CHƯƠNG 1

KỸ THUẬT PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

Bộ môn CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
Khoa Công nghệ Thông tin & Truyền thông
ĐẠI HỌC CẦN THƠ

MỤC TIÊU

- **Sau khi học xong chương này, sinh viên cần:**
  - Hiểu sự cần thiết phải phân tích đánh giá thuật toán.
  - Biết các tiêu chuẩn để đánh giá một thuật toán.
  - Hiểu khái niệm độ phức tạp của thuật toán.
  - Vận dụng các quy tắc để tính độ phức tạp của chương trình không gọi chương trình con, chương trình có gọi các chương trình con không đệ quy.
  - Vận dụng các phương pháp thành lập phương trình đệ quy.
  - Vận dụng các phương pháp giải phương trình đệ quy

Khái niệm THUẬT TOÁN

- Khái niệm **thuật toán** (**Algorithm**)
  - Thuật toán là một dãy xác định các thao tác cơ bản áp dụng trên *dữ liệu vào* nhằm đạt được *giải pháp* cho một vấn đề.
  - Hai vấn đề :
    (1) Tìm một **phương pháp** giải quyết vấn đề ?
      - Giải pháp cho $ax^2 + bx + c = 0$: rõ ràng và xác định
      - Giải pháp cho $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$: không có giải pháp tổng quát

    (2) Tìm một giải pháp **hiệu quả** ?
  - Phân biệt *thuật toán* và *chương trình*
    - *Chương trình* là cài đặt *thuật toán* bằng một ngôn ngữ lập trình

THUẬT TOÁN LÀ GÌ ?

- Thuật toán
  - Thủ tục tính toán nhận tập các **dữ liệu vào** (input) và tạo các **dữ liệu ra** (output)

  - Thuật toán được gọi là **đúng đắn** (correct), nếu **thuật toán dừng** cho **kết quả đúng** với mọi dữ liệu vào

VÍ DỤ VỀ THUẬT TOÁN ?

- Thuật toán hằng ngày trong cuộc sống
  - Nấu cơm
  - Gọi điện thoại
  - …
- Thuật toán trong toán học/tin học
  - Nhân hai ma trận
  - Tính tích phân
  - Giải hệ phương trình bậc nhất
  - …

CANTHO UNIVERSITY

Các tính chất của THUẬT TOÁN

- **Tính đúng đắn:** Thuật toán cần đảm bảo cho một kết quả đúng.
- **Tính tổng quát:** Thuật toán phải giải quyết được cho một lớp bài toán tương tự.
- **Tính hữu hạn**: Thuật toán phải dừng sau một số bước xác định.
- **Tính xác định**: Các thao tác trong thuật toán phải được đặc tả chặt chẽ, rõ ràng, cụ thể.
- **Tính hiệu quả**: Thuật toán phải sử dụng hiệu quả nguồn tài nguyên máy tính: Thời gian, Bộ nhớ

Đặc tả THUẬT TOÁN

– Có nhiều cách đặc tả thuật toán

- Không hình thức : Ngôn ngữ tự nhiên

Ví dụ: mô tả thuật toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên.

Input: Hai số nguyên a, b.

Output: Ước số chung lớn nhất của a, b.

Thuật toán:

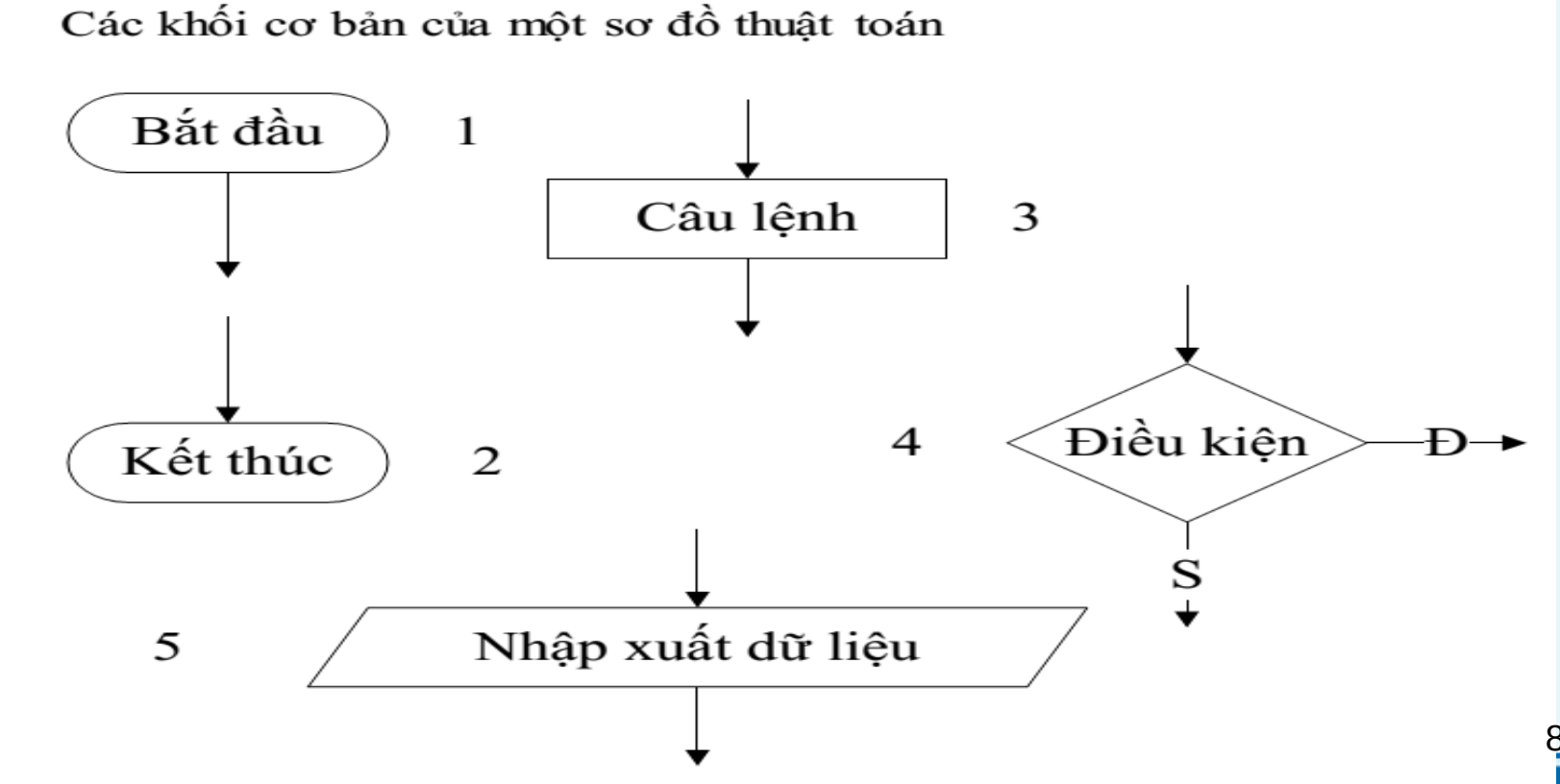
Bước 1: Nếu a=b thì USCLN(a, b)=a.

