TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG I: TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

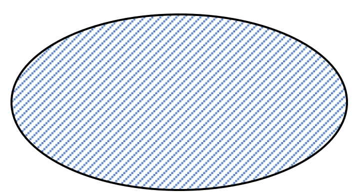
TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

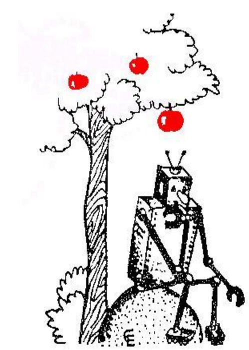
1. Tập hợp
2. Ánh xạ

V. Tập hợp

1. Khái niệm

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học.
- Ví dụ:
  1) Tập hợp sinh viên của một trường đại học.
  2) Tập hợp các số nguyên
  3) Tập hợp các trái táo trên một cây cụ thể.
- Sơ đồ Venn:





VI. Tập hợp

Lực lượng của tập hợp

Số phần tử của tập hợp A được gọi là lực lượng của tập hợp, kí hiệu |A|.

Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A hữu hạn.

Ngược lại, ta nói A vô hạn.

Các ký hiệu:

- Phần tử x thuộc một tập hợp A, $x \in A$
- Phần tử x không thuộc một tập hợp A, $x \notin A$
- Tập rỗng ∅ là tập hợp không có phần tử nào.

Ví dụ.

N = {0,1,2,…}, Z={0,1,-1,2,-2,…}, R, là các tập vô hạn

X = {1,3,4,5} là tập hữu hạn |X|=4

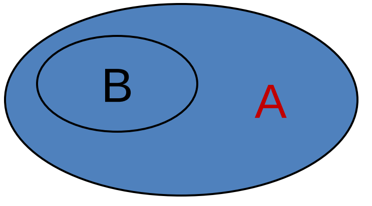
V. Tập hợp

- a. Cách xác định tập hợp
  - Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

    A = {1,2,3,4,a,b}
  - Đưa ra tính chất đặc trưng

    B = {n∈N | n chia hết cho 3}

    Lưu ý: ta thường dùng "|" để diễn đạt ý "sao cho"
- b. Quan hệ giữa các tập hợp
  - Tập hợp con



Tập hợp B là tập hợp con của A nếu mọi phần tử của tập hợp B đều là phần tử của tập hợp A. Ký hiệu: $B \subseteq A$ hay $A \supseteq B$

V. Tập hợp

- Hai tập hợp bằng nhau

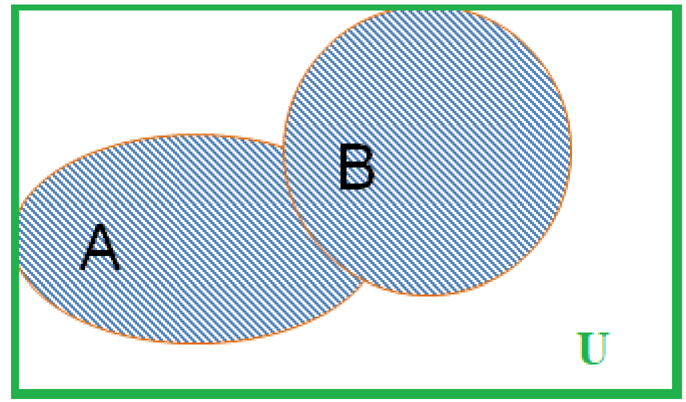
Hai tập A và B, được gọi là bằng nhau nếu $B \subseteq A$ hay $A \subseteq B$. Khi đó ta viết $A = B$.

- Tập hợp con thực sự

Nếu $B \subseteq A$ nhưng $A \neq B$ ta nói B là tập con thực sự của tập hợp A, ký hiệu: $B \subsetneq A$

V. Tập hợp

2. Các phép toán tập hợp



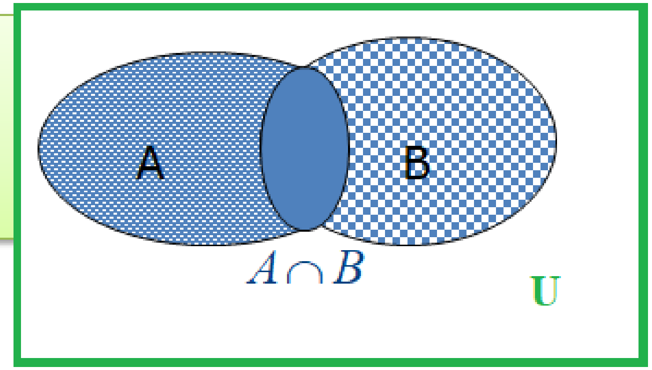
- a. Phép hợp
  - Hợp của 1 tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

  - Ký hiệu: $A \cup B$
  - Ví dụ:

$$\left.\begin{array}{r} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

V. Tập hợp



b. Phép giao

– Giao của 2 tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

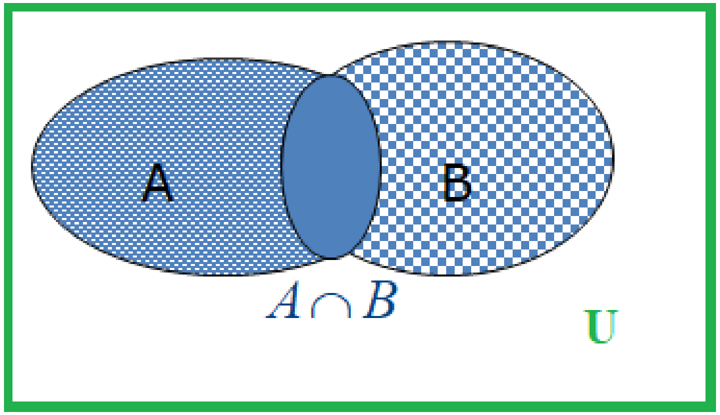
– Ký hiệu: $A \cap B$ $\quad (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

+ Phép hợp và giao trên tập hợp có những tính chất sau:

1. Tính lũy đẳng $\quad A \cup A = A$
2. Tính giao hoán $\quad A \cup B = B \cup A$
3. Tính kết hợp $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. Hợp với tập rỗng $\quad \varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$
5. Tính phân phối

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

V. Tập hợp

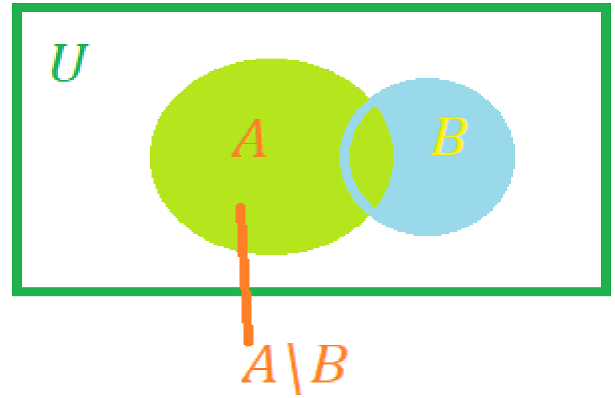


$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Ví dụ:

$$\left.\begin{aligned} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \cap B = \{c, d\}$$

