TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

----------oOo----------

TOÁN RỜI RẠC
(CHƯƠNG II: PHÉP ĐẾM)
(PHẦN 2)

IV. Hệ thức đệ qui

1. Định nghĩa Một *hệ thức đệ qui tuyến tính cấp k* là một hệ thức có dạng:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f_n \quad (1)$$

trong đó $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ là các hệ số thực;

$\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước và

$\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì (1) trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = 0 \quad (2)$$

Ta nói (2) là một *hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k*.

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ hệ thức đệ qui

$$2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3$$

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 20 + n2^{n-2} + 3^n$$

$$2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$$

IV. Hệ thức đệ qui

Phương pháp giải một hệ thức đệ qui là đi tìm nghiệm tổng quát của nó; nhưng nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện ban đầu đó.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm một hệ thức đệ qui cho x_n*

Giải.

Với n = 1, ta có $x_1 = 1$.

Với n = 2, ta có $x_2 = 2$.

Với n > 2, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

IV. Hệ thức đệ qui

- Trường hợp 1: Bước đầu tiên gồm 1 bậc.

  Khi đó, cầu thang còn n-1 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-1}.

- Trường hợp 2: Bước đầu tiên gồm 2 bậc.

  Khi đó, cầu thang còn n-2 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{hay} \quad \mathbf{x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Kết quả:

$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$

Vậy ta có hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\begin{cases} x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0; \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

4. *Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất*

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Giải bằng cách nâng lên lũy thừa gọi là phương trình đặc trưng của (2):

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_k\lambda^{n-k} = 0 \qquad (*)$$

Trường hợp n = 1

Phương trình đặc trưng (*) trở thành $a_0\lambda + a_1 = 0$ nên có nghiệm là $\lambda_0 = - a_1/a_0$. Khi đó, (2) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C\lambda_0^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ 2

$$\begin{cases} 2x_n - 3x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng: **$2\lambda - 3 = 0$** có nghiệm là $\lambda_0 = 3/2$.

Nên hệ thức có nghiệm tổng quát là: $$x_n = C\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Từ điều kiện $x_0 = 1$, ta có C=1. Vậy nghiệm của hệ thức là:

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Trường hợp n = 2

Phương trình đặc trưng (*) trở thành

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (*)$$

a) Nếu (*) có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}$$

b) Nếu (*) có nghiệm kép thực λ_0 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1\,\lambda_0^n + \mathrm{n}C_2\,\lambda_0^n = (C_1 + \mathrm{n}C_2)\,\lambda_0^n}$$

các const C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu

Ví dụ 3:

$$a)\quad 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Ví dụ 4:

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 2;\ x_1 = 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$$

có nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

4. *Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất*

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2), giải bằng cách nâng lên lũy thừa và thay n = k.

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Nghiệm tổng quát của (1) = Nghiệm tổng quát của (2) + Một nghiệm riêng của (1)

IV. Hệ thức đệ qui

Cách tìm một nghiệm riêng của (1) khi vế phải f_n của (1) có *dạng đặc biệt như sau:*

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số

Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + f_{n_3} + \ldots + f_{n_s}$, trong đó các $f_{n_1} + f_{n_2} + f_{n_3} + \ldots + f_{n_s}$ thuộc dạng 1 đã xét ở trên

IV. Hệ thức đệ qui

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$. Có ba trường hợp nhỏ xảy ra:

TH 1. β không là nghiệm của phương trình đặc trưng

TH 2. β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

TH 3. β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

ṪH1. Nếu β *không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$\boxed{x_n = \beta^n Q_r(n)}$$

IV. Hệ thức đệ qui

TH 2. Nếu β là *nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

.

$$\boxed{x_n = n\beta^n Q_r(n)}$$

TH 3. Nếu β là *nghiệm kép của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$\boxed{x_n = n^2\beta^n Q_r(n)}$$

Chú ý $Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$ là đa thức tổng quát có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó A_r, $A_{r-1}, \ldots, A_0$ là r+1 hệ số cần xác định.