Bước 2: Nếu a > b thì tìm USCLN của a-b và b, quay lại bước 1;

Bước 3: Nếu a < b thì tìm USCLN của a và b-a, quay lại bước 1;

Đặc tả THUẬT TOÁN

- **Nửa hình thức** : Kết hợp ngôn ngữ tự nhiên và các kí hiệu toán học : Lưu đồ, Sơ đồ khối, …



Đặc tả THUẬT TOÁN

- Hình thức : Ngôn ngữ giả (pseudocode).

Ngôn ngữ Z, ngôn ngữ B, …

if Delta > 0 **then begin**

x_1=(-b-sqrt(delta))/(2*a)

x_2=(-b+sqrt(delta))/(2*a)

xuất kết quả : phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

end

else

if delta = 0 **then**

xuất kết quả : phương trình có nghiệm kép là -b/(2*a)

else {trường hợp delta < 0 }

xuất kết quả : phương trình vô nghiệm

Sự cần thiết phải phân tích, đánh giá thuật toán

- Cần phải phân tích, đánh giá thuật toán để:
  - Lựa chọn một ***thuật toán tốt nhất*** trong các thuật toán để cài đặt chương trình giải quyết bài toán đặt ra.
  - Cải tiến thuật toán hiện có để được một thuật toán tốt hơn.

Tiêu chuẩn đánh giá thuật toán

- Một thuật toán được xem là tốt nếu nó đạt các tiêu chuẩn sau:

(1) Tính đúng đắn

- Chạy trên dữ liệu thử
- Chứng minh lý thuyết (bằng toán học chẳng hạn)

(2) Tính đơn giản

(3) Tính nhanh chóng (thời gian thực thi)

- Rất quan trọng khi chương trình thực thi nhiều lần

= Hiệu quả thời gian thực thi

Thời gian thực hiện chương trình

- Thời gian thực hiện một chương trình là một hàm của kích thước dữ liệu vào, ký hiệu **T(n)** trong đó n là *kích thước (độ lớn) của dữ liệu vào*.

Ví dụ : Chương trình tính **tổng của n số** có thời gian thực hiện là T(n) = Cn trong đó C là một hằng số.

- Thời gian thực hiện chương trình là một hàm không âm, tức là $T(n) \geq 0, \forall\ n \geq 0$.

Đơn vị đo thời gian thực hiện

- Đơn vị của **T(n)** :

  - T(n) không phải là đơn vị đo thời gian bình thường như giờ, phút, giây.

  - T(n) xác định bởi *số các lệnh/chỉ thị* được thực hiện trong một *máy tính lý tưởng*.

- **Ví dụ**: Khi nói thời gian thực hiện của một chương trình là **T(n) = Cn** thì có nghĩa là chương trình cần **Cn** lệnh/chỉ thị thực thi.

Tính ĐỘ PHỨC TẠP

- Độ phức tạp phụ thuộc vào *dữ liệu* sử dụng bởi thuật toán
- **Trường hợp tốt nhất**
  - Dữ liệu được tổ chức sao cho thuật toán hoạt động hiệu quả nhất
  - Giá trị **nhỏ nhất** của độ phức tạp thực tế
- **Trường hợp xấu nhất**
  - Dữ liệu được tổ chức sao cho thuật toán hoạt động kém hiệu quả nhất
  - Giá trị **lớn nhất** của độ phức tạp thực tế
- **Trường hợp trung bình**
  - Dữ liệu tương ứng với sự tổ chức được xem là trung bình
  - Không đơn giản để xác định
  - Thường có ý nghĩa nhất
  - Không là trung bình của độ phức tạp tốt nhất và độ phức tạp xấu nhất

Thời gian thực hiện: 3 trường hợp

- Thời gian thực hiện chương trình không chỉ phụ thuộc vào *kích thước* mà còn phụ thuộc vào *tính chất* của dữ liệu vào *(cùng kích thước dữ liệu vào nhưng thời gian thực hiện chương trình khác nhau)*
- **Ví dụ** *: Tìm kiếm tuần tự*

Thời gian thực hiện trong trường hợp xấu nhất

(1) Trường hợp tốt nhất : so sánh 1 lần
(2) Trường hợp trung bình: so sánh n/2 lần
(3) Trường hợp xấu nhất : so sánh n lần

- Vì vậy, thường xem T(n) là thời gian thực hiện chương trình trong **trường hợp xấu nhất** trên dữ liệu vào có kích thước n.

  Hay: T(n) là **thời gian lớn nhất** để thực hiện chương trình đối với mọi dữ liệu vào có cùng kích thước n.

Tỷ suất tăng của hàm

- Ta nói hàm không âm **T(n)** có **tỷ suất tăng** (*growth rate*) **f(n)** nếu tồn tại các hằng số C và N_0 sao cho $T(n) \leq Cf(n), \forall n \geq N_0$.

Tỷ suất tăng f(n) = tốc độ tăng của hàm khi n tăng

VD : $\forall n \geq 0$, hàm n^3 có tốc độ tăng cao hơn n^2 khi n tăng

- Ta có thể chứng minh được "***Cho một hàm không âm T(n) bất kỳ, luôn tìm được tỷ suất tăng f(n) của nó***".

Ví dụ về tỷ suất tăng

- **Ví dụ 1:** Xét hàm **$T(n) = (n+1)^2$** . Đặt $N_0 = 1$ và $C = 4$ thì $\forall n \geq 1$, ta luôn có $T(n) = (n+1)^2 \leq 4n^2$, tức là *tỷ suất tăng của $T(n)$ là $f(n) = n^2$*

- **Ví dụ 2:** Xét hàm **$T(n) = 3n^3 + 2n^2$**. Cho $N_0 = 0$ và $C = 5$, ta có thể chứng minh $\forall n \geq 0$: $3n^3 + 2n^2 \leq 5n^3$ hay *tỷ suất tăng của $T(n)$ là $f(n) = n^3$*

- *Tuy nhiên, rất khó xác định tỷ suất tăng bằng cách như trên mà thường áp dụng quy tắc sau:*

Quy tắc vận dụng: *Nếu $T(n)$ là một đa thức của n thì tỷ suất tăng của $T(n)$ là n với số mũ cao nhất.*

Khái niệm độ phức tạp của thuật toán

- Giả sử có 2 thuật toán P1 và P2 với *thời gian thực hiện* tương ứng $T1(n) = 100n^2$ và $T2(n) = 5n^3$.

  - **Vấn đề** : P1 hay P2 nhanh hơn?

