TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC
CHƯƠNG II: LOGIC VÀ CÁC PHÉP CHỨNG MINH (PHẦN 2)

Mạng logic (Mạng các cổng)

Input: x_1, x_2,…, x_n là các biến Bool

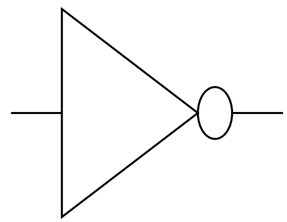
Output $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ là hàm Bool.

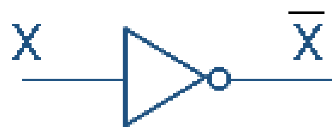
Ta nói mạng logic trên tổng hợp hay biểu diễn hàm Bool f

Các cổng

- NOT:

Kí hiệu cổng





Bảng chân trị

X	**not** X
0	1
1	0

Input Output

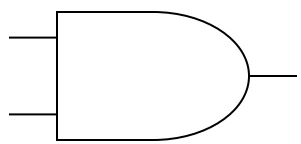
Nếu đưa mức HIGH vào ngõ vào của cổng, ngõ ra sẽ là mức LOW và ngược lại.

Các cổng

- AND:

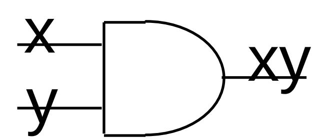
Cổng AND có ít nhất 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1 khi tất cả các ngõ vào là 1, ngược lại là 0



x and y

$x \bullet y, x \wedge y, x \& y, xy$

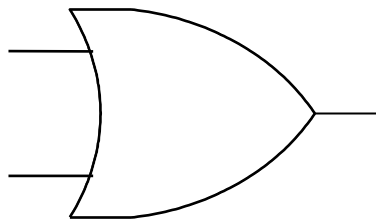


Bảng chân trị

X	Y	X **and** Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Các cổng

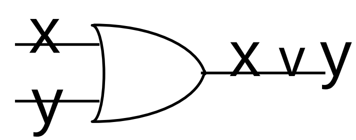
- OR:



Cổng OR có ít nhất là 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1, nếu có một ngõ vào là 1, ngược lại là 0

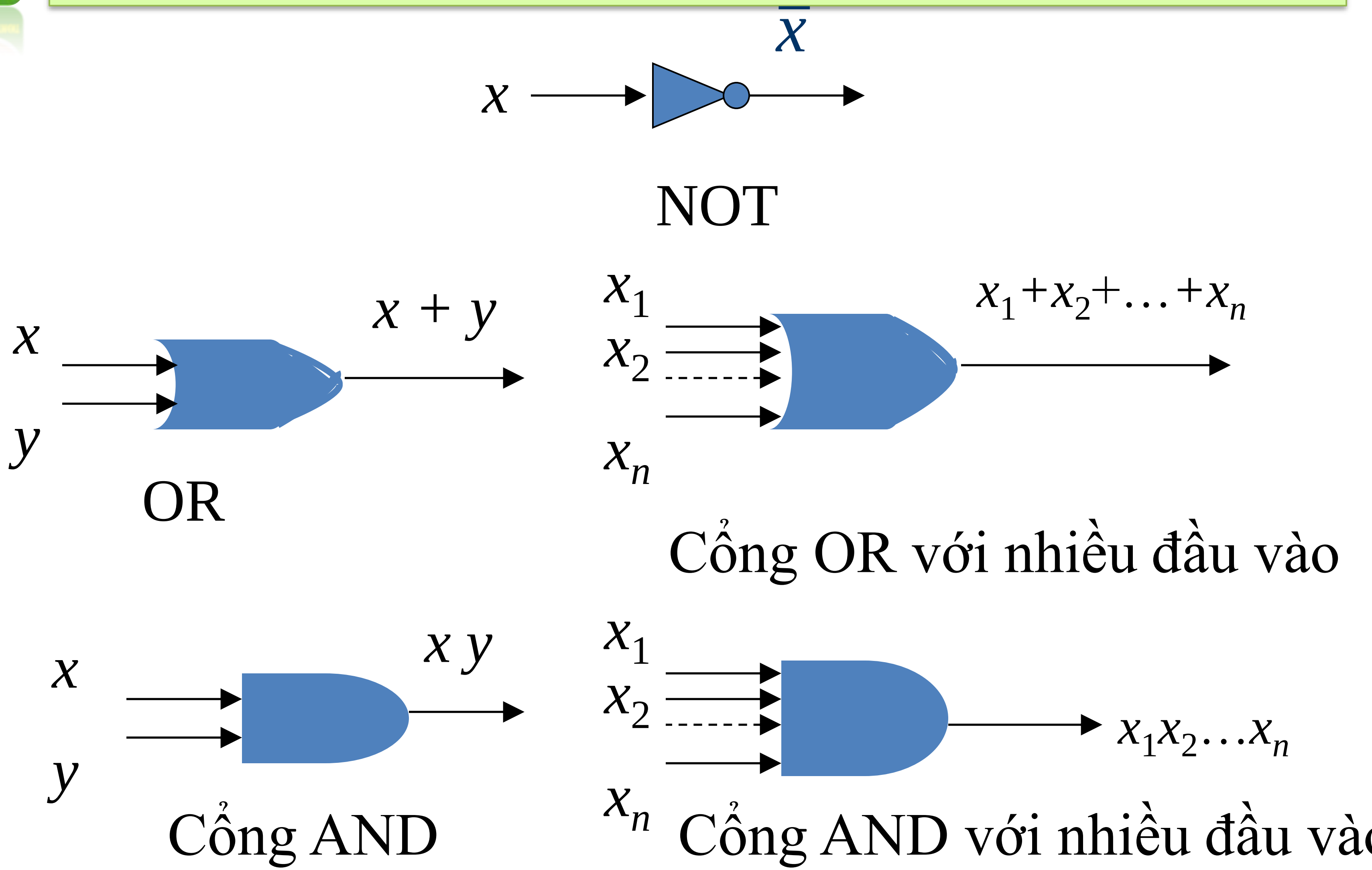
$\boxed{\text{x or y}}$ $x + y, x \vee y, x|y$