V. Tập hợp



c. Hiệu của 2 tập hợp

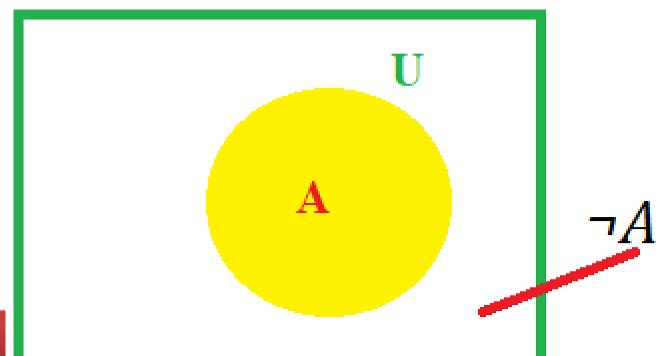
– Hiệu của hai tập hợp là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc tập A mà không thuộc tập B

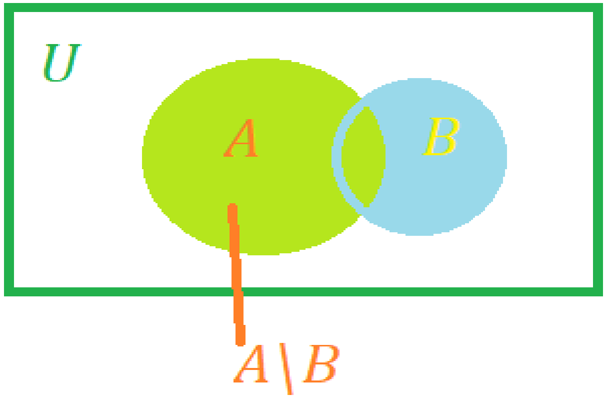
– Ký hiệu $A\backslash B$ $\qquad (x \in A \backslash B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

Ví dụ: $\left.\begin{array}{r} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e\} \end{array}\right\} \Rightarrow A\backslash B = \{a, b\}$

$$B\backslash A = \{e\}$$

⊕Tập bù: $\neg A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$. Ký hiệu: $\neg A$





- Luật De Morgan:

$$1)\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2)\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

d. Hiệu đối xứng của 2 tập hợp:

$$\mathrm{A}\,\Delta\,B = (A\backslash \mathrm{B}) \cup (B\backslash \mathrm{A})$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\} \\ B &= \{c, d, e\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\backslash B = \{a, b\}$$

$$B\backslash \mathrm{A} = \{e\}$$

$$\Rightarrow A \,\triangle\, B = \{a, b, e\}$$

V. Tập hợp

3. Tập các tập con của một tập hợp

Cho X là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của X được ký hiệu là P(X) (i.e. $\mathcal{P}(X) = \{A|A \subseteq X\}$)

Ví dụ

$$X = \{a, b\}$$

$$P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\},\ P(Y) = ?$$

$$|X| = n \longrightarrow |P(X)| = ? \rightarrow 2^n$$

V. Tập hợp

4. Tích Đề Các:

– Tích Đề các của tập hợp A với tập hợp B (ký hiệu $A \times B$) là tập hợp bao gồm tất cả các cặp thứ tự (x,y) với

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \quad x \in A,\ y \in B$$

– Chú ý: Tích của 2 tập hợp không có tính chất giao hoán.

$$|A \times B| = ?$$

Tích Descartes:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$

$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$

V. Tập hợp $(x,y)\in A\times B \Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)$

Ví dụ: Tích Đề Các:

Cho $A = \{1,2\}$ và $B = \{a,b,c\}$. Khi đó

- $AxB = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$
- $BxA = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$
- $AxA = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

V. Tập hợp

Số phần tử của tập hợp hữu hạn.

Cho A là tập hợp hữu hạn.Số phần tử của tập A ký hiệu là $|A|$.Ta có:

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2) $|A \times B| = |A|\,|B|$

3) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, $\mathcal{P}(A)$ là tập các tập con của A

V. Tập hợp

Các phép toán giao, hợp, tích có thể mở rộng cho nhiều tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I,\ x_i \in A_i\right\}$$

VI. Ánh xạ

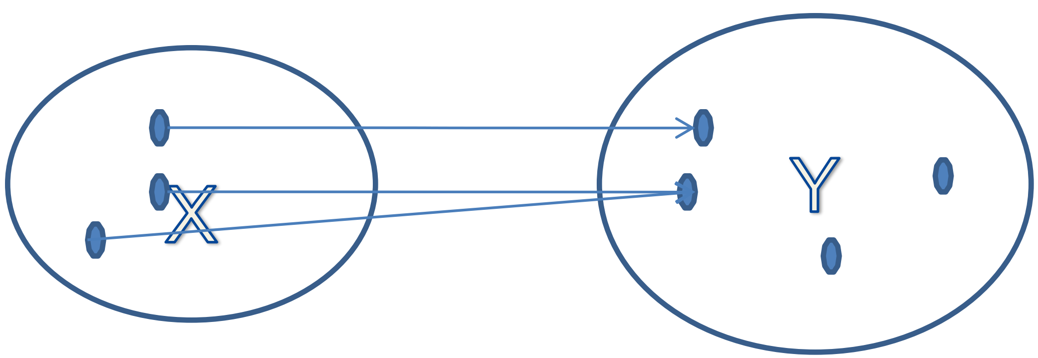
1. Định nghĩa. Cho hai tập hợp X, Y ≠ ∅. Ánh xạ giữa hai tập X và *Y* là một qui tắc sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để $y = f(x)$

Ta viết:

