ALEATOIRE - Cours 1 - séance 3

Probabilité sur un espace d'état fini

Jeu de Pile ou Face

Comment savoir si la pièce est truquée?

- Un lancé: 1 Pile - on ne peut rien dire.
- 3 lancés: 2 Pile, un Face - on ne peut rien dire.
- 300 lancés: 200 Pile, 100 Face - on commence à se poser des questions $\cdots$
- 3000 lancés: 2000 Pile et 1000 Face - il est presque certain que la pièce est truquée.

C'est la répétition de l'expérience qui nous apporte l'information.

Fréquence empirique de l'événement "Pile": $\frac{2000}{3000} = \frac{2}{3}$.

Cette fréquence nous donne un idée de la chance de réalisation de "Pile" car le nombre de lancés est grand.

fréquence empirique

- Considérons une expérience aléatoire donnée $\mathcal{E}$ et un événement A pour cette expérience.
- **Supposons que l'on répète n fois l'expérience $\mathcal{E}$.**
  - On note n_A le nombre de fois où A est réalisé.
    La fréquence empirique de A est la fréquence de réalisation de A sur ces n coups:
    $$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$
  - On a les propriétés suivantes:
    $$f_n(A) \in [0,1]\ ;\ f_n(\Omega) = 1\ ;$$
    $$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ on a } \quad f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

fréquence empirique

- Considérons une expérience aléatoire donnée $\mathcal{E}$ et un événement A pour cette expérience.
- **Supposons que l'on répète n fois l'expérience $\mathcal{E}$.**
  - On note n_A le nombre de fois où A est réalisé.
    La fréquence empirique de A est la fréquence de réalisation de A sur ces n coups:
    $$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$
  - On a les propriétés suivantes:
    $$f_n(A) \in [0,1] \ ; \ f_n(\Omega) = 1 \ ;$$
    $$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ on a } \quad f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

Approche intuitive d'une Probabilité

Notre but: associer à chaque événement A un nombre $\mathbb{P}(A)$ compris entre 0 et 1, qui représente la chance (a priori) que cet événement soit réalisé.

Intuitivement,

$$\mathbb{P}(A) = \text{ limite de } f_n(A) \text{ quand } n \uparrow +\infty.$$

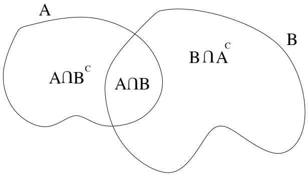
On en déduit immédiatement qu'une probabilité doit vérifier:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1,$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1,$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \text{si} \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset.$

Conditions suffisantes si Ω fini.

Conséquences

- $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1,$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0,$
- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B), \quad \text{si } A \subset B,$
- $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i),$ pour des A_i deux-à-deux disjoints,
- $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$



Probabilité Uniforme sur Ω fini[1]

Chaque singleton de Ω a la même chance de réalisation.

Définition

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini Ω est uniforme si

$$p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)}.$$

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Le calcul des probabilités se ramène au **calcul combinatoire.**

La difficulté: bien décrire et dénombrer Ω. Elle a engendré de nombreux paradoxes.

[1] MAP 311, Chapitre 2, Section 2.2.2

Au tribunal

Comment choisir les jurés?

Population de taille N:
N_1 individus pensent qu'un certain suspect est coupable.
$N - N_1$ individus pensent le contraire.

Le tribunal choisit $n \leq N$ jurés.
Quelle est la probabilité que n_1 individus parmi les n jurés choisis pensent que l'individu est coupable?

Choix des n jurés?

- Choix simultané des jurés. $Card(\Omega) = \binom{N}{n}$.

$$\hat{P}_{n_1} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}}.$$

Cette probabilité est appelée loi hypergéométrique.

- Choix avec remise. $Card(\Omega) = N^n$.

$$P_{n_1} = \binom{n}{n_1}\frac{N_1^{n_1}(N-N_1)^{n-n_1}}{N^n}.$$

Cette probabilité est appelée loi binomiale.