HUST

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

ONE LOVE. ONE FUTURE.

Các tiến trình ngẫu nhiên

ONE LOVE. ONE FUTURE.

Nội dung

- Các khái niệm cơ sở
- Tiến trình Poisson

Phép thử ngẫu nhiên

- *Là quá trình thử hay quá trình quan sát có thể được lặp đi lặp lại nhiều lần dưới cùng một điều kiện giống nhau*.
- Kết quả của một lần thử không thể tiên đoán trước, độc lập với các phép thử trước đó và có phân bố đồng nhất.
- Tuy nhiên các kết quả này phải nằm trong một tập giá trị xác định.
- Nếu gọi e là kết quả của phép thử ngẫu nhiên, Ω là tập hợp các giá trị của phép thử, ta có: $e \in \Omega$

Sự kiện ngẫu nhiên

- (random event) là kết quả của một phép thử ngẫu nhiên. Kết quả này nằm trong một tập các kết quả đã được xác định.

Biến ngẫu nhiên

- là đại lượng biến thiên phụ thuộc vào kết cục của một phép thử ngẫu nhiên nào đó.
- Như vậy, nếu gọi *X* là một biến ngẫu nhiên phụ thuộc vào sự kiện ngẫu nhiên *e*, *Ω* là tập hợp các giá trị của phép thử, ta có:
- $X \equiv X(e), e \in \Omega$

Ví dụ biến ngẫu nhiên

Thí dụ: Trò chơi tung xúc xắc tính điểm với luật chơi sau:

Điểm tương ứng với kết quả tung xúc xắc

Kết quả tung	Điểm
1	200
2	500
3	600
4	1000
5	1200
6	1500

Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Có hai loại biến ngẫu nhiên là ***biến ngẫu nhiên rời rạc*** và ***biến ngẫu nhiên liên tục***.
- (discrete random variable) là biến mà tập giá trị của nó là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các phần tử.
- Miền giá trị của một biến ngẫu nhiên rời rạc là một dãy số: có thể hữu hạn hoặc vô hạn.
- *Thí dụ :* Điểm thi của một sinh viên (từ 1 đến 10); Số cuộc gọi của một tổng đài trong một đơn vị thời gian.

Biến ngẫu nhiên liên tục

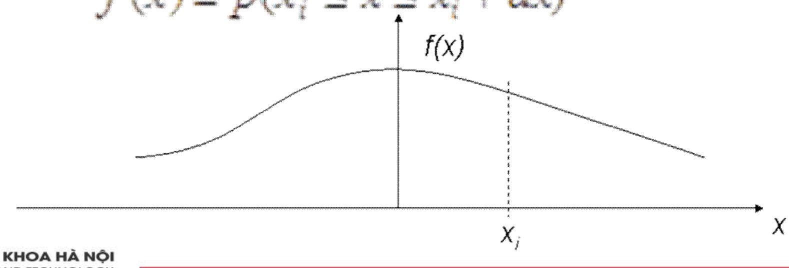
- *(continous random variable) là* biến ngẫu nhiên mà tập giá trị của nó lấp kín một khoảng trên trục số
- Nói một cách khác, số phần tử của tập giá trị là vô hạn, không đếm được theo lý thuyết số. Miền giá trị của một biến ngẫu nhiên liên tục sẽ là một đoạn .
- *Thí dụ* : Huyết áp của một bệnh nhân; tuổi thọ của một loại bóng đèn điện tử.

Hàm mật độ xác suất probability density function - (pdf)

- Mật độ xác suất của một ngẫu nhiên *x* liên tục có thể hiểu là xác suất để biến ngẫu nhiên đó lấy giá trị trong miền .
- Nếu gọi *f(x)* là hàm mật độ xác xuất của x thì:

$$[x_i, x_i + dx]$$

$$f(x) \equiv p(x_i \le x \le x_i + dx)$$

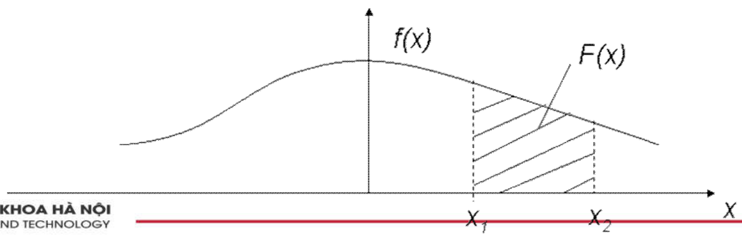


Hàm phân phối xác suất (probability distribution function - PDF)

- *Hàm phân phối xác suất* của một biến ngẫu nhiên liên tục x là xác suất để biến ngẫu nhiên đó lấy giá trị trong miền $\lfloor x_1 \leq x \leq x_2 \rfloor$. Nếu gọi là hàm phân phối xác suất, ta có định nghĩa hàm phân phối xác suất như sau:

- Trong đó là hàm mật độ xác suất của *x*.

$$F(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



Hàm tần suất (1)

Xét *X* là biến ngẫu nhiên rời rạc có tập các giá trị rời rạc $x_1, x_2, ..., x_K$.