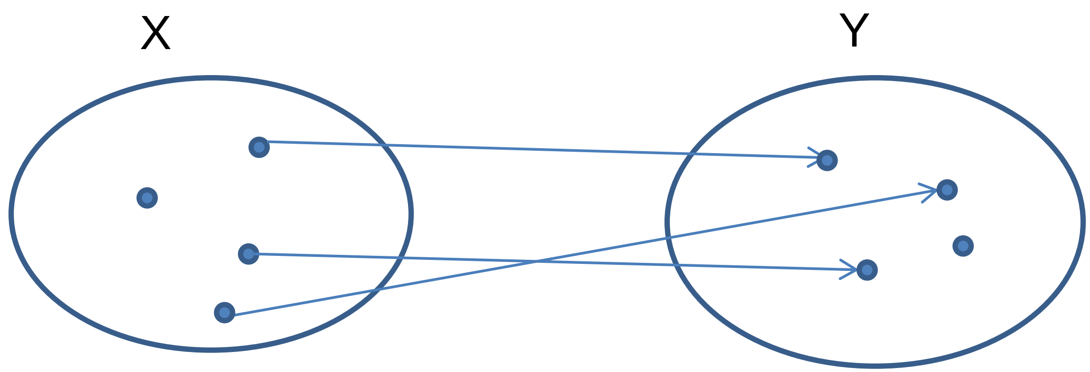
$$f : X \longrightarrow Y$$

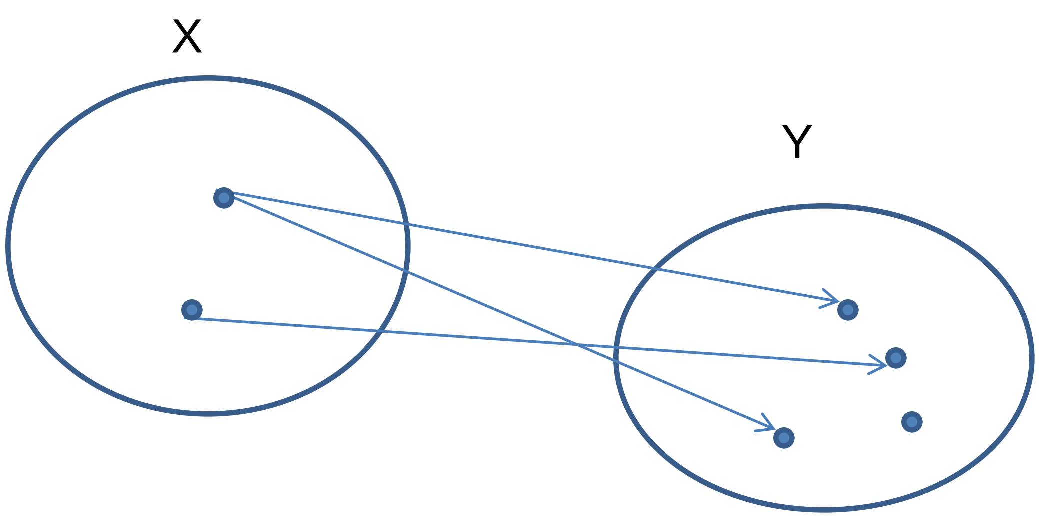
$$x \mapsto f(x)$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x)$



VI. Ánh xạ





Không là ánh xạ

VI. Ánh xạ

+ Hai ánh xạ bằng nhau. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là *bằng nhau* nếu $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

Ví dụ: Xét ánh xạ f(x)=(x-1)(x+1) và g(x) =x^2-1 từ R->R

+ Đồ thị của ánh xạ f *là tập*

Graph(f) $= \{(x, y) \in XxY \mid y = f(x)\}$

VI. Ánh xạ

Cho ánh xạ $f: X \to Y$

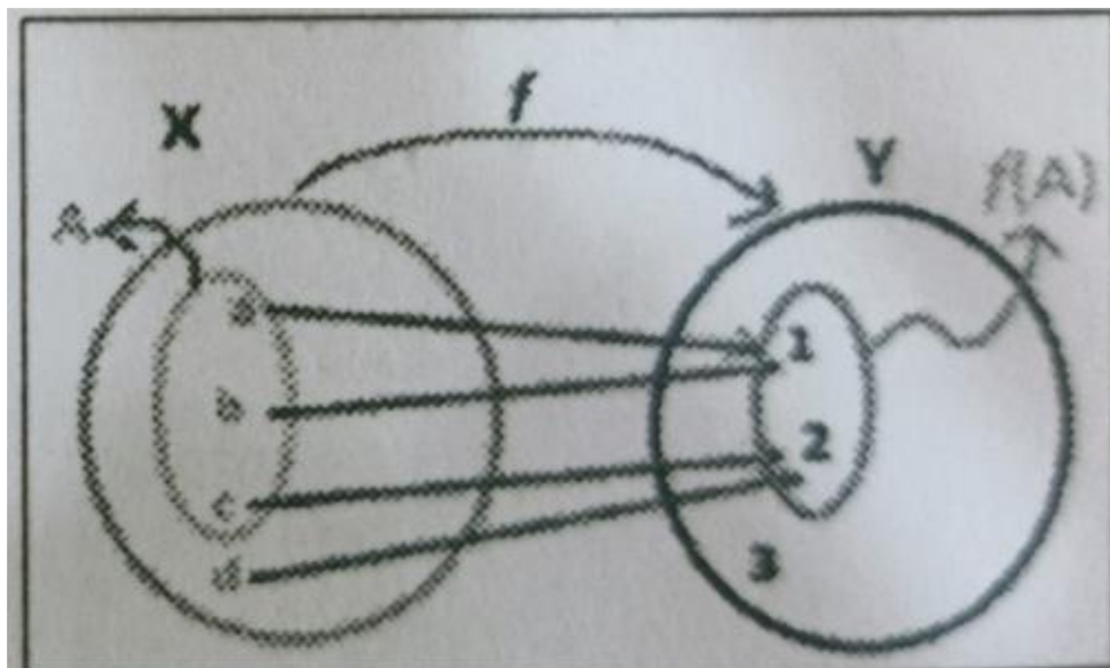
+ Các tập hợp liên quan phổ biến đến một ánh xạ

- Ảnh của một tập:

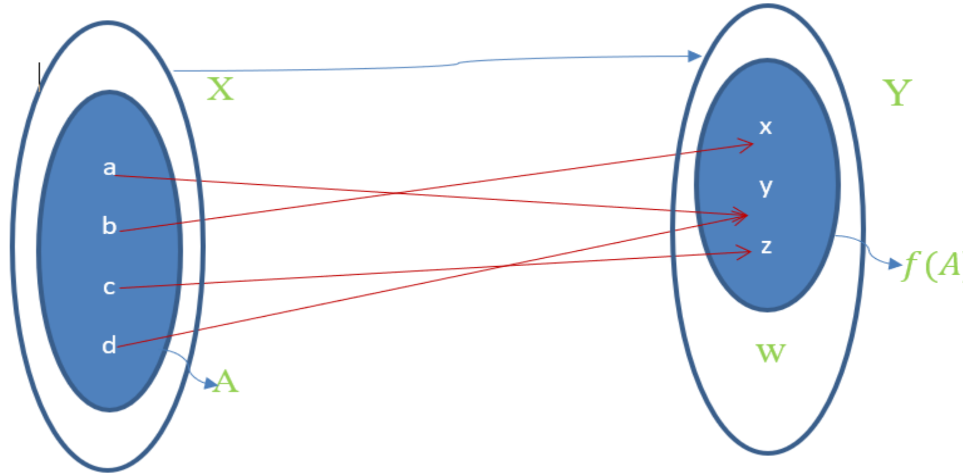
Cho $A \subseteq X$, ảnh của tập A (qua f) định nghĩa là

$$f(A) \equiv \{f(x)|x \in A\}$$

Đặc biệt $f(X) = Im(f)$



VI. Ánh xạ



Ví dụ: A={a,b,c,d},B ={x,y,z}

$$f: X \to Y\ (B \subseteq Y, A \subseteq X)$$

a) Tìm ảnh của các thành phần trong A.
b) Tìm ảnh $f: A \to B$
c) Tìm đồ thị (Graph(f)) của f, viết f như là tập các cặp có thứ tự.

Giải:

a) Tìm ảnh của các phần tử trong A:

f(a) = y; f(b) = x; f(c) = z; f(d) = y

b) Tìm ảnh của f

Chỉ x, y, z xuất hiện ảnh → f(A) = {x,y,z}

c) Tìm đồ thị của f, viết f như là tập các cặp có thứ tự có dạng (a, f(a)), a∈A.

