TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC

(CHƯƠNG III: QUAN HỆ)

(PHẦN 1)

I. Quan hệ

1. Quan hệ và tính chất
2. Các phép toán Quan hệ
3. Quan hệ thứ tự
4. Quan hệ tương đương

I. Quan hệ

Định nghĩa 1

Một *quan hệ hai ngôi R* từ tập *A* đến tập *B* là tập con của tích Đề các: $R \subseteq A \times B$.

Quy ước: ta viết $(a, b) \in R$ hoặc aRb.

- Quan hệ R từ A đến chính nó được gọi là quan hệ 2- ngôi trên A, $R \subseteq A^2$ (trong đó $A^2 = A \times A$).
- Miền xác định (***domain***) của quan hệ 2-ngôi R từ A vào B xác định bởi

$$Dom(R) = \{a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

- Miền giá trị (***range***) của quan hệ 2-ngôi R từ A vào B xác định bởi

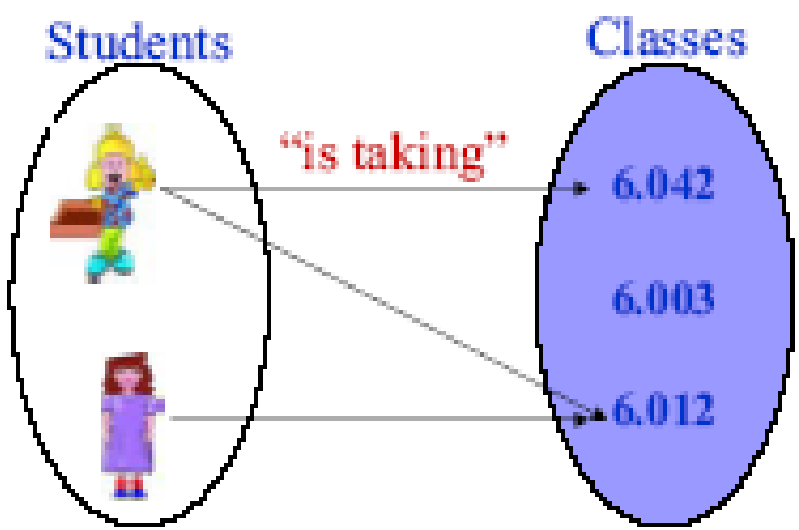
$$Range(R) = \{b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Bài tập: 2.32

I. Quan hệ

<u>Ví dụ 1.</u> *A* = tập sinh viên; *B* = các lớp học phần. Xét quan hệ 2 ngôi *R* từ *A* vào *B*:

$R = \{(a, b) \in A \times B |$ sinh viên a học lớp học phần $b\}$



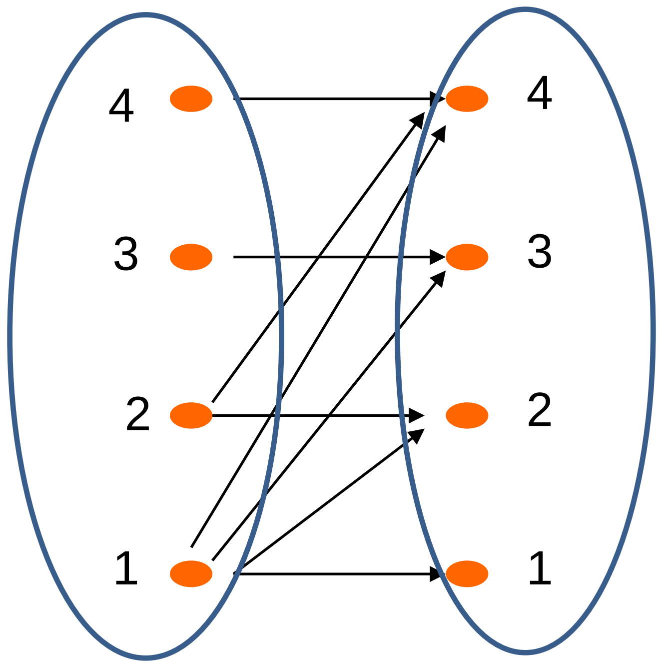
I. Quan hệ

<u>Ví dụ 2.</u> Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và quan hệ 2 ngôi R trên A xác định bởi

$$R = \{\ (a, b) \in A \times A |\ a \text{ là ước của } b\}$$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3),\ (4, 4)\}$$



