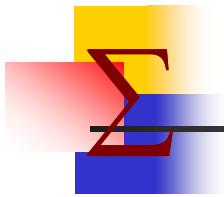
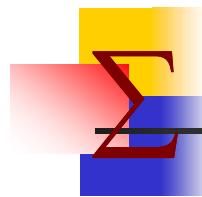


CHƯƠNG V

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ KHÔNG GIAN EUCLIDE



§1: DẠNG SONG TUYỀN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN VECTƠ THỰC



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH



1.1 Định nghĩa.

D/n. Cho V là một \mathbb{R} -kgvt, ánh xạ $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là một dạng song tuyến tính trên V nếu nó thỏa mãn các t/c sau:

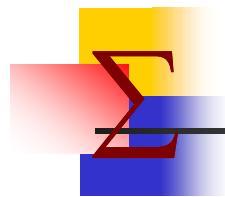
$$(i) \quad \varphi(x_1 + x_2; y) = \varphi(x_1; y) + \varphi(x_2; y)$$

$$(ii) \quad \varphi(\lambda x; y) = \lambda \varphi(x; y)$$

$$(iii) \quad \varphi(x; y_1 + y_2) = \varphi(x; y_1) + \varphi(x; y_2)$$

$$(iv) \quad \varphi(x; \lambda y) = \lambda \varphi(x; y)$$

với $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$



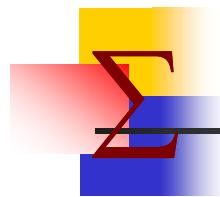
§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH



Chú ý: Nếu cố định một biến thì dạng song tuyến tính trở thành dạng tuyến tính theo biến còn lại.

VD1. Ánh xạ $\varphi: R \times R \rightarrow R$ xác định bởi $\varphi(x,y) = x \cdot y$ là một dạng song tuyến tính.

VD2. Ánh xạ $\varphi : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ xác định bởi $\varphi(u,v) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ là một dạng song tuyến tính với $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$.

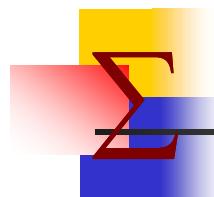


§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Đại Số Tuyến Tính

Chú ý. Ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow R$ với V là một R -kgvt gọi là dạng tuyến tính trên V .

VD3. Nếu V là kgvt và f, g là hai dạng tuyến tính trên V thì ánh xạ $\varphi : V \times V \rightarrow R$ xác định bởi $\varphi(u, v) = f(u) \cdot g(v)$ là một dạng song tuyến tính.



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

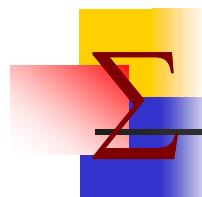
VD4. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x, y) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

là một dạng song tuyến tính.

D/n. Dạng song tuyến tính $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là đối xứng nếu $\varphi(x; y) = \varphi(y; x)$ với mọi x, y thuộc V .

VD5. Các dạng song tuyến tính ở VD1, VD2 là các dạng song tuyến tính đối xứng.



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH



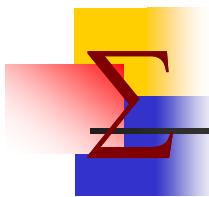
1.2 Ma trận của dạng song tuyến tính.

a. Đ/n. Cho $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính trên V . Gọi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V .

Đặt $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$ với $i, j = 1, \dots, n$. Khi đó, ma trận

$A = [a_{ij}]$ gọi là ma trận của φ đối với cơ sở B .

VD. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xđ bởi $\varphi(u, v) = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2$ với $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$. Viết ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^2 và $B = \{v_1 = (1; 1), v_2 = (1; 2)\}$.



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

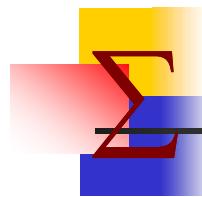
Đại Số Tuyến Tính

b. Biểu thức tọa độ.

Cho $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ và $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n$.
Khi đó.

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = [\mathbf{x}]_B^t A [\mathbf{y}]_B$$

$$\boxed{\varphi(x, y) = [\mathbf{x}]_B^t A [\mathbf{y}]_B}$$



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH



c. Công thức đổi tọa độ

G/s $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là cơ sở khác của V và T là mtr chuyên cơ sở từ B sang B' .