  - **Cách giải quyết**: So sánh T1(n) và T2(n)

  - **Kết quả** : Phụ thuộc vào n

  Khi $n \leq 20$: $T1(n) \geq T2(n) \rightarrow P_2$ nhanh hơn P_1

  Khi $n > 20$: $T1(n) < T2(n) \rightarrow P_1 (n^2)$ nhanh hơn (<) $P_2 (n^3)$

- Như vậy, một cách hợp lý là nên xét *tỷ suất tăng của hàm thời gian* thực hiện chương trình thay vì xét *thời gian thực hiện*.

  Khi đó: P1 thực hiện nhanh hơn P2 vì tỷ suất tăng $n^2 < n^3, \forall n \geq 0$

Tỷ suất tăng của hàm thời gian = Độ phức tạp của thuật toán

Khái niệm độ phức tạp của thuật toán

- **Ký pháp Ô lớn** (big-O notation): Cho một thuật toán P có *thời gian thực hiện* là hàm T(n), nếu T(n) có tỷ suất tăng là f(n) thì thuật toán P có độ phức tạp là f(n) và **ký hiệu thời gian thực hiện T(n) là O(f(n))** (đọc là "*ô f(n)*").
- **Ví dụ**: - Hàm $T(n) = (n+1)^2$ có tỷ suất tăng f(n) là n^2 nên thời gian thực hiện của T(n) sẽ là $O(f(n)) = O(n^2)$

  - Hàm $T(n) = 3n^3 + 2n^2$ có tỷ suất tăng f(n) là n^3 nên thời gian thực hiện của T(n) sẽ là $O(f(n)) = O(n^3)$
- **Tính chất:** - $O(C.f(n))=O(f(n))$ với C là hằng số.

  - Đặc biệt $O(C)=O(1)$

Lưu ý: - Độ phức tạp của thuật toán là một hàm chặn trên của hàm thời gian.
- Hằng nhân tử C trong hàm chặn trên thường không có ý nghĩa.

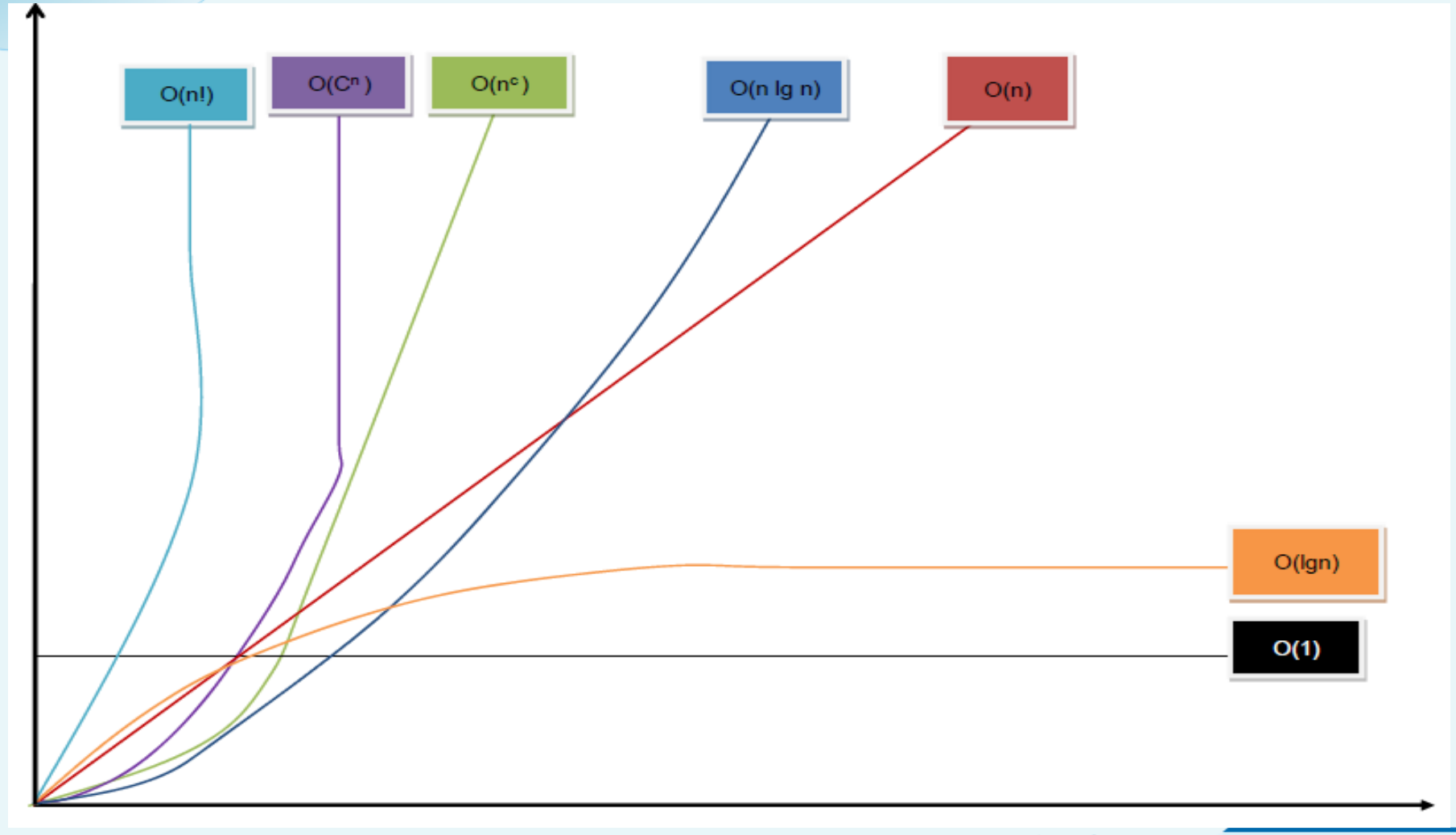
Các hàm độ phức tạp thường gặp

Dạng O	Tên Phân loại	
O(1)	Hằng	
$O(\log_2(n))$	logarit	~ logn
$O(\sqrt{n})$	Căn thức	
$O(\sqrt[3]{n})$		
…		
$O(\sqrt[m]{n})$		
O(n)	Tuyến tính	Đa thức
$O(n^2)$	Bình phương	
$O(n^3)$	Bậc ba	
…		
$O(n^m)$	Đa thức	
$O(c^n)$, với c>1	Mũ	Độ phức tạp lớn
O(n!)	Giai thừa	

Có thể chấp nhận được

Cải tiến

Đồ thị biến thiên các hàm độ phức tạp thường gặp



Cách tính độ phức tạp

- Cho 2 đoạn chương trình:
  - P_1 có thời gian thực hiện $T_1(n)=O(f_1(n))$.
  - P_2 có thời gian thực hiện $T_2(n)=O(f_2(n))$.