{(a,y),(b,x),(c,z),(d,y)}

VI. Ánh xạ

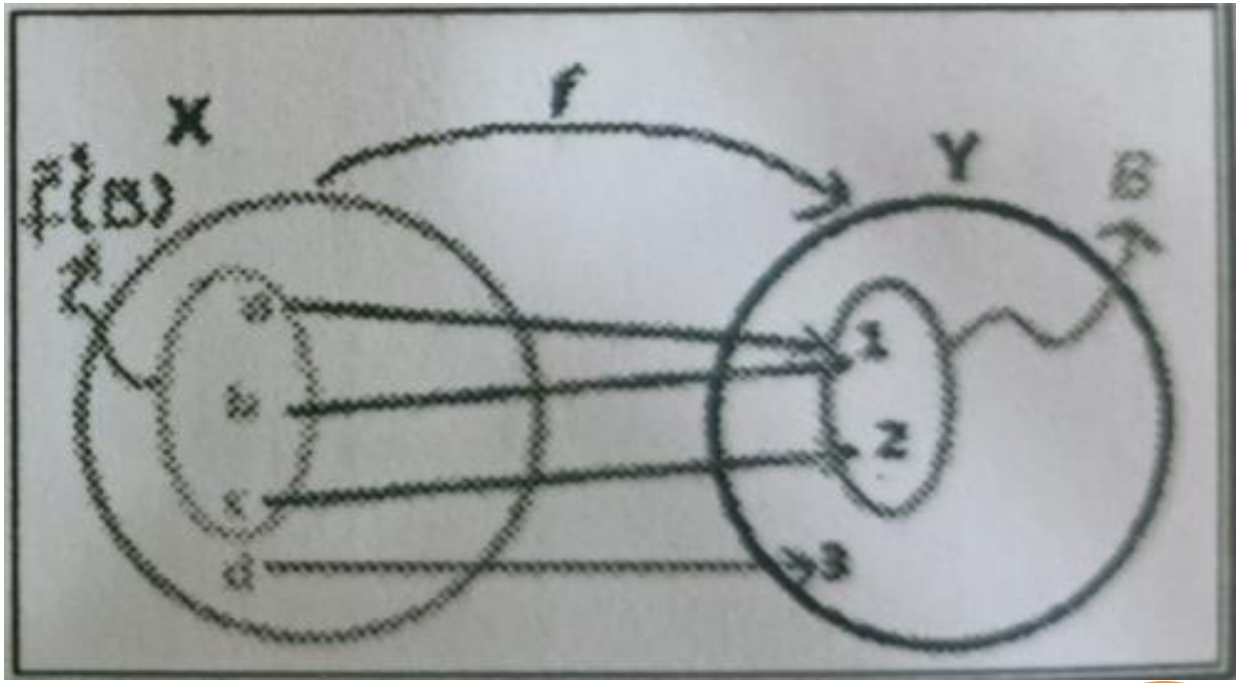
Cho ánh xạ $f: X \to Y$

+ Nghịch ảnh của một tập:

Cho $\mathrm{B} \subseteq Y$, nghịch ảnh của tập B (qua f) định nghĩa là

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in X |\ f(x) \in B\}|$$

+ Ký hiệu $f^{-1}(B)$



VI. Ánh xạ

$$f: A \to B \text{ hay } f: X \to Y \; (B \subseteq Y, A \subseteq X)$$

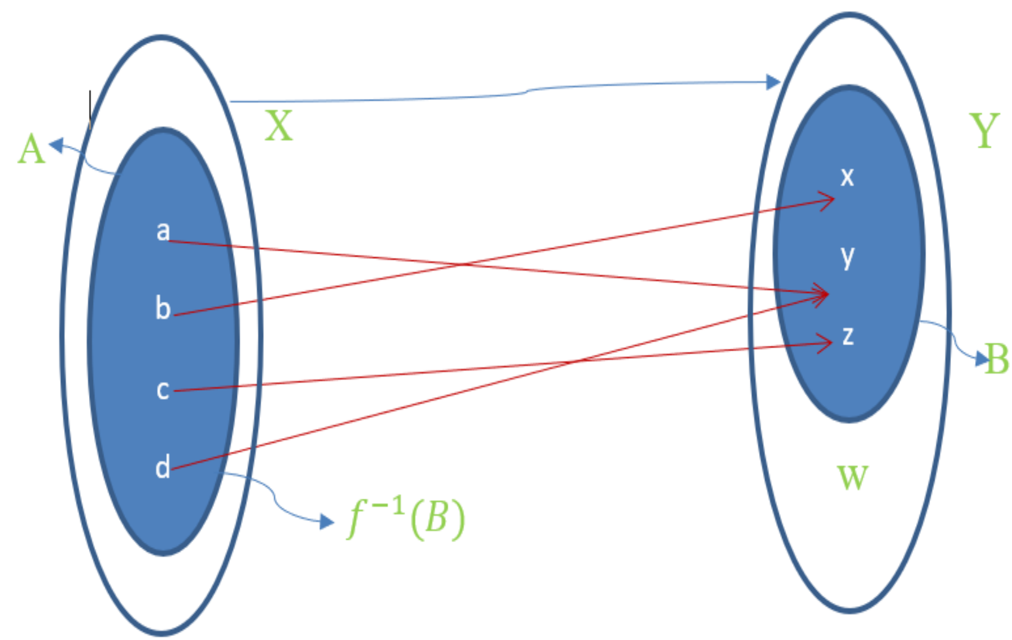
$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$ được gọi là nghịch ảnh của B

Ví dụ: cho ánh xạ f như hình bên

a) f(S), S = {a,b,d}

b) $f^{-1}(T)$, T={y,z}

c) $f^{-1}(\{w\})$



Giải

a) f(S) = f({a,b,d}) = {f(a),f(b) f(d)} = {y, x, y} = {x,y}

b) $f^{-1}(T)$ = {a,c,d}

c) Không có thành phần có ảnh w dưới f => $f^{-1}(\{w\}) = \emptyset$

Bài 3.11, 3.12, 3.13/ BookEnglish 83

Bài tập

3.8 State whether or not each diagram in Fig. 3-2 defines a function from $A = \{a, b, c\}$ into $B = \{x, y, z\}$.

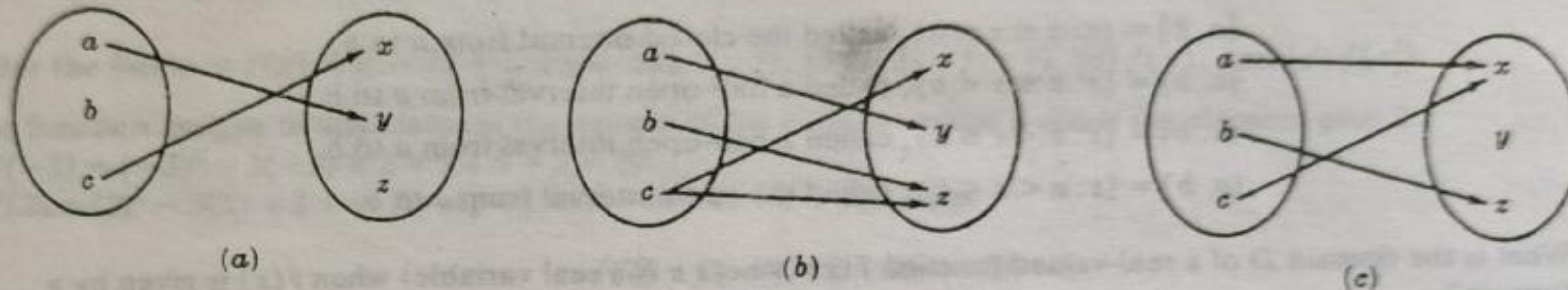


Fig. 3-2

(a) No. There is no element of B assigned to the element $b \in A$.
(b) No. Two elements, x and z, are assigned to $c \in A$.
(c) Yes, since each element of A is assigned a unique element of B.