Bảng chân trị:

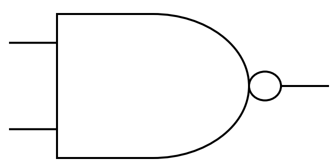
X	Y	X **or** Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cổng cơ bản


$\overline{x}$
x
NOT
$x + y$
x
y
OR
x_1
x_2
x_n
$x_1+x_2+\ldots+x_n$
Cổng OR với nhiều đầu vào
$x\,y$
x
y
Cổng AND
x_1
x_2
x_n
$x_1x_2\ldots x_n$
Cổng AND với nhiều đầu và

Các cổng

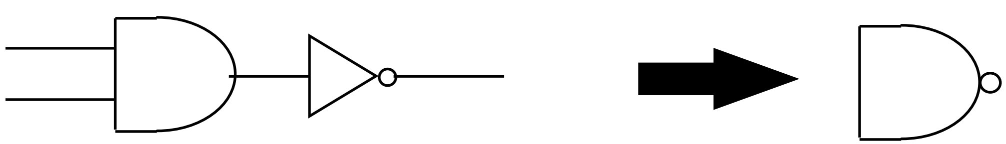
- NAND:



Là cổng bù của AND

Có ngõ ra là ngược lại với cổng AND

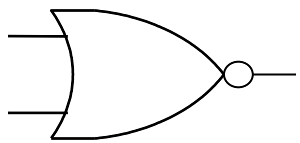
$$X \;\; nand \;\; Y \; = \; not\,(X \; and \;\; Y) \; = \overline{xy}$$



X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Các cổng

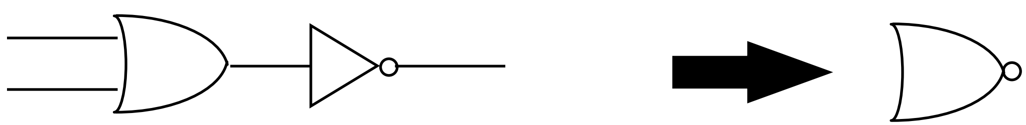
- NOR:



Là cổng bù của OR

Có ngõ ra ngược với cổng OR

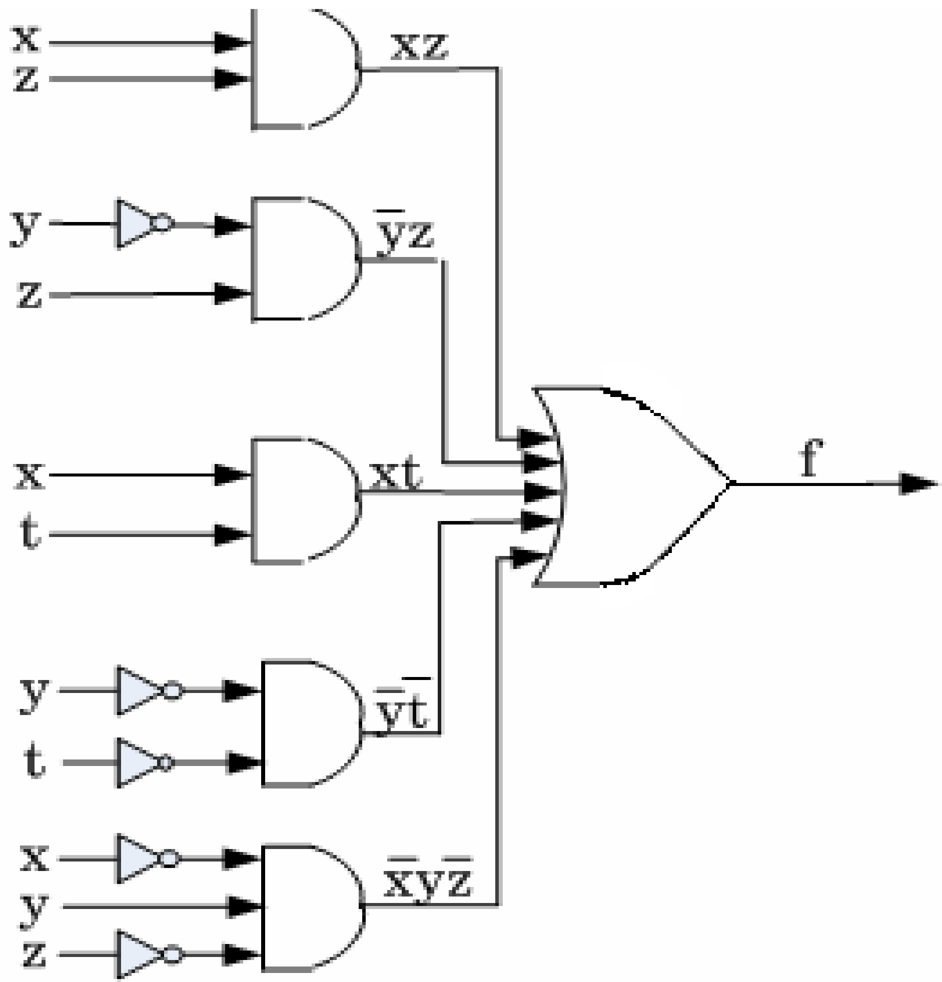
X nor Y = not (X or Y) = $\overline{x \vee y}$



