ALÉATOIRE – Cours 1

« Paradoxe » du chevalier de Méré

Exercice (« Paradoxe » du chevalier de Méré)

D'abord, un peu d'**histoire** et de **lettres**.

Le **chevalier de Méré** était un noble de la cour de **Louis XIV**, où les **paris** sur les **jeux de hasard** étaient très répandus, alors que le calcul des **probabilités** **n**'était **pas** bien établi.

Il est connu pour sa **correspondance** à ce sujet avec **Blaise Pascal**. Ce dernier, dans une **lettre** à **Pierre de Fermat** datée du **29/07/1654**, disait de lui qu'il

> « avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre ».

En tant que **joueur** invétéré, le **chevalier de Méré** avait remarqué que **parier** sur

> « au moins un 6 apparaît dans 4 lancers d'un dé à 6 faces »

était « **avantageux** », c'est à dire avait une **probabilité** de **gain** strictement **supérieure** à 1/2.

Il s'était **persuadé** qu'il y avait la même **probabilité** de **gain** (et donc avantage) à **parier** sur

> « au moins un **double** 6 apparaît dans 24 lancers
> d'un **couple** de dés à 6 faces ».

Pour cela, il utilisait l'« **argument de proportionnalité** » que

$$\mathbb{P}(1 \text{ dé tombe sur } 6) = \frac{1}{6}\,,$$

$$\mathbb{P}(1 \textbf{ couple} \text{ de dés tombe sur } (6,6)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\,,$$

$$24 = 6 \times 4\,.$$

Cet argument serait plutôt **valable** pour le

« **nombre moyen** de 6 qui sortent »,

qui vaut dans les **deux** cas

$$\frac{4}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Pascal a effectué des calculs de **probabilités** pour l'**éclairer**.

Vous allez faire de même. Soit les **événements**

A_1 : « au moins un $\mathbf{6}$ apparaît dans $\mathbf{4}$ lancers d'un dé à $\mathbf{6}$ faces » ;

A_2 : « au moins un **double** $\mathbf{6}$ apparaît dans $\mathbf{24}$ lancers d'un **couple** de dés à $\mathbf{6}$ faces ».

1. Donner un **espace de probabilité** fini $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ pour **modéliser** l'expérience aléatoire correspondant à A_1, puis **calculer** $\mathbb{P}_1(A_1)$.
2. Donner un **espace de probabilité** fini $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ pour **modéliser** l'expérience aléatoire correspondant à A_2, puis **calculer** $\mathbb{P}_2(A_2)$.
3. Comparer $\mathbb{P}_1(A_1)$ et $\mathbb{P}_2(A_2)$, et **conclure**.

Solution (« Paradoxe » du chevalier de Méré)

1. L'**espace de probabilité** naturel est

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^4 , \quad \mathrm{Card}(\Omega_1) = 6^4 = 1296 ,$$

muni de la **probabilité uniforme**

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{6^4} , \ \forall A \subset \Omega , \quad \mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \frac{1}{6^4} , \ \forall \omega \in \Omega .$$

Pour calculer $\mathbb{P}_1(A_1)$, il est **plus simple** de passer au **complémentaire**, et

$$\mathbb{P}_1(A_1) = 1 - \mathbb{P}_1(A_1^c) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0{,}518 > \frac{1}{2} .$$

2. L'**espace de probabilité** naturel est

$$\Omega_2 = (\{1,2,3,4,5,6\}^2)^{24}\,, \quad \mathrm{Card}(\Omega_2) = 36^{24} = 6^{48}\,,$$

muni de la **probabilité uniforme**

$$\mathbb{P}_2(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{36^{24}}\,,\ \forall A \subset \Omega\,, \quad \mathbb{P}_2(\{\omega\}) = \frac{1}{36^{24}}\,,\ \forall \omega \in \Omega\,.$$

Pour calculer $\mathbb{P}_2(A_2)$, en passant au **complémentaire**,

$$\mathbb{P}_2(A_2) = 1 - \mathbb{P}_2(A_2^c) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0{,}491 < \frac{1}{2}\,.$$

3. Le **chevalier de Méré** avait **bien observé** ce qui se passait pour le **premier** jeu, qui est bien **avantageux**.

Il se **trompait** lourdement sur le **second** jeu, qui est en fait **désavantageux**.