TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC

(CHƯƠNG II: PHÉP ĐẾM)

(PHẦN 1)

Chương II: PHÉP ĐẾM

- Các nguyên lý
- Giải tích tổ hợp
- Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

I. Các nguyên lý

1. Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp

- Phương pháp 1 có n cách làm
- Phương pháp 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n+m

Ví dụ. An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo dự hội thì An có mấy cách?

Số cách chọn 1 cái áo của An là: 3 + 5 = 8 (cách)

I. Các nguyên lý

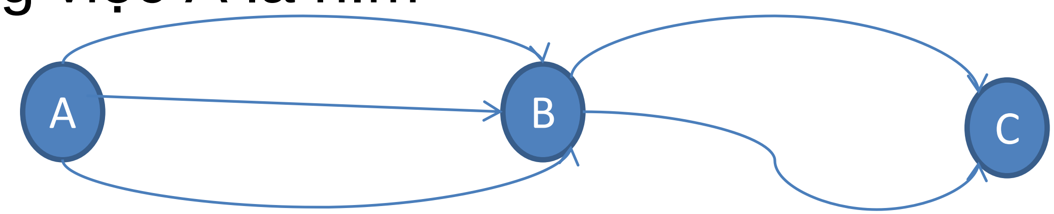
2. Nguyên lý nhân

Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n.m

Ví dụ:



Ví dụ 1: Có 3.2 =6 con đường đi từ A đến C

Ví dụ 2: Một học sinh có 5 cái quần, 3 cái áo đồng phục. Hỏi học sinh đó có mấy bộ quần áo? Đáp số: 5*3 = 15 (bộ)

I. Các nguyên lý

Ví dụ 3: Một mật khẩu máy tính gồm 1 chữ cái và 3 hoặc 4 chữ số. Tính số mật khẩu tối đa có thể:

Giải: Dãy gồm 1 chữ cái và 3 chữ số có dạng:

LNNN, NLNN, NNLN, NNNL, trong đó L là chữ cái có 26 cách chọn và N là chữ số có 10 cách chọn.

→ Vì vậy theo nguyên lý nhân, ta có 4*26*10*10*10 = 104000

Tương tự dãy 1 chữ cái và 4 chữ số: 5*26*10*10*10*10 = 1300000

→ Theo nguyên lý cộng, ta có: 104000 + 1300000 = 1404000 (mật khẩu)

Các ví dụ (tiếp):

EX4. Gọi *t(n)* = số lần câu lệnh (x = x+1) thực hiện trong đoạn chương trình sau đây. Tính *t(n)* và từ đó suy ra độ phức tạp của đoạn chương trình này.

Chương trình:

```
B1. x:= 0
B2. For i = 1 to n
B3.      For j = 1 to i
B4.           x := x +1.
```

Các ví dụ (tiếp):

EX5. Gọi *t(n)* = số lần câu lệnh (x = x+1) thực hiện trong đoạn chương trình sau. Tính *t(n)* và từ đó suy ra độ phức tạp của đoạn chương trình này.

Chương trình:

B1. x:= 0

B2. For $i_1 = 1$ to n_1

B3. For $i_2 = 1$ to n_2

⋮

Bm+1. For $i_m = 1$ to n_m

Bm+2. x := x +1.

I. Các nguyên lý

Ví dụ 1: Một Byte gồm 8 bít, mỗi bít nhận giá trị 0 hoặc 1. Hỏi tất cả có bao nhiêu giá trị (có thể) của 1 Byte?

Giải. Ký hiệu Byte gồm 8 bít:

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$$

Có 2 cách chọn a_1
Có 2 cách chọn a_2
Có 2 cách chọn a_3
Có 2 cách chọn a_4
Có 2 cách chọn a_5
Có 2 cách chọn a_6
Có 2 cách chọn a_7
Có 2 cách chọn a_8

Có: 2x2x2x2x2x2x2x2 (8 lần) = 2^8(cách chọn) = 256 Byte

I. Các nguyên lý

Ví dụ 2: Số 75000 có tất cả bao nhiêu ước số dương.

Giải. Phân tích 75000 thành thừa số

$75000 = 15.5.10^3$

$= (3.5).5.5^3.2^3$

$= 2^3.3.5^5$

Như vậy ước số của 75000 có dạng $2^k.3^l.5^s$

- Có 4 cách chọn $k \in \{0,1,2,3\}$
- Có 2 cách chọn $l \in \{0,1\}$
- Có 6 cách chọn $s \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Vậy có: 4 x 2 x 6 = 48 ước số dương.