X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

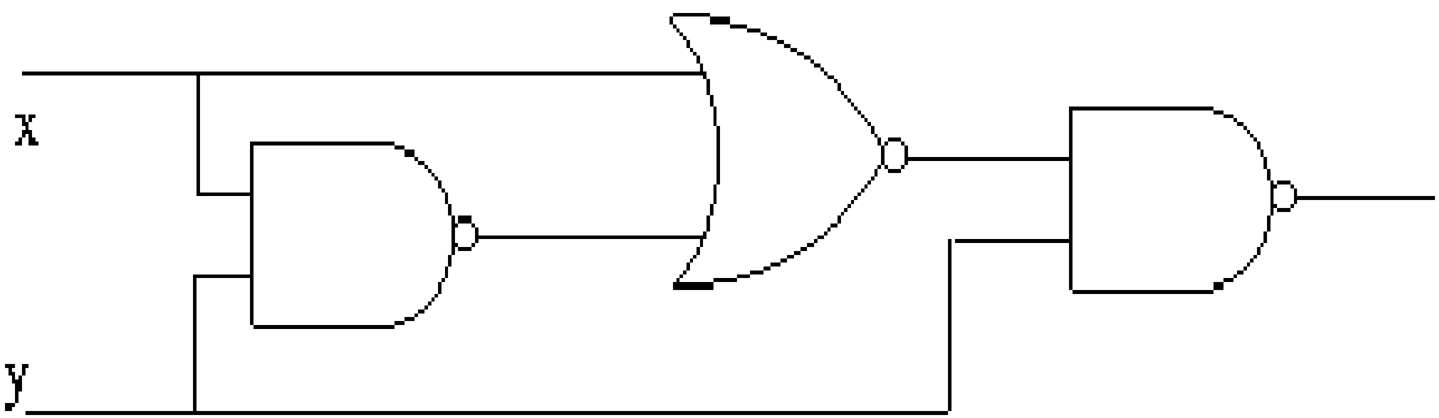
Ví dụ

$$f = xz \vee \overline{y}z \vee xt \vee \overline{y}\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z}$$

