Rappels sur les opérations ensemblistes

Événements aléatoires (cf. Cours 1 - séance 2)

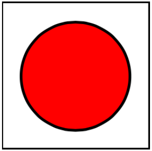
Un événement aléatoire (associé à une expérience aléatoire) est un sous-ensemble de l'espace d'états Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Deux événements particuliers :

- l'*événement impossible*, noté $\emptyset$;
- l'*événement certain*, noté Ω.

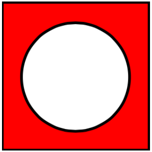
Événement contraire

Soit $A \subset \Omega$ un événement.



L'*événement contraire* de $A \subset \Omega$ est noté A^c :

$$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$



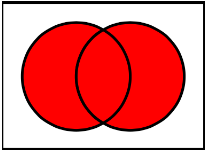
On a les propriétés suivantes :

$$(A^c)^c = A; \quad \emptyset^c = \Omega; \quad \Omega^c = \emptyset.$$

Réunion de deux événements

Pour des événements A, B, on définit un nouvel événement, noté $A \cup B$, la «réunion de A et B» :

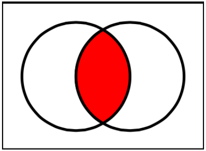
$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \,\text{ou}\, \omega \in B\}$$



Intersection de deux événements

Pour des événements A, B, on définit un autre événement, noté $A \cap B$, l'«intersection de A et B» :

$$\color{red}{A \cap B} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \,\mathrm{et}\, \omega \in B\}$$



Les opérations de réunion et d'intersection sont *commutatives* et *associatives* :

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Les opérations de réunion et d'intersection sont *commutatives* et *associatives* :

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$

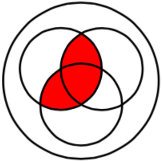
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

On a également les propriétés suivantes :

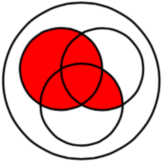
$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$$
$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A;$$
$$A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



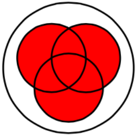
Extension à un nombre fini d'événements

Toute famille finie non vide d'événements $\{A_i, i \in I\}$ possède :

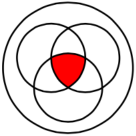
- une réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$;
- une intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Exemple avec I de cardinalité 3 :

$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$



$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$



De même, pour une famille finie non vide d'événements $\{A_i, i \in I\}$, on a

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

De même, pour une famille finie non vide d'événements $\{A_i, i \in I\}$, on a

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Les opérations de réunions et d'intersections sont distributives l'une par rapport à l'autre :

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i); \quad B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$$

Extension à un nombre infini dénombrable d'événements

Si I est un ensemble infini dénombrable, on définit l'événement

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\}.$$

Extension à un nombre infini dénombrable d'événements

Si I est un ensemble infini dénombrable, on définit l'événement

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\}.$$

On définit également l'événement

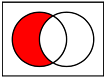
$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega \in A_i\}.$$

Deux événements A, B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.

Deux événements A, B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.

Pour deux événements A, B, on note $B \backslash A$ le *complément relatif de A dans B* :

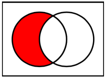
$$B \backslash A = B \cap A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \,\mathrm{et}\, \omega \notin A\}$$



Deux événements A, B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.

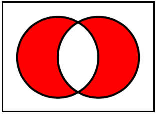
Pour deux événements A, B, on note $B \backslash A$ le *complément relatif de A dans B* :

$$B \backslash A = B \cap A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \,\text{et}\, \omega \notin A\}$$



Leur *différence symétrique*, notée $A \triangle B$ est définie par

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ &= (A \cup B) \backslash (A \cap B) \end{aligned}$$



Événement impliquant un autre événement

On dit que l'événement «A *implique* l'événement B» si

$$\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B.$$

On note $A \subset B$ (ou $B \supset A$).

Événement impliquant un autre événement

On dit que l'événement «A *implique* l'événement B» si

$$\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B.$$

On note $A \subset B$ (ou $B \supset A$).

De manière équivalente, $A \subset B$ si $A = A \cap B$.

Propriétés

La relation d'implication est une relation d'ordre sur l'ensemble des événements :

$$
\begin{aligned}
&A \subset A; \\
&A \subset B,\ B \subset A \Longleftrightarrow A = B; \\
&A \subset B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C.
\end{aligned}
$$

Propriétés

La relation d'implication est une relation d'ordre sur l'ensemble des événements :

$$A \subset A;$$
$$A \subset B,\ B \subset A \Longleftrightarrow A = B;$$
$$A \subset B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

On a également

$$A \subset C,\ B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B \subset C;$$
$$A \supset C,\ B \supset C \Longleftrightarrow A \cap B \supset C.$$

Partition de Ω

Terminons par une notion utile, celle de partition de l'espace d'états Ω :

il s'agit d'une famille $\mathscr{P} = \{A_i, i \in I\}$ de parties non vides de Ω telle que :

- I est un ensemble fini ou plus généralement dénombrable ;
- pour tous $i, j \in I$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Indicatrice d'un ensemble

Une notion très pratique par la suite est celle d'indicatrice d'un ensemble A, notée $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Indicatrice d'un ensemble

Une notion très pratique par la suite est celle d'indicatrice d'un ensemble A, notée $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

On les propriétés suivantes :

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B;\ \mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A;\ \mathbb{1}_{A\triangle B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|.$$

Suite et limite d'événements

Une suite d'évéments $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante si

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \ ;$$

Elle est décroissante si

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \ ;$$

La limite d'une suite d'ensembles n'existe pas en général. Par contre, la limite inférieure et la limite supérieure d'une suite d'ensemble existe toujours :

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

et

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

De manière équivalente on a

$$\omega \in \liminf_n A_n \iff \exists n \text{ tel que } \forall m \geq n, \omega \in A_m$$

et

$$\omega \in \limsup_n A_n \iff \forall n, \exists m \geq n \text{ tel que } \omega \in A_m.$$

$$\omega \in \liminf_n A_n \quad \text{signifie que :}$$

ω est dans tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux

$$\omega \in \liminf_n A_n \quad \text{signifie que :}$$

ω est dans tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux

$$\omega \in \limsup_n A_n \quad \text{signifie que :}$$

ω appartient à une infinité de A_n.

$$\omega \in \liminf_n A_n \quad \text{signifie que :}$$

$$\omega \text{ est dans tous les } A_n, \text{ sauf un nombre fini d'entre eux}$$

$$\omega \in \limsup_n A_n \quad \text{signifie que :}$$

$$\omega \text{ appartient à une infinité de } A_n.$$

Ceci implique que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ alors la limite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et on la note $\lim_n A_n$.

PROPOSITION

- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante alors*

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ ;$$

- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante alors*

$$\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ .$$