NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

(*Tái bản lần thứ chín*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương I

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$. Một phần tử $x \in \mathbf{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbf{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$$

là một *hàm số của n biến số* xác định trên D ; D được gọi là *miền xác định* của hàm số f ; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các *biến số độc lập*. Nếu xem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các tọa độ của một điểm $M \in \mathbf{R}^n$ trong một hệ tọa độ nào đó thì cũng có thể viết $u = f(M)$.

Trong trường hợp thường gặp $n = 2$ hay $n = 3$, người ta dùng kí hiệu $z = f(x, y)$ hay $u = f(x, y, z)$.

Trong giáo trình này ta sẽ chỉ xét những hệ tọa độ Đêcac vuông góc.

1.1.2. Tập hợp trong $\mathbf{R}^n$

• Giả sử $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots y_n)$ là hai điểm trong $\mathbf{R}^n$. Khoảng cách giữa hai điểm ấy, kí hiệu là $d(M, N)$, được cho bởi công thức

$$d(M, N) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Có thể chứng minh được rằng với ba điểm A, B, C bất kì trong $\mathbf{R}^n$, ta có

$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$ (bất đẳng thức tam giác)

• M_o là một điểm thuộc $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ε – *lân cận* của M_o là tập hợp tất cả những điểm M của $\mathbf{R}^n$ sao cho $d(M_o,M) < \varepsilon$. Người ta gọi *lân cận* của M_o là mọi tập hợp chứa một ε – lân cận nào đó của M_o.

• E là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Điểm $M \in E$ được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một ε – lân cận nào đó của M nằm hoàn toàn trong E. Tập hợp E được gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

• Điểm $N \in \mathbf{R}^n$ được gọi là *điểm biên* của tập hợp E nếu mọi ε – lân cận của N đều vừa chứa những điểm thuộc E, vừa chứa những điểm không thuộc E. Điểm biên của tập hợp E có thể thuộc E, cũng có thể không thuộc E. Tập hợp tất cả những điểm biên của E được gọi là *biên* của nó.

• Tập hợp E được gọi là *đóng* nếu nó chứa mọi điểm biên của nó (tức là biên của E là một bộ phận của E).

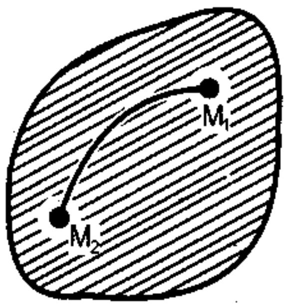
Ví dụ : Tập hợp tất cả những điểm M sao cho $d(M_o, M) < r$, trong đó M_o là một điểm cố định, r là một số dương, là một tập hợp mở. Thật vậy, gọi E là tập hợp ấy. Giả sử M là một điểm bất kì của E, ta có $d(M_o,M) < r$. Đặt $\varepsilon = r - d(M_o, M)$. ε – lân cận của M nằm hoàn toàn trong E vì nếu P là một điểm của lân cận ấy thì ta có $d(M, P) < \varepsilon$, do đó theo bất đẳng thức tam giác

$$d(M_o,P) \leqslant d(M_o,M) + d(M,P) < d(M_o,M) + \varepsilon = r. \blacksquare$$

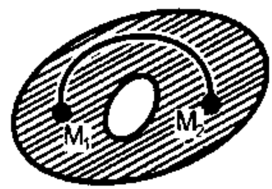
Tập hợp E ấy được gọi là *quả cầu mở* tâm M_o, bán kính r. Biên của tập hợp ấy gồm những điểm M sao cho $d(M_o,M) = r$, được gọi là *mặt cầu* tâm M_o bán kính r. Tập hợp những điểm M sao cho $d(M_o,M) \leqslant r$ là một tập hợp đóng được gọi là *quả cầu đóng* tâm M_o bán kính r.

● Tập hợp E được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.