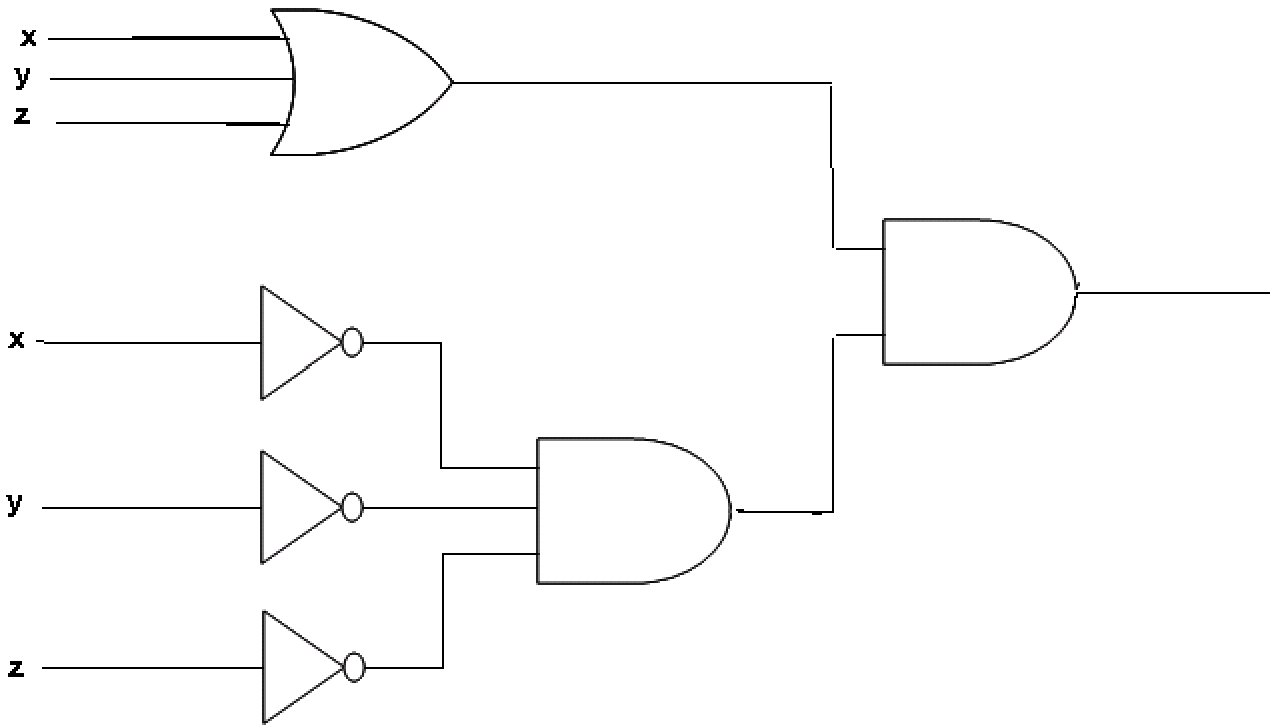


Ví dụ

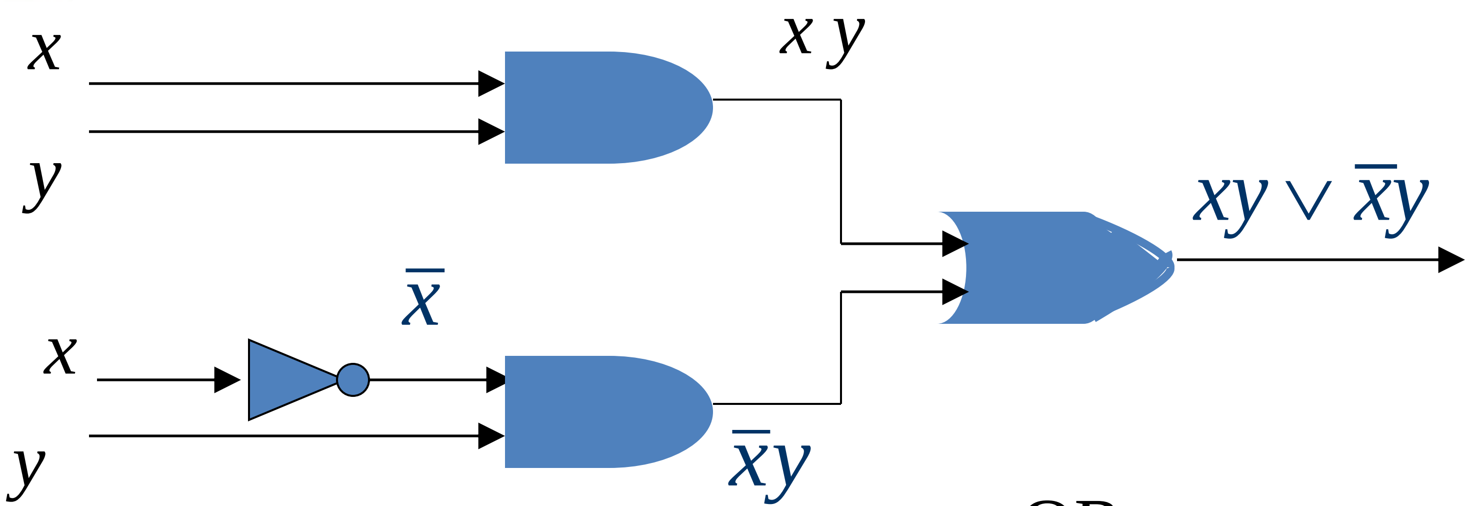
$$\overline{\overline{x \vee \overline{xy}}\; y}$$



