BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT

ĐỀ THI TUYỂN SINH

HỆ LIÊN THÔNG

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài: **120 phút**

Câu 1. a) Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}.$$

b) Tính đạo hàm của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & \text{nếu } x\le 0,\\ \ln(1+x) & \text{nếu } x>0.\end{cases}$$

Câu 2. a) Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{x}{y}.$$

b) Tìm cực trị của hàm hai biến

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-30x-18y.$$

Câu 3. a) Tính tích phân bất định

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx.$$

b) Tính tích phân đường

$$\int_{L^+}(x+y)dx+(3x-2y)dy,$$

L^+ là biên của tam giác ABC theo chiều dương, với $A(0,0),\ B(6,-3),\ C(1,2)$.

Câu 4. Tính tích phân 2 lớp

$$\iint_D(x+2y)dxdy,$$

D là miền phẳng hữu hạn được giới hạn bởi các đường: $y=x^2-2x,\ x+y=2$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm. Số báo danh: ....

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GTVT

ĐÁP ÁN + THANG ĐIỂM ĐỀ THI TUYỂN SINH 2017
Hệ Liên thông
Môn thi : **TOÁN**

Câu 1.a (1.0 điểm): Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hospital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{x\left(1+x^2\right)^{-1/2}}. \qquad (\mathbf{0.5})$$

$$L = \sqrt{1+x^2}\left(2.e^{x^2} + \frac{\sin x}{x}\right) = 3. \qquad (\mathbf{0.5})$$

Câu 1.b (1.5 điểm): Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{nếu } x \le 0, \\ \ln(1+x) & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

+) Với $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = 2^x \ln 2.$ **(0.5)**

+) Với $x > 0 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}.$ **(0.5)**

+) Tại $x = 0$, $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2,$
$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
Vì $f'_-(0) \ne f'_+(0)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$. **(0.5)**

Câu 2.a (1.5 điểm): Tìm các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{x}{y}$.

+) $f'_x(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ **(0.5)**

+)$f'_y(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ **(0.5)**

+) $f''_{xx} = \frac{-x^2+y^2+2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{xy} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{yy} = \frac{x^2-y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ **(0.5)**

Câu 2b (1.5 điểm): Tìm cực trị của hàm hai biến $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :

$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $f'_y = 6xy - 18$, $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{yy} = 6x$ **(0.25)**

+) Tọa độ các điểm tới hạn là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 & = & 10 \\ xy & = & 3 \end{cases}.$$

Hệ có 4 nghiệm $\begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x & = & 3 \\ y & = & 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x & = & -3 \\ y & = & -1 \end{cases}$ **(0.25)**

+) Xét tại $M_1(1,3)$, ta có $A = f''_{xx}(M_1) = 6,\ B = f''_{xy}(M_1) = 18,\ C = f''_{yy}(M_1) = 6$

Ta thấy $B^2 - AC > 0$, nên M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số. **(0.25)**

+) Xét tại $M_2(3,1)$, ta có $A = f''_{xx}(M_2) = 18,\ B = f''_{xy}(M_2) = 6,\ C = f''_{yy}(M_2) = 18$

Ta thấy $B^2 - AC < 0,\ A > 0$, nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số. **(0.25)**
Giá trị cực tiểu là $f(3,1) = -72$

+) Xét tại $M_3(-1,-3)$, ta có $A = f''_{xx}(M_3) = -6,\ B = f''_{xy}(M_3) = -18,\ C = f''_{yy}(M_4) = -6$

Ta thấy $B^2 - AC > 0$, nên M_3 không phải là điểm cực trị của hàm số. **(0.25)**

+) Xét tại $M_4(-3,-1)$, ta có $A = f''_{xx}(M_4) = -18,\ B = f''_{xy}(M_4) = -6,\ C = f''_{yy}(M_4) = -18$

Ta thấy $B^2 - AC < 0,\ A < 0$, nên M_4 là điểm cực đại của hàm số. **(0.25)**
Giá trị cực đại là $f(-3,-1) = 72$

Câu 3.a (1.5 điểm): Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$.

Tách hàm dưới tích phân: $\displaystyle\frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}\right).$ **(1.0)**

$$I = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3}\right)dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C.$$ **(0.5)**

Câu 3.b (1.5 điểm): Tính tích phân đường $\displaystyle\int_{L^+}(x+y)dx + (3x-2y)dy$, L^+ là biên của tam giác ABC với $A(0,0),\ B(6,-3),\ C(1,2)$.

+) Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y : 0 \to -3$

$$\Longrightarrow I_1 = \int_{\overline{AB}} = \int_0^{-3}\{-2(-2y+y) + (-6y-2y)\}dy = \int_0^{-3}(-6y)dy = -27$$ **(0.5)**

+) Phương trình của cạnh BC là $y = 3-x,\ x : 6 \to 1$

$$\Longrightarrow I_2 = \int_{\overline{BC}} = \int_6^{1}\{(x+3-x) - (3x-6+2x)\}dx = \int_6^{1}(-5x+9)dx = \frac{85}{2}$$ **(0.5)**

+) Phương trình của cạnh CA là $y = 2x,\ x : 1 \to 0$

$$\Longrightarrow I_3 = \int_{\overline{CA}}(x+y)dx + (3x-2y)dy = \int_1^{0}\{(x+2x) + (3x-2.2x)\,2\}dx = \int_1^{0}xdx = -\frac{1}{2}$$ **(0.5)**

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = 15$.

Câu 4. (1.5 điểm): Tính tích phân 2 lớp $\displaystyle\iint_D (x+2y)dxdy$, D là miền được giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x,\ x + y = 2$.

Tìm tọa độ giao điểm của hai đường $\begin{cases} y = & x^2 - 2x \\ y = & 2 - x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vẽ hình và xác định cận của tích phân $D = \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ x^2 - 2x \le y \le 2 - x. \end{cases}$ **(0.5)**

$$I = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-2x}^{2-x} (x + 2y) dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(xy + y^2 \right) \Big|_{x^2-2x}^{2-x} .dx \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \left(-x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \right) dx = \left(-\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^{2} = \frac{153}{20}. \qquad \textbf{(0.5)}$$