● Tập hợp E được gọi là *liên thông* nếu có thể nối hai điểm bất kì M_1, M_2 của E bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E ; tập hợp liên thông được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (hình 1.1a), là *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một (hình 1.1b).



Hình 1.1a



Hình 1.1b

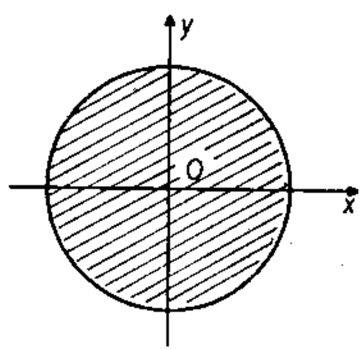
1.1.3. Miền xác định của hàm số nhiều biến số

Ta quy ước rằng nếu hàm số u được cho bởi biểu thức u = f(M) mà không nói gì thêm về miền xác định của nó thì miền xác định của u được hiểu là tập hợp tất cả những điểm M sao cho biểu thức f(M) có nghĩa, thường đó là một tập hợp liên thông.

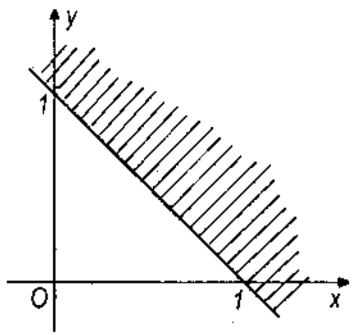
Ví dụ 1 : Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ được xác định trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$, tức là trong quả cầu đóng tâm O bán kính 1 (hình 1.2).

Ví dụ 2 : Miền xác định của hàm số $z = \ln(x + y - 1)$ là miền $x + y > 1$ (hình 1.3).

Ví dụ 3 : Hàm số $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ được xác định khi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$,



Hình 1.2



Hình 1.3

miền xác định của nó là quả cầu mở tâm O bán kính 1.

Sau này các khái niệm sẽ được trình bầy chi tiết cho trường hợp n = 2 hay n = 3 ; các khái niệm ấy cũng được mở rộng cho trường hợp n nguyên dương bất kì.

1.1.4. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_o(x_o, y_o)$ trong $\mathbf{R}^2$ và viết $M_n \to M_o$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_o, M_n) = 0$ hay nếu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_o\ ,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_o .$$

- Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x,y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$, có thể trừ tại M_o. Ta nói rằng hàm số f(M) có *giới hạn* l khi M(x,y) dần đến M_o nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ (khác M_o) thuộc lân cận V dần đến M_o ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l .$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_o} f(M) = l.$$

Cũng như khi xét giới hạn của hàm số một biến số, có thể chứng minh rằng định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau : Hàm số f(M) có giới hạn l khi M dần đến M_o nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ sao cho

$$d(M_o,M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon.$$

• Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số. Chẳng hạn

$$\frac{1}{x^2+y^2} \to +\infty \qquad \text{khi } (x,y) \to (0,0).$$

• Các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, với $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Hàm số f(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} \text{ khi } x \neq 0 .$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} .$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0)$ theo những phương khác nhau, f(x,y) dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ví dụ 2 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, với $g(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Hàm số g(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vì $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ nên

$$|g(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|y| \leq |y| .$$

Vậy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 .$$

Ví dụ 3 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$, với $h(x, y) = \dfrac{xy^3}{2x^2 + 3y^6}$.

Hàm số h(x, y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$h(x, kx) = \frac{k^3x^2}{2 + 3k^6x^4}, \ \forall x \neq 0.$$

Do đó $h(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo mọi phương $y = kx$. Nhưng điều đó không có nghĩa là giới hạn phải tìm tồn tại và bằng 0. Thật vậy, nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ trên đường $x = y^3$, ta có

$$h(y^3, y) = \frac{y^6}{5y^6} = \frac{1}{5}$$

Do đó $h(x, y) \to \dfrac{1}{5}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường parabôn bậc ba $x = y^3$.