Hàm tần suất (frequency function) của biến ngẫu nhiên rời rạc được xác định bởi:

$$\widetilde{\mathrm{P}}_X(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1,2,...,K \; ;$$

Hàm tần suất (2)

Xem xét sự kiện $a < X \le b$ với $a < x_1$ và $x_k \le b < x_{k+1}$, chúng ta có:

$$\begin{cases} P(a < X \le b) & = & \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_1) + \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_2) + \ldots + \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_k) \\ & = & \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_i) \\ P(X \le a) & = & 0 \end{cases}$$

Hàm phân phối xác suất

Hàm phân phối xác suất của của biến ngẫu nhiên rời rạc được xác định:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_i) & x_k \le x < x_{k+1} \\ 1 & x \ge x_K \end{cases};$$

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_i)$$

Ví dụ hàm phân phối xác suất (1)

Truyền bản tin số qua kênh nhiễu,

xác suất lỗi truyền một số là $P(E) = \frac{2}{5}$;

xác suất truyền đúng một số là $P(C) = 1 - P(E) = \frac{3}{5}$

Ví dụ hàm phân phối xác suất (2)

- Xác suất truyền không lỗi: $P(CCC) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$
- Xác suất truyền bản tin ba số, một số bị lỗi: $3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$
- Xác suất truyền bản tin ba số, hai số bị lỗi: $3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$

  Xác suất truyền tất cả ba số bị lỗi:

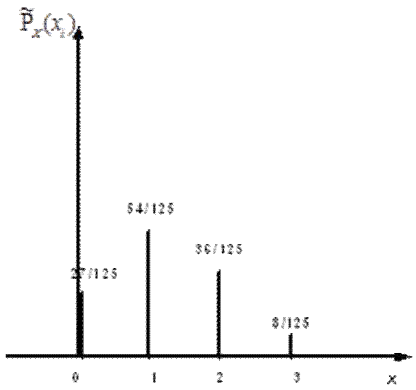
  $P(EEE) = P(E) \cdot P(E) \cdot P(E) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

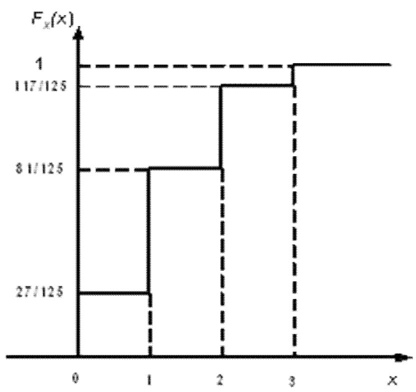
Ví dụ hàm phân phối xác suất (3)

Nếu ta chọn $X(S)$ là số lỗi ở bản tin thu được thì X là biến ngẫu nhiên rời rạc với K = 4 giá trị có thể có là x_i = 0, 1, 2, 3.

x_i	$\tilde{P}_X(x_i)$	$F_X(x_i)$
0	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$	$\frac{27}{125}$
1	$3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$	$\frac{81}{125}$
2	$3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$	$\frac{117}{125}$
3	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$	$\frac{125}{125}$

Ví dụ hàm phân phối xác suất (4)





Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên (expectation)

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên *X* ký hiệu là m_X hoặc $E[X]$ được xác định:

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$; X liên tục

$$E[X] = m_X = \sum_{\forall i} x_i \widetilde{\mathrm{P}}_X(x_i)$$; X rời rạc

Hàm nhỏ

- Một hàm f(h) được gọi là hàm nhỏ khi thỏa mãn $\lim_{h \to \infty} \frac{f(h)}{h}$=0 kí hiệu *O(h)*
- Ý nghĩa: *f(h)* tiến đến 0 nhanh hơn h
- Các tính chất: Nếu *f(x) và g(x)* là *O(x) thì*
  - *f(x)+g(x) là O(x)*
  - *cf(x) là O(x)*

Tiến trình đếm

- Một tiến trình đếm là một tiến trình ngẫu nhiên {N (t), t ≥ 0} thỏa mãn các điều kiện:
  - N(0)=0
  - N (t) ≥ 0 với mọi t ≥0
  - N (t) là một số nguyên.
  - Nếu s ≤ t thì N (s) ≤ N (t).
  - Nếu s <t, thì N (t) - N (s) là số lượng sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian (s, t].