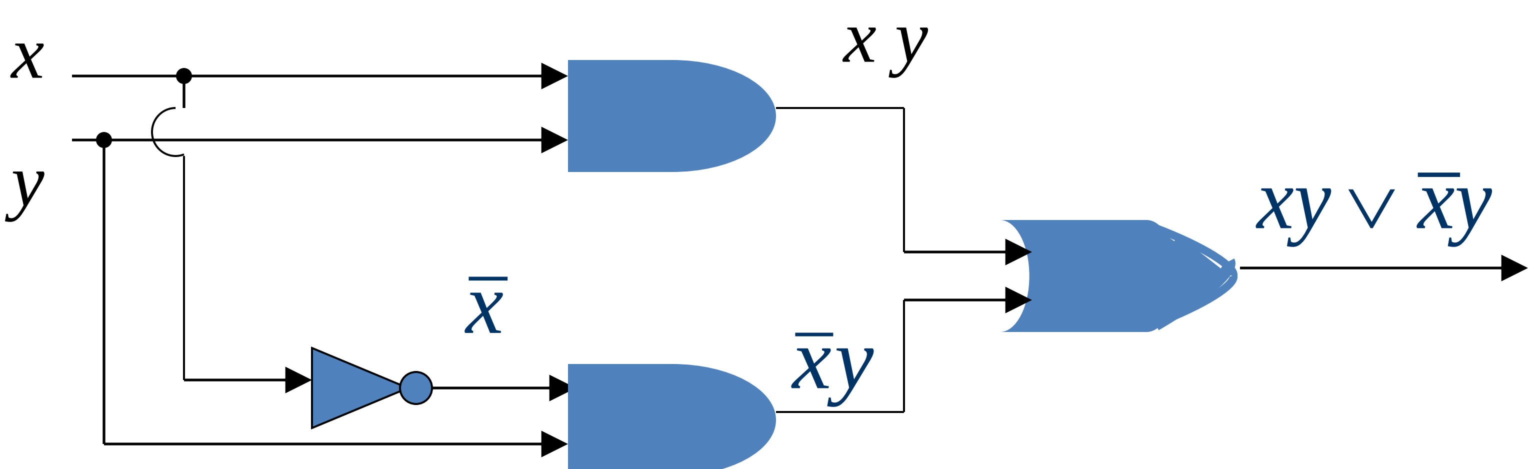
Cho sơ đồ



Viết biểu thức f

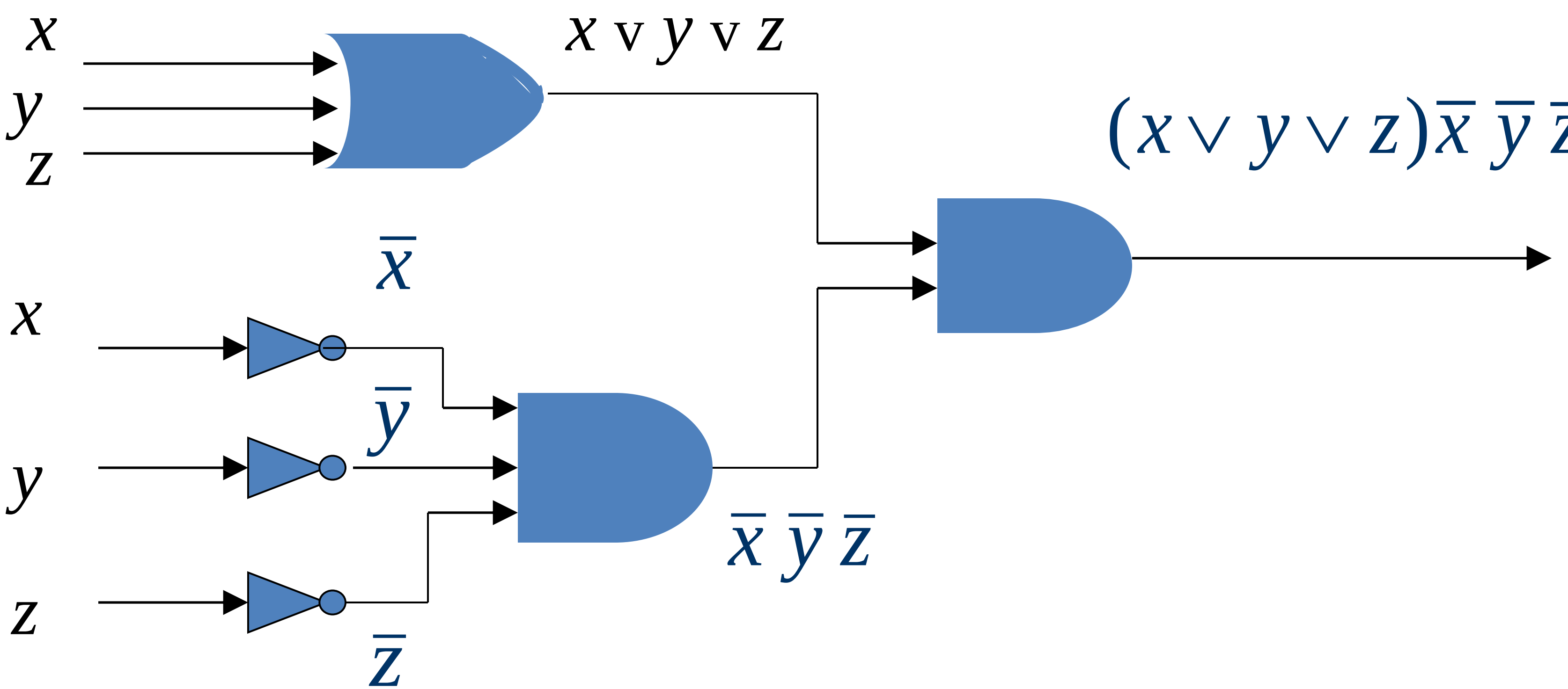


OR



Example

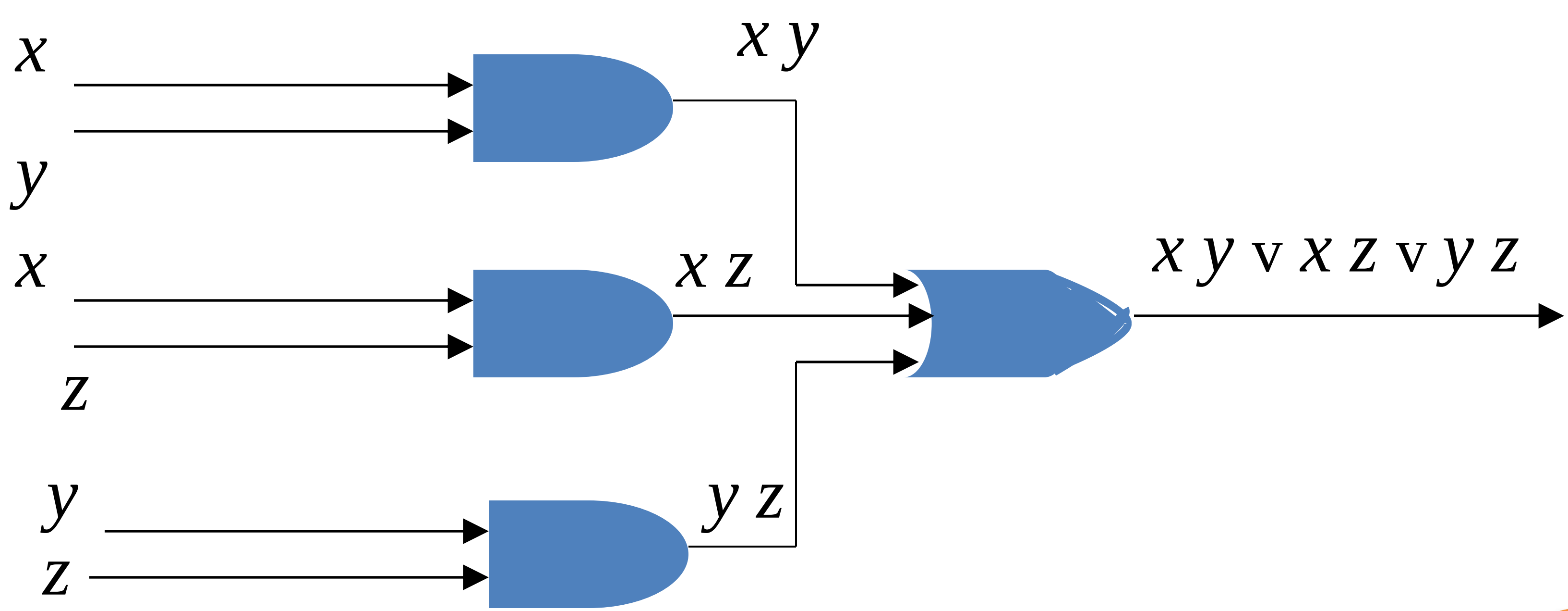
$$(x \vee y \vee z)\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$