1.1.5. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

• Giả sử hàm số f(M) xác định trong miền D, M_o là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_o nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = f(M_o).$$

Nếu miền D đóng, M_o là một điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_o} f(M)$ được hiểu là giới hạn của f(M) khi M dần đến M_o ở bên trong của D.

Giả sử M_o có tọa độ là (x_o, y_o), M có tọa độ là $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$. Đặt $\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$. Định nghĩa trên có thể phát biểu như sau : Hàm số f(x, y) được gọi là liên tục tại (x_o, y_o) nếu nó xác định tại đó và nếu $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Hàm số f(M) được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

• Hàm số f(M) được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ sao cho với mọi cặp điểm M', M'' thuộc D mà $d(M', M'') < \delta$ ta đều có

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

• Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó bị chặn trong miền ấy, nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của nó trong miền ấy, nó liên tục đều trong miền ấy.

Ví dụ 4 : Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

trong đó α là một hằng số dương.

f(x,y) liên tục $\forall(x,y) \neq (0,0)$ vì là thương của hai hàm số liên tục mà mẫu số khác không. Vậy chỉ cần xét tại điểm (0,0). Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow |f(x, y)| \leq \frac{1}{2^{\alpha}}(x^2 + y^2)^{\alpha - 1}.$$

Do đó nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, vậy f(x,y) liên tục tại (0,0).

Giả sử $\alpha \leq 1$. Ta có

$$f(x, x) = \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}$$ không dần tới 0 khi $x \to 0$,

vậy f(x,y) không liên tục tại (0,0).

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $u = f(x,y)$ xác định trong một miền D ; $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm của D. Nếu cho $y = y_o$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_o)$ có đạo hàm tại $x = x_o$, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f đối với x* tại M_o và được kí hiệu là

$$f'_x(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Đặt $\Delta_x f = f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)$. Biểu thức đó được gọi là số gia riêng của $f(x,y)$ theo x tại (x_o,y_o). Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Tương tự như vậy, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại M_o, kí hiệu là

$$f'_y(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số ($n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như không đổi, rồi áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 1 : $z = x^y$ $(x > 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ví dụ 2 : $u = x^3 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 z \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x^3 z^2}{y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + x^3 z \frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = x^3\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right).$$

Chú thích : $\frac{\partial f}{\partial x}$ là một kí hiệu, chứ không phải là một thương ; ∂f và ∂x đứng riêng rẽ không có ý nghĩa gì.

1.2.2. Vi phân toàn phần

• Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_o(x_o, y_o) \in D$, $M(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \in D$. Biểu thức $\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o,y_o)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_o. Nếu có thể biểu diễn nó dưới dạng

(1.1) $$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc x_o, y_o, còn α, β dần tới 0 khi $M \to M_o$, tức là khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, thì ta nói rằng hàm số z là *khả vi tại* M_o, còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của $z = f(x, y)$ tại M_o và được kí hiệu là dz hay df.

Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú thích. Nếu hàm số $f(x,y)$ khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$ thì từ đẳng thức (1.1) suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, vậy $f(x,y)$ liên tục tại M_o.

• Đối với hàm số một biến số $y = f(x)$, nếu tại $x = x_o$ tồn tại đạo hàm (hữu hạn) $f'(x_o)$ thì ta có

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = f'(x_o)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, tức là $f(x)$ khả vi tại $x = x_o$. Đối với hàm số nhiều biến số $z = f(x, y)$, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_o(x_o,y_o)$ chưa đủ để hàm số khả vi tại đó. Thật vậy, xét ví dụ sau :

Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ta có

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0,$$

vì $f(h,0) = 0$ nếu $h \neq 0$. Tương tự, ta có $f'_y(0,0) = 0$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại (0,0) đều tồn tại, nhưng hàm số $f(x,y)$ không liên tục tại (0,0) (xem ví dụ 3, mục 1.1.5) nên không khả vi tại (0,0).

Định lí sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$.

