ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Các phép biến đổi Fourier

TS. Đặng Quang Hiếu

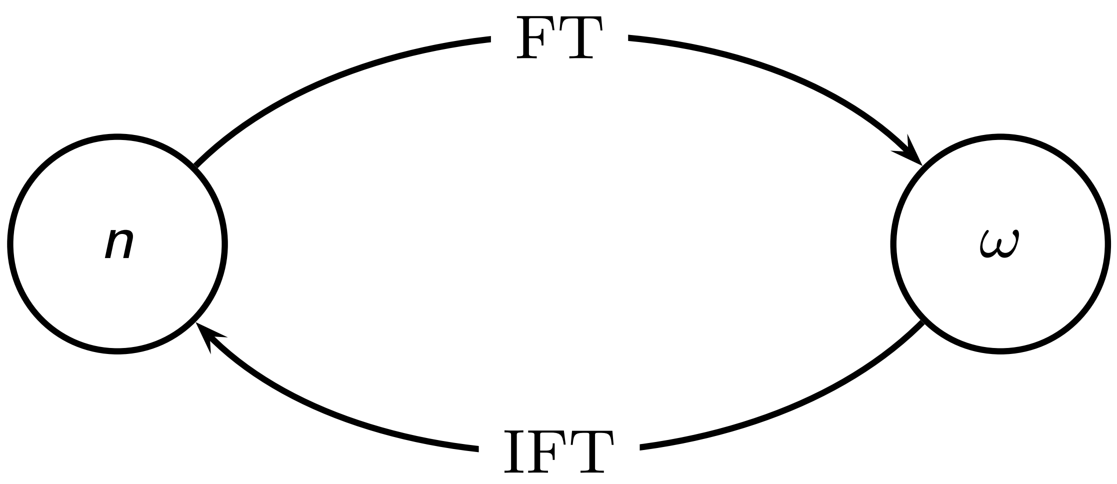
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

Năm học 2017 - 2018

Outline

Biến đổi Fourier

$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$



$$x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) = \text{FT}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$X(\omega)$ phổ của tín hiệu $x(n)$

- Tuần hoàn với chu kỳ 2π
- Phổ biên độ: $|X(e^{j\omega})|$, và phổ pha: $\arg\{X(e^{j\omega})\}$.
- Biến đổi ngược:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} x(n) = \text{IFT}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Các ví dụ về FT

$X(\omega) = 1 \quad , \quad |\,| = 1, \ \arg = 0$

1. Tìm $X(e^{j\omega})$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ của các dãy sau đây:

   $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2) e^{-j\omega n} = e^{-j.\omega.2}$

   $|\,| = 1$

   $\arg = -2\omega$

   (a) $x(n) = \delta(n)$
   (b) $x(n) = \delta(n-2)$
   (c) $x(n) = \delta(n-2) - \delta(n)$
   (d) $x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$
   (e) $x(n) = (0.5)^n u(n)$
   (f) $x(n) = u(n)$

2. Xét bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số (trong một chu kỳ) như sau:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

   (a) Hãy tìm đáp ứng xung $h_{lp}(n)$ của bộ lọc này.
   (b) Giải bài toán cho trường hợp bộ lọc thông cao

$$\delta(n-2) - \delta(n) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega\cdot 2} - 1 = e^{-j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right)$$

$$= e^{-j\omega}(-2j)\sin(\omega)$$

$re^{j\varphi}$ $\quad r \in \mathbb{R}^+$

$\downarrow$

bđt

+) $\sin\omega > 0$:

$$X(\omega) = (2\sin\omega)(-j)e^{-j\omega}$$

$$= \underbrace{2\sin\omega}_{||}\cdot e^{j\overbrace{}^{}\underbrace{(-\omega - \frac{\pi}{2})}_{\arg}}$$

+) $\sin\omega < 0$:

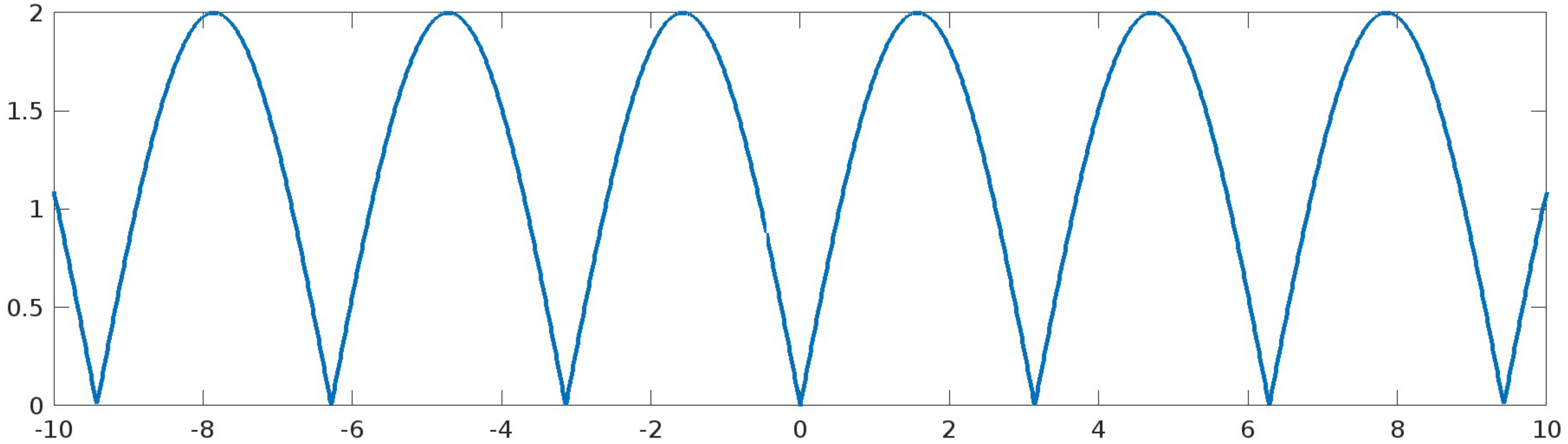
$$X(\omega) = (-2\sin\omega)\, j \cdot e^{-j\omega}$$

$$= \underbrace{(-2\sin\omega)}_{||}\, e^{j\underbrace{(-\omega + \frac{\pi}{2})}_{\arg}}$$

