ALEATOIRE - Cours 1 - séance 4

Probabilité Uniforme sur Ω fini

Probabilité Uniforme sur Ω fini

Remarque: $\Omega = \cup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}$. Les singletons sont disjoints deux à deux. Ainsi, comme Ω est fini, nous avons

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$

Définition

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini Ω est uniforme si

$$p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)}.$$

Chaque singleton de Ω a la même chance de réalisation.

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

En effet,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{\omega \in A}\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Le calcul des probabilités se ramène dans ce cas au **calcul combinatoire**.

La difficulté: bien décrire et dénombrer Ω. Elle a engendré de nombreux paradoxes.

Un exemple - Au tribunal

Comment choisir les jurés?

Population de taille N:
N_1 individus pensent qu'un certain suspect est coupable.
$N - N_1$ individus pensent le contraire.

Le tribunal choisit $n \leq N$ jurés.
Quelle est la probabilité que n_1 individus parmi les n jurés choisis pensent que l'individu est coupable?

Choix simultané des jurés.

Dans ce cas, Ω est l'ensemble de toutes les parties à n individus dans la population de N individus.

La probabilité que n_1 individus parmi les n jurés choisis pensent que l'individu est coupable vaut

$$\hat{\mathbb{P}}_{n_1} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}}.$$

Cette probabilité est appelée loi hypergéométrique.

Choix des jurés avec remise.

Dans ce cas, Ω est l'ensemble de toutes les suites de n individus choisis parmi les N individus. Il est possible de répéter plusieurs fois le même individu.

La probabilité que n_1 individus parmi les n jurés choisis pensent que l'individu est coupable vaut

$$\mathbb{P}_{n_1} = \binom{n}{n_1} \frac{N_1^{n_1}(N - N_1)^{n-n_1}}{N^n}.$$

Cette probabilité est appelée loi binomiale.

Autres exemples

Exemple 1: Dans une fabrication en série, une étude statistique préalable a montré que parmi N pièces usinées, M sont à mettre au rebut. Quelle sera la probabilité qu'un échantillon de n pièces choisies simultanément et au hasard sur la chaîne de production contienne k pièces défectueuses?

Exemple 2: On tire au hasard 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces 4 cartes, il y ait exactement deux rois?
Même question si l'on tire une carte, on regarde le résultat, on la remet dans le jeu, et ceci 4 fois de suite.

Taille de population infinie

Plaçons-nous dans le modèle de tirage simultané et supposons que

$$N \longrightarrow +\infty\ ,\ N_1 \longrightarrow +\infty\ ,\ \frac{N_1}{N} \longrightarrow p \in (0,1).$$

Proposition

Les nombres n et n_1 sont fixés. Alors sous les hypothèses précédentes,

$$\hat{\mathbb{P}}_{n_1} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}} \text{ converge vers } \binom{n}{n_1} p^{n_1}(1-p)^{n-n_1}.$$

Quand la population a une très grande taille (infinie), les tirages avec ou sans remise deviennent des expériences aléatoires pratiquement identiques.

En effet, il y aura très peu de chances de choisir deux fois le même individu dans ce cas.

Remarque: Cette réflexion sur le choix de l'échantillon est fondamentale pour une étude statistique.