3.2.4. Свободные колебания в электрическом контуре.

Гусаров Николай
Группа Б02-005

Цель работы: исследования свободных колебаний в колебательном контуре.

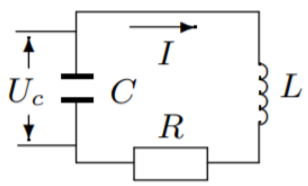
В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф, унивенрсальный мост.

Теория

Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденстора C, катушки индуктивности L и резистора R. Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C, а ток, текущий в контуре, через I. Второе првило Кирхгофа:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{1}$$



Вводя обозначения $\gamma = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \tag{2}$$

Его решение в общем виде:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa}e^{-\gamma t}\mathrm{sh}(\kappa t), \tag{3}$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

Затухающие колебания

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – *частоты свободных (собственных) колебаний*. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t) \tag{4}$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \dfrac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e

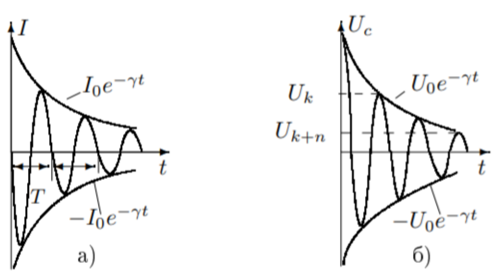


Рис. 1: Затухающие колебания.

раз. Формулы для наряжение на кондесаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta),$$
$$I = -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \tag{5}$$

Апериодические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \mathrm{sh}(\kappa t),$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \mathrm{sh}(\kappa t) + \mathrm{ch}(\kappa t) \right).$$

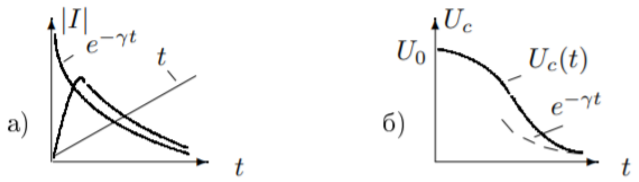


Рис. 2: Критический режим.

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называются *критическим.* В этом случае предельный переход $\omega \to 0$ в (5) даст

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t},$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t).$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{6}$$

называется *критическим сопротивлением* контура.
Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma (T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7}$$

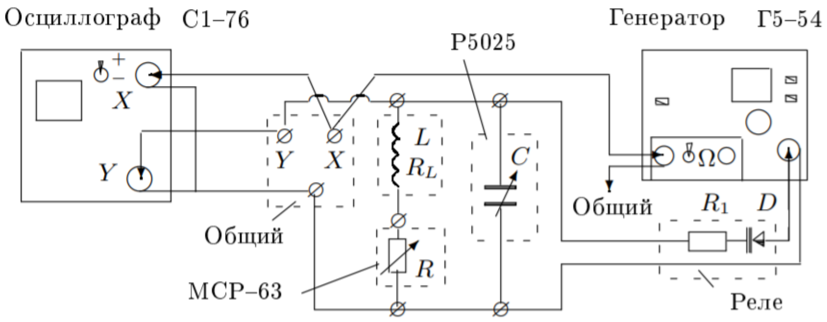
Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \tag{8}$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \tag{9}$$

Описание установки



На рисунке приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R. Колебания наблюдаются на экране осциллографа.
Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит тиристор D и ограничительный резистор R_1.
Импульсы заряжают конденсатор C. После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ($\approx$ 1 МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

Ход работы

На генераторе устанавливаем длительность импульсов 5 мск, частоту повторения $\nu_0 = 100$ Гц. На магазине сопротивлений устанавливаем величину $R = 0$ Ом, на магазине ёмкостей – $C = 0.02$ мкФ. По картине на осциллографе проведём измерение зависимости периода свободных колебаний от ёмкости.

T, мс	С, мкФ
0,32	0,02
0,75	0,12
1,02	0,22
1,26	0,32
1,42	0,42
1,57	0,52
1,74	0,62
1,84	0,72
1,93	0,82
2,08	0,9

Таблица 1: Зависимость $T = T(C)$.

