TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LOGIC

(PHẦN 1)

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LOGIC

1. Mệnh đề
2. Dạng mệnh đề
3. Qui tắc suy diễn

I. Mệnh đề

1. Định nghĩa: Mệnh đề là một khẳng định có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.

   Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh… không là mệnh đề.

Ví dụ:

- mặt trời quay quanh trái đất
- 1+1 =2
- Hôm nay trời đẹp quá ! (ko là mệnh đề)
- Học bài đi ! (ko là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (ko là mệnh đề)

I. Mệnh đề

Ký hiệu: Người ta dùng các ký hiệu P, Q, R,… để chỉ mệnh đề.

Chân trị của mệnh đề:

- ✓ Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.
- ✓ Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1 (hay Đ, T) và 0 (hay S, F).

I. Mệnh đề

Kiểm tra các khẳng định sau có phải là mệnh đề không?

- Paris là thành phố của Mỹ
- n là số tự nhiên
- con nhà ai mà xinh thế!
- Toán rời rạc là môn bắt buộc của ngành Tin học
- Bạn có khỏe không?
- $x^2 + 1$ luôn dương.

I. Mệnh đề

2. Phân loại: gồm 2 loại

a. Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, khi và chỉ khi,…) hoặc trạng từ "không"

b. Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không"

Ví dụ:

- 2 không là số nguyên tố
- 2 là số nguyên tố (sơ cấp)
- Nếu 3>4 thì trời mưa
- An đang xem phim hay An đang học bài
- Hôm nay trời đẹp và 1 +1 = 3

I. Mệnh đề

2. Các phép toán: có 5 phép toán

a. Phép phủ định: Phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là $\neg$P hay $\overline{P}$ (đọc là "không" P hay "phủ định của" P.

Bảng chân trị :

P	$\neg$P
1	0
0	1

Ví dụ :

- 2 là số nguyên tố

  Phủ định: 2 không là số nguyên tố

- 1 > 2

  Phủ định : 1≤ 2

I. Mệnh đề

b. Phép hội (nối liền , giao): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi P $\wedge$ Q (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi : P $\wedge$ Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

Bảng chân trị

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ví dụ:

- 3>4 và Trần Hưng Đạo là vị tướng (S)
- 2 là số nguyên tố và là số chẵn (Đ)
- An đang hát và uống nước (S)

I. Mệnh đề

c. Phép tuyển (nối rời , hợp): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi : $P \vee Q$ sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Bảng chân trị

P	**Q**	**$P \vee Q$**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ví dụ:

- π >4 hay π >5 (S)
- 2 là số nguyên tố hay là số chẵn (Đ)

I. Mệnh đề

Ví dụ

- “Hôm nay, An giúp mẹ lau nhà và rửa chén”
- “Hôm nay, cô ấy đẹp và thông minh ”
- “Ba đang đọc báo hay xem phim”

I. Mệnh đề

d. Phép kéo theo: Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu bởi P $\rightarrow$ Q (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi:

P $\rightarrow$ Q sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	**0**
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:
- Nếu 1 = 2 thì Lê nin là người Việt Nam (Đ)
- Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì 1 + 3 = 5 (S)
- $\pi > 4$ kéo theo $5 > 6$ (Đ)
- $\pi < 4$ thì trời mưa
- Nếu 2 + 1 = 0 thì tôi là chủ tịch nước (Đ)

I. Mệnh đề

e. Phép kéo theo hai chiều: Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại, của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi P $\leftrightarrow$ Q (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q"), là mệnh đề xác định bởi:

P $\leftrightarrow$ Q đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:

- 2=4 khi và chỉ khi 2+1=0 (Đ)
- 6 chia hết cho 3 khi và chi khi 6 chia hết cho 2 (Đ)
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN (S)
- π >4 là điều kiện cần và đủ của 5 >6 (Đ)

II. Dạng mệnh đề

1. Định nghĩa: là một biểu thức được cấu tạo từ:

- Các mệnh đề (các hằng mệnh đề)
- Các biến mệnh đề *p, q, r, …,* tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc ().

Ví dụ:

$E(p,q) = \neg(\neg p \wedge q)$

$F(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge \neg(q \wedge r)$

II. Dạng mệnh đề

Bảng chân trị của dạng mệnh đề E(p,q,r): là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r. Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng.