Tiến trinh tăng trưởng độc lập

- Một tiến trình đếm {N (t), t ≥ 0} được gọi là tiến trình tăng trưởng độc lập nếu thỏa mãn các điều kiện:
  - Các sự kiện xảy ra trong các khoảng thời gian khác nhau là độc lập với nhau.
  - Nếu ta có các khoảng thời gian $[(s_1, t_1), (s_2, t_2) \cdots (s_n, t_n)]$

    thì $[N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2) \cdots N(t_n) - N(s_n)]$

  Hoàn toàn độc lập với nhau

Tiến trinh tăng trưởng dừng

- Một tiến trình đếm {X (t), t ≥ 0} được gọi là tiến trình tăng trưởng dừng nếu thỏa mãn các điều kiện:
  - nếu số các sự kiện trong khoảng thời gian (t_1+s, t_2+s); tức là $[N(t_2+s)-N(t_1+s)]$

  có cùng phân bố với số sự kiện xuất hiện trong khoảng thời gian (t_1, t_2); tức là $[N(t_2)-N(t_1)]$

  đối với mọi $t_1 < t_2$ và *s>0.* .

Tiến trình Poisson

- tiến trình đến một hệ thống (số cuộc gọi đến tổng đài)
- các yêu cầu cho các tài liệu riêng lẻ trên một máy chủ web;
- số vụ tai nạn xe hơi tại một địa điểm hoặc trong một khu vực;
- vị trí của người dùng trong mạng không dây;
- chiến tranh bùng nổ

Định nghĩa tiến trình Poisson

- Một tiến trình đếm {N (t), t ≥ 0} được gọi là tiến trình Poisson với tham số λ nếu thỏa mãn:
  - N (t) là tiến trình tăng trưởng dừng
  - Các sự kiện xảy ra trong các khoảng thời gian khác nhau thì độc lập với nhau
  - Xác xuất có 1 sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian h nào đó là λh +0(h)
  - Xác xuất có hơn 1 sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian h nào đó là 0(h)

Nhận xét

- Xác xuất có 1 sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian h : P[N(h)=1]=λh +0(h)
- Xác xuất có hơn 1 sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian h: P[N(h)>1]=0(h)

→ Xác xuất có 0 sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian h : P[N(h)=0]=1-λh +0(h)

Định lý 1

- Nếu {N (t), t ≥ 0} là tiến trình Poisson với tham số λ >0 thì số sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian từ (0,t) sẽ tuân theo phân bố Poisson với tham số λt:
- $p[\![N(t) = k]\!] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Ví dụ 1(1)

- Số lượng khách hàng đến cửa hàng tạp hóa có thể được mô hình hóa theo tiến trình Poisson với tốc độ đến λ = 10 khách hàng mỗi giờ
  - →Hãy tìm xác suất có 2 khách hàng trong khoảng từ 10:00 đến 10:20.

Ví dụ 1 (1)

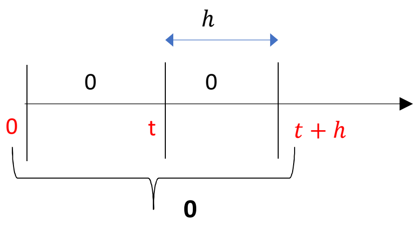
- λ=10
- Khoảng thời gian giữa 10:00 và 10:20 có độ dài là 1/3 giờ.
- Do vậy ta có
- $p[\![N(t) = 2]\!] = \frac{(10/3)^2}{2!} e^{-10/3} \approx 0.2$

Chứng minh công thức (1)

- Gọi $p_k(t)$ là xác suất có k sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian (0,t)
- Ta thực hiện tính xác suất $p_k(t+h)$ thông qua xác suất các sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian (0,t)

Chứng minh công thức (2)

- Xét k=0



- $p_0(t+h) = p_0(t).\ p_0(t,t+h)=$
- $= p_0(t).\ p_0(h)$
- $=p_0(t)\ .(1-\lambda h+0(h))$

Chứng minh công thức (3)