3.9 State whether or not each diagram of Fig. 3-3 defines a function from $C = \{1, 2, 3\}$ into $D = \{4, 5, 6\}$.

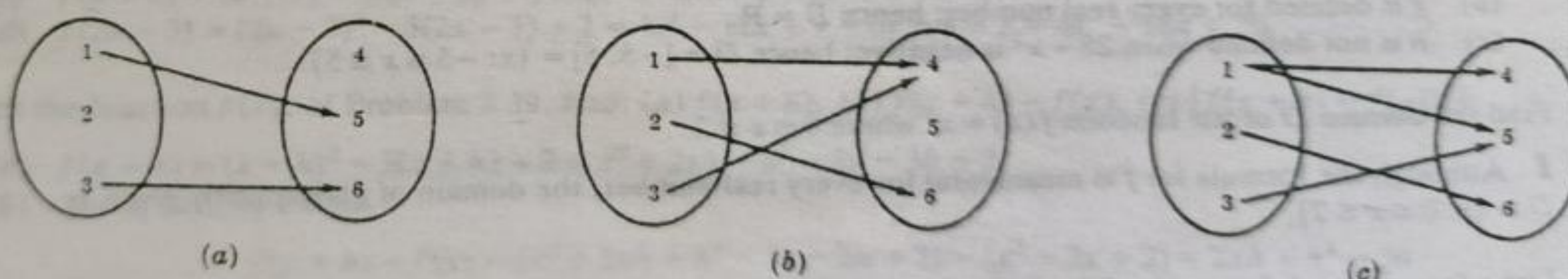


Fig. 3-3

Bài tập ✓ (Bổ sung các TC của ánh xạ)

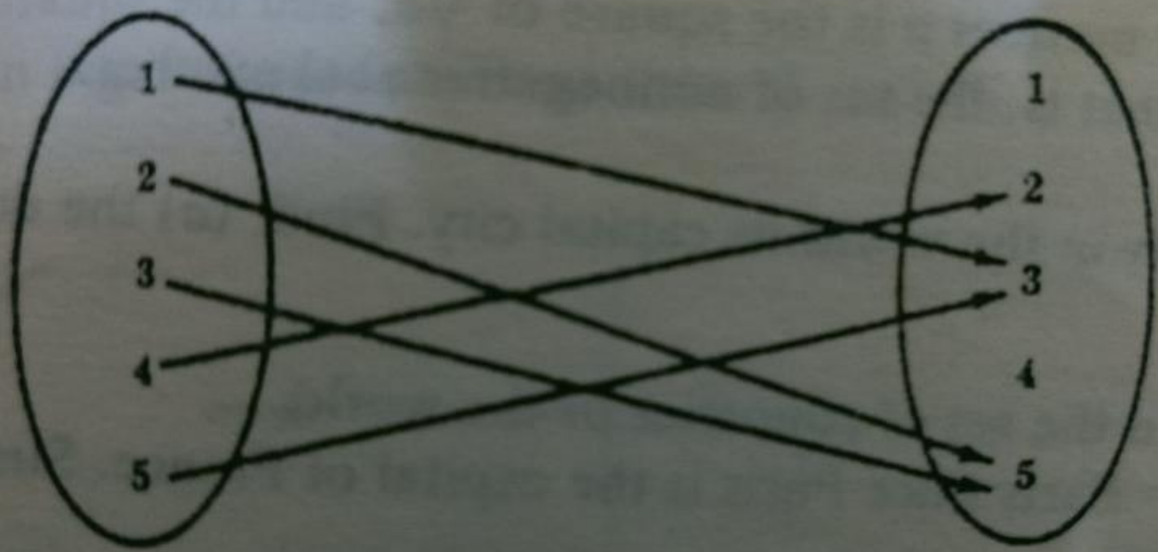


Fig. 3-4

3.11 Consider the set $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and the function $f: A \to A$ defined by Fig. 3-4. Find: (*a*) the image of each element of A, and (*b*) the image $f(A)$ of the function f.

(*a*) The arrow indicates the image of an element; thus $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$, $f(4) = 2$, $f(5) = 3$.

(*b*) The image $f(A)$ of f consists of all the image values. Now only 2, 3, and 5 appear as the image of any elements of A; hence $f(A) = \{2, 3, 5\}$.

Bài tập ✓ (Bổ sung các TC của ánh xạ)

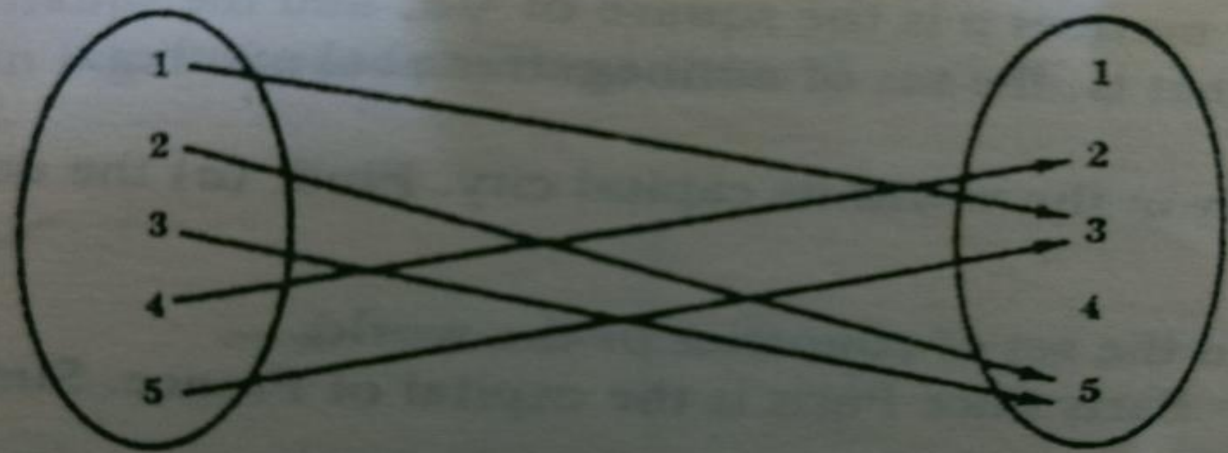


Fig. 3-4

Fig. 3-4

3.12 Find the graph of the function f defined by Fig. 3-4, i.e., write f as a set of ordered pairs.

▌ The ordered pairs $(a, f(a))$, where $a \in A$ form the graph of f. Thus

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\}$$

3.13 Consider the function f defined by Fig. 3-4. Find: (*a*) $f(S)$ where $S = \{1, 3, 5\}$; (*b*) $f^{-1}(T)$ where $T = \{1, 2\}$; and (*c*) $f^{-1}(3)$.

