TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC
(CHƯƠNG V: QUAN HỆ)
(PHẦN 2)

V.1 Quan hệ tương đương (Equivalence Relations)

Định nghĩa 2. Cho tập hợp A khác trống. Quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$ gọi là một quan hệ tương đương trên A nếu như có các tính chất sau đây:

$\forall\, x, y, z \in A$

(i) $(x, x) \in R$ **(phản xạ),**

(ii) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ **(đối xứng),**

(iii) $(x, y) \in R$ và $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ **(bắc cầu).**

Ghi chú 3. Cho R là một quan hệ tương đương trên A:

- Thay cho $(x, y) \in R$, ta viết $x \sim y$ (hoặc $x \sim_R y$) và đọc là: *x tương đương với y* (theo quan hệ R).

- $\forall\, a \in A$, tập: $[a]_\sim \equiv [a]_R \equiv \{x \in A \mid a \sim x\}$ gọi là lớp tương đương của a (và a gọi là phần tử đại diện của lớp này). (**$[a]_R = \{b \in A \mid b\, R\, a\}$**)

- Tập $[A]_R \equiv [A]_\sim \equiv A|_\sim \equiv A|_R \equiv \{[a]_\sim \mid a \in A\}$ gọi là tập thương của quan hệ R (tập tất cả các lớp tương đương của A).

- Ký hiệu $(A, \sim)$ (hoặc $(A, \sim_R)$) để chỉ cho một tập A có trang bị một quan hệ tương đương R trên nó.

V.1 Quan hệ tương đương (t.t.)

Tính chất 1. Cho một quan hệ tương đương $(A, \sim)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương: $\forall a, b \in A$

(i) $a \sim b$ (ii) $[a]_\sim = [b]_\sim$ (iii) $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \varnothing$.

Tính chất 2. Cho $A \neq \varnothing$. Khi đó:

a) $(A, \sim)$ là một quan hệ tương đương $\Rightarrow [A]_\sim$ là một phân hoạch của A.

b) $[S] \equiv \{S_k \mid k \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ là một phân hoạch của A.
$\Rightarrow$ Tồn tại một quan hệ tương đương trên A nhận S là tập thương của nó.

- **Bao đóng của quan hệ**

Cho tập hợp A khác trống và quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Khi đó ta gọi:

(i) $r(R)$ là ***bao đóng phản xạ*** của R: i.e. quan hệ trên A có tính phản xạ bé nhất chứa R.

(ii) $s(R)$ là ***bao đóng đối xứng*** của R: i.e. quan hệ trên A có tính đối xứng bé nhất chứa R.

(iii) $t(R)$ là ***bao đóng bắc cầu*** của R: i.e. quan hệ trên A có tính bắc cầu bé nhất chứa R.

V.2.2 Quan hệ tương đương (t.t.)

Tính chất 3. Cho tập hợp A khác trống và quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Khi đó:

(i) $R = r(R) \Leftrightarrow R$ (có tính) phản xạ

(ii) $R = s(R) \Leftrightarrow R$ (có tính) đối xứng

(iii) $R = \mathrm{t}(R) \Leftrightarrow R$ (có tính) bắc cầu.

Tính chất 4. Cho tập hợp A khác trống và quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Khi đó:

(a) R phản xạ $\Rightarrow s(R)$ và $t(R)$ cũng phản xạ.

(b) R đối xứng $\Rightarrow r(R)$ và $t(R)$ cũng đối xứng.

(c) R bắc cầu $\Rightarrow r(R)$ cũng bắc cầu.

V.2.2 Quan hệ tương đương (t.t.)

Định lý 1. Cho tập hợp A khác trống và quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Khi đó:

(a) $r(R) = R \cup E$ (ở đây E là quan hệ đơn vị trên A).

(b) $s(R) = R \cup R^{-1}$.

(c) $t(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ (ở đây $R^k \equiv R \circ \ldots \circ R$).

Đặc biệt, nếu $|A| = n$ thì: $t(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$.