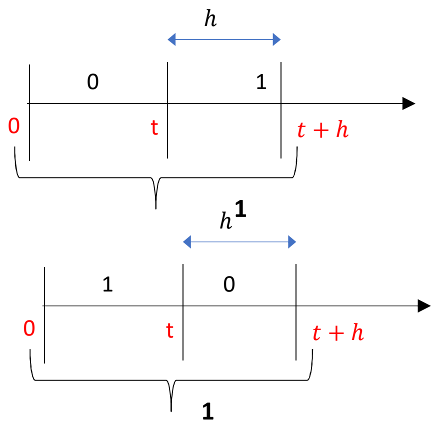
- Từ $p_0(t+h) = p_0(t)\ .(1-\lambda h+0(h))$

ta có

- $\frac{\boldsymbol{p_0(t+h)-p_0(t)}}{\boldsymbol{h}} = -\lambda p_0(t) + p_0(t)\frac{0(h)}{h}$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$ (1)

Chứng minh công thức (4)

- Xét k=1
- $p_1(t+h) = p_0(t).\ p_1(t,t+h) + p_1(t).\ p_0(t,t+h) =$
- $= p_0(t).\ p_1(h) + p_1(t).\ p_0(h)$
- $= p_0(t)\ (\lambda h + 0(h)) + p_1(t)\ (1 - \lambda h + 0(h))$

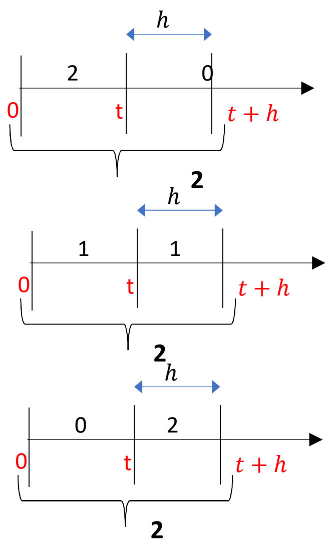


Chứng minh công thức (5)

- Từ $p_1(t+h) = p_0(t)\ (\lambda h + 0(h)) + p_1(t)\ (1 - \lambda h + 0(h))$
- ta có
- $\frac{\boldsymbol{p_1(t+h) - p_1(t)}}{\boldsymbol{h}} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) + (p_0(t) + p_1(t))\frac{0(h)}{h}$
- $\lim_{h \to 0} \frac{p_1(t+h) - p_1(t)}{h} = \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$ (2)

Chứng minh công thức (6)

- Xét k=2



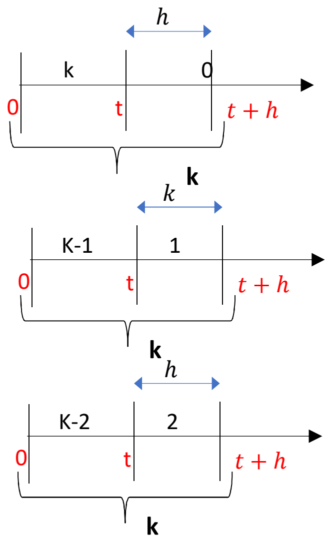
- $p_1(t+h) = p_2(t).\ p_0(h) + p_1(t).\ p_1(h) + p_0(t).\ p_2(h)$
- $= p_2(t)\ (1-\lambda h+0(h)) + p_1(t)(\lambda h+0(h)) + p_0(t)0(h)$

Chứng minh công thức (7)

- Từ $p_2(t+h) = p_2(t)\ (1-\lambda h+0(h)) + p_1(t)(\lambda h+0(h)) + p_0(t)0(h)$
- ta có
- $\frac{\boldsymbol{p_2(t+h)-p_2(t)}}{\boldsymbol{h}} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) + (p_0(t) + p_1(t) + p_2(t))\frac{0(h)}{h}$
- $\lim_{h\to 0} \frac{p_2(t+h)-p_2(t)}{h} = \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t)$ (3)

Chứng minh công thức (6)

- Xét k bất kỳ (k>2)
- Làm tương tự ta có



- $\lim_{h\to 0}\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = \frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t)(4)$

Chứng minh công thức (7)

- Thực hiện giải các phương trình vi phân
- Từ phương trình (1)
- $\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$.
- $\rightarrow \frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t)$=0
- Nhân cả hai vế với $e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$ ta có
- $\frac{dp_0(t)}{dt} e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} p_0(t) = 0$
- $\frac{d(p_0(t)e^{\lambda t})}{dt}$= 0.