- **Quy tắc cộng**:
  Thời gian thực hiện P_1 và P_2 **nối tiếp** nhau sẽ là:

$$\mathbf{T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(max(f_1(n), f_2(n))}$$

- **Quy tắc nhân**:
  Thời gian thực hiện P_1 và P_2 **lồng nhau** (chẳng hạn vòng lặp lồng nhau) sẽ là:

$$\mathbf{T(n) = T_1(n) \times T_2(n) = O(f_1(n) \times f_2(n))}$$

Quy tắc tổng quát tính độ phức tạp

- Lệnh đọc (**read, scanf**), lệnh ghi (**write, prinft**), lệnh **gán,** lệnh **return, định trị biểu thức, so sánh**: Thời gian = hằng số hay **O(1)**
- Lệnh **if** :

```
if (điều kiện)
    lệnh 1
else
    lệnh 2;
```

  - Thời gian = **max (lệnh 1, lệnh 2) + điều kiện**
- **Vòng lặp**:
  - Thời gian = **Tổng thời gian thực hiện thân vòng lặp**
  - Vòng lặp có số lần lặp xác định (**for**): tính số lần lặp.
  - Vòng lặp có số lần lặp không xác định (**while**): tính số lần lặp trong *trường hợp xấu nhất* (lặp nhiều nhất).

Phương pháp tính độ phức tạp

- Xét phương pháp tính độ phức tạp trong 3 trường hợp:
  (1) Chương trình **không gọi** chương trình con.
  (2) Chương trình **có gọi** chương trình con không đệ quy.
  (3) Chương trình **đệ quy.**

- Phương pháp thực hiện:
  - Xác định đầu vào: thường ký hiệu là n
  - Cách 1: dùng cho tất cả các loại chương trình
    - Tính thời gian thực hiện T(n) cho toàn bộ chương trình ➔ O(f(n)) từ T(n)
  - Cách 2: không áp dụng cho chương trình đệ quy
    - Chia chương trình nhiều đoạn nhỏ
    - Tính T(n) và O(f(n)) cho từng đoạn
    - Áp dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân để có O(f(n)) cho cả chương trình

Ví dụ 1.
Thủ tục sắp xếp "nổi bọt"

(1) Chương trình **không gọi** chương trình con.

```
void BubbleSort(int a[], int n)
 {      int i,j,temp;
1.        for(i= 0; i<=n-2; i++)
2.          for(j=n - 1; j>=i+1;j--)
3.            if (a[j-1] > a[j]) {
4.              temp=a[j-1];
5.              a[j-1] = a[j];
6.              a[j]    = temp;
              }
 }
```

Tính độ phức tạp của thủ tục sắp xếp "nổi bọt"

- Chương trình sử dụng các vòng lặp xác định. Toàn bộ chương trình chỉ gồm một lệnh lặp {1}, lồng trong lệnh {1} là lệnh lặp {2}, lồng trong lệnh {2} là lệnh {3} và lồng trong lệnh {3} là 3 lệnh nối tiếp nhau {4}, {5} và {6}.
- 3 lệnh gán {4}, {5} và {6} đều tốn O(1) thời gian, việc so sánh a[j-1] > a[j] cũng tốn O(1) thời gian, do đó lệnh {3} tốn O(1) thời gian.
- Vòng lặp {2} thực hiện (n-i-1) lần, mỗi lần O(1) do đó vòng lặp {2} tốn O((n-i-1)×1) = O(n-i-1).
- Vòng lặp {1} có i chạy từ 0 đến n-2 nên thời gian thực hiện của vòng lặp {1} cũng là độ phức tạp của thuật toán:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Ví dụ 2.
Thủ tục tìm kiếm tuần tự

(1) Chương trình **không gọi** chương trình con.

```
1.  int tim_kiem(int x, int a[], int n) {
2.     int found, i;
3.     found = 0;
4.     i = 0;
5.     while (i < n && !found)
6.        if (a[i] == x)
7.           found = 1;
8.        else
9.           i = i+1;
10.    return i;
11. }
```

Tính độ phức tạp của hàm tìm kiếm tuần tự

- Các lệnh {3}, {4}, {5} và {10} nối tiếp nhau, do đó độ phức tạp của hàm Search là độ phức tạp lớn nhất trong 4 lệnh này.
- 3 lệnh {3}, {4} và {10} đều có độ phức tạp O(1), do đó độ phức tạp lớn nhất trong 4 lệnh này là độ phức tạp của lệnh {5}. Lồng trong lệnh {5} là lệnh {6}, lệnh {6} có độ phức tạp O(1).
- Lệnh {5} là một vòng lặp không xác định, do đó cần tính số lần lặp trong trường hợp xấu nhất (khi tất cả các phần tử của mảng a đều khác x): xét tất cả các a[i], i có các giá trị từ 0 đến (n – 1) hay vòng lặp {3} thực hiện n lần, tốn O(n) thời gian.

Vậy T(n) = O(n)

Bài tập

Bài 1: Tính thời gian thực hiện của các đoạn chương trình sau:

a) Tính tổng của các số

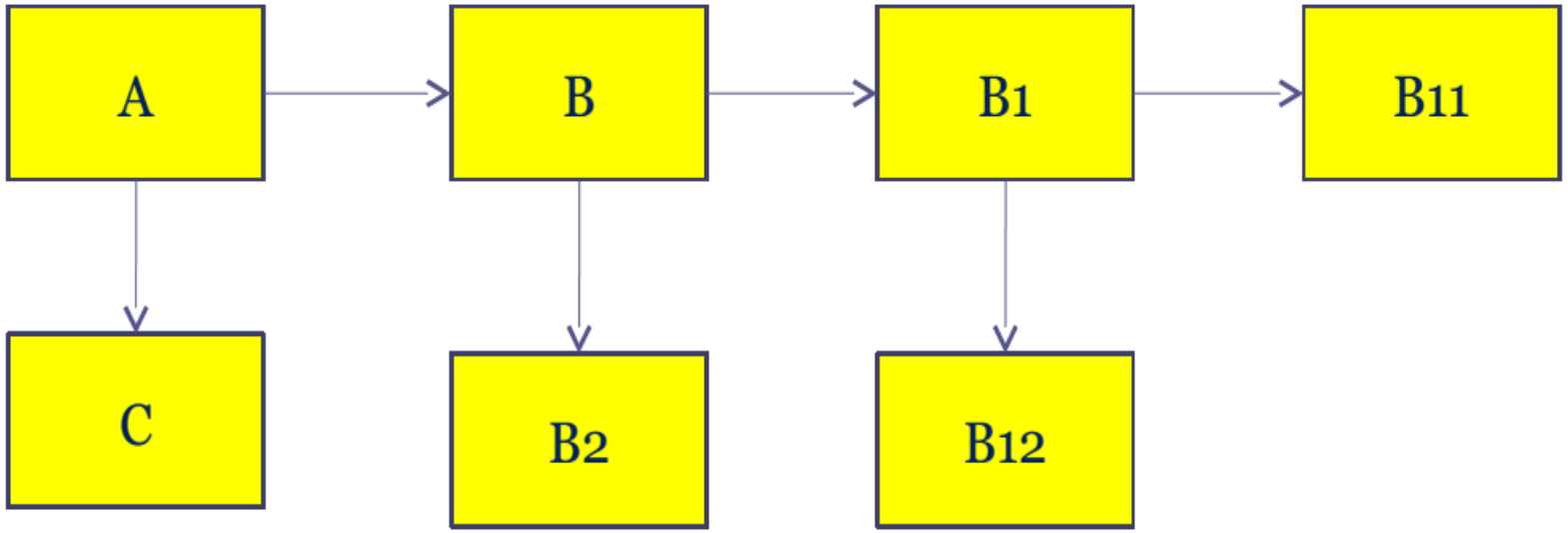
```
{1}   Sum := 0;
{2}   for i:=1 to n do begin
{3}        readln(x);
{4}        Sum := Sum + x;
      end;
```

b) Tính tích hai ma trận vuông cấp n C = A*B:

```
{1}   for i := 1 to n do
{2}     for j := 1 to n do begin
{3}       c[i,j] := 0;
{4}       for k := 1 to n do
{5}             c[i,j] := c[i,j] + a[i,k] * b[k,j];
        end;
```