Ví dụ về mạch điện

Thiết kế mạch để mô phỏng việc thông qua ý kiến gồm ba người, dựa trên đa số

Giải. Mỗi việc bầu chọn của mỗi người xem như là biến x, y, z : 1 cho đồng ý và 0 cho không đồng ý



Ví dụ

Thiết kế một mạch điều khiển bởi 2 cầu dao

Mỗi cầu dao xem như là biến x, y : 1 là bật 0 là tắt

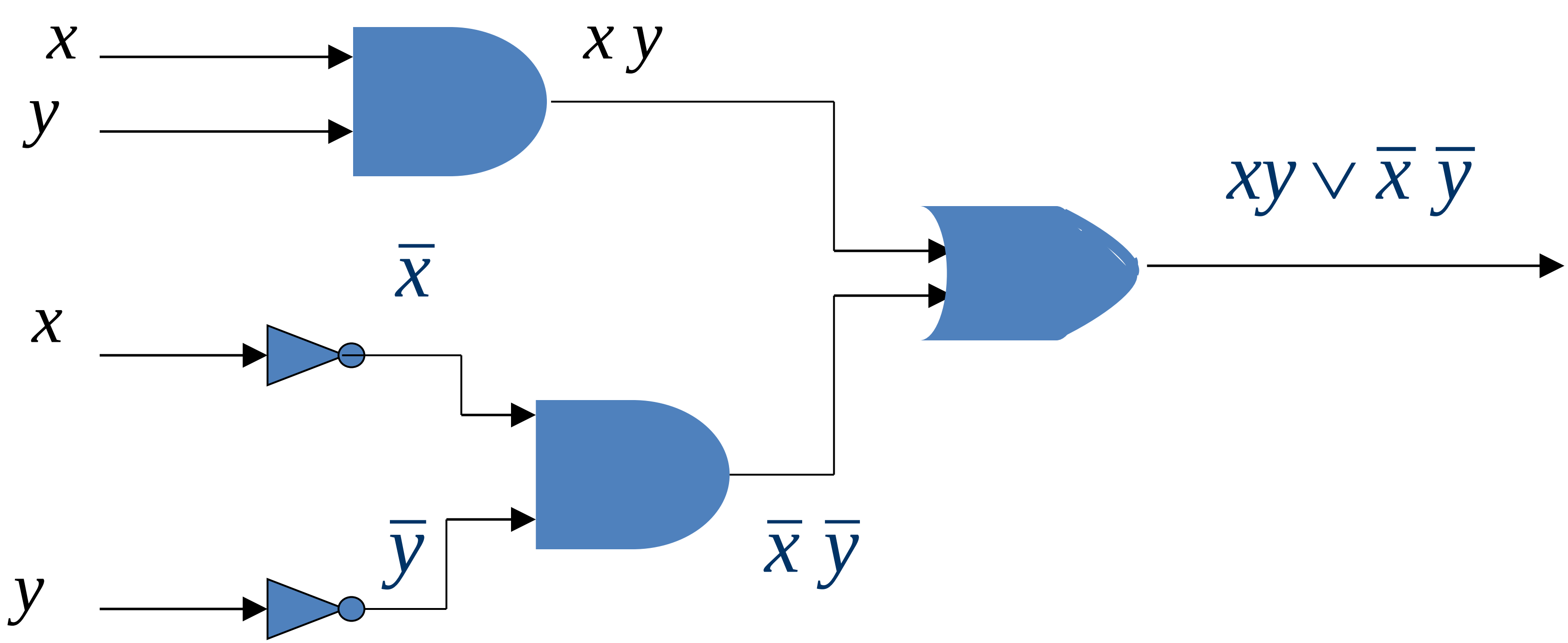
Cho $F(x, y) = 1$ khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử F(x, y) =1 khi cả hai cái đều bật hoặc cùng tắt