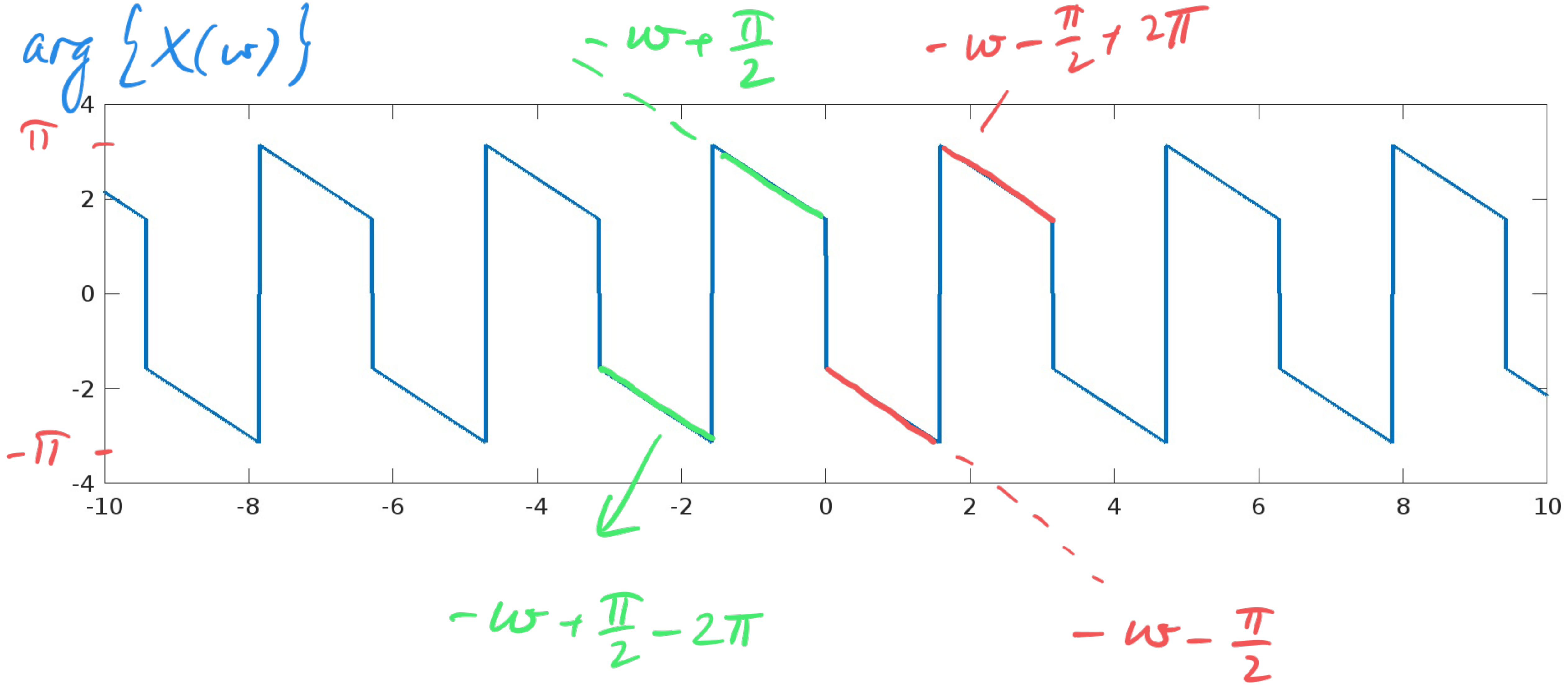
$$|X(\omega)| = 2|\sin(\omega)|$$

$$\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} -\omega - \frac{\pi}{2} & \text{khi } \sin\omega > 0 \\ -\omega + \frac{\pi}{2} & \sin\omega < 0 \end{cases}$$

$|X(\omega)|$



$\arg\{X(\omega)\}$



$$x(n) = \mathrm{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

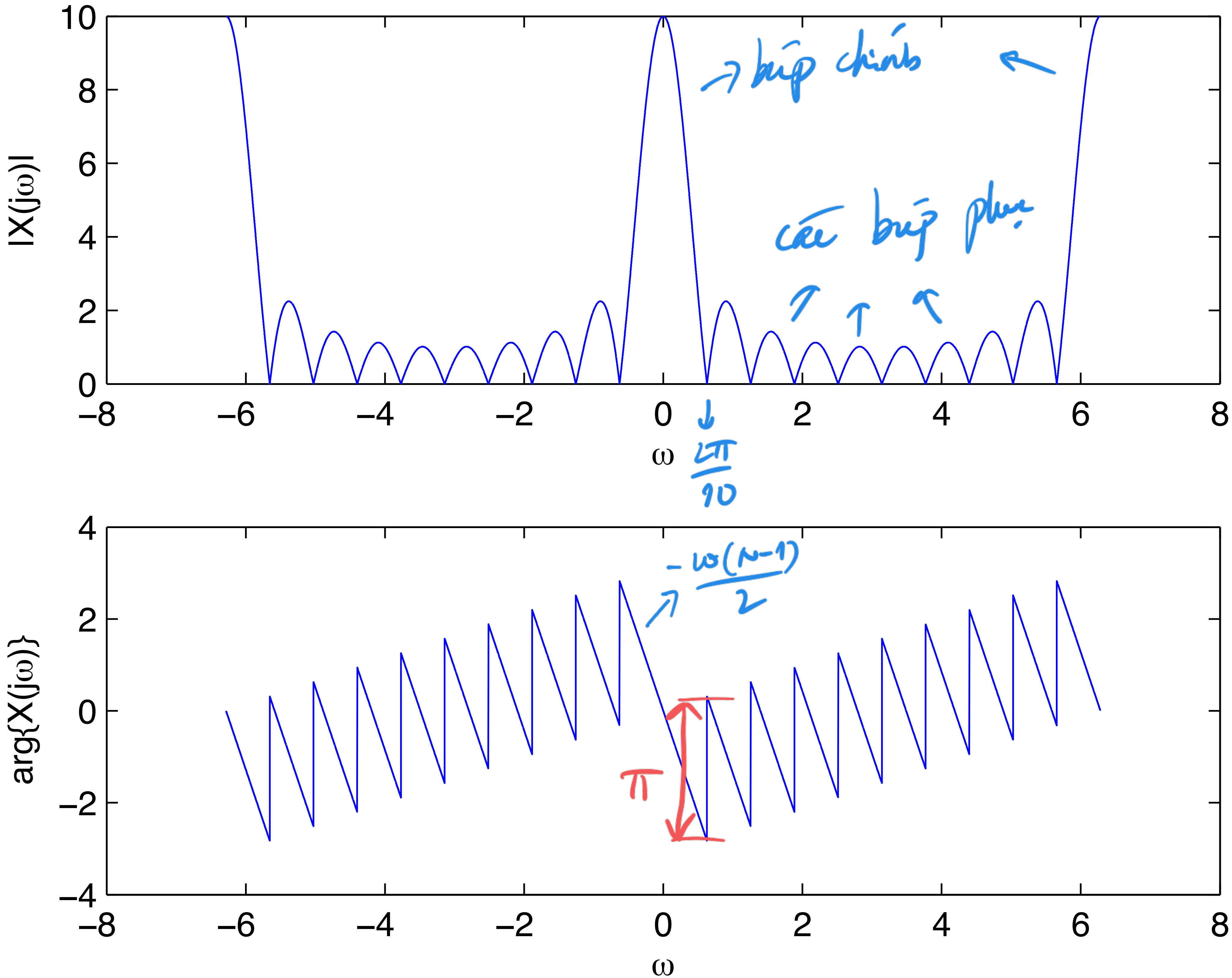
$$\rightarrow X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 . e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}} \left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} . e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}}$$