Độ phức tạp của chương trình có gọi chương trình con không đệ qui

- Quy tắc: tính từ trong ra ngoài



- C, B2, B12, B11
- B1
- B
- A

Ví dụ 3.
Sắp xếp "nổi bọt" gọi chương trình con

(2) Chương trình **có gọi** chương trình con không đệ quy

```
1.      void Swap (int &a,int &b) {
2.        int temp;
3.            temp = x;
4.            x = y;
5.            y = temp; }

6.      void BubbleSort(int a[],int n) {
7.         for(i= 0; i<=n-2; i++)
8.            for(j=n - 1; j>=i+1;j--)
9.               if (a[j-1] > a[j]) {
10.                 Swap(a[j-1],a[j]);  }
```

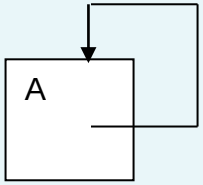
Tính độ phức tạp của sắp xếp "nổi bọt" có gọi chương trình con

- Chương trình BubbleSort gọi chương trình con Swap, do đó để tính độ phức tạp của BubbleSort trước tiên cần tính độ phức tạp của Swap.
- Swap bao gồm 3 lệnh gán 3 lệnh gán {3}, {4} và {5} đều tốn O(1), do đó độ phức tạp của Swap là O(1).
- Trong BubbleSort: lệnh {10} gọi Swap nên tốn O(1); lệnh {9} có điều kiện so sánh a[j] < a[j-1] cũng tốn O(1); vòng lặp {8} thực hiện (n – i - 1) lần, mỗi lần tốn O(1) nên vòng lặp {8} tốn O((n-i- 1) ×1) = O(n-i-1); Vòng lặp {7} có i chạy từ 0 đến n-1 nên thời gian thực hiện của vòng lặp {7} cũng là độ phức tạp của thuật toán:

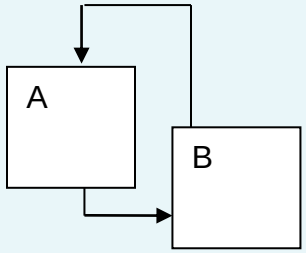
$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Phân tích các chương trình đệ qui

- 2 dạng chương trình đệ quy:



Đệ quy trực tiếp



Đệ quy gián tiếp

- Tính độ phức tạp chương trình đệ quy:
  - Thành lập phương trình đệ quy T(n)
  - Giải phương trình đệ quy tìm nghiệm
  - Suy ra tỷ suất tăng f(n) hay O(f(n).

Chương trình đệ quy

- Chương trình đệ quy giải bài toán kích thước n, phải có ít nhất một *trường hợp dừng* ứng với một n cụ thể và *lời gọi đệ quy* giải bài toán kích thước k (k<n)
- **Ví dụ** : Chương trình đệ quy tính n!

```
1.  int giai_thua(int n) {
2.     if (n == 0)
3.        return 1;
4.     else
5.        return n * giai_thua(n - 1);
6.  }
```

- *Trường hợp dừng* n = 0 và *lời gọi đệ quy* k = n-1.

Thành lập phương trình đệ quy

- **Phương trình đệ quy** là phương trình biểu diễn mối liên hệ giữa T(n) và T(k), trong đó T(n) và T(k) là thời gian thực hiện chương trình có kích thước dữ liệu nhập tương ứng là n và k, với k < n.
- Để thành lập được phương trình đệ quy, phải căn cứ vào chương trình đệ quy.

  - ***Khi đệ quy dừng***: xem xét khi đó chương trình làm gì và tốn hết bao nhiêu thời gian (thông thường thời gian này là hằng số C(n))

  - ***Khi đệ quy chưa dừng***: xem xét có bao nhiêu lời gọi đệ quy với kích thước k thì sẽ có bấy nhiêu T(k).

- Ngoài ra, còn phải xem xét thời gian phân chia bài toán và tổng hợp các lời giải (chẳng hạn gọi thời gian này là d(n)).

Dạng phương trình đệ quy

- Dạng tổng quát của một phương trình đệ quy sẽ là:

$$T(n) = \begin{cases} C(n) \\ F(T(k)) + d(n) \end{cases}$$

- **C(n)**: thời gian thực hiện chương trình ứng với trường hợp đệ quy dừng.
- **F(T(k)):** hàm xác định thời gian theo T(k).
- **d(n)**: thời gian phân chia bài toán và tổng hợp các kết quả.

Ví dụ 1. Phương trình đệ quy của chương trình đệ quy tính n!

- Gọi T(n) là thời gian tính n!.
- Thì T(n-1) là thời gian tính (n-1)!.
- Trong trường hợp n = 0 thì chương trình chỉ thực hiện một lệnh *return 1*, nên tốn O(1), do đó ta có $T(0) = C_1$.
- Trong trường hợp n > 0 chương trình phải gọi đệ quy *Giai_thua(n-1)*, việc gọi đệ quy này tốn T(n-1).
- Sau khi có kết quả của việc gọi đệ quy, chương trình phải nhân kết quả đó với n và trả về tích số. Thời gian để thực hiện phép nhân và trả kết quả về là một hằng C_2.
- Vậy ta có phương trình đệ quy như sau:

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{nếu n=0} \\ T(n-1) + C_2 & \text{nếu n>0} \end{cases}$$