Định lí 1.1. Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $M_o(x_o, y_o)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_o thì $f(x,y)$ khả vi tại M_o và ta có

(1.2) $$dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y.$$

Thật vậy, ta có

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) =$$

$$= [f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y)] + [f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)]$$

Áp dụng công thức số gia giới nội cho hàm số một biến số, ta được

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y) = \Delta x . f'_x(x_o + \theta_1\Delta x, y_o + \Delta y)$$

$$f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = \Delta y . f'_y(x_o, y_o + \theta_2\Delta y),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Nhưng vì f'_x và f'_y liên tục tại M_o nên

$$f'_x(x_o + \theta_1\Delta x, y_o + \Delta y) = f'_x(x_o, y_o) + \alpha,$$

$$f'_y(x_o, y_o + \theta_2\Delta y) = f'_y(x_o, y_o) + \beta$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Do đó

$$\Delta f = f'_x(x_o, y_o).\Delta x + f'_y(x_o,y_o).\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

vậy $f(x,y)$ khả vi tại M_o và ta có đẳng thức (1.2).

Chú thích. Cũng như đối với hàm số một biến số, nếu x, y là biến số độc lập thì $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, do đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

• Từ định nghĩa ta thấy rằng vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Do đó khi Δx và Δy có trị số tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là

$$(1.3)\qquad f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \approx f(x_o, y_o) + f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y$$

Ví dụ : Tính gần đúng $\text{arctg}\,\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$

Xét hàm số $z = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$. Ta cần tính $z(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y)$, với $x_o = 1$, $y_o = 1$, $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$. Ta có $z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Theo công thức (3), ta có

$$z(1 - 0{,}05\ ;\ 1 + 0{,}02) \approx z(1,1) + \frac{1 \,.\, 0{,}02 + 1 \,.\, 0{,}05}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0{,}035 = 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82 \text{ radian.}$$

1.2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Xét hai ánh xạ $\varphi : D \to \mathbf{R}^m$, $f : \varphi(D) \to \mathbf{R}$. Ánh xạ tích $f o\varphi$ xác định bởi

$$fo\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \in D \overset{\varphi}{\longmapsto} (u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n)) \in \varphi(D)$$

$$\overset{f}{\longmapsto} f(u_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, u_m(x_1,\ldots, x_n)) \in \mathbf{R}$$

được gọi là hàm số hợp của các biến số $x_1, \ldots, x_n$ qua các biến số trung gian $u_1, \ldots, u_m$. Để cho đơn giản, ta xét trường hợp $n = m = 2$. Đặt $F = fo\varphi$, ta có

$$F : (x,y) \in D \overset{\varphi}{\longmapsto} (u(x,y), v(x,y)) \in \varphi(D) \overset{f}{\longmapsto} f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$$

Định lí 1.2. Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ *liên tục trong* $\varphi(D)$ *và nếu u, v có các đạo hàm riêng* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ *trong D thì trong D tồn tại các đạo hàm riêng* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ *và ta có*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $(x_o, y_o) \in D$, $(x_o + h, y_o) \in D$. Đặt

$$\delta = F(x_o + h, y_o) - F(x_o, y_o)$$
$$= f(u(x_o + h, y_o), v(x_o + h, y_o)) - f(u(x_o, y_o), v(x_o, y_o))$$

và kí hiệu $u_o = u(x_o, y_o)$, $u_1 = u(x_o + h, y_o)$, $v_o = v(x_o, y_o)$, $v_1 = v(x_o + h, y_o)$. Ta có

$$\delta = f(u_1, v_1) - f(u_o, v_o) = [f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)] + [f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)]$$

$$\frac{\delta}{h} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)}{u_1 - u_o} \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)}{v_1 - v_o} \cdot \frac{v_1 - v_o}{h}.$$

Vì $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong Δ nên công thức số gia giới nội áp dụng vào $f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)$ và $f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)$ cho ta