$$|X(\omega)| = \left| \frac{\sin(\;)}{\sin(\;)} \right| , \quad \arg = \begin{cases} -\frac{\omega(N-1)}{2} & \text{khi } \frac{\sin(\,)}{\sin(\,)} \ge 0 \\ -\frac{\omega(N-1)}{2} \pm \pi & \text{khi } \frac{\sin(\,)}{\sin(\,)} < 0 \end{cases}$$

Phổ biên độ và phổ pha của $\mathrm{rect}_{10}(n)$



$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xrightarrow{ZT} X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

$$X(\omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

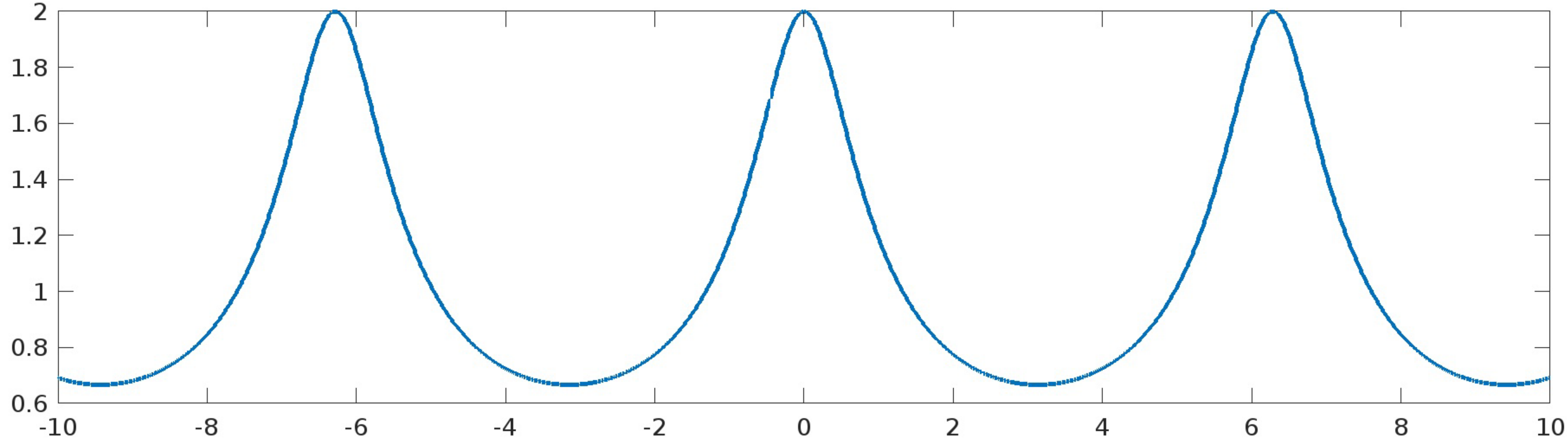
$z = e^{j\omega}$ vtđv

$$x(n) = 3^n u(n) \xrightarrow{FT} ? \quad \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$$

