BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT

ĐỀ THI TUYỂN SINH

HỆ LIÊN THÔNG

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài: **120 phút**

Câu 1. a) Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1}.$$

b) Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Câu 2. Tính tích phân bất định

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 8x - 21}{x^2 + 4x + 13} dx.$$

Câu 3. a) Tìm vi phân toàn phần $df(x,y)$ của

$$f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

b) Tìm cực trị của hàm hai biến

$$z = e^x(x + 2y^2 + 1).$$

Câu 4. Tính tích phân hai lớp

$$\iint\limits_D (2x + 3y) dxdy,$$

D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{x},\ x + y = 2,\ y = 0.$

Câu 5. Tính tích phân đường

$$\int\limits_C xy^2 dy - x^2 y dx,$$

C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0.$

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm. Số báo danh: ....

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT	ĐÁP ÁN + THANG ĐIỂM ĐỀ THI TUYỂN SINH 2017 Hệ Liên thông Môn thi : **TOÁN**

Câu 1.a (1.5 điểm): Tìm giới hạn

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt{2x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{2x+1}-1} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{2x+1}-1}. \qquad (\mathbf{0.5})$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}+1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} . \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{2x+1}+1)}{2}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$L = 1.\frac{2}{2} + \frac{1}{2}.0 = 1. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 1.b (1.0 điểm): Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

+) $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$ **(0.5)**

+) $f''(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$ **(0.5)**

Câu 2(1.5 điểm): Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 8x - 21}{x^2 + 4x + 13} dx.$

$$I = \int \left(x - 2 + \frac{3x+5}{x^2+4x+13} \right) dx. \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} . \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+13} - \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} . \ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + C. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 3.a (1.5 điểm): Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}.$

$$f'_x(x,y) = \frac{\dfrac{1.(1-xy) - (-y)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1 + \left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\dfrac{1.(1-xy) - (-x)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1 + \left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+x^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$df(x,y) = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 3.b (1.5 điểm): Tìm cực trị của hàm $z = e^x(x + 2y^2 + 1)$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = e^x(x + 2y^2 + 2)$, $z'_y = e^x.4y$

$$z''_{xx} = e^x(x + 2y^2 + 3)\ ,\ z''_{xy} = e^x.4y\ ,\ z''_{yy} = 4e^x. \qquad \textbf{(0.5)}$$

+) Tọa độ các điểm dừng là nghiệm: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x(x + 2y^2 + 2) & = 0 \\ e^x.4y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$

Hàm số có một điểm dừng là $M = (0, -2)$. **(0.5)**

+) Tại $M(-2, 0)$ có $A = z''_{xx}(M) = e^{-2}, B = z''_{xy}(M) = 0, C = z''_{yy}(M) = 4e^{-2}, B^2 - AC < 0$ nên M là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(-2, 0) = -e^{-2}$. **(0.5)**

Câu 4. (1.5 điểm):

Vẽ hình và xác định cận của tích phân $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le 2 - y. \end{cases}$ **(0.5)**

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (2x + 3y)dx = \int_0^1 \left(x^2 + 3xy\right)\Big|_{y^2}^{2-y} .dy \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$I = \int_0^1 \left(y^4 + 3y^3 + 2y^2 - 2y - 4\right) dy = \left(\frac{y^5}{5} + 3\frac{y^4}{4} + 2\frac{y^3}{3} - y^2 - 4y\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{203}{60}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Câu 5. (1.5 điểm): Tính tích phân đường $I = \int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0$.

+) Phương trình tham số của C là $\begin{cases} x & = 2\cos t \\ y & = 2\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi \Longrightarrow \begin{cases} dx & = -2\sin t dt \\ dy & = 2\cos t dt \end{cases}$ **(0.5)**

+) $I = \int_0^\pi \left[(2\cos t)(2\sin t)^2(2\cos t) - (2\cos t)^2(2\sin t)(-2\sin t)\right] dt = 2^5 \int_0^\pi \cos^2 t.\sin^2 t.dt$ **(0.5)**

+) $I = 2^5 \int_0^\pi \frac{(\sin 2t)^2}{4}.dt = 4\int_0^\pi (1 - \cos 4t)dt = (4t - \sin 4t)\big|_0^\pi = 8\pi.$ **(0.5)**