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_2, v_1) \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_2)\frac{v_1 - v_o}{h},$$

trong đó $u_2 = u_o + \theta_1(u_1 - u_o)$, $v_2 = v_o + \theta_2(v_1 - v_o)$, $0 < \theta_1 < 1$. $0 < \theta_2 < 1$. Cho $h \to 0$, ta được

$$\lim_{h\to 0}\frac{\delta}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_o, v_o)\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_o)\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Đó là đẳng thức đầu của (1.4). Đẳng thức thứ hai của (1.4) được chứng minh tương tự. ■

Các công thức (1.4) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ hay ma trận Jacobi của u, v đối với x, y, còn định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v đối với x, y và được kí hiệu là $\frac{D(u\,,\,v)}{D(x\,,\,y)}$.

Trong tính toán, người ta không phân biệt f và F, chúng lấy cùng giá trị tại những điểm tương ứng (u, v) và (x,y). Có thể viết

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ví dụ : Cho $z = e^u \ln v$, $u = xy$, $v = x^2 + y^2$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^u \ln v \,.\, y + e^u \,.\, \frac{1}{v} \,.\, 2x = e^{xy}\left[y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u \ln v \,.\, x + e^u \,.\, \frac{1}{v} \,.\, 2y = e^{xy}\left[x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2}\right].$$

Chú thích 1. Nếu $z = f(x,y)$, $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của x, $z = f(x, y(x))$. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Nếu $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì z là hàm số hợp của t thông qua hai biến trung gian x, y. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) .$$

Chú thích 2. Nếu giả thiết thêm rằng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục thì từ (1.4) suy ra rằng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, do đó z xem như hàm số của x, y là khả vi và ta có

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy .$$

Thế các công thức (1.4) vào, ta có

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv .$$

Vậy vi phân toàn phần của hàm số $z = f(u,v)$ có cùng một dạng dù cho u, v là các biến số độc lập hay là các hàm số của những biến số độc lập khác. Do đó *vi phân toàn phần của hàm số nhiều biến số cũng có dạng bất biến* như vi phân của hàm số một biến số.

Các công thức

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = udv + vdu,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

đúng khi u, v là các biến số độc lập nên cũng đúng khi u, v là những hàm số của các biến số khác.

1.2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

● Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Ta có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba,...

Ví dụ : $z = x^2y^3 + x^4$

$$z'_x = 2xy^3 + 4x^3 \qquad z'_y = 3x^2y^2$$

$$z''_{x^2} = 2y^3 + 12x^2 \qquad z''_{yx} = 6xy^2$$

$$z''_{xy} = 6xy^2 \qquad z''_{y^2} = 6x^2y .$$

Trong ví dụ trên ta nhận thấy rằng $z''_{xy} = z''_{yx}$. Liệu điều đó có luôn luôn đúng không ? Ta có định lí quan trọng sau đây :

Định lí 1.3 (Schwarz). Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_o thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_o.

Chứng minh. Giả sử h, k là những số đủ nhỏ, khác 0 sao cho các điểm $(x_o + h, y_o)$, $(x_o, y_o + k)$, $(x_o + h, y_o + k)$ thuộc miền U. Tính biểu thức

$\Delta = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o + k)] - [f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)]$ theo hai cách khác nhau. Trước hết, đặt

$$\varphi(y) = f(x_o + h, y) - f(x_o, y),$$

ta có

$$\Delta = \varphi(y_o + k) - \varphi(y_o).$$

Theo công thức số gia giới nội, ta được

$$\Delta = k\varphi'(y_o + \theta_1 k),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$. Nhưng

$$\varphi'(y) = f_y'(x_o + h, y) - f_y'(x_o, y)].$$

Vì vậy $\Delta = k[f'_y(x_o + h, y_o + \theta_1 k) - f'_y(x_o, y_o + \theta_1 k)]$.