Ta có bảng chân trị sau

x	y	F(x, y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ví dụ



Thiết kế một mạch điều khiển bởi 3 cầu dao

Mỗi cầu dao xem như là biến *x*, *y* : 1 là bật 0 là tắt

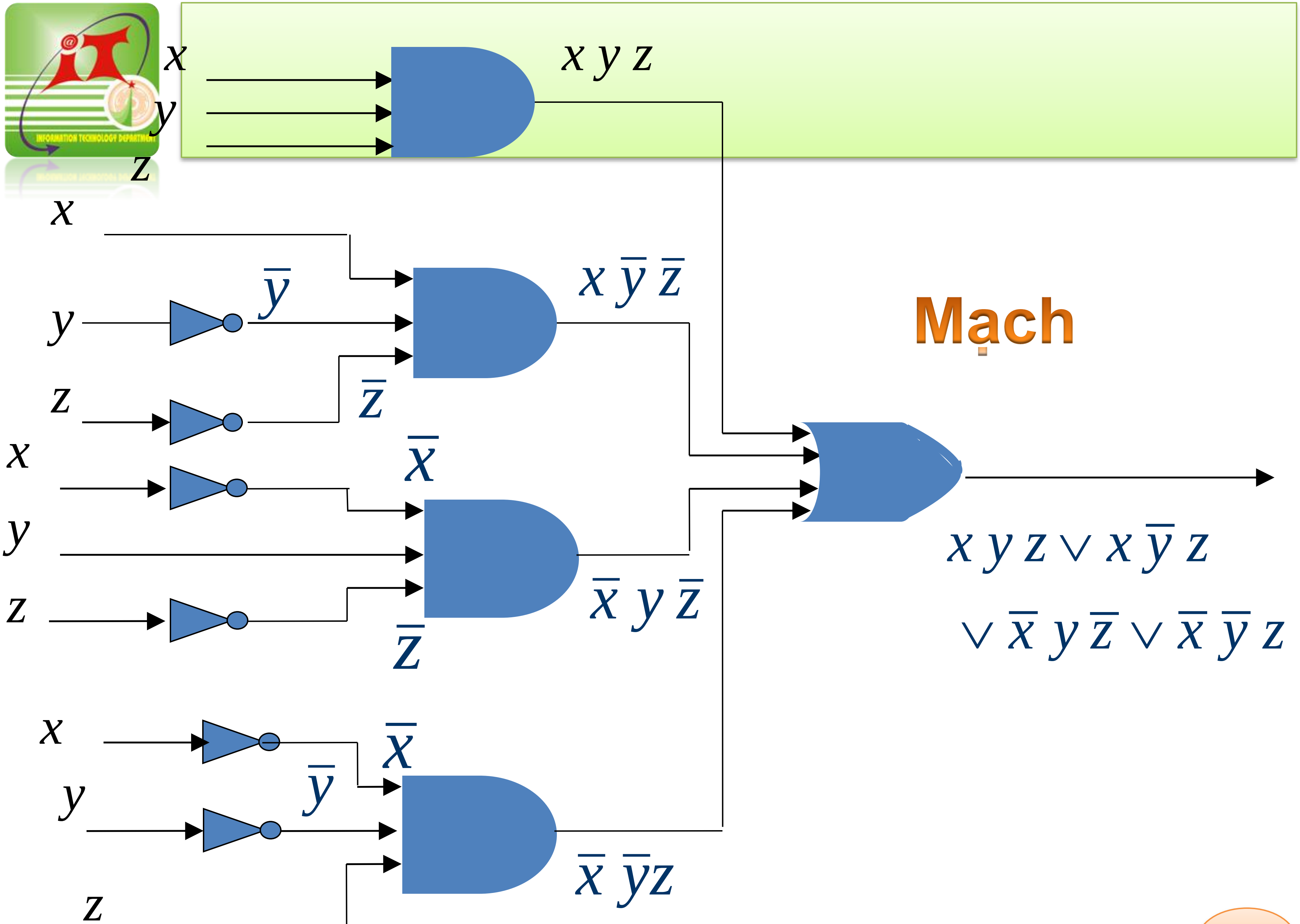
Cho *F*(*x*, *y*) =1 khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử *F*(x,y,z) =1 khi 1 hoặc 3 cái đều bật

Ta có bảng chân trị sau

x	***y***	***z***	***F(x, y)***
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Mạch



x
y
z
xyz
x
y
$\bar{y}$
z
$\bar{z}$
$x\bar{y}\bar{z}$
x
$\bar{x}$
y
z
$\bar{z}$
$\bar{x}y\bar{z}$
x
$\bar{x}$
y
$\bar{y}$
z
$\bar{x}\bar{y}z$
$xyz \vee x\bar{y}z$
$\vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

LOGIC VÀ CÁC PHÉP CHỨNG MINH

1. Vị từ, lượng từ
2. Qui nạp toán học

1. Vị từ và lượng từ

```
void btTest ()
{
        x = 5;
        y = 0;
        for (i = 1; i <= 10; i++)
        {
            y = i - 2;
            if (y > x)
                Xuat(y);
        }
}
```

i: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10; y = i - 2; x = 5;

Kết quả:

6

7

8

1. Vị từ và lượng từ

- **Các câu có liên quan đến biến như: "x > 3"; "x = y+3"; "x+y=z".** → Các khẳng định toán học; các chương trình máy tính.
  Các câu này không đúng cũng không sai chừng nào các biến còn chưa được cho những giá trị xác định.
- Xét câu **P(x)** = "**x lớn hơn 3**". Chủ ngữ của câu (*biến x*). Vị ngữ của câu (*lớn hơn 3*).
  Một khi biến x được gán giá trị thì **P(x)** sẽ có giá trị chân lý. Ví dụ: **P(2)** sai, **P(4)** đúng.
- Câu có 2 biến: **"x = y + 3",** ký hiệu **Q(x,y)**. Một khi biến x, y được gán giá trị thì **Q(x,y)** sẽ có giá trị chân lý. Ví dụ: **Q(1,2)** sai, **Q(3,0)** đúng.
  Tổng quát lớn hơn 3 biến.

1. Vị từ và lượng từ

1. Định nghĩa Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,.. Cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề
- Nếu thay x,y,.. thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ.