▌ (*a*) $f(S) = f(\{1, 3, 5\}) = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{3, 5, 3\} = \{3, 5\}$.

(*b*) Only 4 has its image in $T = \{1, 2\}$. Thus $f^{-1}(T) = \{4\}$.

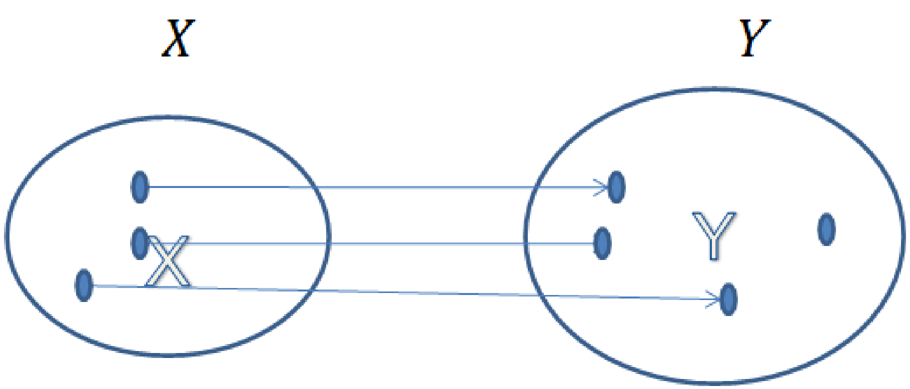
(*c*) The elements 1 and 5 have image 3; hence $f^{-1}(3) = \{1, 5\}$.

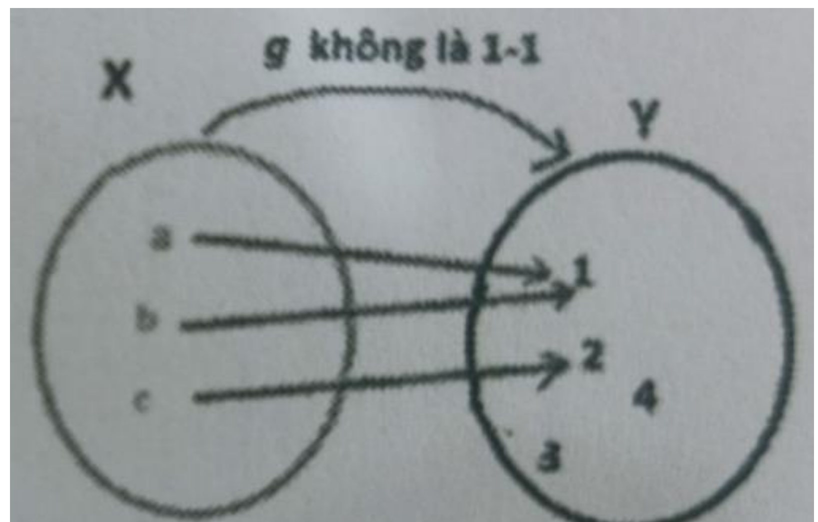
2. Phân loại ánh xạ

2.1. ***Đơn ánh hoặc ánh xạ 1-1 (Injective):*** Ta nói f : X → Y là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:

f : X → Y là đơn ánh

Nếu và chỉ nếu ∀x,x'∈X mà x ≠ x' ⇒ f(x) ≠ f(x')



