BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT

ĐỀ THI TUYỂN SINH 2016 - Hệ Liên thông

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. a) Tìm giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}.$$

b) Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{nếu } x \le 0, \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Câu 2. a) Tính đạo hàm và vi phân của hàm số

$$f(x) = \arctan\sqrt{1+x^2} + e^{-\sin x}.$$

b) Tính tích phân bất định

$$\int \frac{2}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx.$$

Câu 3. a) Tính đạo hàm riêng của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình

$$x^3 + 3xy^2 + e^z = xyz.$$

b) Tìm cực trị của hàm số

$$z = x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{\ln(xy)}{2}.$$

Câu 4. Tính tích phân đường

$$\oint_{L^+} x^2 y dx - x y^2 dy,$$

L là biên của miền phẳng giới hạn bởi : $x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm. Số báo danh:............................

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT

ĐÁP ÁN + THANG ĐIỂM ĐỀ THI TUYỂN SINH 2016
Hệ Liên thông
Môn thi : **TOÁN**

Câu 1.a (1.5 điểm):

Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1} - e^x}{x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}} - e^x}{2x}. \quad \textbf{(1.0)}$$

Giới hạn tiếp tục có dạng $\frac{0}{0}$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được

$$I \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-(2x+1)^{-\frac{3}{2}} - e^x}{2} = -1. \quad \textbf{(0.5)}$$

Câu 1.b (1.5 điểm):

+) $\forall x \in (-\infty; 0) \Longrightarrow f(x) = 2x + a$ là hàm sơ cấp, xác định nên liên tục$/(-\infty; 0)$.

+) $\forall x \in (0; +\infty) \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ là hàm sơ cấp, xác định nên liên tục$/(0; +\infty)$. **(0.5)**

+) Tại $x = 0$, ta có :$f(0) = a$,
$f(0-0) = \lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} (2x+a) = a$,
$f(0+0) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$ **(0.5)**

+) Nếu $a = 1$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$ và liên tục$/(-\infty; +\infty)$.

+) Nếu $a \neq 1$ thì hàm số gián đoạn tại $x = 0$ và liên tục$/(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **(0.5)**

Câu 2.a (1.0 điểm):

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}} - \cos x.e^{-\sin x}, \forall x \in R.$ **(0.5)**

Vi phân $df(x) = \left[\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}} - \cos x.e^{-\sin x}\right] dx.$ **(0.5)**

Câu 2.b (1.5 điểm):

Đặt $t = e^x$, thì $dx = \dfrac{dt}{t}$ và tích phân trở thành $I = \displaystyle\int \frac{2}{t(t-1)(t-2)} dt.$ **(0.5)**

Tách $\dfrac{2}{t(t-1)(t-2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t-1} + \dfrac{1}{t-2}.$ **(0.5)**

$$I = \ln|t| - 2\ln|t-2| + \ln|t-2| + C = \ln\left|\frac{e^x(e^x-2)}{(e^x-1)^2}\right| + C. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 3.a (1.5 điểm):

Có $x^3 + 3xy^2 + e^z = xyz \Leftrightarrow x^3 + 3xy^2 + e^z - xyz = 0$. Đặt $F(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 + e^z - xyz$. Các đạo hàm riêng của hàm F là : $F'_x = 3x^2 + 3y^2 - yz;\ F'_y = 6xy - xz;\ F'_z = e^z - xy$. **(0.5)**

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 3y^2 - yz}{e^z - xy}, \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6xy - xz}{e^z - xy}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 3.b (1.5 điểm):

$z = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$, với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là:

$$z'_x = 2x - \frac{1}{2x}\ ,\ z'_y = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\ ,\ z''_{xx} = 2 + \frac{1}{2x^2}\ ,\ z''_{xy} = 0\ ,\ z''_{yy} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ $\begin{cases} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \pm\dfrac{1}{2} \\ y &= \pm 1 \end{cases}$. Vì $xy > 0$ suy ra hàm số có hai điểm tới hạn là $M_1 = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $M_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$. **(0.5)**

Tại $M_1 = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Tại $M_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$. **(0.5)**

Câu 4. (1.5 điểm):

Áp dung công thức Green, ta có $I = \iint\limits_D (-y^2 - x^2)dxdy$, với D là nửa trên của hình tròn $x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0$. **(0.5)**

Chuyển sang tọa độ cực, $I = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3.dr = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi.d\varphi$. **(0.5)**

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = -\left(\frac{3\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{4}. \qquad \textbf{(0.5)}$$