2.160 Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine whether or not each of the following is a partition of S:

(*a*) $P_1 = [\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6\}]$ (*c*) $P_3 = [\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}]$
(*b*) $P_2 = [\{1, 2\}, \{3, 5, 6\}]$ (*d*) $P_4 = [\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 7\}]$

■ (*a*) No, since $1 \in S$ belongs to two cells.
(*b*) No, since $4 \in S$ does not belong to any cell.
(*c*) P_3 is a partition of S.
(*d*) No, since $\{2, 4, 6, 7\}$ is not a subset of S.

2.161 Let $S = \{\text{red, blue, green, yellow}\}$. Determine whether or not each of the following is a partition of S:

(*a*) $P_1 = [\{\text{red}\}, \{\text{blue, green}\}]$.
(*b*) $P_2 = [\{\text{red, blue, green, yellow}\}]$.
(*c*) $P_3 = [\varnothing, \{\text{red, blue}\}, \{\text{green, yellow}\}]$.

■ (*a*) No, since yellow does not belong to any cell.
(*b*) P_2 is a partition of S whose only element is S itself.
(*c*) No, since the empty set $\varnothing$ cannot belong to a partition.

2.162 Let $S = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$. Determine whether or not each of the following is a partition of S:

(*a*) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}]$ (*c*) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}]$
(*b*) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}]$ (*d*) $[\{S\}]$

■ (*a*) No, since $7 \in S$ does not belong to any cell.
(*b*) No, since $\{1, 3, 5\}$ and $\{5, 7, 9\}$ are not disjoint.
(*c*) and (*d*) are partitions of S.

2.163 Let $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$. Determine whether or not each of the following is a partition of X:

(*a*) $[\{1, 3, 6\}, \{2, 8\}, \{5, 7, 9\}]$ (*c*) $[\{2, 4, 5, 8\}, \{1, 9\}, \{3, 6, 7\}]$
(*b*) $[\{1, 5, 7\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{3, 5, 6\}]$ (*d*) $[\{1, 2, 7\}, \{3, 5\}, \{4, 6, 8, 9\}, \{3, 5\}]$

■ (*a*) No; because $4 \in X$ does not belong to any cell. In other words, X is not the union of the cells.
(*b*) No; because $5 \in X$ belongs to two distinct cells, $\{1, 5, 7\}$ and $\{3, 5, 6\}$. In other words, the two distinct cells are not disjoint.
(*c*) Yes; because each element of X belongs to exactly one cell. In other words, the cells are disjoint and their union is X.
(*d*) Yes. Although 3 and 5 appear in two places, the cells are not distinct.

2.164 Find all the partitions of $S = \{1, 2, 3\}$.

■ Note that each partition of S contains either 1, 2, or 3 distinct cells. The partitions are as follows:

Bài tập

Bài 1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}, \mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$.

a) Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương
b) Tìm các lớp tương đương [1],[2],[3].
c) Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương

Bài 1. Trên tập hợp $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ta xét quan hệ hai ngôi $\Re$ như sau:

$$x \Re y \Leftrightarrow x - 3y \text{ chẵn.}$$

a) Chứng minh $\Re$ là quan hệ tương đương.

b) Tìm các lớp tương đương của [1], [2].

Bài 2. Trên tập hợp $A = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, ta xét quan hệ hai ngôi $\Re$ như sau:

$$x \Re y \Leftrightarrow x - y \text{ chia hết cho 3.}$$

a) Chứng minh $\Re$ là quan hệ tương đương trên A.

b) Tìm lớp tương đương của [3]? Trong các lớp $[-2], [-1], [2], [5], [7]$ có bao nhiêu lớp đôi một phân biệt?

V.2 Quan hệ thứ tự

Quan hệ thứ tự

Biểu đồ Hasse

Phần tử tối tiểu, tối đại

Chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất

Định nghĩa 1. Cho tập hợp A khác trống. Quan hệ $R \in \mathcal{P}(A^2)$ gọi là một *quan hệ thứ tự* trên A nếu như có các tính chất sau đây: $\forall\, x, y, z \in A$

(i) $(x, x) \in R$ **(phản xạ)**,

(ii) $(x, y) \in R$ và $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ **(phản (đối) xứng)**,

(iii) $(x, y) \in R$ và $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ **(bắc cầu)**.