Считая $L \approx 200$ мГн, рассчитаем C, при которой $\nu_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 5$ кГц: $C \approx 5$ нФ. Критическое сопротивление в этом случае $R_{\text{кр}} \approx 12500$ Ом. Измерим зависимость $\Theta(R)$ декремента затухания от сопротивления в диапазоне $0.1R_{\text{кр}} \div 0.3R_{\text{кр}}$, пользуясь формулой (**??**):

Θ	R, Ом
0,38	560
0,48	700
0,61	900
0,72	1100
0,79	1300
0,96	1500
1,1	1700

Таблица 2: Зависимость $\Theta = \Theta(R)$ по развертке сигнала.

Получив изображение колебаний на фазовой плоскости (в координатах $\left(U_C, \dfrac{dU_C}{dt}\right)$, убеждаемся, что декремент затухания вычисленный по тем же способом практически совпадает с вычисленным в кооридинатах (U_C, t):

Θ	R, Ом
0,35	560
0,43	700
0,56	900
0,72	1100
0,8	1300
0,9	1500
1,07	1700

Таблица 3: Зависимость $\Theta = \Theta(R)$ по фазовой диаграмме сигнала.

С помощью универсального моста измеряем индуктивность L и R_L катушки для трёх значений частоты:

R_L, Ом	9,6	12,5	21,2
L, мГн	138	133	133
Q	4,5	66,7	197
ν, кГц	0,05	1,00	5,00

Таблица 4: Экспериментально полученные параметры индуктивности.

Обработка результатов

Рассчитаем теоретически периоды свободных колебаний и сравним с полученными экспериментально:

T_{theor}, мс	T_{exp}, мс
0,33	0,32
0,81	0,75
1,09	1,02
1,32	1,26
1,51	1,42
1,68	1,57
1,84	1,74
1,98	1,84
2,11	1,93
2,21	2,08

Таблица 5: Сравнение теоретических и экспериментальных периодов.

Результат представим на графике:

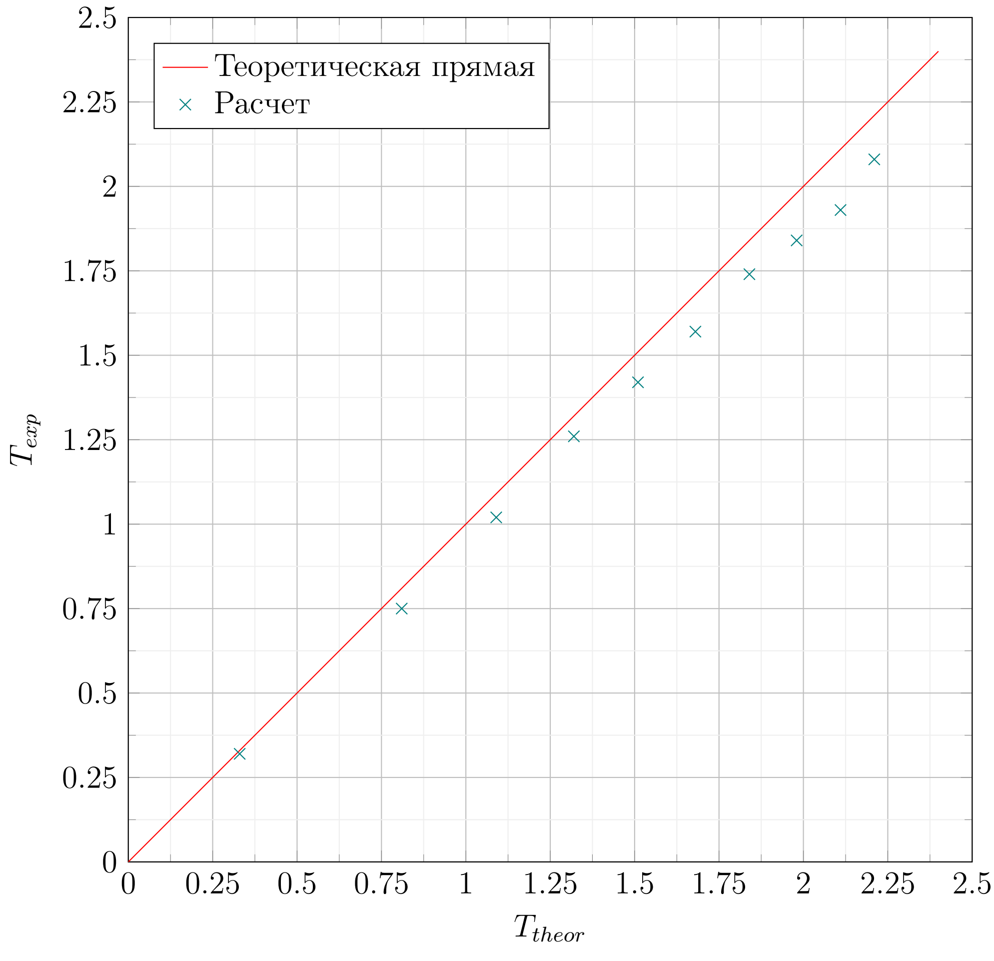


Рис. 3: Зависимость теоретического периода колебаний от экспериментального.

