụ của A.*

• **Ma trận đơn vị cấp n:** Ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0. Ký hiệu I_n .

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

$$I_1 = (1),\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Ma trận đối xứng:** Ma trận $A \in Mat(n \times n)$ được gọi là ma trận đối xứng khi và chỉ khi:

$$(A)_{ij} = (A)_{ji};\ \forall i, j = \overline{1,n} \text{ hay } A^T = A.$$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- **Ma trận tam giác:** Ma trận $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ được gọi là ma trận tam giác trên (dưới) nếu và chỉ nếu tất cả các phần tử nằm phía dưới (trên) đường chéo chính đều bằng 0.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ma trận tam giác trên. Ma trận tam giác dưới.

- **Ma trận chéo:** Ma trận $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ được gọi là ma trận chéo khi và chỉ khi tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.1.3 Các phép toán trên ma trận

a) Phép cộng (trừ) hai ma trận. Cho $A, B \in Mat(m \times n)$.

Tổng (hiệu) của A và B là một ma trận cỡ m×n, ký hiệu A+B (A-B), xác định như sau:

$$(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij}.$$

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Tính chất

$$i)\ (A+B)+C=A+(B+C). \qquad ii)\ A+B=B+A.$$

$$iii)\ A+O=O+A=A. \qquad iv)\ A+(-A)=O.$$

$$v)\ A-B=A+(-B). \qquad vi)\ (A+B)^T=A^T+B^T.$$

Chú ý: Các ma trận trong một đẳng thức cùng cỡ.

b) Phép nhân một số với ma trận. Cho $\lambda \in \mathbb{R}$ và ma trận A cỡ $m \times n$. Tích của λ và A, ký hiệu là λA, là một ma trận cỡ $m \times n$ xác định như sau:

$$(\lambda A)_{ij}=\lambda(A)_{ij},\ \forall i=\overline{1,m};\ i=\overline{1,\mathrm{n}}$$

Ví dụ

$$3\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 5\\ 7 & 6 & 2\\ 5 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & -6\\ 6 & -12 & 15\\ 21 & 18 & 6\\ 15 & 3 & 24\end{pmatrix}$$

Nhận xét

$$1\times A = A;\ 0\times A = O;\ -1\times A = -A;\ \lambda O = O.$$

Tính chất

$i)\ \lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)=(\lambda\mu)A.$ $ii)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

$iii)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$ $iv)\ (\lambda A)^T=\lambda A^T.$

c) Phép nhân hai ma trận. Cho $A \in Mat(m \times n)$ và $B \in Mat(n \times p)$. Tích của hai ma trận A và B là một ma trận cỡ $m \times p$, ký hiệu là AB, xác định như sau:

$$(AB)_{ij} = (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \ldots + (A)_{in}(B)_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

Nhận xét: Để tính phần tử $(AB)_{ij}$ ta lấy hàng i của ma trận A nhân với cột j của ma trận B như nhân vô hướng.

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 25 & 17 \\ 30 & -4 & 50 & 34 \\ 8 & 8 & 36 & 17 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

$$O_{m\times n} \times A_{n\times p} = O_{m\times p};\ I_m \times A_{m\times n} = A;\ A_{m\times n} \times I_n = A$$

Tính chất

$$i)\ (AB)C = A(BC) := ABC.\ ii)\ (A+B)C = AB + BC.$$

$$iii)\ A(B+C) = AB + AC. \qquad iv)\ (AB)^T = B^T A^T.$$

Chú ý: Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

• **Lũy thừa ma trận.** Cho $A \in Mat(n\times n)$ khi đó ta định nghĩa phép lũy thừa ma trận như sau:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^2 = A\times A;\ \ldots;\ A^k = \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{k}.$$

Nhận xét

$$i)\ A^k = \underbrace{\left(A\times A\times\ldots\times A\right)}_{k-1}\times A = A^{k-1}\times A.$$

$$= A\times\underbrace{\left(A\times A\times\ldots\times A\right)}_{k-1} = A\times A^{k-1}.$$

$$ii)\ {I_n}^k = I_n.$$

Ví dụ.

➢ Tính $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2020} = ?$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 64 & 48 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

vậy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2020} = \begin{pmatrix} 4^{2020} & 2020.4^{2019} \\ 0 & 4^{2020} \end{pmatrix}.$$

➢ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2001} = ?$

1.2 Định thức

1.2.1 Khái niệm

Định nghĩa.

- Định thức cấp 1: Cho $A = (a_{11}) \in Mat(1 \times 1)$. Ta gọi định thức của A hay định thức cấp 1 là một số cho bởi

$$\det A = a_{11}.$$

- Định thức cấp 2: Cho $A = \left(a_{ij}\right) \in Mat(2 \times 2)$. Ta gọi định thức của A hay định thức cấp 2 là một số cho bởi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Định thức cấp 3: Cho $A = \left(a_{ij}\right) \in Mat(3 \times 3)$. Ta gọi định thức của A hay định thức cấp 3 là một số cho bởi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- Định thức cấp n: Cho $A = (a_{ij}) \in Mat(n \times n)$. Ta gọi định thức của A hay định thức cấp n là một số cho bởi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}D_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j}.$$

trong đó, D_{ij} là định thức cấp $n - 1$ nhận được từ định thức A bằng cách bỏ đi hàng i cột j. Công thức trên được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng thứ nhất.