Định nghĩa 2. (Quan hệ n- ngôi)

Cho n tập hợp A_1, A_2, …, A_n và xét tập tích Đề các

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, \forall i = \overline{1, n}\}$$

Khi đó, một tập $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ được gọi là một quan hệ n- ngôi của $(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

2. Biểu diễn một quan hệ 2-ngôi

- **Bằng đồ thị: 2.76, 2.77, 2.79, 2.81. 2.83, 2.89.**
- **Bằng Ma trận quan hệ:** cho A = $\{a_1, \ldots, a_m\}$, B = $\{b_1, \ldots, b_n\}$ là hai tập hợp, và quan hệ R từ A lên B. Khi đó ma trận quan hệ của nó là

$$<R> \equiv (r_{ij})$$

trong đó: (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n)

$$r_{ij} = \begin{cases} 1; & (a_i, b_j) \in \mathrm{R} \\ 0; & (a_i, b_j) \notin \mathrm{R} \end{cases}$$

Ma trận quan hệ, bài tập: 2.72, 2.78, 2.82, 2.86, 2.87, 2.90

Bài tập

Bài 2.77

Let $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ and let R be the relation on A defined by "x divides y", written $x \mid y$. Recall (Problem 2.36) that

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$$

Draw the directed graph of R.

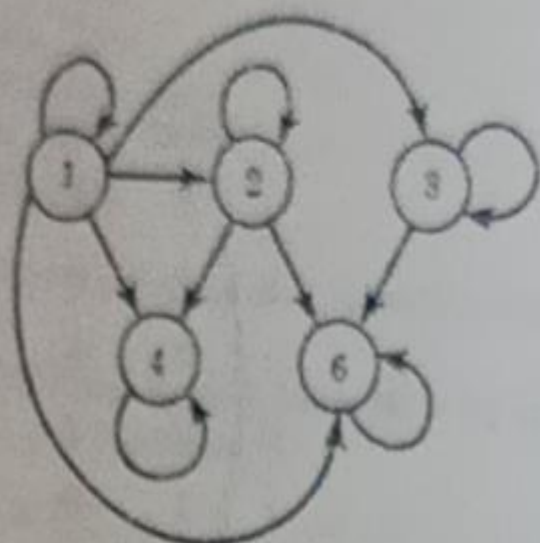


Fig. 2-11

Bài tập

Bài 2.79, 2.81

Let S be the relation on $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ defined by

$$S = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, f), (d, b), (e, a), (e, b), (e, f)\}$$

Draw the directed graph of S.