Thuật toán MergeSort

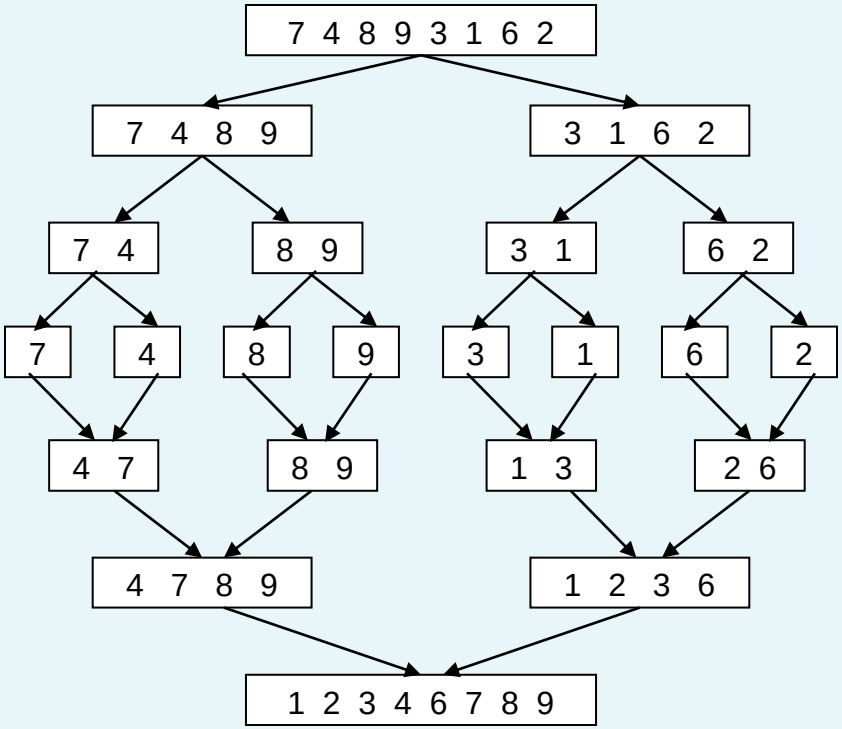
- **Ý tưởng thuật toán :**

```
FUNCTION MergeSort (L:List; n:Integer):List;
VAR  L1,L2:List;
BEGIN
  IF n=1 THEN RETURN(L)
  ELSE BEGIN
     Chia đôi L thành L1 và L2, với độ dài n/2;
     RETURN(Merge(MergeSort(L1,n/2),MergeSort(L2,n/2)));
   END;
END;
```

- ***Hàm MergeSort*** nhận danh sách có độ dài n và trả về danh sách đã được sắp xếp.
- ***Thủ tục Merge*** nhận 2 danh sách đã được sắp thứ tự L1 và L2, mỗi danh sách có độ dài n/2, trộn chúng lại với nhau để được một danh sách gồm n phần tử có thứ tự.

Mô hình minh hoạ Mergesort

- Sắp xếp danh sách L gồm 8 phần tử : **7, 4, 8, 9, 3, 1, 6, 2**



Ví dụ 2. Phương trình đệ quy của thuật toán MergeSort

- T(n) là thời gian thực hiện **MergeSort** danh sách n, T(n/2) là thời gian thực hiện **MergeSort** một danh sách n/2 phần tử.
- Khi L có độ dài 1 (n = 1): chương trình chỉ làm một việc duy nhất là *return(L)*, việc này tốn $O(1) = C_1$ thời gian.
- Khi L có độ dài n > 1: chương trình gọi đệ quy **MergeSort** 2 lần cho L1 và L2 với độ dài n/2, do đó thời gian để gọi 2 lần đệ quy này là 2T(n/2).
- Ngoài ra, còn phải tốn thời gian chia danh sách L thành 2 nửa bằng nhau và trộn hai danh sách kết quả (Merge): cần thời gian $O(n) = nC_2$.
- Vậy ta có phương trình đệ quy như sau:

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{nếu n=1} \\ 2T(\frac{n}{2}) + nC_2 & \text{nếu n>1} \end{cases}$$

Giải phương trình đệ quy

- Có 3 phương pháp giải phương trình đệ quy:

(1) Phương pháp truy hồi.

- Triển khai T(n) theo T(n-1), rồi T(n-2), … cho đến T(1) hoặc T(0)
- Suy ra nghiệm

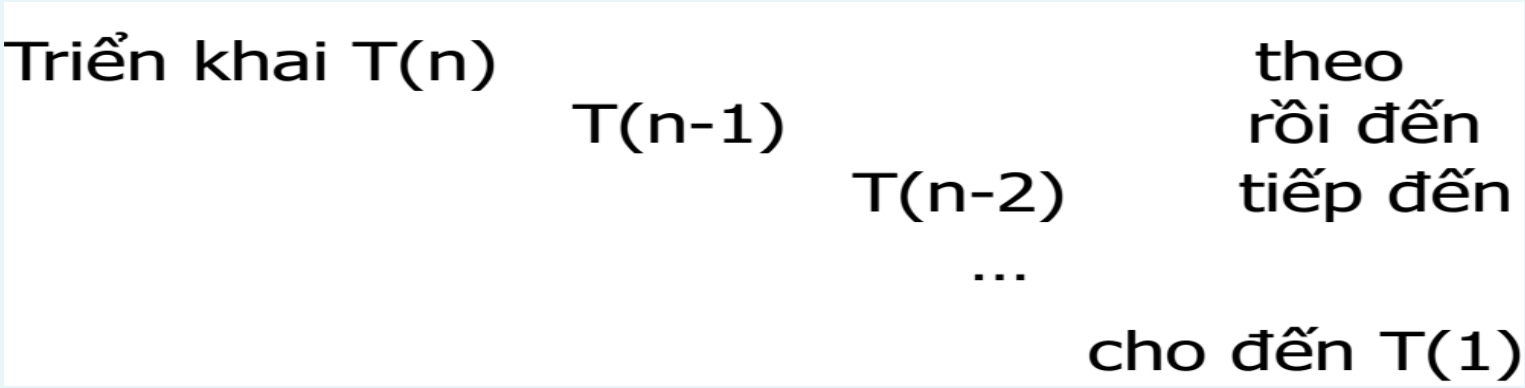
(2) Phương pháp đoán nghiệm.

- Dự đoán nghiệm f(n)
- Áp dụng định nghĩa tỷ suất tăng và chứng minh f(n) là tỷ suất tăng của T(n)

(3) Lời giải tổng quát của một lớp phương trình đệ quy.

Phương pháp truy hồi

- Dùng đệ quy để thay thế T(m) với m < n (vào phía phải phương trình) cho đến khi tất cả T(m) với m>1 được thay thế bởi biểu thức của T(1) hoặc T(0).



- Vì T(1) và T(0) là hằng số nên công thức T(n) chứa các số hạng chỉ liên quan đến n và hằng số.
- Từ công thức đó suy ra nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1. Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

Hàm tính Giai thừa N !