Построим зависимость для поиска R_{cr}:

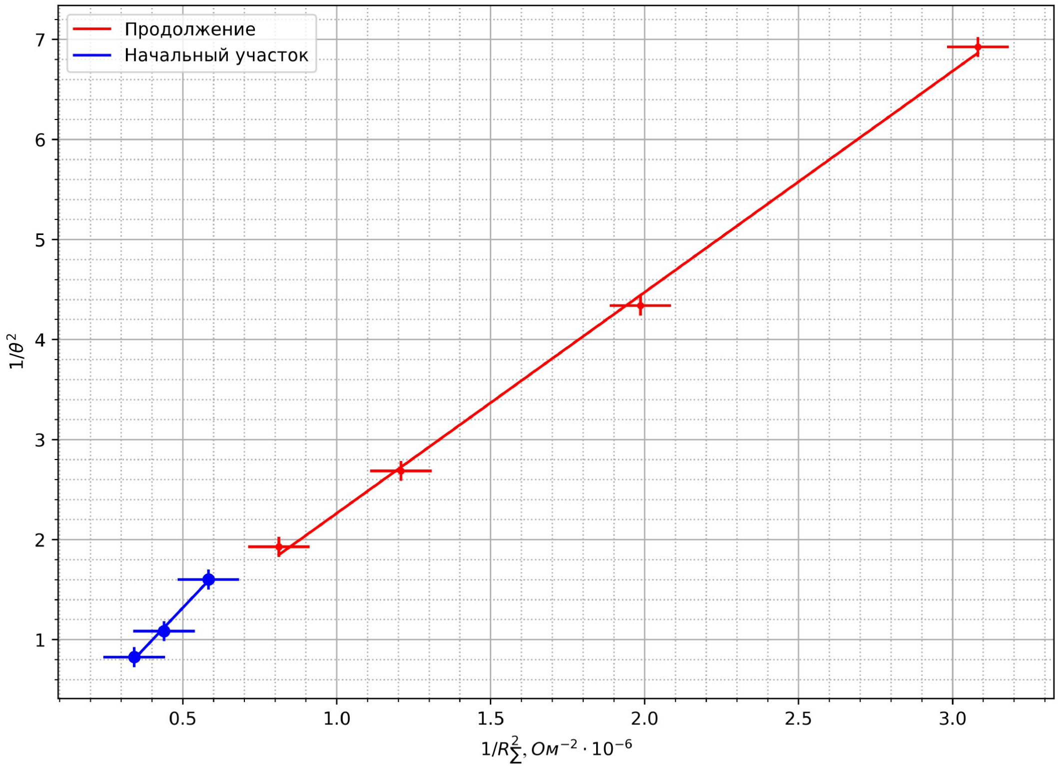


Рис. 4: Зависимость для поиска R_{cr}: $k_{init} = 3,25 \cdot 10^6\ Om^2$

Рассчитаем критическое сопротивление по формуле

$$R_{cr} = 2\pi\sqrt{k_{init}} = (11 \pm 0,5)\ (kOm)$$

Теоретическое значение $R_{cr} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = (10,5 \pm 0,5)\ (kOm)$ – совпадает в пределах погрешности.

Для конутуров с максимальным и минимальным декрементом θ рассчитаем добротность Q экспериментальную – $Q = \dfrac{\pi}{\Theta}$ – и теоретическую – $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$:

	Θ	R, Ом	$Q_{\text{теор}}$	$Q_{\text{эксп}}$
Макс	$1,07 \pm 0,1$	1700	$3,06 \pm 0,04$	$2,9 \pm 0,13$
Мин	$0,35 \pm 0,1$	560	$9,31 \pm 0,08$	$8,97 \pm 0,56$

Таблица 6: Добротности для конутров с наибольшим и наименьшим затуханием.