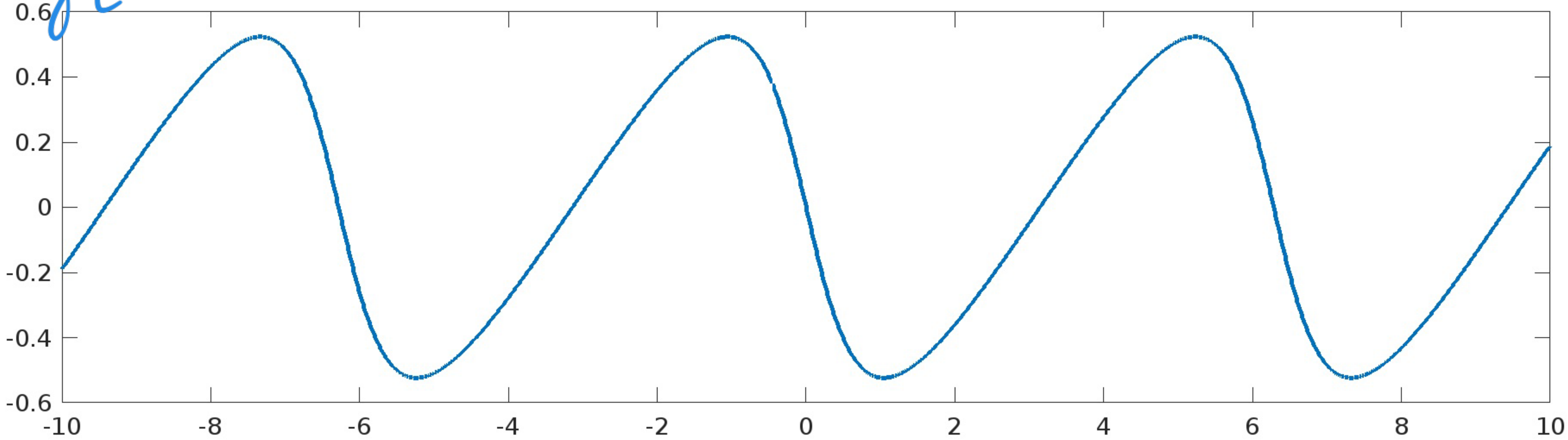
ROC$\{X(z)\}$: $|z| > 3$

$\nexists$ FT vì ROC$\{X(z)\}$ k° chứa vtđv

$|X(\omega)|$



$\arg\{X(\omega)\}$



Các tính chất

- Quan hệ với biến đổi z:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

- Điều kiện hội tụ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

  Một hệ thống LTI có đáp ứng tần số khi và chỉ khi nó ổn định.
- Tuyến tính, dịch thời gian, dịch tần số, chập, v.v.
- Các tính chất đối xứng
- Quan hệ Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- Định lý Wiener - Khintchine: Nếu $x(n) \in \mathbb{R}$ thì

$$\mathrm{FT}\{r_{xx}(n)\} = S_{XX}(e^{j\omega}) := |X(e^{j\omega})|^2$$

  trong đó $S_{XX}(e^{j\omega})$ là phổ mật độ năng lượng của $x(n)$.

$H(\omega)$ – tuần hoàn 2π

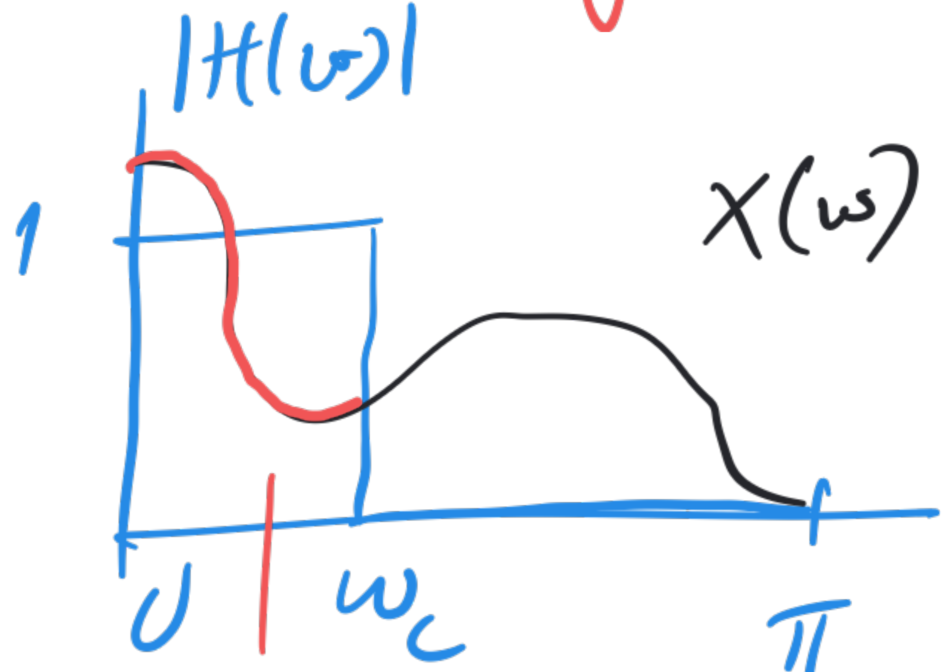
– đx (khi $h(n) \in \mathbb{R}$)