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{nếu n=0} \\ T(n-1) + C_2 & \text{nếu n>0} \end{cases}$$

Ta có :

$T(n) = T(n-1) + C_2$

$T(n) = [T(n-2) + C_2] + C_2 = T(n-2) + 2C_2$

$T(n) = [T(n-3) + C_2] + 2C_2 = T(n-3) + 3C_2$

……

$T(n) = T(n-i) + iC_2$

- Quá trình truy hồi kết thúc khi n - i = 0 hay i = n.
- Khi đó ta có $T(n) = T(0) + nC_2 = C_1 + nC_2 =$ **O(n)**

Một số tổng thông dụng

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2 \approx n^2/2$$

$$S = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \approx n^3/3$$

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = (a^{n+1} - 1)/(a-1)$$

Nếu $0 < a < 1$ thì

$$S \leq 1/(1-a)$$

và khi $n \to \infty$ thì

S tiến về $1/(1-a)$

$$S = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \ln(n) + \gamma$$

Hằng số Euler $\gamma \approx 0.577215665$

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots \approx 2$$

Một số công thức Logarit

10. Logarit : $0 < N_1, N_2, N$ và $0 < a, b \neq 1$ ta có

$\log_a N = M \Leftrightarrow N = a^M$	$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
$\log_a a^M = M$	$\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N$
$a^{\log_a N} = N$	$\log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha}\log_a N$
$N_1^{\log_a N_2} = N_2^{\log_a N_1}$	$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$
$\log_a(N_1.N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Lời giải tổng quát cho một lớp các phương trình đệ quy

- Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu các phần sau:
  - Bài toán đệ quy tổng quát.
  - Thành lập phương trình đệ quy tổng quát.
  - Giải phương trình đệ quy tổng quát.
  - Các khái niệm về *nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng* và *hàm nhân*.
  - Nghiệm của phương trình đệ quy tổng quát khi **d(n) là hàm nhân.**
  - Nghiệm của phương trình đệ quy tổng quát khi **d(n) không phải là hàm nhân.**

Bài toán đệ quy tổng quát

- **Giải thuật Chia để trị**:

  - Phân rã bài toán kích thước n thành a bài toán con có kích thước n/b.

  - Giải các bài toán con và tổng hợp kết quả để được kết quả của bài toán đã cho.

- Với các bài toán con, tiếp tục áp dụng giải thuật *Chia để trị* cho đến khi các bài toán con kích thước 1. Kỹ thuật này sẽ dẫn đến một *thuật toán đệ quy*.
- **Giả thiết :**

  - Bài toán con kích thước 1 lấy **một** đơn vị thời gian

  - Thời gian chia bài toán và tổng hợp kết quả để được lời giải của bài toán ban đầu là **d(n)**.

Thành lập phương trình đệ quy tổng quát

- Gọi T(n) là thời gian để giải bài toán kích thước n, thì T(n/b) là thời gian để giải bài toán con kích thước n/b.
- *Khi n = 1*: theo giả thiết trên thời gian giải bài toán kích thước 1 là 1 đơn vị, tức là T(1) = 1.
- *Khi n > 1*: ta phải giải đệ quy a bài toán con kích thước n/b, mỗi bài toán con tốn T(n/b) nên thời gian cho a lời giải đệ quy này là aT(n/b).
- Ngoài ra, còn phải tốn thời gian để phân chia bài toán và tổng hợp các kết quả, thời gian này theo giả thiết trên là d(n).
- Vậy ta có phương trình đệ quy:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = aT(n/b) + d(n)$$

Ví dụ MergeSort

```
FUNCTION MergeSort (L:List; n:Integer):List;
VAR  L1,L2:List;
BEGIN
   IF n=1 THEN RETURN(L)
   ELSE BEGIN
      Chia đôi L thành L1 và L2, với độ dài n/2;
      RETURN(Merge(MergeSort(L1,n/2),MergeSort(L2,n/2)));
    END;
END;
```

- *Khi n = 1*: tốn C1
- *Khi n > 1*: a = b= 2 (Giải đệ quy 2 bài toán con kích thước n/2, mỗi bài toán con tốn T(n/2) nên cần 2T(n/2)).
- Thời gian phân chia bài toán và tổng hợp kết quả: d(n) = nC2.
- Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{nếu n=1} \\ 2T(\frac{n}{2}) + nC_2 & \text{nếu n>1} \end{cases}$$

Giải phương trình đệ quy tổng quát

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{neu } n = 1 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) & \text{neu } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

$$T(n) = a\left[aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + d\left(\frac{n}{b}\right)\right] + d(n) \qquad = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

$$T(n) = a^2\left[aT\left(\frac{n}{b^3}\right) + d\left(\frac{n}{b^2}\right)\right] + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

$$= a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2d\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

.....

$$T(n) = a^iT\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^jd\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

Giải phương trình đệ quy tổng quát

$$T(n) = a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

Giả sử $n = b^k$, quá trình suy rộng trên sẽ kết thúc khi $i = k$.
Khi đó ta được:

$$T\left(\frac{n}{b^i}\right) = T\left(\frac{n}{b^k}\right) = T\left(\frac{b^k}{b^k}\right) = T(1) = 1$$

Thay vào trên ta có:

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right)$$

Nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right)$$

Nghiệm thuần nhất

Nghiệm riêng

Nghiệm thuần nhất là nghiệm chính xác khi d(n)=0, $\forall n$: biểu diễn thời gian giải tất cả bài toán con.

Nghiệm riêng phụ thuộc hàm tiến triển, số lượng và kích thước bài toán con: biểu diễn thời gian tạo bài toán con và tổng hợp kết quả.

Nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right)$$

Nghiệm thuần nhất

$a^k = n^{\log_b a}$

Nghiệm riêng

NTN: Do $n=b^k$ nên $n^{\log_b a} = (b^k)^{\log_b a} = b^{\log_b a^k} = a^k$

Nghiệm của phương trình là: MAX(NTN,NR).

Hàm nhân

- Hàm f(n) là **hàm nhân** (multiplicative function) nếu: **f(m.n) = f(m).f(n)** ∀m,n nguyên dương

- **Ví dụ:**
  - Hàm **f(n) = 1** là hàm nhân vì: f(m.n)=1.1=1=f(m).f(n)
  - Hàm **f(n) = n** là hàm nhân vì: f(m.n)=m.n=f(m).f(n)
  - Hàm **f(n) = n^k** là hàm nhân vì:

$$f(m.n) = (m.n)^k = m^k.n^k = f(m).f(n).$$

  - Hàm **f(n) = logn** *không phải* là hàm nhân vì:

$$f(m.n) = \log(m.n) = \log m + \log n \neq \log m.\log n = f(m).f(n)$$

Tính nghiệm riêng khi d(n) là hàm nhân

- Khi d(n) là **hàm nhân**, ta có:

$$d(b^{k-j}) = d(b.b.b\ldots b) = d(b).d(b)\ldots d(b) = [d(b)]^{k-j}$$

$$NR = \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} a^j [d(b)]^{k-j} = [d(b)]^k \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^j = [d(b)]^k \frac{\left[\frac{a}{d(b)}\right]^k - 1}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

$$\text{Hay } NR = \frac{a^k - [d(b)]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

Ba trường hợp

$$NR = \frac{a^k - [d(b)]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

- **Trường hợp 1: a > d(b)**

  Trong công thức trên: $a^k > [d(b)]^k$

  Theo quy tắc tính độ phức tạp:

  NR là $O(a^k) = O(n^{\log_b a})$ = NTN.

Do đó **$T(n) = O(n^{\log_b a})$**.

Nhận xét : T(n) chỉ phụ thuộc vào a, b mà không phụ thuộc hàm tiến triển d(n) → Cải tiến thuật toán = Giảm a : giảm số bài toán con.