Ghi chú 1. Nếu R là một quan hệ thứ tự trên A thì:

- Thay cho $(x, y) \in R$, ta viết $x \preccurlyeq y$ (đọc là: x ***trước*** y, hoặc x ***bị trội bởi*** y). Nếu $x \preccurlyeq y$ và $x \neq y$ ta viết $x \prec y$ (nói là: x ***trước thực sự*** y, hoặc x ***có trội thực sự là*** y).
- Khi A có một quan hệ thứ tự R trên nó, ta viết (A, R) hoặc $(A, \preccurlyeq)$ và gọi là một tập thứ tự.

Định nghĩa

Định nghĩa 2. Cho R là một quan hệ thứ tự trên A, $\forall x,y \in A$.

+ Nếu $(x,y)\in R \vee (y,x)\in R$ thì ta nói x,y so sánh được với nhau.

+ Nếu $(x,y) \notin R \wedge (y,x) \notin R$ thì ta nói ràng x,y không so sánh được với nhau.

Định nghĩa

Định nghĩa 3. Cho R là một quan hệ thứ tự trên A, $\forall x,y \in A$.

+ Nếu x so sánh được với y thì ta nói rằng quan hệ thứ tự R trên A là quan hệ thứ tự toàn phần.

+ Ngược lại nếu x không so sánh được với y thì gọi là quan hệ thứ tự bộ phận.

Ví dụ. Cho U_{30} tập các ước số dương nhỏ hơn 30 với quan hệ "|".

$\Rightarrow$ $U_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

Là quan hệ thứ tự bộ phận vì 3,5 không so sánh được với nhau trên quan hệ U_{30}

Định nghĩa

Định nghĩa 4. Biểu đồ Hasse. Cho A là 1 tập hợp, trên A có quan hệ thứ tự $\prec$, sao cho $\forall x,y \in A$.

+ Nếu $x \prec y$ thì ta nói y là 1 trội của x (x được trội bởi y).

+ Nếu y là trội của x và không tồn tại $z \in A$: $x \prec z \prec y$ thì ta nói rằng y là trội trực tiếp của x.

Định nghĩa

Định nghĩa 5. Biểu đồ Hasse.

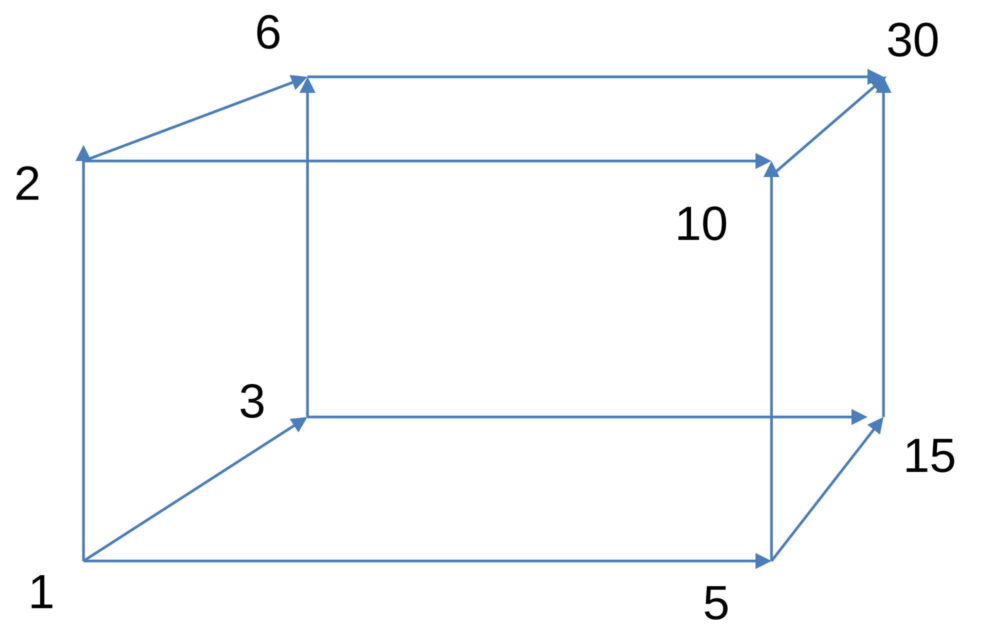
+ Mỗi phần tử $\forall x \in A$ được biểu diễn bằng 1 điểm.