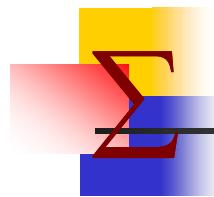
Gọi A' là ma trận của φ đối với cơ sở B' .

Ta có $[x]_B = T[x]_{B'}, [y]_B = T[y]_{B'}$

$$\varphi(x, y) = [x]_{B'}^t A' [y]_{B'}$$

$$\text{Suy ra } \varphi(x, y) = [x]_B^t A [y]_B = (T[x]_{B'})^t A (T[y]_{B'})$$

$$= [x]_{B'}^t (T^t A T) [y]_{B'}$$



§1: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

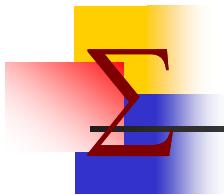


$$\text{Do đó } [\mathbf{x}]_{B'}^t (T^t A T) [\mathbf{y}]_{B'} = [\mathbf{x}]_{B'}^t A' [\mathbf{y}]_{B'}$$

$$\Rightarrow A' = T^t A T$$

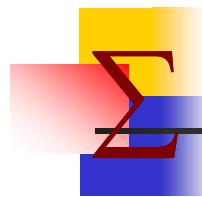
ĐL. Hạng của ma trận của dạng song tuyến tính trên kgvt V không phụ thuộc vào cơ sở được chọn.

Đn. Hạng của dạng song tuyến tính trên kgvt V là hạng của ma trận của dạng song tuyến tính đó đối với một cơ sở bất kì.



Đại Số Tuyến Tính

§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG

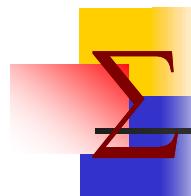


2.1 Định nghĩa

a. Đ/n. Cho dạng song tuyến tính đối xứng φ trên R -kgvt V. Khi đó $\omega(x) = \varphi(x, x)$ gọi là dạng toàn phương sinh bởi dạng song tuyến tính φ đã cho.

- Ma trận của dạng toàn phương này theo một cơ sở B nào đó là mtr của dạng song tuyến tính đối xứng sinh ra nó theo một cơ sở B .

Chú ý: Ma trận của dạng toàn phương là mtr đối xứng.



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



b. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm.

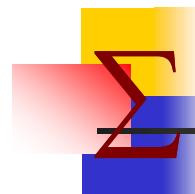
Cho dạng toàn phương $\omega(x) = \varphi(x, x)$.

+ $\varphi(x, x)$ gọi là xác định dương nếu $\varphi(x; x) > 0, \forall x \neq \theta$

+ $\varphi(x, x)$ gọi là xác định âm nếu $\varphi(x; x) < 0, \forall x \neq \theta$

- Nếu $\varphi(x, x)$ không xác định dương, không xác định âm thì nó gọi là không xác định dấu.

- Ma trận tương ứng của dạng toàn phương cũng được gọi là xác định dương, xác định âm và không xác định dấu.



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Đại Số Tuyến Tính

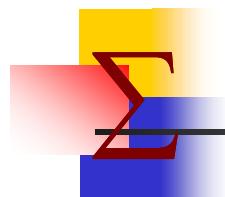
c. Dạng chính tắc của dạng toàn phương.

Cho dạng toàn phương $\omega(x) = \varphi(x, x)$ của ma trận A đối với cơ sở B của V.

$$\text{Ta có } \varphi(x, x) = [x]_B^t A [x]_B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Trong trường hợp A là mtr chéo thì dạng toàn phương $\varphi(x, x)$ gọi là có dạng chính tắc

$$\boxed{\varphi(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2}$$



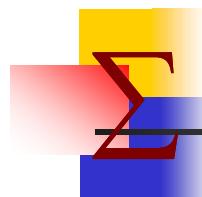
§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



$$\varphi(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

NX: $\varphi(x, x)$ xác định dương khi và chỉ khi $a_{ii} > 0, \forall i$

$\varphi(x, x)$ xác định âm khi và chỉ khi $a_{ii} < 0, \forall i$



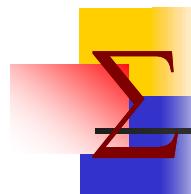
§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Đại Số Tuyến Tính

→ Bài toán:

“Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc”

hay “Tìm một cơ sở của V để ma trận của dạng toàn phương có dạng chéo”



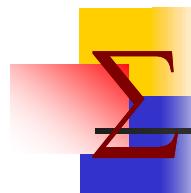
§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



2.2. Rút gọn dạng toàn phương

Có 3 phương pháp

- ◆ Phương pháp Lagrange (SV tự đọc)
- ◆ Phương pháp Jacobi
- ◆ Phương pháp chéo hóa trực giao



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



2.2.1 Phương pháp Lagrange (SV tự đọc)

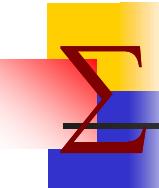
VD. Dùng phương pháp Lagrange, đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

a) $\omega(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 x_2 + 4x_1 x_3$

b) $\omega(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$



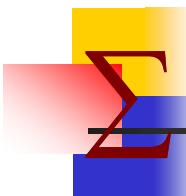
§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



2.2.2 Phương pháp Jacobi

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ có ma trận $A = [a_{ij}]$ đối với một cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nào đó của V .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



Nếu A có các định thức con chính $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

thì tồn tại một cơ sở B của V sao cho theo cơ sở đó dạng toàn phương có dạng chính tắc.

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$



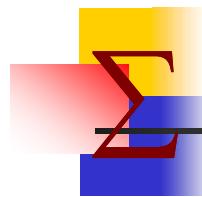
§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG

• Tiêu chuẩn Sylvester

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ có ma trận A theo một cơ sở nào đó của V.

+ $\omega(x)$ xác định dương khi và chỉ khi $\Delta_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

+ $\omega(x)$ xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^k \Delta_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.



§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



VD 1. Xác định dấu của dạng toàn phương

- a) $\omega(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$
- b) $\omega(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_3^2$

VD 2. Xác định a để các dạng toàn phương sau xác định dương

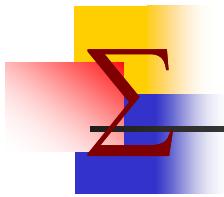
- a) $\omega(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$
- b) $\omega(x) = 2x_1^2 + ax_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

§2: DẠNG TOÀN PHƯƠNG



•Định luật quán tính

Với một dạng toàn phương cho trước, số các số hạng mang dấu dương và số các số hạng mang dấu âm của các dạng chính tắc của nó không thay đổi, không phụ thuộc vào phép biến đổi không suy biến, hay nói cách khác không phụ thuộc vào sự lựa chọn cơ sở.

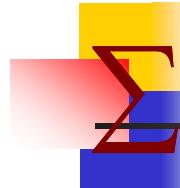


Đại Số Tuyến Tính

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

Đại Số Tuyến Tính



3.1 Tích vô hướng và không gian Euclide.

Đ/n: Cho V là \mathbb{R} -không gian vectơ, ánh xạ

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

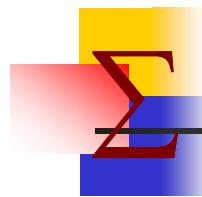
gọi là một tích vô hướng nếu thỏa mãn

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V$

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in V$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V.$ Dấu “=” chỉ xảy ra khi $x = \theta.$



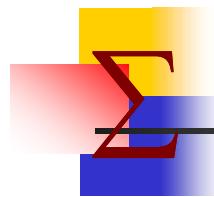
§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



-Không gian vectơ thực V hữu hạn chiều trên đó xác định một tích vô hướng gọi là ***không gian Euclide***.

NX. Tích vô hướng trong kgvt V thực chất là một dạng song tuyến tính đối xứng $\varphi(x,y)=\langle x,y \rangle$ trên V sao cho $\varphi(x,x)$ là một dạng toàn phương xác định dương.

VD1. Không gian các vectơ trong cùng một mặt phẳng, hoặc trong không gian với tích vô hướng đã học là một không gian Euclide.



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



VD2. Trong R^n , ta có các dạng sau là tích vô hướng.

Với $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$.

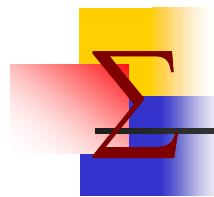
(i) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ (TVH thông thường)

(ii) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \dots + nx_ny_n$

(iii) $\langle x, y \rangle = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \dots + a_nx_ny_n$

trong đó, các $a_i > 0, \forall i = 1, n$

NX. Trên một không gian có thể có nhiều tích vô hướng khác nhau và ứng với mỗi tích vô hướng đó ta có một kiểu không gian Euclidean.