Ba trường hợp

$$NR = \frac{a^k - [d(b)]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

- **Trường hợp 2: a < d(b)**

  Trong công thức trên: $[d(b)]^k > a^k$

  Theo quy tắc tính độ phức tạp :

  NR là $O([d(b)]^k) = O(n^{\log_b d(b)}) >$ NTN.

Do đó **$T(n) = O(n^{\log_b d(b)})$**.

Nhận xét : T(n) phụ thuộc vào b và hàm tiến triển d(b) → Cải tiến thuật toán = Giảm d(b) : cải tiến việc phân chia bài toán và tổng hợp kết quả.

Ba trường hợp

$$NR = \frac{a^k - [d(b)]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

Trường hợp 3: a = d(b)

Công thức trên không xác định nên phải tính trực tiếp nghiệm riêng:

$$NR = [d(b)]^k \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^j = a^k \sum_{j=0}^{k-1} 1 = a^k k \qquad (\text{do } a = d(b))$$

Do $n = b^k$ nên $k = \log_b n$ và $a^k = n^{\log_b a}$.

Vậy NR là $n^{\log_b a} \log_b n$ > NTN.

Do đó **$T(n) = O(n^{\log_b a} \log_b n)$**

Tính nghiệm riêng khi d(n) không phải là hàm nhân

- Trong trường hợp hàm tiến triển d(n) không phải là hàm nhân thì không thể áp dụng các công thức ứng với ba trường hợp nói trên mà chúng ta phải **tính trực tiếp** NR, sau đó so sánh với NTN và lấy **MAX(NR,NTN).**

Quy tắc chung để giải phương trình đệ quy

- **Lưu ý khi giải một phương trình đệ quy cụ thể**:

(1) Xem phương trình có thuộc **dạng phương trình tổng quát** không ?

(2) Nếu có, xem hàm tiến triển d(n) có **dạng hàm nhân** không?

a) Nếu **có**: xác định a, d(b); so sánh a, d(b) để vận dụng một trong ba trường hợp trên.

b) Nếu **không** : tính trực tiếp nghiệm để so sánh.

(3) Suy ra nghiệm của phương trình = Max(NTN,NR)

Ví dụ 1. GPT với T(1) = 1 và

$$1/\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- Phương trình đã cho có dạng phương trình tổng quát.
- d(n)=n là hàm nhân.
- a = 4 và b = 2.
- d(b) = b = 2 < a (Trường hợp 1)

→ $T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log 4}) = O(n^2)$.

Ví dụ 2. GPT với T(1) = 1 và

$$2/\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

- Phương trình đã cho có dạng phương trình tổng quát.
- $d(n)=n^2$ là hàm nhân.
- $a = 4$ và $b = 2$.
- $d(b) = b^2 = 4 = a$ (Trường hợp 3)

$\rightarrow T(n) = O(n^{\log_b a}\log_b n) = O(n^{\log 4}\log n) = (n^2\log n)$.

Ví dụ 3. GPT với T(1) = 1 và

$$3/\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

- Phương trình đã cho có dạng phương trình tổng quát.
- $d(n)=n^3$ là hàm nhân.
- $a = 4$ và $b = 2$.
- $d(b) = b^3 = 8 > a$ (Trường hợp 2)

$\rightarrow T(n) = O(n^{\log_b d(b)}) = O(n^{\log 8}) = O(n^3)$.

Ví dụ 4. GPT với T(1) = 1 và

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log n$$

- PT thuộc dạng phương trình tổng quát nhưng d(n) = nlogn *không phải là một hàm nhân*.
- a = 2 và b = 2
- NTN = $n^{\log_b a} = n^{\log 2} = n$
- Do d(n) = nlogn không phải là hàm nhân nên ta phải tính nghiệm riêng bằng cách xét trực tiếp

Ví dụ 4. (tt)

$$NR = \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j 2^{k-j} \log 2^{k-j}$$

$$= 2^k \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) = 2^k \frac{k(k+1)}{2} = O(2^k k^2)$$

- Theo cách giải phương trình đệ quy tổng quát thì $n = b^k$ nên $k = \log_b n$, ở đây do $b = 2$ nên $2^k = n$ và $k = \log n$,
- $NR = O(2^{\log n} \log^2 n) = O(n \log^2 n) > NTN = n$

$\rightarrow$ $T(n) = O(n \log^2 n)$.

Bài tập 4-1. GPT với T(1) = 1 và

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

- Phương trình đã cho có dạng phương trình tổng quát.
- d(n)=1 là hàm nhân.
- a = 1 và b = 2.
- d(b) = 1 = a.

→ $T(n) = O(n^{\log_b a}\log_b n) = O(n^{\log 1}\log n) = O(\log n)$.

Bài tập 4-2. GPT với T(1) = 1 và

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$$

- Phương trình đã cho có dạng phương trình tổng quát.
- d(n)=logn không phải là hàm nhân.
- a = 2 và b = 2
- NTN = $O(n^{\log_b a})=O(n^{\log 2})=O(n)$.
- Tính trực tiếp nghiệm riêng.

Bài tập 4-2. (tt)

$$NR = \sum_{j=0}^{k-1} a^j d(b^{k-j}) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \log 2^{k-j}$$

$$NR = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j (k-j) = \sum_{j=0}^{k-1} k2^j - \sum_{j=0}^{k-1} j2^j$$

$$NR = O(k\sum_{j=0}^{k-1} 2^j) = O(k\frac{2^k - 1}{2-1})$$

$$NR = O(k2^k) = O(n\log n) > n = NTN$$

$$T(n) = O(n\log n)$$

Bài tập 8.

$$C^k_n = \begin{cases} 1 & \text{neu } k = 0 \text{ hoac } k = n \\ C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1} \end{cases}$$

- Gọi T(n) là thời gian để tính C^k_n
- Thì thời gian để tính C^k_{n-1} là T(n-1)
- Khi n=1 thì k=0 hoặc k=1 => chương trình trả về giá trị 1, tốn $O(1) = C_1$
- Khi n>1, trong trường hợp xấu nhất, chương trình phải làm các việc:
  - Tính C^k_{n-1} và C^{k-1}_{n-1} : tốn 2T(n-1).
  - Thực hiện phép cộng và trả kết quả: tốn C_2

a) Ta có phương trình: $T(1)=C_1$ và $T(n)=2T(n-1)+C_2$

Bài tập 8. (tt)

b) Giải phương trình $T(n) = 2T(n-1) + C_2$

- $T(n) = 2[2T(n-2)+C_2] + C_2$

  $= 4T(n-2) + 3C_2$

  $= 4[2T(n-3) + C_2] + 3C_2$

  $= 8T(n-3) + 7C_2$

  ……

  $= 2^iT(n-i) + (2^i-1)\, C_2$

- $T(n) = 2^{n-1}C_1 + (2^{n-1}-1)\, C_2$

  $= (C_1+ C_2)2^{n-1} - C_2 = O(2^n)$