Ví dụ:

$E(p,q) = \neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{p}$

$F(p,q) = (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \neg\boldsymbol{q}$

Ta có bảng chân trị sau

II. Dạng mệnh đề

Ví dụ 1: E(p,q) = $\neg(p \wedge q) \wedge p$

p	q	p∧q	¬(p∧q)	¬(p∧q) ∧ p
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Ví dụ 2: F(p,q) = $(p \wedge q) \rightarrow \neg q$

p	q	p∧q	¬q	(p∧q) → ¬q
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

II. Dạng mệnh đề

Bài tập: Lập bảng chân trị của những dạng mệnh đề sau

$E(p,q,r) = p \land (q \lor r) \leftrightarrow \neg q$

$F(p,q) = \neg (p \land q) \land p$

II. Dạng mệnh đề

2. Tương đương logic: Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

a) Dạng mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn lấy giá trị **1**

b) Dạng mệnh đề gọi là hằng sai (hay mâu thuẫn nếu nó luôn lấy giá trị **0**.

Định lý: Hai dạng mệnh đề E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là hằng đúng.

II. Dạng mệnh đề

Hệ quả logic: F được gọi là hệ quả logic của E nếu E→F là hằng đúng.

Ký hiệu E => F

Ví dụ: $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$

Lưu ý: Trong phép tính mệnh đề người ta không phân biệt những mệnh đề tương đương logic với nhau. Do đó đối với những dạng mệnh đề có công thức phức tạp, ta thường biến đổi để nó tương đương với những mệnh đề đơn giản hơn.

II. Dạng mệnh đề

Các qui tắc thay thế

a) Qui tắc thay thế 1: Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.

b) Qui tắc thay thế 2: Giả sử dạng mệnh đề E(p,q,r…) là một hằng đúng. Nếu ta thay thế những nơi p xuất hiện trong E bởi một F(p',q',r') thì dạng mệnh đề nhận được theo các biến q, r …, p', q', r', … vẫn còn là một hằng đúng.

II. Dạng mệnh đề

10 luật logic căn bản

1. Phủ định (Double negative)

$$\neg \neg p \Leftrightarrow p$$

2. Luật De Morgan (De Morgan's Laws)

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

3. Giao hoán (Commutativity)

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

4. Kết hợp (Associativity)

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r <=> p \wedge (q \wedge r)$$

II. Dạng mệnh đề

5. Phân phối (Distributivity)

$$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$$

$$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$$

6. Lũy đẳng (Idempotent)

$$p \lor p \Leftrightarrow p$$

$$p \land p \Leftrightarrow p$$

7. Trung hòa (Identity)

$$p \lor 0 \Leftrightarrow p$$

$$p \land 1 \Leftrightarrow p$$

II. Dạng mệnh đề

8. Phần tử bù (Complements)

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

9. Thống trị (Universal bounds)

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

10. Hấp thụ (Absorption)

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

II. Dạng mệnh đề

B. Các quy tắc phổ dụng

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$\neg (p \to q) \equiv p \wedge \neg q$$

II. Dạng mệnh đề

Bài tập:

Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

Ta chứng minh vế trái bằng vế phải

$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ (Luật kéo theo, phủ định)

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ (Luật phân phối)

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ (Luật De Morgan)

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee r$ (Luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$ (Luật kéo theo)

III. Qui tắc suy diễn

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng p, q, r…(tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là kết luận.

Nói cách khác, dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh:

(p∧q∧r∧…) có hệ quả logic là h. i.e,

$$(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots) \rightarrow h \equiv 1$$

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \ldots \\ \hline h \end{array}$$

III. Qui tắc suy diễn

Các qui tắc suy diễn

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens)

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

III. Qui tắc suy diễn

Ví dụ 1:

- Nếu An học chăm thì An học tốt.
- Mà An học chăm

Suy ra An học tốt.

Ví dụ 2:

- Trời mưa thì đường ướt.
- Mà chiều nay trời mưa.

Suy ra Chiều nay đường ướt.

III. Qui tắc suy diễn

2. Qui tắc tam đoạn luận

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\right] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \rightarrow r) \end{array}$$

III. Qui tắc suy diễn

Ví dụ 1:

- Nếu trời mưa thì đường ướt.
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra nếu trời mưa thì đường trơn.

Ví dụ 2:

- Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
- **Cái gì hiếm thì đắt**

Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt (☺)

III. Qui tắc suy diễn

3. Phương pháp phủ định

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \land \neg q\right] \to \neg p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \quad\quad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

III. Qui tắc suy diễn

Ví dụ:

Nếu An đi học đầy đủ thì An đậu toán rời rạc.
An không đậu toán rời rạc.

Suy ra: An không đi học đầy đủ

III. Qui tắc suy diễn

4. Qui tắc tam đoạn luận rời rạc

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \to p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg q \qquad\quad} \\ \therefore\ p \end{array}$$

Ý nghĩa của qui tắc: nếu trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp sai thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ đúng.