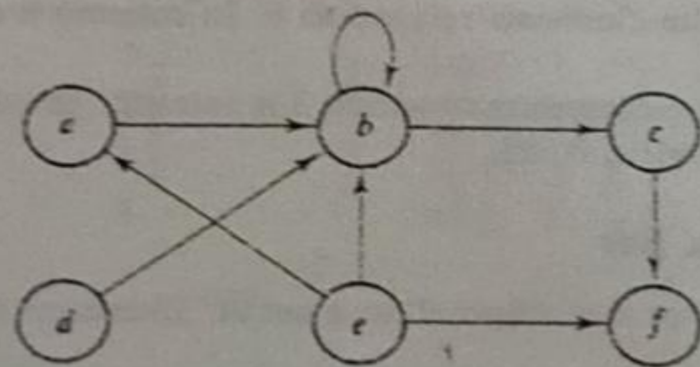


Fig. 2-12

Draw the directed graph of the relation T on $X = \{1, 2, 3, 4\}$ defined by

$$T = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$$

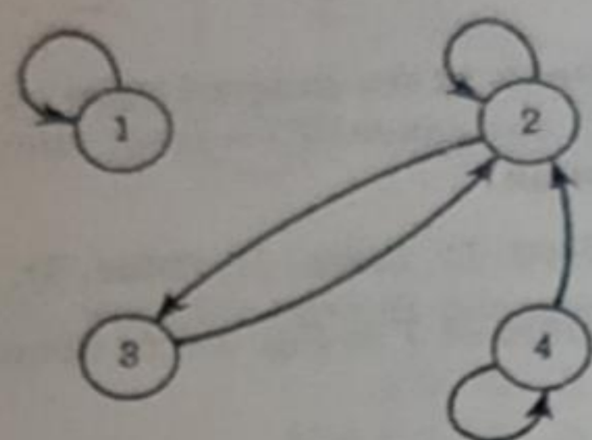


Fig. 2-13

1. Các phép toán quan hệ

Cho hai tập hợp khác trống A, B và các quan hệ R, R_1 và $R_2 \in \mathcal{P}(A \times B)$. Khi đó:

- **Hợp 2 quan hệ:** $R_1 \cup R_2$ **Bài 2.50, 2.52**
- **Giao 2 quan hệ:** $R_1 \cap R_2$ **Bài 2.50, 2.52**
- **Quan hệ ngược của R:** ký hiệu R^{-1}

$$R^{-1} \equiv \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$ **Bài 2.30, 2.31, 2.32**

- **Quan hệ tích:** Cho $R_1 \subseteq S_1 \times S_2$ và $R_2 \subseteq S_2 \times S_3$. Quan hệ tích của R_1 với R_2, ký hiệu $R_2 o R_1$, là một quan hệ từ S_1 lên S_3 cho bởi

$$R_2 o R_1 \equiv \{(x, z) \in S_1 \times S_3 \mid \exists\, y \in S_2, (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Bài 2.102, 2.105, 2.112, 2.113

2. Các phép toán trên ma trận Boole

Nhắc lại hai phép toán nhị phân (Boole): Cho $\mathbb{B} = \{0; 1\}$, ta có

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

- **Ma trận Boole:**

Ma trận $A = (a_{ij})$ gọi là một ma trận Boole nếu như $a_{ij} \in \mathbb{B}$.

2. Các phép toán trên ma trận Boole

Cho hai ma trận Boole A_1 cấp m×n, A_2 cấp n×p. Khi đó:

- **Tích ma trận** A_1 với A_2, ký hiệu $A_1 * A_2$, là ma trận Boole cấp m×p cho bởi (i =1,…,m; j =1,…,p)

$$[A_1 * A_2]_{ij} \equiv \bigvee_{k=1}^{n} ([A_1]_{ik} \wedge [A_2]_{kj})$$

Bài 2.103, 2.105, 2.113, 2.114, 2.115, 2.116

- **Hội và tuyển hai ma trận Boole:** Cho hai ma trận Boole A_1, A_2 cấp m×n. Khi đó: (i =1,…,m; j =1,…,n)

- Hội $A_1 \wedge A_2$ là ma trận Boole

$$[A_1 \wedge A_2]_{ij} \equiv [A_1]_{ij} \wedge [A_2]_{ij}$$

- Tuyển $A_1 \vee A_2$ là ma trận Boole

$$[A_1 \vee A_2]_{ij} \equiv [A_1]_{ij} \vee [A_2]_{ij}$$

2. Các phép toán trên ma trận Boole

Tính chất 1. Cho A, B là hai tập hữu hạn, và cho 2 quan hệ $R_1, R_2 \in \mathcal{P}(A \times B)$. Khi đó:

- **Ma trận quan hệ** của quan hệ $R_1 \cup R_2$ cho bởi

$$< R_1 \cup R_2 > \; = \; < R_1 > \vee < R_2 >$$

- **Ma trận quan hệ** của quan hệ $R_1 \cap R_2$ cho bởi

$$< R_1 \cap R_2 > \; = \; < R_1 > \wedge < R_2 >.$$

Tính chất 2. Cho quan hệ $R_1 \subseteq A \times B$ và $R_2 \subseteq B \times C$. Khi đó **ma trận quan hệ** của $R_2 o R_1$ cho bởi

$$< R_2 o R_1 > \; = \; < R_1 > * < R_2 >.$$

3. Quan hệ đơn vị

Cho tập hợp A khác trống và $\mathcal{P}(A \times A) \equiv \mathcal{P}(A^2)$ (tập tất cả các quan hệ 2-ngôi trên A). Quan hệ

$$E = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

được gọi là ***quan hệ đơn vị*** trên A.

Cho $|A| = n$, khi đó ***ma trận biểu diễn quan hệ đơn vị E*** trên A sẽ là ma trận đơn vị I_n, với

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài tập

2.27 Determine which of the following are relations from $A = \{a, b, c\}$ to $B = \{1, 2\}$:

(a) $R_1 = \{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$
(b) $R_2 = \{(a, 2), (b, 1)\}$
(c) $R_3 = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$
(d) $R_4 = \{(b, 2)\}$
(e) $R_5 = \varnothing$, the empty set
(f) $R_6 = A \times B$

They are all relations from A to B since they are all subsets of $A \times B$. $R_5 = \varnothing$, the empty set, is called the *empty relation* from A to B, and $R_6 = A \times B$ is called the *universal relation* from A to B.

2.28 Find the inverse of each relation in Problem 2.27.

Reverse the ordered pairs of each relation R_k to obtain R_k^{-1}:

(a) $R_1^{-1} = \{(1, a), (2, a), (2, c)\}$
(b) $R_2^{-1} = \{(2, a), (1, b)\}$
(c) $R_3^{-1} = \{(1, c), (2, c), (3, c)\}$
(d) $R_4^{-1} = \{(2, b)\}$
(e) $R_5^{-1} = \varnothing$
(f) $R_6^{-1} = B \times A$

2.29 Find the number of relations from $A = \{a, b, c\}$ to $B = \{1, 2\}$.

There are $3 \cdot 2 = 6$ elements in $A \times B$ and hence there are $m = 2^6 = 64$ subsets of $A \times B$. Thus there are $m = 64$ relations from A to B.

2.30 Let R be the relation on $A = \{1, 2, 3, 4\}$ defined by "x is less than y", that is, R is the relation $<$. Write R as a set of ordered pairs.

R consists of the ordered pairs (a, b) where $a < b$. Thus

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Bài tập

2.31 Find the inverse R^{-1} of the relation R in Problem 2.30. Can R^{-1} be described in words?

Reverse the ordered pairs of R to obtain R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$$

R^{-1} is the relation $>$, that is, R^{-1} can be described by the statement "x is greater than y".

2.32 Let R be the relation from $A = \{1, 2, 3, 4\}$ to $B = \{x, y, z\}$ defined by

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

(a) Determine the domain and range of R.
(b) Find the inverse relation R^{-1} of R.

(a) The domain of R consists of the first elements of the ordered pairs of R, and the range consists of the second elements. Thus dom $(R) = \{1, 3, 4\}$ and range $(R) = \{x, y, z\}$.

(b) R^{-1} is obtained by reversing the ordered pairs in R. Thus

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)\}$$

4. Các tính chất của Quan hệ

a) Quan hệ R trên A được gọi là có tính *phản xạ (reflexive)* nếu:

$$(a, a) \in R \text{ với mọi } a \in A.$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R_1$

- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$

b) Quan hệ *R* trên *A* được gọi là có tính *đối xứng (symmetric)* nếu:

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

c) Quan hệ *R* được gọi là có tính *phản xứng (nonsymmetric)* nếu

$$\forall\ a, b \in A:\ (a, b) \in R \text{ và } (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Ví dụ.