+ Nếu y là trội trực tiếp của x thì vẽ một mũi tên $x \rightarrow y$

Chú ý: Quan hệ trên A hoàn toàn xác định nếu biết biểu đồ Hasse.

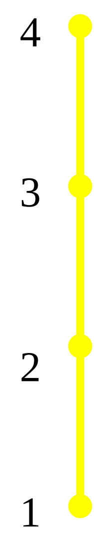
Định nghĩa

Ví dụ 1. Biểu đồ Hasse của $U_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$



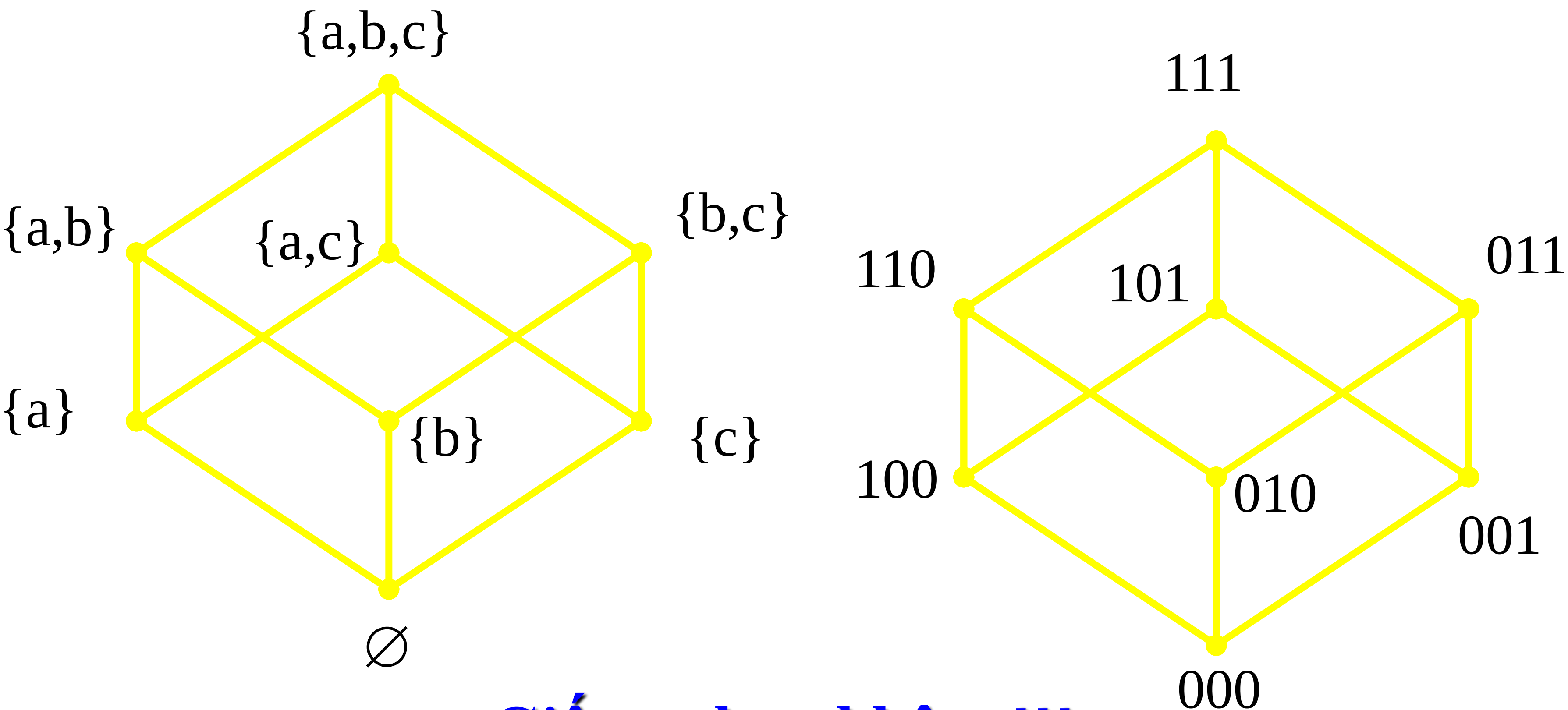
Biểu đồ Hasse

Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ Hasse của quan hệ "≤" trên tập hợp {1,2,3,4}.



