ALÉATOIRE - Cours 1

Formule d'inclusion-exclusion

Démontrer la formule suivante, également appelée formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(\cup_{m=1}^{n} A_m) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n+1} p_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} p_k$$

où

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Solution

La formule est triviale pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2). \tag{1}$$

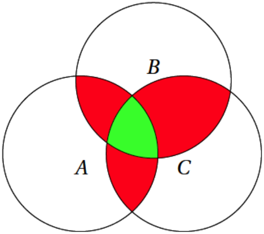
La formule est correcte puisque :

$$p_1 = \sum_{1 \le i_1 \le 2} \mathbb{P}(A_{i_1}) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

et

$$p_2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).$$

Regardons le cas $n = 3$: prenons trois ensembles A, B, C.



Si on dit que la probabilité de l'union est la somme des probabilité $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$, on compte une fois la zone blanche dans A, B, C, deux fois la zone rouge et trois fois la zone verte.

Cette formule se montre par récurrence sur n.