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



VD3. Trong kg $P_n[x]$, chứng minh dạng sau là một tích vô hướng.

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

với mọi $\forall p, q \in P_n[x]$.

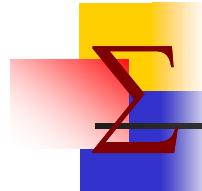
VD4. Trong kg $C[a;b]$, chứng minh dạng sau là một tích vô hướng.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

với mọi $\forall f, g \in C[a;b]$

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

Đại Số Tuyến Tính



3.2 Độ dài của vectơ.

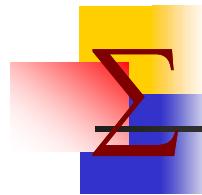
a. D/n. G/s E là một R-kgvt đã được trang bị tích vô hướng $\langle \rangle$. Khi đó với mỗi $x \in E$, thì $\|x\|$ được xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

gọi là độ dài (hay gọi là chuẩn) của vectơ x.

VD: Trong R^n với tích vô hướng thông thường ta có

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



b. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

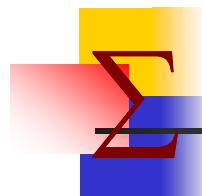
Cho E là một R-kgvt đã được trang bị TVH \langle , \rangle .
Khi đó, với mọi $x, y \in E$ ta có

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

VD: Trong R^n với tích vô hướng thông thường, ta có bđt sau

$$\begin{aligned} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 &\leq \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \end{aligned}$$

(bđt Bunhiacopxki)



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



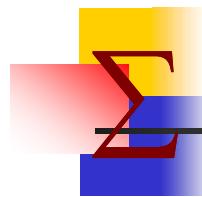
3.3 Góc giữa hai vectơ và hệ vecto trực giao.

a. Đ/n. Cho hai vectơ x và y trong kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle .

- Nếu x, y khác vecto không thì góc giữa hai vectơ x và y được xác định bởi

$$\widehat{(x, y)} = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

- Nếu một trong hai vectơ x, y là vectơ không thì góc giữa hai vectơ x và y là tùy ý.



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

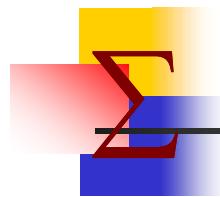


b. Hệ vectơ trực giao

- Hai vectơ x, y trong kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle gọi là trực giao nếu $\langle x, y \rangle = 0$. Kí hiệu $x \perp y$.

VD1. Trong R^3 với tích vô hướng thông thường, xét các vectơ $x=(1;-1;2)$, $y=(1;1;0)$, $z=(0;0;2)$.

Xét tính trực giao của các vectơ trên



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

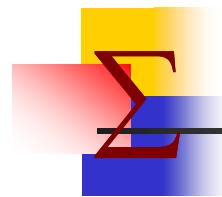


VD2. Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

Khi đó, $u=1+x^2$ và $v = x$ là trực giao

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

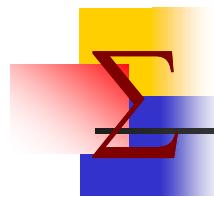


D/n - Hệ vectơ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gọi là hệ trực giao nếu

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j$$

-Hệ vectơ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gọi là hệ trực chuẩn nếu

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$$



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



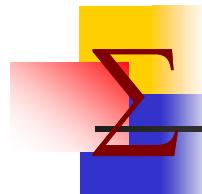
VD1. Trong không gian R^n , với tích vô hướng thông thường, cơ sở chính tắc E là một hệ trực chuẩn.

VD2. Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

Tìm một hệ gồm 3 véctơ trực chuẩn đối với tích vô hướng trên.

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



b. Hai không gian con trực giao

Trong kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle , cho vectơ x và hai kg con W, V.