Ví dụ 3. Biểu đồ Hasse của P({a,b,c})

Và biểu đồ Hasse của các chuỗi bit độ dài 3 với thứ tự từ điển

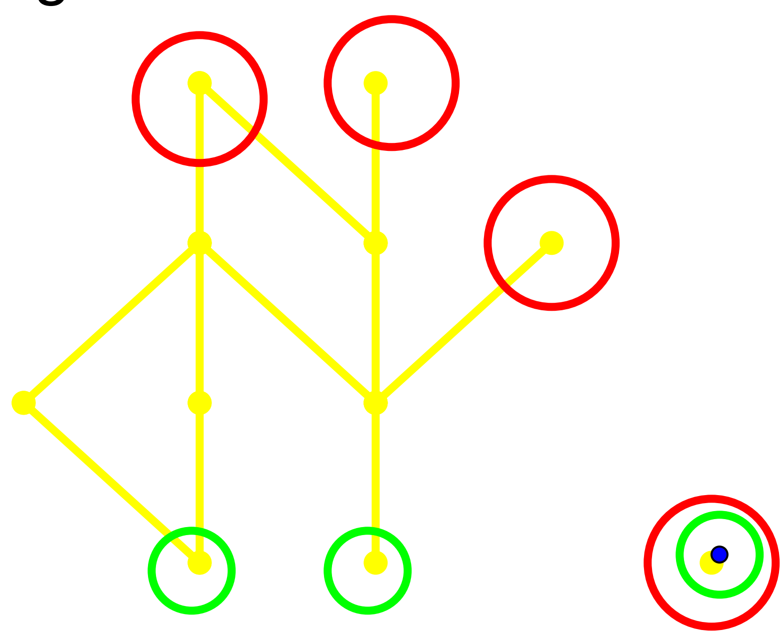


Giống nhau không!!!

Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

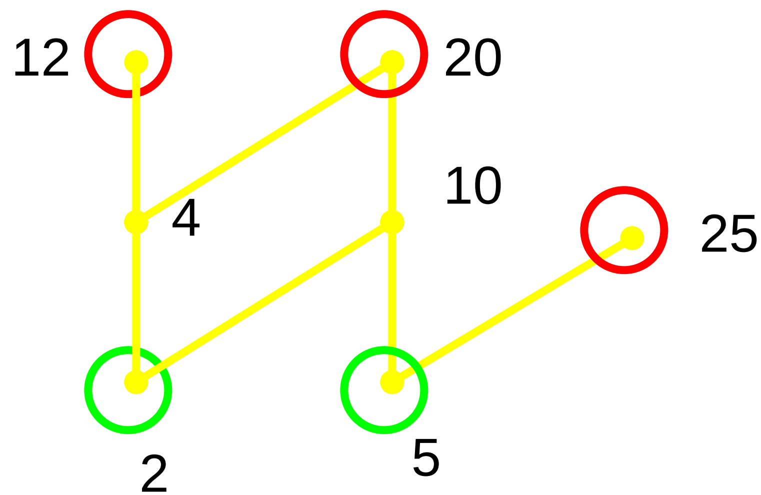
Xét quan hệ thứ tự có biểu đồ Hasse như dưới đây:

- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là ***tối đại.***
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là ***tối tiểu.***
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



Ví dụ 4. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của Quan hệ “|” trên tập {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}

Giải. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu



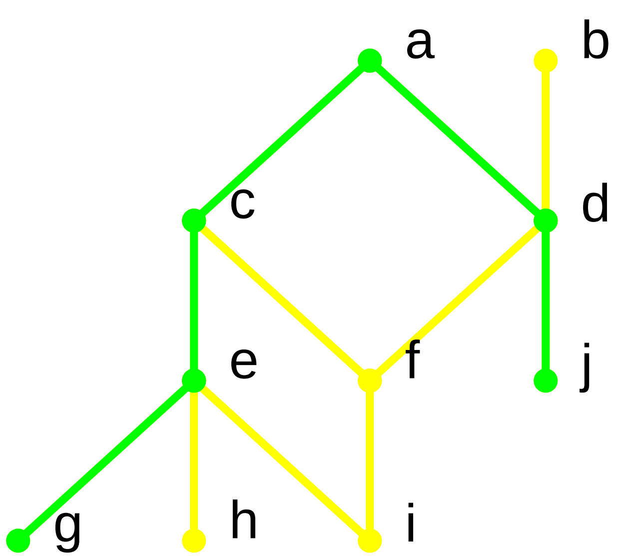
Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu có thể không duy nhất.

Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho $(S, \prec)$ là một quan hệ thứ tự và $A \subseteq S$.

Phần tử *chặn trên* của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall a \in A, a \prec x$.

Phần tử *chặn dưới* của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall a \in A, x \prec a$



Ví dụ . Phần tử chặn trên của $\{g,j\}$ là a.

Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho (S, $\prec$) là một quan hệ thứ tự và $A \subseteq S$.

Chặn trên nhỏ nhất của A là phần tử chặn trên x của A sao cho mọi chặn trên *y của A*, ta đều có $y \succ x$

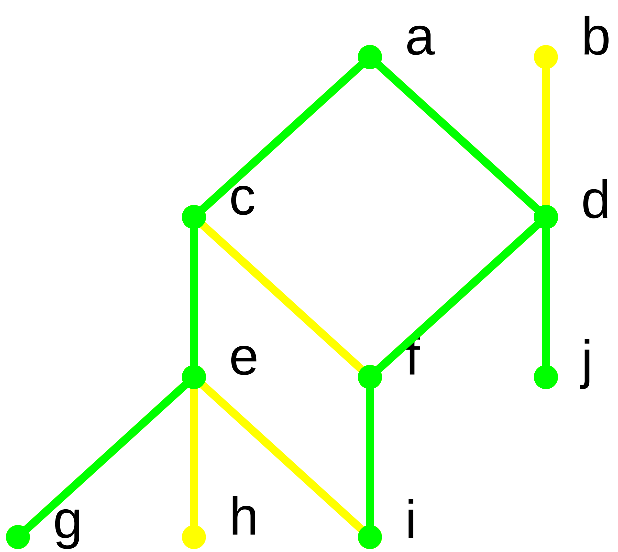
Chặn dưới lớn nhất của A là phần tử chặn dưới x của A sao cho mọi chặn dưới y của A, ta có $y \prec x$

Chặn trên nhỏ nhất của : supA

Chặn dưới lớn nhất: infA

Chặn trên, chặn dưới

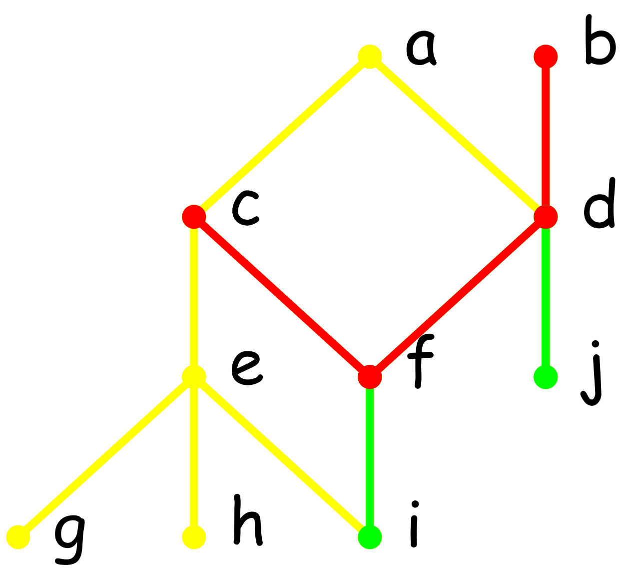
Ví dụ Chặn trên nhỏ nhất của {*i*,*j*} là *d*



Chặn trên, chặn dưới

Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ đựoc ký hiệu bởi $a \wedge b$



Ví dụ. $i \vee j = d$

Ví dụ. $b \wedge c = f$

Bài tập

Bài 1 . Cho $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 15, 20, 30, 36, 40, 60\}$ với với quan hệ ước số $|$.

$a)$ Vẽ sơ đồ Hass.

$b)$ Tìm các phần tử tối đại và tối tiểu trong X

Bài 2.