IV. Hệ thức đệ qui

Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + f_{n_3} + \ldots + f_{n_s}$

Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng x_{n_i} ($1 \leq i \leq s$) của hệ thức đệ qui:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_{n_i}$$

Khi đó $x_n = x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \ldots + x_{n_s}$ là một nghiệm riêng của (1)

IV. Hệ thức đệ qui

$$a)\quad 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$$

$$b)\quad \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}; \\ x_0 = 1;\ x_1 = -2. \end{cases}$$

$$d)\quad x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n$$

IV. Hệ thức đệ qui

$a)\ 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1$ (1)

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\mathbf{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = 4n+1$ có dạng $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 1 theo n.

Vì $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng: $x_n = n(an + b)$ (4)

Thế (4) vào (1) ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2) + b] = 4n + 1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị n = 0; n = 1 ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Giải hệ trên ta được a = 2; b = -1. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:

$$\boxed{x_n = n(2n - 1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n + n(2n - 1)}$$

Ví Dụ 2

IV. Hệ thức đệ qui

$$b)\ \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n. \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad (*)$$

có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2).3^n. \quad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = (18n + 12)3^n$ có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$ theo n.

Vì $\beta = 3$ *là* nghiệm kép của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = n^2(an + b)3^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$(n+1)^2[a(n+1) + b]3^{n+1} - 6n^2[an+b]3^n + 9(n-1)^2[a(n-1) + b]3^{n-1} = (18n+12)3^n$$

Cho n lần lượt nhận hai *giá trị* $n = 0$; $n = 1$ *ta được hệ:*

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Giải hệ trên ta được a = 1; b = 2. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:*

$$\boxed{x_n = n^2(n+2)\,3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)\,3^n} \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2; x_1 = 0$ *vào (6) ta được:*

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$C_1 = 2;\ C_2 = -5.$$

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n$$

$$c)\begin{cases}4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=(2n^2+29n+56)2^{n-1}\\ x_0=1;\ x_1=-2\end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=(2n^2+29n+56)2^{n-1} \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$4x_{n+1}-12x_n+9x_{n-1}=0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

Có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3/2$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n.} \qquad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}$$

có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 2$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 2 theo n.

Vì $\beta = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = (an^2 + bn + c)2^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được :

$$\mathbf{4[a(n+1)^2 + b(n+1) + c)2^{n+1} - 12[an^2 + bn + c]\, 2^n + 9[a(n-1)^2 + b(n-1) + c]\, 2^{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}}$$

IV. Hệ thức đệ qui

Cho n lần lượt nhận ba giá trị n = -1; n = 0; n = 1 ta được hệ:

$$\begin{cases} 3a + \dfrac{3}{2}b + \dfrac{1}{4}c = \dfrac{29}{4}; \\ \dfrac{25}{2}a + \dfrac{7}{2}b + \dfrac{1}{2}c = 28; \\ 40a + 8b + c = 87. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 2; b = 1; c = -1. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là

$$\boxed{x_n = (2n^2 + n - 1)2^n} \qquad (5)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\,2^n} \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 1$; $x_1 = -2$ vào (6) ta được:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 1; \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 4 = -2. \end{cases}$$

Từ đó ta có: $C_1 = 2$; $C_2 = -6$.

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$\boxed{x_n = (2 - 6n)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\,2^n}$$

IV. Hệ thức đệ qui

$$d)\ \ x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3.$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.\ 3^n.} \qquad (3)$$

IV. Hệ thức đệ qui

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n$$

có dạng ở Trường hợp 4.

Xét các hệ thức đệ qui:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \qquad (1')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \qquad (1'')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3.4^n \qquad (1''')$$

Lý luận tượng tự như trên ta tìm được:

Một nghiệm riêng của (1’) là $\boxed{x_{n1} = -10n}$

Một nghiệm riêng của (1’’) là $\boxed{x_{n2} = n2^n}$

Một nghiệm riêng của (1’’’) là $\boxed{x_{n3} = 4^{n+2}}$

Suy ra một nghiệm riêng của (1) là:

$$\boxed{x_{n1} = -10n + n2^n + 4^{n+2}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

a)

Bài tập

1) Giải hệ thức đệ quy

$$\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = n - 3 & \text{với } n \geq 2; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 3. \end{cases}$$

2) Cho dãy a_n xác định bởi: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$. Tìm biểu thức của a_n theo n.