Chứng minh công thức (8)

- Lấy tích phân cả hai vế của phương trình $\frac{d(p_0(t)e^{\lambda t})}{dt}$= $0\ ta\ có$
- $p_0(t)e^{\lambda t}$= C_0
- $\rightarrow p_0(t) = C_0\ e^{-\lambda t}$
- Thay giá trị t=0 vào công thức trên ta có $p_0(0) = C_0$. Mà $p_0(0) = 1\ nên\ C_0 = 1.$
- $\rightarrow p_0\ (t) = e^{-\lambda t}$ (*).

Chứng minh công thức (9)

- Thay $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ (*) vào phương trình (2) $\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$
- $\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_1(t)$
- $\frac{dp_1(t)}{dt} + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- Nhân cả hai vế với $e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$ ta có
- $\frac{dp_1(t)}{dt} e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} p_1(t) = \lambda$
- $\frac{d(p_1(t)e^{\lambda t})}{dt}$= λ

Chứng minh công thức (10)

- Lấy tích phân cả hai vế của phương trình
- $\frac{d(p_1(t)e^{\lambda t})}{dt} = \lambda$
- ta có
- $e^{\lambda t} p_1(t) = \lambda \mathrm{t} + C_1$
- Thay giá trị t=0 vào công thức trên ta có $p_1(0) = C_1$. Mà $p_1(0) = 0$ $nên$ $C_1 = 0$.
- $e^{\lambda t} p_1(t) = \lambda \mathrm{t}$
- $\rightarrow p_1\ (t) = \lambda \mathrm{t}.e^{-\lambda t}$ (**).

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Chứng minh công thức (11)

- Thay $p_1(t) = \lambda \mathrm{t}.e^{-\lambda t}$ (**) vào phương trình (3) $\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t)$
- $\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda p_2(t)$
- $\frac{dp_2(t)}{dt} + \lambda p_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$
- Nhân cả hai vế với $e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$ ta có
- $\frac{dp_2(t)}{dt} e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} p_2(t) = \lambda^2 t$
- $\frac{d(p_2(t)e^{\lambda t})}{dt} = \lambda^2 t$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Chứng minh công thức (12)

- Lấy tích phân cả hai vế của phương trình
- $\frac{d(p_2(t)e^{\lambda t})}{dt} = \lambda^2 t$
- ta có
- $e^{\lambda t}p_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} + C_2$
- Thay giá trị t=0 vào công thức trên ta có $p_2(0) = C_2$. Mà $p_2(0) = 0\ nên\ C_2 = 0.$
- $e^{\lambda t}p_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$
- $\rightarrow p_2\ (t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2}. e^{-\lambda t}$ (***).

Chứng minh công thức (13)

- Làm tương tự ta có
- $\rightarrow p_k\ (t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ (đpcm)

Định lý 2

- Nếu {N (t), t ≥ 0} là tiến trình Poisson với tham số λ >0 thì xác suất để có sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian từ (0,t) là
- $p(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- Với khoảng thời gian giữa hai sự kiện (i-1,i) được định nghĩa là $T_i = t_i - t_{i-1}$. T_i có phân bố mũ với tham số λ

Ví dụ (1)

- Hệ thống xe bus có sự kiện xe bus đến bến tuân theo tiến trình Poisson với tốc độ trung bình là 5 chuyến/giờ. Một người vừa nhỡ một chuyến xe bus.
  - Tính xác suất để người đó có xe bus mà phải đợi ít nhất 10 phút

Ví dụ (2)

- λ =5 chuyến/giờ hay 1/12 chuyến/phút
  - Tính xác suất để người đó có xe bus mà phải đợi ít nhất 10 phút
  - $p(T_i \leq 10\, phút) = 1 - e^{-\frac{1}{12}10}$

Chứng minh Định lý 2

- $p(T_i > t)$ là xác suất không có sự kiện nào xảy ra trong khoảng thời gian t. Hay nói cách khác sự kiện $(T_i > t)$ tương đương với sự kiện $\{\mathrm{N}(t_i + t) - \mathrm{N}(t_i)$=0}
- Vậy ta có $p(T_i > t)$= p$[\mathrm{N}(t_i + t) - \mathrm{N}(t_i)$=0]
- → $p(T_i > t)$= p$[\mathrm{N}(t) - \mathrm{N}(0)$=0]
- → $p(T_i > t)$= p$[\mathrm{N}(t)$=0]=
- → $p(T_i > t)$= $p_0(t) = e^{-\lambda t}$
- → $p(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (dpcm)

HUST

hust.edu.vn fb.com/dhbkhn

TRÂN TRỌNG CẢM ƠN!

49