I. Các nguyên lý

Ví dụ 3: Cho tập X ={1,2,3,4,5,0}

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2

Giải. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$

TH1. c=0. Khi đó

c có 1 cách chọn (c = 0)

a có 5 cách chọn ($a \in X \setminus \{0\}$)

b có 4 cách chọn ($b \in X \setminus \{a, 0\}$)

TH1 có 1.4.5 =20

TH2 . c≠0. Khi đó

c có 2 cách chọn (c = {2,4})

a có 4 cách chọn ($a \in X \setminus \{c, 0\}$)

b có 4 cách chọn ($b \in X \setminus \{a, c\}$)

TH2 có 2.4.4 =32

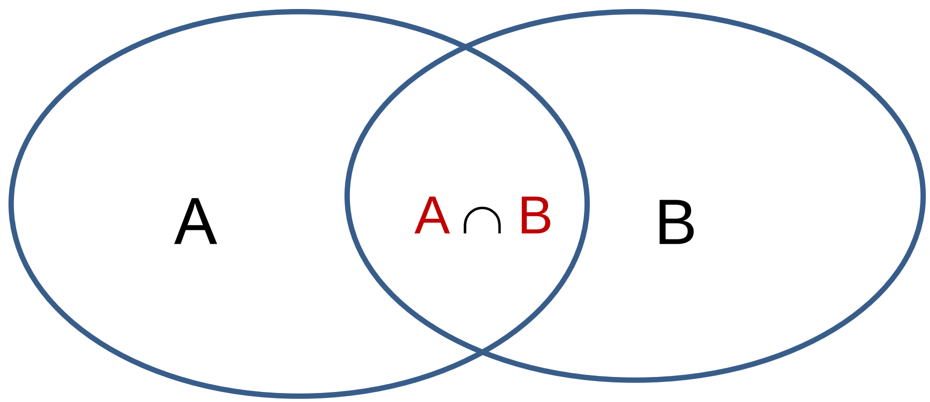
Vậy có 20+32 =52

I. Các nguyên lý

4. Nguyên lý bù trừ.

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



I. Các nguyên lý

Ví dụ. Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 HS học Tiếng Pháp, 26 học sinh học Tiếng Anh. 15 học sinh học Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người?

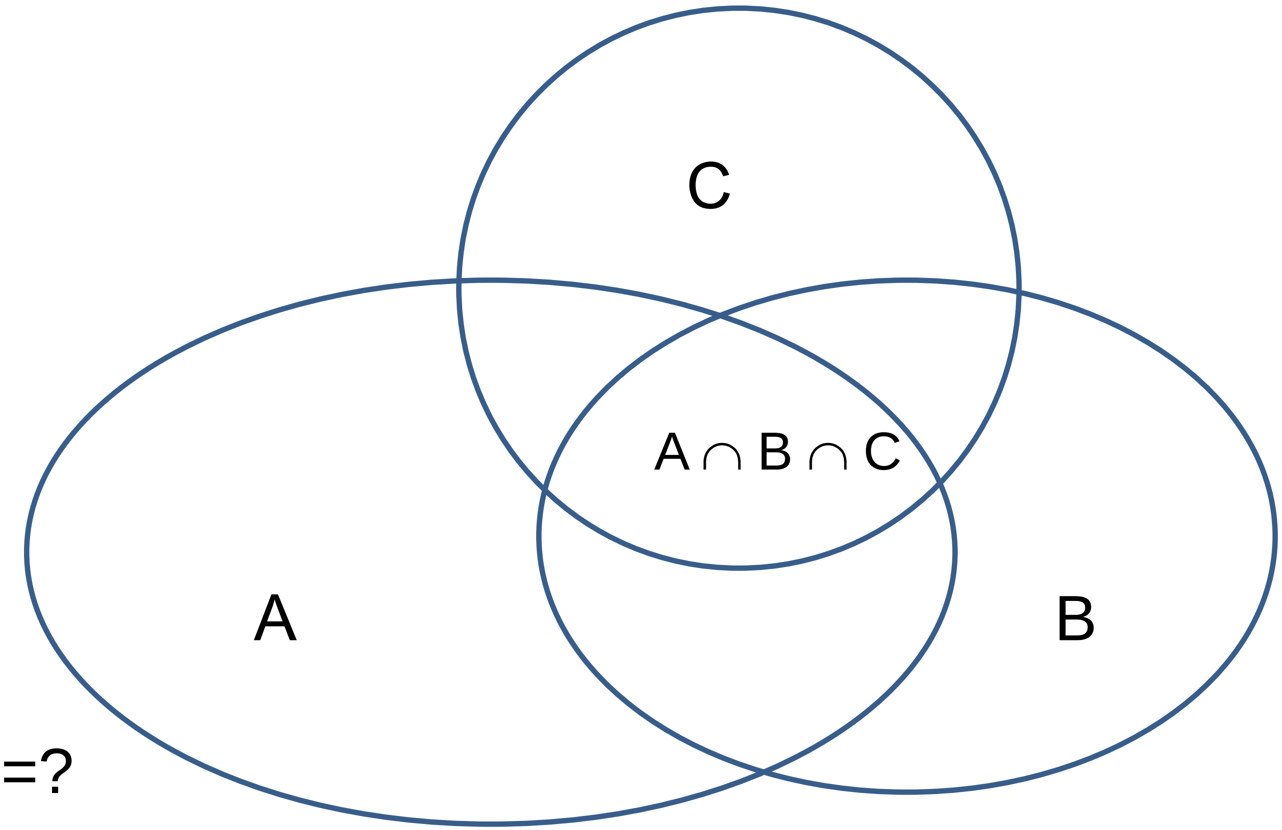
Giải.