Trong các trường hợp sau, hãy tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu (nếu có) của các tập hợp đã cho với thứ tự tương ứng. Vẽ các biểu đồ Hasse.

$a)$ $U_{30} = \{n \in N \mid n|30\}$ với quan hệ ước số $|$.

$b)$ $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 10, 80\}$ với quan hệ ước số $|$.

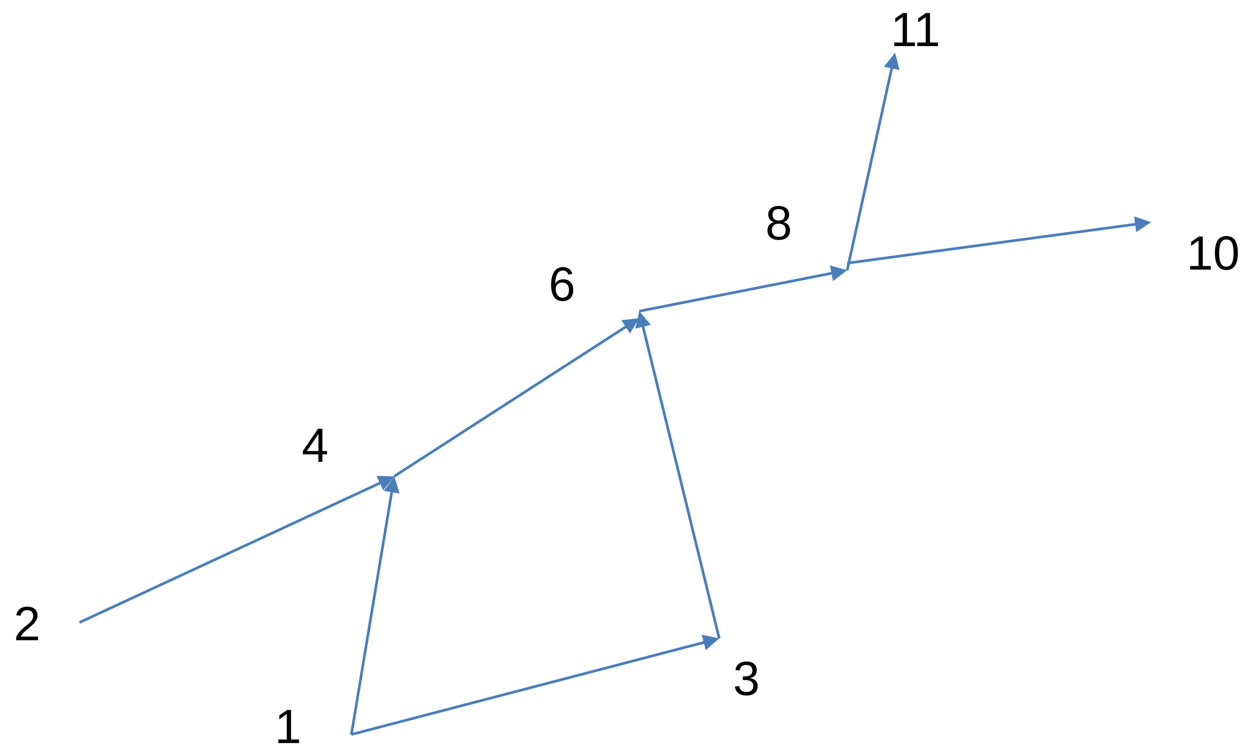
$c)$ $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11\}$ với quan hệ $\Re$ xác định như sau:

$$x \Re y \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x < y - 1.$$

Bài tập

$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11\}$ với quan hệ $\Re$ xác định như sau:

$$x \Re y \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x < y - 1.$$



TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications [7th Edition].

[2]. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1997.

[3]. GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc. Nhà xuất bản giáo dục.

[4]. PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, Bài giảng tóm tắt Toán rời rạc. Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Đà Lạt.

[5]. Seymour Lipschutz and Marclars Lipson, 2000 solved problems in Discrete Mathematics.

[6]. Bùi Tấn Ngọc, Bộ đề toán rời rạc dùng cho sinh viên Khoa Công nghệ thông tin và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính, Trường Đại học Quảng Ngãi.

[7]. TS. Nguyễn Viết Đông, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[8]. TS. Lê Văn Luyện, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.