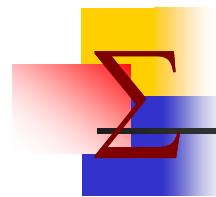
(i) x gọi là trực giao với W, kí hiệu: $x \perp W$ nếu

$$x \perp y, \forall y \in W$$

(ii) V gọi là trực giao với W, kí hiệu: $V \perp W$ nếu

$$x \perp y, \forall x \in V, y \in W$$

(iii) V gọi là phần bù trực giao với W, kí hiệu: W^\perp nếu $V = W^T = \{x \in E \mid x \perp y, \forall y \in W\}$



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



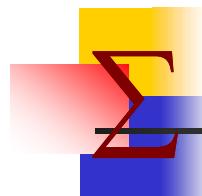
3.4 Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn.

a.ĐL. Trong kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle , mọi hệ vectơ trực giao là hệ độc lập tuyến tính.

c/m:...

b.Đ/n. Trong kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle , cơ sở B gọi là **cơ sở trực giao** (tương ứng **cơ sở trực chuẩn**) nếu nó là hệ trực giao (hệ trực chuẩn)

VD. Trong kg Euclide R^n với tích vô hướng thông thường thì cơ sở chính tắc chính là cơ sở trực chuẩn



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

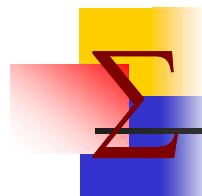


Bài toán đặt ra:

Cho kg Euclide E. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của E.



**TRỰC CHUẨN HÓA MỘT
HỆ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH**



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



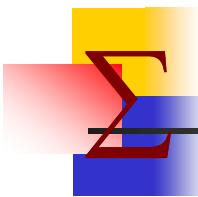
3.4 Thuật toán trực chuẩn hóa Gram-Smith.

G/S $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của kgvt E với tích vô hướng \langle , \rangle .

Quá trình trực chuẩn hóa hệ véctơ trên gồm 2 bước:

Bước 1. Trực giao hóa.

Bước 2. Trực chuẩn hóa.



3.4. Trục chuẩn hóa Gram-Smith

Đại Số Tuyến Tính

Bước 1. Trục giao hóa.

Đặt $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

...

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

...

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_i, v_n \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

3.4. Trục chuẩn hóa Gram-Smith

Đại Số Tuyến Tính

ĐL. Hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ có tính chất

(i) Là một hệ trực giao.

(ii) $\text{span}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$,

với $k=1, \dots, n$

C/m:...

3.4. Trục chuẩn hóa Gram-Smith

Đại Số Tuyến Tính

Bước 2. Trục chuẩn hóa.

$$\text{Đặt } e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}, \quad i = \overline{1, n}$$

Khi đó, ta được hệ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là **một hệ trực chuẩn**.

T/v:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{\langle u_i, u_j \rangle}{\|u_i\| \cdot \|u_j\|} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$$

3.4. Trục chuẩn hóa Gram-Smith

Đại Số Tuyến Tính

VD1. Trong không gian \mathbb{R}^3 , với tích vô hướng thông thường, hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, e_3\}$ từ cơ sở

$$B = \{v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 1; 2); v_3 = (1; 2; 3)\}$$

VD2. Câu hỏi như VD1 với

$$B = \{v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 1; 0); v_3 = (1; 0; 0)\}$$

VD3. Câu hỏi như VD1 với tích vô hướng.

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

3.4. Trục chuẩn hóa Gram-Smith

Đại Số Tuyến Tính

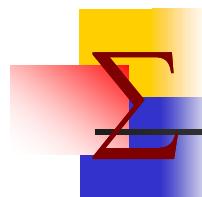
VD4. Trong không gian $P_2[x]$, với tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, e_3\}$ từ cơ sở

$$E = \{1; x; x^2\}$$

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



3.5.Công thức tọa độ đối với cơ sở trực chuẩn

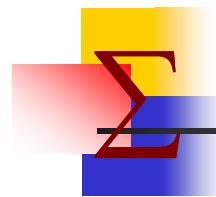
Trong kg Euclide $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cho cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Khi đó, với mọi vectơ x và y thuộc E , ta có

$$(i) x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$$

tức là $(x)_B = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$

$$(ii) \langle x, y \rangle = [x]_B^t \cdot [y] = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ở đó $(x)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n), (y)_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$



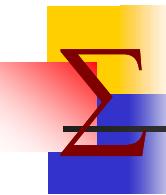
§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



Ví dụ. Xét không \mathbb{R}^3 với tích vô hướng Euclidean thông thường, có một cơ sở trực chuẩn là

$$B = \left\{ e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right), e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0 \right); e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Cho $v=(1;2;-3)$. Tìm tọa độ của v đối với cơ sở B .