Gọi A là những học sinh học Tiếng Pháp

B là những học sinh học Tiếng Anh

Khi đó. Số học sinh của lớp là $|A \cup B|$. Theo nguyên lý bù trừ ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 26 - 15 = 35$

I. Các nguyên lý



$|A \cup B \cup C| = ?$

$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = [\ldots]$
$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

II. Giải tích tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một *hoán vị của n* phần tử. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)\ldots1$$

Quy ước $0! = 1$

Ví dụ. Cho A ={a,b,c}. Khi đó A có các hoán vị sau

abc,acb,

bac,bca,

cab,cba

=> A có các hoán vị là 3! = 3.2.1.0! = 6 phần tử

II. Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp.

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) khác nhau sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n* phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu là A_n^k

- Công thức: $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ 1. Cho X ={a, b, c}. Khi đó các chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử trong X là: ab, ba, ac, ca, bc, cb. Số các chỉnh hợp là: 3!/(3-2)! = 3!/1! = 6.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1,2,3,4,5,6. Kết quả: $A_6^3 = 120$.

II. Giải tích tổ hợp

3.Tổ hợp.

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử.*

Số *tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là* C_n^k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Các tính chất của tổ hợp:

Tính chất 1:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

chẳng hạn: $C_7^3 = C_7^4 = 35$

Tính chất 2:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \qquad (k \le n-1)$$

chẳng hạn: $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4 = 70$

Tính chất 3:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$
$$C_n^1 = n$$

Tính chất 4: (Đẳng thức Vandermonde)

$C_{m+n}^r = \sum_k C_m^k C_n^{r-k},\ k \in \{\max\{0, r - n\}, \dots, \min\{r, m\}\}.$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Cho X = {1,2,3,4}. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn? Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30.

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!(30-10)!} = \frac{30!}{10!(20)!} = 30.045.015$$

Thuật toán sinh các tổ hợp:

Input: n, k.

Output: Tất cả các tổ hợp chập **k** của **n** phần tử.

Step 1: Khởi tạo chuỗi **S**, **S[i]**=**i**, **i**=**1,2,…,k**.

Step 2: Tạo chuỗi **MAX**, **MAX[i]** = **n-k+i**.

Step 3: for (**i** in **1:C(n,k)**) thực hiện các bước sau:

1. Xuất chuỗi **S**.
2. Tìm phần tử **m** đầu tiên bên phải chuỗi **S** chưa đạt giá trị lớn nhất của nó(Giá trị lớn nhất phần tử thứ k là **MAX[k]**).
3. **S[m]** = **S[m]+1**.
4. for (**j** in **m+1:k**): **S[j]** = **S[j-1]+1**.

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

1. Hoán vị lặp

Định nghĩa. Cho n đối tượng, trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k; $n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$).

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n.

Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có
n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1,
n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,…,
n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k, là

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là:

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

2. Tổ hợp lặp

❖ Định nghĩa. Có n loại, mỗi loại có ít nhất *k* đối tượng. Việc chọn ra *k* đối tượng từ các loại này (không phân biệt giữa các đối tượng và các loại) là một tổ hợp lặp chập *k* từ tập *n* loại.

Số các tổ hợp lặp chập k của n là

$$C^{k}_{n+k-1}$$

Điều kiện: k >= n

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ 1. Có 3 loại nón A, B, C. An mua 4 cái nón (mỗi loại có ít nhất 4 cái). Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

A	B	C
✓ ✓	✓	✓

Số cách chọn là: $C^4_{3+4-1} = 15.$

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách lấy 12 cây chì trong 3 loại mầu?