Lại áp dụng công thức số gia giới nội đối với biến x ở vế phải, ta được $\Delta = khf''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k)$,

trong đó $0 < \theta_2 < 1$. Bây giờ viết lại

$$\Delta = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)] - [f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)] =$$

$$= \psi(x_o + h) - \psi(x_o),$$

trong đó

$$\psi(x) = f(x, y_o + k) - f(x, y_o).$$

Cũng như trên, tồn tại hai số θ_3, θ_4, $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$, sao cho $\Delta = h\psi'(x_o + \theta_3 h) =$

$$= h[f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o + k) - f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o)] =$$

$$= hkf''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k).$$

So sánh hai kết quả tính trên, ta thấy

$$f''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k) = f''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k)$$

cho $h \to 0$, $k \to 0$, do giả thiết liên tục của f''_{yx} và f''_{xy} tại M_o, ta được

$$f''_{yx}(x_o, y_o) = f''_{xy}(x_o, y_o).$$

Định lí ấy cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm số n biến số với $n \geq 3$. Chẳng hạn, nếu $u = f(x, y, z)$ thì $u'''_{xyz} = u'''_{yzx} = u'''_{zxy} = u'''_{xzy} = \ldots$ nếu các đạo hàm ấy liên tục.

• Xét hàm số $z = f(x,y)$. Vi phân toàn phần của nó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$

nếu tồn tại, cũng là một hàm số của x, y. Vi phân toàn phần của dz nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là d^2z . Vậy :

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) .$$

Cứ tiếp tục như vậy người ta định nghĩa các vi phân cấp cao hơn

$$d^3z = d(d^2z)$$

....

$$d^nz = d(d^{n-1}z) .$$

Giả sử x, y là những biến số độc lập, khi ấy $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ đó là những hằng số không phụ thuộc x, y. Giả sử d^2z tồn tại. Ta có

$$d^2z = d(dz) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dx\, dy + f''_{y^2} dy^2 .$$

Giả thiết rằng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, khi đó chúng bằng nhau, vì vậy

$$d^2z = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dx\, dy + f''_{y^2} dy^2.$$

Người ta thường dùng kí hiệu tượng trưng

(1.5) $$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f$$

trong đó các bình phương của $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần đối với x, hai lần đối với y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần đối với y, một lần đối với x.

Tiếp tục tính toán như vậy, ta được công thức lũy thừa tượng trưng

(1.6) $$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f.$$

Bây giờ giả sử x, y không phải là biến số độc lập, mà là các hàm số của các biến số độc lập s, t. Khi ấy dx, dy không phải là những hằng số nữa, mà phụ thuộc vào s, t. Do đó

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) =$$

$$= d(f'_x)dx + f'_x d(dx) + d(f'_y)dy + f'_y d(dy)$$

$$= f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y.$$

Rõ ràng trong trường hợp này, công thức (1.5) không còn đúng nữa. Vi phân toàn phần cấp lớn hơn hoặc bằng 2 của hàm số nhiều biến số không có dạng bất biến.

1.2.5. Hàm số thuần nhất

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$ có tính chất sau : nếu điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, thì $\forall t > 0$ điểm $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ cũng thuộc D, tức là nếu D chứa điểm M thì D cũng chứa tia nối O với M.

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên D được gọi là *thuần nhất bậc k* nếu

$$(1.7) \qquad f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \forall t > 0.$$

Ví dụ : $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\ln\dfrac{x^2}{y^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{x^3y + y^2z^2 + xz^3}{x^2 + y^2 + z^2}$ là những hàm số thuần nhất theo thứ tự có bậc 1 xác định trên $\mathbf{R}^2$, bậc 0 xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, bậc 2 xác định trên $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

• *Nếu f là một hàm số thuần nhất bậc k thì các đạo hàm riêng cấp một của nó là những hàm số thuần nhất bậc k − 1.*

Thật vậy, đạo hàm hai vế của (1.7) đối với x_i, ta được

$$t f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

do đó $f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{k-1} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ■

• *Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là thuần nhất bậc k khi và chỉ khi*