ALÉATOIRE - Cours 1

Distribution aléatoire du courrier

Un facteur doit distribuer n lettres adressées à n destinaires distincts. Il est totalement ivre et dépose une lettre au hasard dans chaque boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une distribution correcte du courrier ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une lettre parvienne au bon destinataire ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive au bon destinataire ?
4. Quel est le nombre d_n de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

Solution

1. Il y a en tout $n!$ façons de poster les n lettres et une seule façon de les poster correctement. La probabilité cherchée vaut donc $\frac{1}{n!}$.

2. Numérotons de 1 à n les lettres et numérotons avec les mêmes numéros les boîtes des bons destinataires.

   Appelons A_i l'événement :

   «La lettre №i arrive dans la boîte №i».

   L'événement «au moins une lettre arrive au bon destinataire» est égal à $E = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

   On va appliquer la formule d'inclusion-exclusion démontrée dans l'exercice précédent :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Que vaut $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$?

Il est clair que $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$.

Plus généralement, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.

Que vaut $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$?

Il est clair que $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$.

Plus généralement, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, $\mathbb{P}(E)$ tend vers $1 - e^{-1} \approx 0,632$. On peut vérifier que pour $n = 7$ on est déjà très proche de cette valeur.

3. La probabilité qu'aucune lettre n'arrive au bon destinataire vaut donc

$$\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

et tend donc (très rapidement) vers $e^{-1} \approx 0,368$ avec n.

4. $d_n = n!\mathbb{P}(E^c)$.