- p(n) = "n +1 là số nguyên tố"
- q(x,y) = "$x^2 + y = 1$" → vị từ 2 biến theo x,y
- r(x,y,z) = "$x^2 + y^2 > z$" → vị từ 3 biến theo x,y,z

1. Vị từ và lượng từ

2. Các phép toán trên vị từ Cho trước các vị từ $p(x)$, $q(x)$ một biến $x \in A$. Khi ấy:

- *Phủ định của vị từ* $p(x)$ kí hiệu là $\neg p(x)$ là vị từ mà khi thay x bởi 1 phần tử a của A thì ta được mệnh đề $\neg(p(a))$

- *Phép hội (tuyển, kéo theo, kéo theo hai chiều)* của $p(x)$ và $q(x)$ được ký hiệu bởi hội: $p(x) \wedge q(x)$ (tuyển: $p(x) \vee q(x)$, kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$, và kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$) là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi phần tử a của A ta được mệnh đề: $p(a) \wedge q(a)$ (tuyển: $p(a) \vee q(a)$, kéo theo: $p(a) \rightarrow q(a)$, và kéo theo hai chiều: $p(a) \leftrightarrow q(a)$)

1. Vị từ và lượng từ

Khi xét một mệnh đề p(x) với x $\in$ A. Ta có các trường hợp sau:

- TH1. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH2. Với một số giá trị a $\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH3. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $\in$ A, ta có p(a) sai.

Ví dụ. Cho vị từ p(x) với x$\in$R

- $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \text{“}x^2 + 1 > 0\text{”}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \text{“}x^2 - 2x + 1 = 0\text{”}$
- $\forall x, \in \mathbb{R}, p(x) = \text{“}x^2 - 2x + 3 = 0\text{”}$

1. Vị từ và lượng từ

Định nghĩa. Cho p(x) là một vị từ một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:

- Mệnh đề *“Với mọi x thuộc A, p(x)* ”, kí hiệu bởi **“∀x ∈ A, p(x)”**, là mệnh đề đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị a ∈ A.

- Mệnh đề “*Tồn tại (ít nhất) hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))”* kí hiệu bởi: **“∃x ∈ A, p(x)”** , là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x = a_0 nào đó $(a_0 \in A)$ sao cho mệnh đề p(a_0) đúng.

∀: *được gọi là lượng từ phổ dụng*

∃ : *được gọi là lượng từ tồn tại*

Bài tập: 31,32,33,34,36,37,38/ GS.NHA-Trang 39,40,41.

1. Vị từ và lượng từ

Định nghĩa. Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của $p(x, y)$ như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

1. Vị từ và lượng từ

Ví dụ.

- Mệnh đề "$\forall x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \in R$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

1. Vị từ và lượng từ

Định lý. Cho p(x,y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

1. Vị từ và lượng từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng các thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$ và vị từ p(x,y,..) thành $\neg$ p(x,y,..).

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

1. Vị từ và lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,y)}$$

1. Vị từ và lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

"$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$"

"$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in R, |f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

Trả lời :

"$\exists x \in A, 2x + 1 > 0$"

"$\exists \varepsilon > 0, \exists x \in R, |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$".

1. Vị từ và lượng từ

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế x bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng

Ví dụ:

"Mọi người đều chết"
"Socrate là người"
Vậy "Socrate cũng chết"

$$\begin{array}{l} \forall x \in A,\ p(x) \\ a \in A \\ \hline \therefore\ p(a) \end{array}$$

Bài 51, 52/ Trang 44, 45/ GS.NHA

2. Phép quy nạp

$$CM:\ 1+3+5+...+2n-1=n^2$$

1. Phương pháp:

- Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số n, như P(n). Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh P(n) đúng với mọi số tự nhiên n $\geq N_0$.
- Quá trình chứng minh quy nạp bao gồm 2 bước:

➢ *Bước cơ sở:* Chỉ ra $P(N_0)$ đúng.

➢ *Bước quy nạp:* Chứng minh nếu P(k) đúng thì P(k+1) đúng (hoặc đúng từ $P(N_0)$ đến P(k) thì P(k+1) đúng). Trong đó các P(k) được gọi là giả thiết quy nạp.

VI. Quy nạp

Ví dụ. Chứng minh $1+2+3+\ldots+2n-1 = n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Gọi P(n) = “$1 + 2 + 3 + \ldots 2n-1 = n^2$”

+ Bước cơ sở:

Hiển nhiên P(1) đúng vì $1= 1^2$.

VI. Quy nạp

+ Bước quy nạp:

- Giả sử P(k) đúng, tức là

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

- Ta phải chỉ ra rằng P(k+1) đúng, tức là

$$1+3+5+...+(2k+1)=(k+1)^2$$

Từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

- Suy ra, P(k+1) đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp P(n) đúng với mọi số nguyên dương n

VI. Quy nạp

$$CM\ \ 1+2+3+...+n-1+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Bài 51/GS.NHA, trang 463
Bài 1/ PGS. PTS, trang 32

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications [7th Edition].

[2]. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1997.

[3]. GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc. Nhà xuất bản giáo dục.

[4]. PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, Bài giảng tóm tắt Toán rời rạc. Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Đà Lạt.

[5]. Seymour Lipschutz and Marclars Lipson, 2000 solved problems in Discrete Mathematics.

[6]. Bùi Tấn Ngọc, Bộ đề toán rời rạc dùng cho sinh viên Khoa Công nghệ thông tin và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính, Trường Đại học Quảng Ngãi.

[7]. TS. Nguyễn Viết Đông, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[8]. TS. Lê Văn Luyện, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.