3) Cho dãy a_n xác định bởi: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2$ với $n \geq 3, a_1 = 1, a_2 = 2$. Tìm biểu thức của a_n theo n.

4) Cho dãy a_n xác định bởi: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2$ với $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 9$. Tìm biểu thức của a_n theo n.

5) Cho dãy a_n xác định bởi: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$. Tìm biểu thức của a_n theo n.

a)

Bài tập

6) Cho dãy a_n xác định bởi: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$. Tìm biểu thức của a_n theo n.

7) Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 6 \text{ với } n \geq 2; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$

8) Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} 4x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \text{ với } n \geq 2; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 4. \end{cases}$

9) Giải hệ thức đệ quy: $\begin{cases} x_n - 8x_{n-1} + 15x_{n-2} = 0 \qquad \text{với } n \geq 2; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 9. \end{cases}$

10) Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n + 1 \text{ với } n \geq 2; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 2. \end{cases}$

a)

Bài tập

$$\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128.8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2.5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$$

4.3.2 Ứng dụng Hệ thức truy hồi trong đánh giá độ phức tạp của các thuật toán chia để trị

Hệ thức truy hồi thường dùng để đánh giá độ phức tạp của các thuật toán chia để trị:

- Nếu gọi *f(n)* là số các phép toán cần thiết để giải bài toán ban đầu (có cỡ n), thì *f(n)* thỏa mãn hệ thức truy hồi:

$$f(n) = a\, f\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

(gọi là hệ thức truy hồi chia để trị), trong đó:

- *a = số bài toán con (nhỏ) khi chia bài toán ban đầu*
- *n/b = cỡ của mỗi bài toán con nhỏ (thường lấy số nguyên gần nhất lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) n/b)*
- *g(n) = số các phép toán bổ sung khi chia bài toán ban đầu (cỡ n) thành a bài toán con nhỏ.*

4.3.2 Ứng dụng Hệ thức truy hồi trong đánh giá độ phức tạp của các thuật toán chia để trị (tiếp)

Khi đó, việc đánh giá độ phức tạp của *f(n)* cho bởi

Định lý. Giả sử f là hàm tăng và thỏa mãn hệ thức truy hồi:

$$f(n) = a\, f\left(\frac{n}{b}\right) + c$$

với mọi n chia hết cho b, a ≥ 1, *b số nguyên lớn hơn 1,* $c \in \mathbb{N}_+$ *(a, b, c –const). Khi đó:*

$$f(n) = \begin{cases} O\left(n^{\log_b a}\right) & ; \text{nếu } a > 1 \\ O(\log n) & ; \text{nếu } a = 1 \end{cases}.$$

4.3.2 Ứng dụng Hệ thức truy hồi trong đánh giá độ phức tạp của các thuật toán chia để trị (tiếp)

EX7. Cho hệ thức:

$$f(n) = 2\,f\left(\frac{n}{2}\right) + 3.n, \quad \text{và} \ \ f(1) = 7.$$

Hãy tìm $f(2^k)$ $(k \in \mathbb{N}_+)$. Đánh giá Big-$\mathcal{O}$ đối với $f(n)$ nếu f là hàm tăng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications [7th Edition].

[2]. Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1997.

[3]. GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc. Nhà xuất bản giáo dục.

[4]. PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, Bài giảng tóm tắt Toán rời rạc. Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Đà Lạt.

[5]. Seymour Lipschutz and Marclars Lipson, 2000 solved problems in Discrete Mathematics.

[6]. Bùi Tấn Ngọc, Bộ đề toán rời rạc dùng cho sinh viên Khoa Công nghệ thông tin và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính, Trường Đại học Quảng Ngãi.

[7]. TS. Nguyễn Viết Đông, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.

[8]. TS. Lê Văn Luyện, Slides bài giảng tóm tắt và bài tập, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.