Ví dụ.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - 2.5 = 8.$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 43.$

Chú ý. Định thức cấp 3 có thể tính theo qui tắc Sarrius

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21})$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Có ba hạng tử mang dấu cộng bao gồm tích các phần tử nằm trên đường chéo chính và tích các phần tử nằm trên đỉnh của tam giác cân có cạnh đáy song song với đường chéo chính. Ba hạng tử mang dấu trừ bao gồm tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ và tích các phần tử nằm trên đỉnh của tam giác cân có cạnh đáy song song với đường chéo phụ.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \left[2.4.4+5.(-6).1+1.3.7\right] - \left[1.4.1+5.3.4+2.7.(-6)\right] = 43.$$

1.2.2 Các tính chất cơ bản

- *Công thức khai triển định thức theo cột thứ nhất*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}D_{n1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1}.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 43.$$

Nhận xét.

Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính. Đặc biệt: $\det(I_n) = 1$.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5.(-3).4 = -60.$$

- *Định thức ma trận bất biến dối với phép chuyển vị.*

$$A \in Mat(n \times n):\ \det\left(A^T\right) = \det(A).$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 43.$$

Vậy ta có:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 43.$$

- *Định thức đổi dấu nếu ta đổi chổ hai hàng (cột).*

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 60.$$

➢ **Hệ quả.** *Định thức có hai hàng (cột) giống nhau thì định thức bằng không.*

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

- *Công thức khai triển định thức theo hàng i, cột j*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{1+j} a_{2j} D_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -480.$$

➢ **Hệ quả.** *Định thức có một hàng (cột) toàn số không thì bằng không.*

• *Ta có thể đưa nhân tử chung của một hàng hay cột ra ngoài định thức.*

➢ **Hệ quả.** *Định thức có hai hàng (cột) tỉ lệ thì bằng không.*

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

• *Mỗi định thức đều có thể phân tích thành tổng của hai định thức với hàng i_0 (cột j_0) của nó bằng tổng hàng i_0 (cột j_0) của hai định thức mới còn các hàng (cột) khác* vẫn giữ nguyên, tức là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 4+x & 2 & x \\ 6+y & 3 & y \\ 2+z & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ 6 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ y & 3 & y \\ z & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

- *Định thức không đổi nếu ta cộng vào một hàng (cột)* *tích của một hàng (cột) khác với một số.*

Ví dụ.

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{H_2 \to H_2 - 4H_1 \\ H_3 \to H_3 - 3H_1 \\ H_4 \to H_4 - 2H_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{H_4 \leftrightarrow H_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \overset{\substack{H_3 \to H_3 - 2H_2 \\ H_4 \to H_4 - 7H_2}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{H_4 \to H_4 + H_3}{=} -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -160.$$

2) $$\begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix} \overset{H_1 \to H_1 + H_2 + H_3 + H_4}{=} \begin{vmatrix} 3x & 3x & 3x & 3x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix} \overset{H_i \to H_i - xH_1}{=} 3x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -3x^4.$$

- *Định thức của ma trận tích*

$$A, B \in Mat(n \times n) : \det(AB) = \det A \,.\, \det B$$

1.3 Ma trận nghịch đảo

1.3.1 Khái niệm

- Ma trận $A \in Mat(n \times n)$ được gọi là khả nghịch nếu và chỉ nếu tồn tại ma trận $\mathrm{B} \in Mat(n \times n)$ sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Khi đó B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu: $B = A^{-1}$.

Ví dụ

1) Nghịch đảo của I_n là chính nó.

2) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ khi đó: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Nhận xét

$i)\ (A^{-1})^{-1} = A.$

$ii)$ Nghịch đảo của A nếu có là duy nhất.

$iii)$ Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp và đều khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

- Một ma trận vuông được gọi là không suy biến nếu định thức của nó khác không.

1.3.2 Điều kiện khả nghịch

- Ma trận $A \in Mat(n \times n)$ khả nghịch nếu chỉ nếu A không suy biến và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Ta có: $\det A = -40 \neq 0$ nên A khả nghịch.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A = -\frac{1}{40} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta có $\det A = 108 \neq 0$ nên A khả nghịch.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} -6 & -5 & 19 \\ 30 & 7 & -5 \\ -24 & 16 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Phương trình ma trận

- Cho ma trận $A \in Mat(n \times n)$ khả nghịch và ma trận $B \in Mat(n \times p)$. Khi đó

$$AX = B \leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

• Cho ma trận $A \in Mat(n \times n)$ khả nghịch và ma trận $B \in Mat(p \times n)$. Khi đó

$$XA = B \leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X sao cho

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\det A = -3$ nên A khả nghịch.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow X = A^{-1}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -13 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Đặt: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\det A = -77$ nên A khả nghịch.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A = -\frac{1}{77}\begin{pmatrix} 0 & 22 & -11 \\ 28 & -9 & -13 \\ -21 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow X = BA^{-1} = -\frac{1}{77}\begin{pmatrix} -14 & -23 & 1 \\ -35 & 14 & -14 \\ -84 & -6 & 17 \end{pmatrix}.$$