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



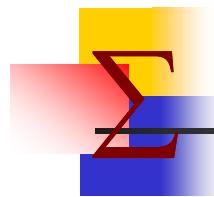
3.6. Hình chiếu của một vectơ lên một kg vecto

Đ/n. Trong kg Euclide $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cho không gian con W và vectơ v . Hình chiếu của v lên W là một vec tơ của W , kí hiệu là $ch_W(v)$, được xác định bởi

$$(v - ch_W(v)) \perp W$$

ĐL. Trong kg Euclide $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cho kg con W và vectơ x . G/s $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ là cơ sở trực chuẩn của W . Khi đó, hình chiếu của vecto v lên kg W là

$$ch_W(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_m \rangle e_m$$



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

Đại Số Tuyến Tính

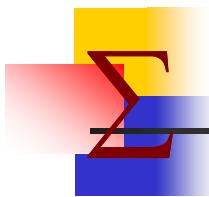
VD1. Xét không R^3 với tích vô hướng thông thường.

Giả sử H là không gian các nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của H .
Tìm tọa độ của vectơ $u = (1; 2; 3)$ thuộc H đối với cơ sở vừa tìm được ở trên. **(Đề I-K56)**

VD2. Xét không R^3 với tích vô hướng thông thường.

Giả sử H là không gian các nghiệm của phương trình $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của H .
Tìm tọa độ của vectơ $u = (4; 1; 3)$ thuộc H đối với cơ sở vừa tìm được ở trên. **(Đề II-K56)**

§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE

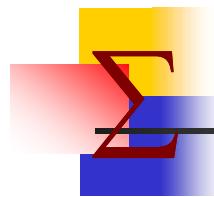


VD3. Xét không \mathbb{R}^3 với tích vô hướng Euclide thông thường. Cho các vecto $u_1=(1;2;3)$, $u_2=(-4;5;1)$, $u_3=(-2;9;7)$, $u=(4;-1;-3)$. Đặt $H=\text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$. Tìm hình chiếu vuông góc của vecto u lên không gian con H .

(Đề III-K55)

VD4. Xét không \mathbb{R}^3 với tích vô hướng Euclide thông thường. Cho các vecto $v_1=(1;-2;3)$, $v_2=(3;-7;10)$, $v_3=(-1;3;-4)$, $v=(1;3;1)$. Đặt $H=\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Tìm hình chiếu vuông góc của vecto v lên không gian con H .

(Đề IV-K55)



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



VD5. Trong không gian R^3 với tích vô hướng

$$\langle (x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

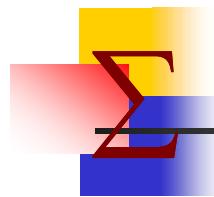
cho A là không gian nghiệm của phương trình
 $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ và vecto $v = (2; 2; 1)$.

1) Tìm một cơ sở trực chuẩn của A.

2) Tìm vecto $w \in A$ sao cho $w \perp v$ và $\|w\| = \sqrt{45}$

(Đề III-K55)

Đ/s: $w_1 = (2; 1; 6), w_2 = (-2; -1; -6)$



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



VD6. Trong không gian \mathbb{R}^3 với tích vô hướng

$$\langle (x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

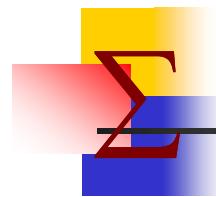
cho B là không gian nghiệm của phương trình
 $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ và vecto $v = (2; 2; 1)$.

1) Tìm một cơ sở trực chuẩn của B .

2) Tìm vecto $w \in B$ sao cho $w \perp v$ và $\|w\| = 3\sqrt{3}$

(Đề IV-K55)

Đ/s:



§3: KHÔNG GIAN EUCLIDE



VD7. Trong không gian \mathbb{R}^3 với tích vô hướng

$$\langle (x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

cho hệ $B = \{\mathbf{e}_1 = (1; -1; 1), \mathbf{e}_2 = (1; 1; 1)\}$ và $x = (2; 1; -1)$

Tìm hình chiếu của vecto x lên không gian con $W = \text{span}(B)$ và phân tích $x = u + v$ với $u \in W$, v trực giao với u .

(Đề I-K53)

D/s: $u = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right), v = \left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{3}{2} \right)$