ALEATOIRE - Cours 1 - séance 2

Expérience aléatoire - Evénements aléatoires

Expérience aléatoire et Espace d'états

Définition: On appelle **expérience aléatoire** une expérience $\mathcal{E}$ qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance.

Définition: L'espace de tous les résultats possibles de l'expérience est appelé **espace d'états**. Il est noté Ω.

Un résultat possible de l'expérience est noté classiquement ω. Ainsi, $\omega \in \Omega$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Exemples

- On lance une pièce: $\Omega = \{P, F\}$, assimilé à $\Omega = \{0, 1\}$.
- On lance un dé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Génotype d'un individu: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}$.
- On étudie n individus: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^n$.
- Romeo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure: $\Omega = [0, 1]$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique: $\Omega = [0, +\infty[$.
- On envoie une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre: $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$.
- Cours d'un actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: $\Omega = C([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$.

Ces exemples sont très différents.

Nous allons néanmoins construire un modèle théorique qui va permettre de les englober tous.

Ce modèle sera forcément très abstrait.

Quelle information pouvons-nous tirer de l'expérience?

Exemple: Le jeu de fléchettes

On s'intéresse à la chance de tomber dans une des couronnes ou un des secteurs de la cible.

Les résultats du jeu peuvent se décrire à l'aide de **parties du disque**.

Pas la température de la pièce!!

Evénements aléatoires

Définition

On appelle **événement aléatoire** *(associé à l'expérience $\mathcal{E}$) un sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.*

Un événement aléatoire A est donc une partie de Ω.

Exemples:

- $\Omega = \{0, 1\}$. "La pièce tombe sur Pile": $A = \{0\}$.
- $\Omega = \{0, 1\}^n, \ \omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$.
  "Le nombre de Faces est supérieur au nombre de Piles":
  $A = \{\omega \in \Omega, \ \sum_{i=1}^n \omega_i \geq \frac{n}{2}\}$.
- "Juliette se fait attendre moins d'1/4 d'heure ": $A = [0, 1/4]$.

Ainsi, un événement aléatoire est représenté par l'ensemble des résultats pour lesquels il est réalisé.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

Opérations ensemblistes et description des événements aléatoires

On peut effectuer des opérations ensemblistes sur les événements, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

- A n'est pas réalisé: A^c
- A et B sont réalisés: $A \cap B$
- A ou B sont réalisés: $A \cup B$
- A réalisé $\Rightarrow$ B réalisé: $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
- toujours vrai: Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).
- Jamais vrai: $\emptyset$ est l'événement impossible.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les événements. Il modélise **l'information** que l'on peut obtenir à partir des résultats de l'expérience.

On peut avoir (mais pas toujours, on verra pourquoi plus loin), $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de toutes les parties de Ω.

Remarque

Pour que la modélisation soit cohérente avec l'intuition, $\mathcal{A}$ doit être ***stable*** *par les opérations ensemblistes:*

si $A, B \in \mathcal{A}$, alors on doit avoir $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, mais aussi $\Omega \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Jeu de fléchettes

Quelle est la chance de tomber dans le disque central rouge?