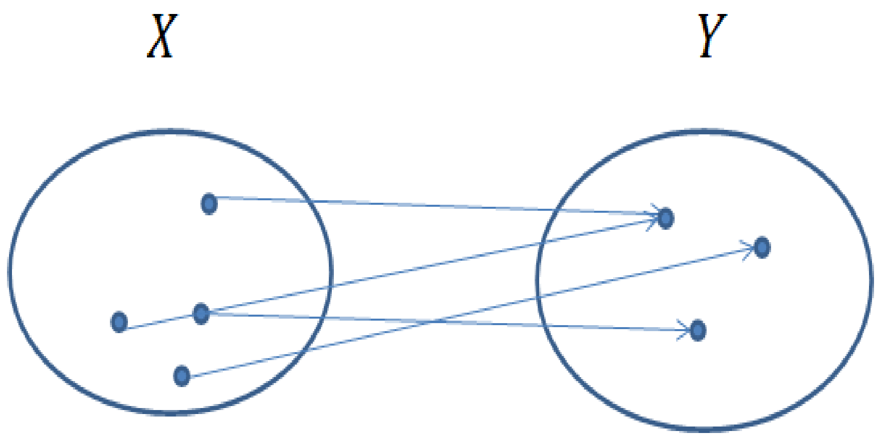


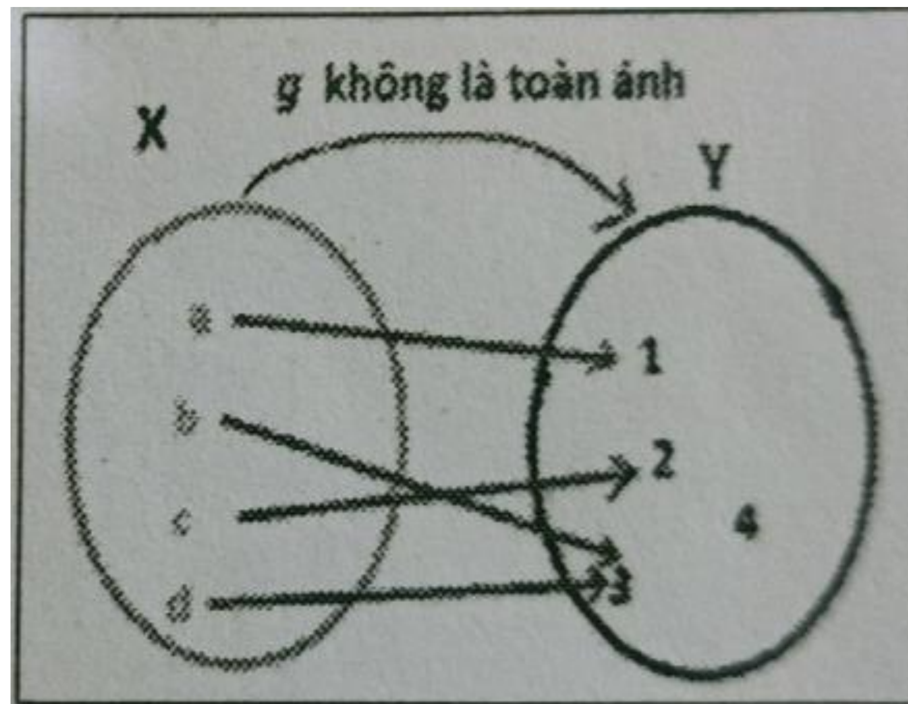
VI. Ánh xạ

2.2. *Toàn ánh hoặc ánh xạ lên (Surjective)*

Ta nói: $f : X \to Y$ là một toàn ánh

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$$



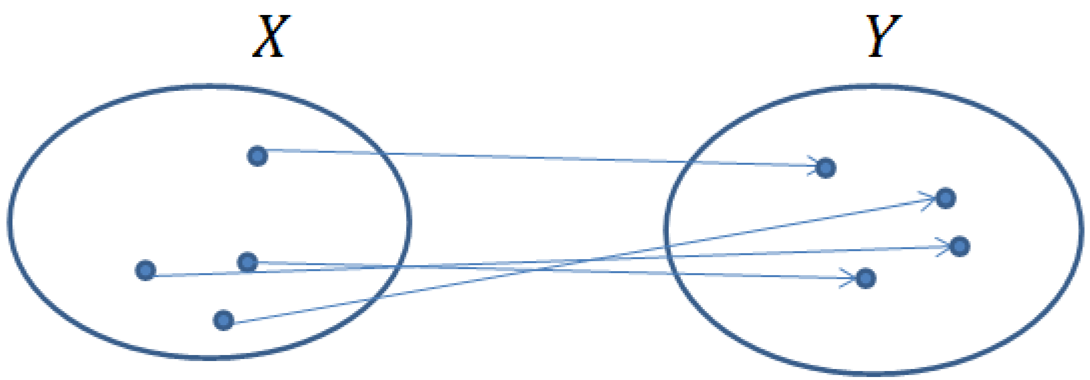


VI. Ánh xạ

2.3. ***Song ánh (Bijection)*** Ta nói f : X → Y là một ***song ánh*** nếu f vừa là **đơn ánh** vừa là **toàn ánh**.

f : X → Y là một song ánh

⇔ (∀y ∈ Y, ∃!x ∈ X, y = f(x));



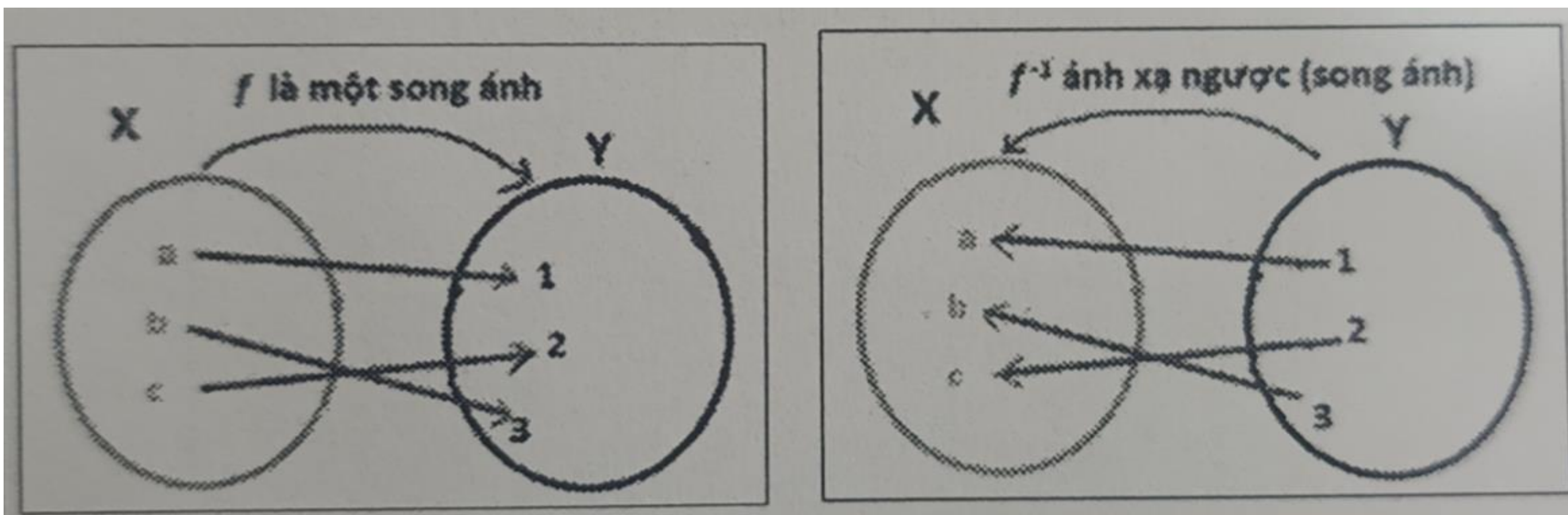
Lưu ý: $|X| = |Y|$ nếu và chỉ nếu tồn tại một song ánh từ X đến Y

$f : X \to Y$ là một song ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x))$;

2.4 Ánh xạ ngược.

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ***ánh xạ ngược*** của f và ký hiệu f^{-1}.



VI. Ánh xạ

Như vậy:

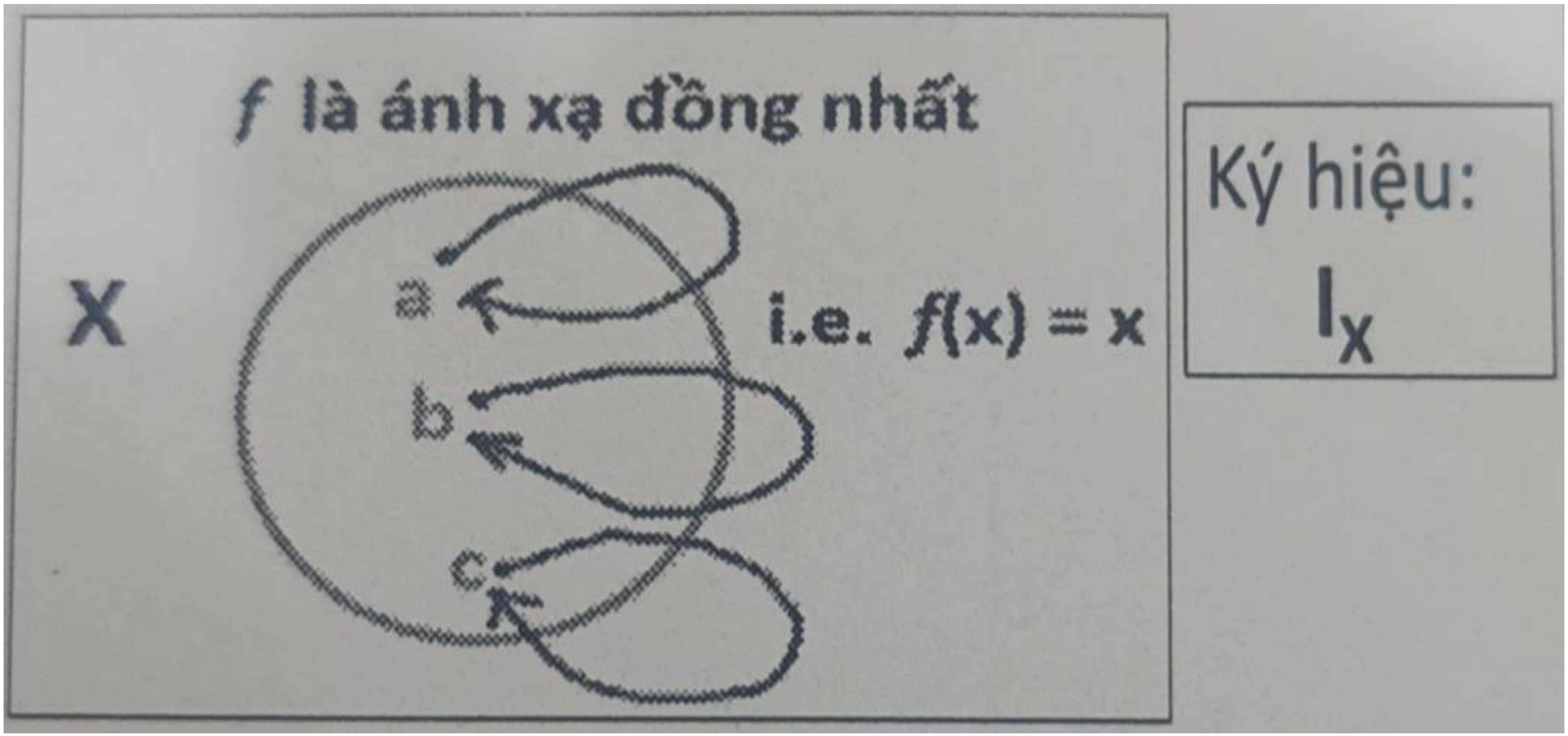
$$f^{-1}: Y \to X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ với } f(x) = y.$$