III. Qui tắc suy diễn

Ví dụ:

Chủ nhật, An thường lên thư viện hoặc về quê
Chủ nhật này, An không về quê

Suy ra: An lên thư viện

III. Qui tắc suy diễn

5. Qui tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)

Ta có tương đương logic

$$\left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \rightarrow q\right] \Leftrightarrow \left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q\right) \rightarrow 0\right]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng ta chứng minh nếu thêm phủ định của q vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn.

III. Qui tắc suy diễn

Hãy chứng minh:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore \neg r \to s \end{array}$$

Cm bằng phản chứng.

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \neg r \\ \neg s \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

III. Qui tắc suy diễn

6. Qui tắc chứng minh theo trường hợp

Dựa trên hằng đúng:

$$\left[(p \to r) \wedge (q \to r)\right] \to \left[(p \vee q) \to r\right]$$

Ý nghĩa: nếu p suy ra r và q suy ra r thì p hay q cũng có thể suy ra r.

III. Qui tắc suy diễn

7. Qui tắc nối liền trên hằng đúng

Dựa trên hằng đúng:

p

q

$\therefore$ p $\wedge$ q

III. Qui tắc suy diễn

8. Qui tắc đơn giản

Dựa trên hằng đúng:

$p \wedge q$

$\therefore\ p$

$p \wedge q$

$\therefore\ q$

III. Qui tắc suy diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$
\begin{array}{l}
p \to (q \to r) \\
p \vee s \\
t \to q \\
\overline{s} \\
\hline
\therefore\ \overline{r} \to \overline{t}
\end{array}
$$

III. Qui tắc suy diễn

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore\ \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

1)	$\overline{s}$	(Tiền đề)
2)	$p \vee s$	(Tiền đề)
3)	p	(Tam đoạn luận rời)
4)	$p \to (q \to r)$	(Tiền đề)
5)	$q \to r$	(Qui tắc khẳng định)
6)	$t \to q$	(Tiền đề)
7)	$t \to r$	(Tam đoạn luận)
	$\therefore\ \overline{r} \to \overline{t}$	(Luật phản đảo)

Vậy suy luận trên là đúng.

III. Qui tắc suy diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \rightarrow s \end{array}$$

III. Qui Tắc Suy Diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore\ \bar{q} \to s \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg q \to \neg p \\ r \to s \\ \neg p \to r \\ \hline \therefore\ \neg q \to s \end{array}$$

Tam đoạn luận 2 lần

III. Qui tắc suy diễn

9. Phản ví dụ

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$$

không là một hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ. (i.e., tìm một bộ các giá trị của các biến sao cho $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ nhận hằng 1 còn kết luận q nhận hằng 0)

III. Qui Tắc Suy Diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \overline{r}) \\ \overline{q} \vee \overline{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

III. Qui Tắc Suy Diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \overline{r}) \\ \overline{q} \vee \overline{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

$p \rightarrow r$ (Tiền đề)
p (Tiền đề)
…
r (Qui tắc khẳng định)
$p \rightarrow (q \vee \neg r)$ (Tiền đề)
p (Tiền đề)
…
$q \vee \neg r \Leftrightarrow r \rightarrow q$ (Kéo theo, Qui tắc khẳng định)
$\neg(q) \vee \neg(s) \Leftrightarrow q \rightarrow \neg(s)$ (Tiền đề)
…
$r \rightarrow \neg(s)$ (Qui tắc tam đoạn luận)
r
…
$\neg(s)$ (Khẳng định)

III. Qui Tắc Suy Diễn

Ta xét hệ sau:

$$\begin{cases} p = 1 & (1) \\ p \rightarrow r = 1 & (2) \\ p \rightarrow (q \vee \overline{r}) = 1 & (3) \\ \overline{q} \vee \overline{s} = 1 & (4) \\ s = 0 & (5) \end{cases}$$

Chú ý rằng nếu hệ trên vô nghiệm thì suy luận đã cho là đúng, còn nếu hệ trên có nghiệm thì suy luận đã cho là sai.

Ta thấy ngay (4) là hệ quả của (5). Mặt khác, từ (1) và (2), (3) ta suy ra:

$$\begin{cases} r = 1 \\ q \vee \overline{r} = 1 \end{cases}$$

Do đó $r = 1$, $q = 1$. Thử lại ta thấy $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, $s = 0$ là một nghiệm của hệ trên. Do đó suy luận trên là sai.