- Quan hệ R_1 = {(1,1), (1,2), (2,1)} trên tập *A* = {1, 2, 3, 4} là có tính đối xứng.
- Quan hệ ≤ trên $\mathbb{Z}$ không đối xứng. Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \text{ và } (b \leq a) \Rightarrow a = b.$$

4. Các tính chất của Quan hệ (t.t.)

d) Quan hệ *R* trên *A* có tính *bắc cầu (truyền - transitive)* nếu

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \text{ và } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Ví dụ 1:

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Ví dụ 2:

Quan hệ $\leq$ và "|" trên $\mathbb{Z}$ có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$$

$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$$

4. Các tính chất của quan hệ (t.t.)

TC1. Cho $A\ (\neq \emptyset)$ và $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Khi đó,

R có tính phản xạ ⇔ $E \subseteq R$.

R có tính đối xứng ⇔ $R^{-1} = R$.

R có tính phản xứng ⇔ $R^{-1} \cap R \subseteq E$.

R có tính bắc cầu ⇔ $R^2 = R \circ R \subseteq R$.

TC2. Khi $|A| = n$ và $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Ta có:

R có tính phản xạ ⇔ $[< \mathrm{R} >]_{ii} = 1, \forall i = 1,2,\dots,n$.

R có tính đối xứng ⇔ $<R> = <R>^T$.

R có tính phản xứng ⇔ $<R> \wedge <R>^T \leq I_n$

Trong đó với A, B ∈ $M_n(\mathbb{B})$, ta định nghĩa A ≤ B nếu và chỉ nếu

$$A_{ij} \leq B_{ij}, \forall i, j = 1,2,\dots,n.$$

R có tính bắc cầu ⇔ $<R^2> = <R>*<R> \leq <R>$.

2.123 Consider the following five relations on the set $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\} \qquad \varnothing = \text{empty relation}$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\} \qquad A \times A = \text{universal relation}$$
$$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$$

Determine which of the relations are reflexive.

R is not reflexive since $2 \in A$ but $(2, 2) \notin R$. T is not reflexive since $(3, 3) \notin T$ and, similarly, $\varnothing$ is not reflexive. S and $A \times A$ are reflexive.

2.124 Determine which of the five relations in Problem 2.123 are symmetric.

R is not symmetric since $(1, 2) \in R$ but $(2, 1) \notin R$, and similarly T is not symmetric. S, $\varnothing$, and $A \times A$ are symmetric.

2.125 Determine which of the five relations in Problem 2.123 are transitive.

T is not transitive since $(1, 2)$ and $(2, 3)$ belong to T, but $(1, 3)$ does not belong to T. The other four relations are transitive.

2.126 Determine which of the five relations in Problem 2.123 are antisymmetric.

S is not antisymmetric since $1 \neq 2$, and $(1, 2)$ and $(2, 1)$ both belong to S. Similarly, $A \times A$ is not antisymmetric. The other three relations are antisymmetric.

2.127 Let R be the relation on $A = \{1, 2, 3, 4\}$ defined by

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$$

Show that R is neither **(*a*)** reflexive, nor **(*b*)** transitive.

(*a*) R is not reflexive because $3 \in A$ but $3 \not R\, 3$, i.e., $(3, 3) \notin R$.
(*b*) R is not transitive because $4\, R\, 2$ and $2\, R\, 3$ but $4 \not R\, 3$, i.e., $(4, 2) \in R$ and $(2, 3) \in R$ but $(4, 3) \notin R$.

2.128 Show that the relation R in Problem 2.127 is neither **(*a*)** symmetric, nor **(*b*)** antisymmetric.

(*a*) R is not symmetric because $4\, R\, 2$ but $2 \not R\, 4$, i.e., $(4, 2) \in R$ but $(2, 4) \notin R$.
(*b*) R is not antisymmetric becaue $2\, R\, 3$ and $3\, R\, 2$ but $2 \neq 3$.

2.129 Give examples of relations R on $A = \{1, 2, 3\}$ having the stated property:
(*a*) R is both symmetric and antisymmetric.
(*b*) R is neither symmetric nor antisymmetric.
(*c*) R is transitive but $R \cup R^{-1}$ is not transitive.