Ví dụ. Cho f là ánh xạ từ R vào R, $f(x) = 2x + 1$.

Khi đó $f^{-1}(x) = (y - 1)/2$

2.5. Ánh xạ đồng nhất (identity map)



2.6. Ánh xạ hạn chế (The restriction)

Cho f: X → Y, và $A \subseteq X$. Ánh xạ f hạn chế trên A định nghĩa là:

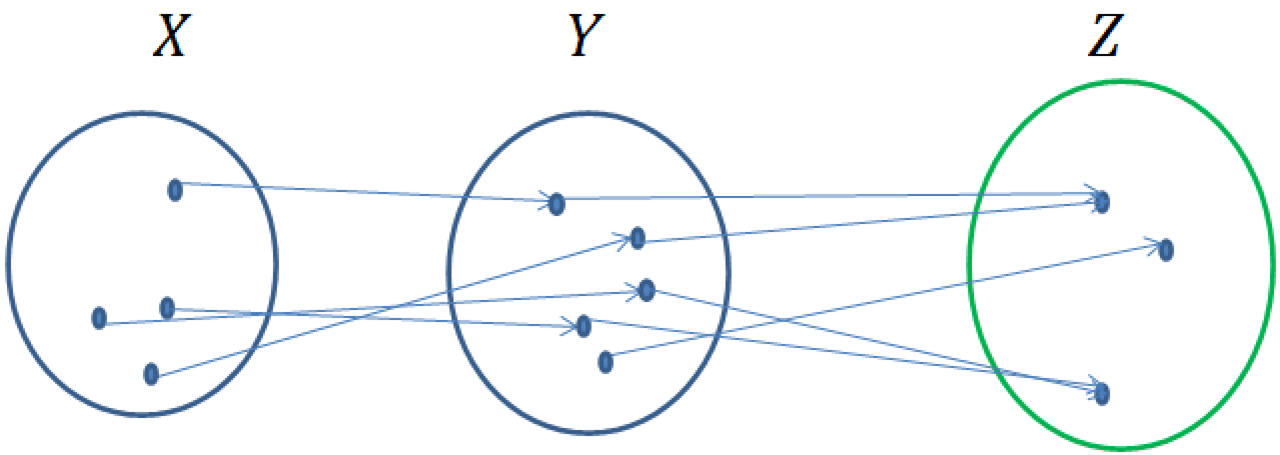
$$f^{hc}: A \to Y$$
$$x \mapsto f^{hc}(x) = f(x)$$
$$ie. \forall x \in A, f^{hc}(x) = f(x)$$

VI. Ánh xạ

2.7. Ánh xạ hợp. Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$. *Ánh xạ hợp của f và g là ánh xạ h* từ X vào Z xác định bởi:

$$\begin{aligned} h : X &\to Z \\ x &\mapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Ta viết: $h = g \circ f$.



VI. Ánh xạ

Ví dụ. Tìm $g_o f$, $f_o g$

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sqrt{x+1}$$

$g_o f(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1) + 1} = \sqrt{x^2 + 2}$

$f_0 g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{(x^2+1)})^2 + 1 = x^2 + 2$

Bài 3.65,66,67,77 /BookEnglish, Trang 192

Bài tập

3.65 Let functions f and g be defined by $f(x) = 2x + 1$ and $g(x) = x^2 - 2$ respectively. Find: (*a*) $(g \circ f)(4)$ and $(f \circ g)(4)$; (*b*) $(g \circ f)(a + 2)$; and (*c*) $(f \circ g)(a + 2)$.

(*a*) $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. Hence $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(9) = 9^2 - 2 = 79$. $g(4) = 4^2 - 2 = 14$. Hence $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(14) = 2 \cdot 14 + 1 = 29$. (Note that $f \circ g \neq g \circ f$ since they differ on $x = 4$.)

(*b*) $f(a + 2) = 2(a + 2) + 1 = 2a + 5$. Hence

$$(g \circ f)(a + 2) = g(f(a + 2)) = g(2a + 5) = (2a + 5)^2 - 2 = 4a^2 + 20a + 23$$

(*c*) $g(a + 2) = (a + 2)^2 - 2 = a^2 + 4a + 2$. Hence

$$(f \circ g)(a + 2) = f(g(a + 2)) = f(a^2 + 4a + 2) = 2(a^2 + 4a + 2) + 1 = 2a^2 + 8a + 5$$

.66 Given the functions $f(x) = 2x + 1$ and $g(x) = x^2 - 2$ (Problem 3.65), find the composition functions (*a*) $g \circ f$, (*b*) $f \circ g$.

(*a*) Compute the formula for $g \circ f$ as follows:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

Observe that the same answer can be found by writing $y = f(x) = 2x + 1$ and $z = g(y) = y^2 - 2$, and then eliminating y: $z = y^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$.

(*b*) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications [7th Edition].

[2]. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1997.

[3]. GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc. Nhà xuất bản giáo dục.

[4]. PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, Bài giảng tóm tắt Toán rời rạc. Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Đà Lạt.

[5]. Seymour Lipschutz and Marclars Lipson, 2000 solved problems in Discrete Mathematics.

[6]. Bùi Tấn Ngọc, Bộ đề toán rời rạc dùng cho sinh viên Khoa Công nghệ thông tin và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính, Trường Đại học Quảng Ngãi.

[7]. TS. Nguyễn Viết Đông, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[8]. TS. Lê Văn Luyện, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.