Số cách lấy là:

$$C_{14}^{12} = \frac{14.13}{2} = 91$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách chia 10 hòn bi giống hệt nhau cho 5 đứa trẻ.

a) Chia tùy ý?
b) Chia sao cho mỗi em được ít nhất 1 bi?
c) Chia sao cho em bé nhất được nhiều hơn 1 bi

Giải: Gọi x_i là số viên bi được chia cho em thứ $i, (i = 1,2,\dots,5)$.
Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10.$

a) $C_{14}^{10} = C_{14}^{4} = 1001.$

b) Đặt $x_i = x_i^* + 1$. Ta có $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + x_5^* = 5.$ Số cách chia thỏa điều kiện là: $C_9^4 = 126.$

c) Đặt $x_1 = x_1^* + 2.$ Ta có $x_1^* + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8.$ Số cách chia thỏa điều kiện là: $C_{12}^4 = 495.$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ứng dụng. Số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (mỗi x_i đều nguyên không âm) của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ là

$$C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$$

⇔ Số cách chia k vật giống nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 34 \qquad (1)$$

a) Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm

b) Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa $x_1 \geq 1; x_2 \geq 2; x_3 > 3; x_4 > 4$

Giải.

a) $C_{34+4-1}^{34} = C_{37}^{34}$

b) Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa $x_1 \geq 1; x_2 \geq 2; x_3 > 3; x_4 > 4$.

Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \geq 1; x_2 \geq 2; x_3 \geq 4; x_4 \geq 5$.

Đặt

$$x_1' = x_1 - 1 \geq 0;\ x_2' = x_2 - 2 \geq 0;\ x_3' = x_3 - 4 \geq 0;\ x_4' = x_4 - 5 \geq 0$$

Phương trình (1) trở thành: $x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 22$ (2)

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

$$\Rightarrow C_{25}^{22}$$

Ví dụ 2. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (1)$$

Thỏa điều kiện $x_1 \leq 3$; $x_2 \geq 2$; $x_3 > 4$ $(*)$.

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \leq 3$; $x_2 \geq 2$; $x_3 \geq 5$.

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5 \qquad (**)$$

$$x_1 \geq 4;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5 \qquad (***)$$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện $(*)$, $(**)$, $(***)$. Ta có:

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

$p = q - r.$

Trước hết ta tìm q.

Đặt

$$x_1' = x_1;\ x_2' = x_2 - 2;\ x_3' = x_3 - 5;\ x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 \ (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$

Vậy $q = C_{16}^{13} = 560$

Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^{9} = 560 - 220 = 340.$$

Suy ra. Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340

Bài 17,18,19/ Bộ đề [6]

III. Bài tập

1) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 20$, biết $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, t \geq 4$.

2) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 16$ thỏa điều kiện

$$2 \leq x \leq 5, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3.$$

3) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 12$ thỏa điều kiện

$$x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3.$$

4) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ biết

$x_1 \geq 1$ hay $x_2 \geq 2$.

5) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 15$ thỏa điều kiện

$$x \geq 1, y \geq 2, z \geq 2, t \geq 3.$$

IV. Các nguyên lý

3. **Nguyên lý chuồng bồ câu** (Derichlet)

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\lceil n/k \rceil$ bồ câu trở lên, trong đó $\lceil n/k \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng n/k.

Ví dụ 1: Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

Giải:

Giả sử 23 lớp mỗi lớp có không quá 43 học sinh.

Khi đó số học sinh là: 43.23 = 989 học sinh

(ít hơn 1000–989=11 học sinh)

Theo nguyên lý Derichlet phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

IV. Các nguyên lý

<u>Ví dụ 2:</u> Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

<u>Giải:</u>

Giả sử có không quá 4 học sinh có tháng sinh giống nhau. Một năm có 12 tháng, khi đó số học sinh của lớp có không quá: 12.4 = 48 (học sinh)

Theo nguyên lý Derichlet phải có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

<u>Ví dụ 3:</u> Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

<u>Giải</u>: Có 43 học sinh phân thành 8 loại điểm (từ 2 đến 9)

Giả sử trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có: 5.8=40 học sinh, ít hơn 3 học sinh so với 43.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications [7th Edition].

[2]. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1997.

[3]. GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc. Nhà xuất bản giáo dục.

[4]. PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, Bài giảng tóm tắt Toán rời rạc. Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Đà Lạt.

[5]. Seymour Lipschutz and Marclars Lipson, 2000 solved problems in Discrete Mathematics.

[6]. Bùi Tấn Ngọc, Bộ đề toán rời rạc dùng cho sinh viên Khoa Công nghệ thông tin và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính, Trường Đại học Quảng Ngãi.

[7]. TS. Nguyễn Viết Đông, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[8]. TS. Lê Văn Luyện, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.