$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$

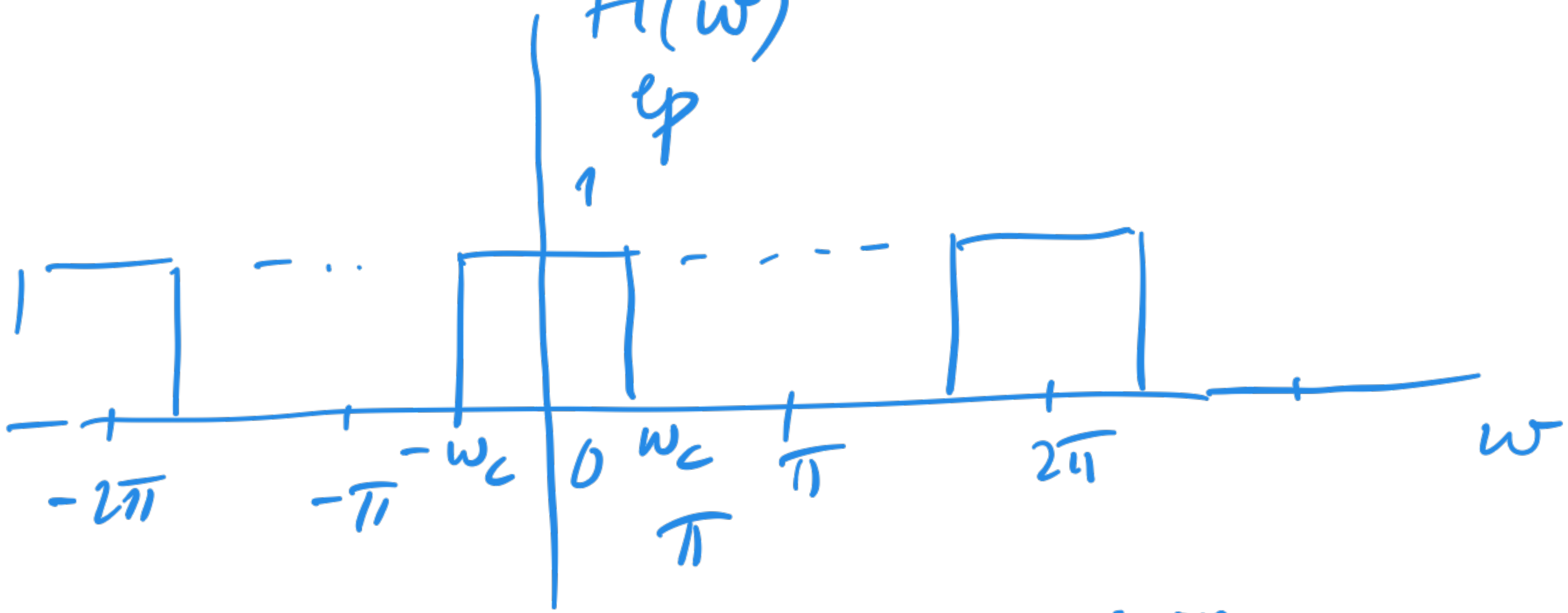
$$X(\omega) \cdot \underbrace{H(\omega)}_{\text{đáp ứng tần số}} = Y(\omega)$$

đáp ứng tần số:
- $|H(\omega)|$!!!
- $\arg\{H(\omega)\}$

Bộ lọc:
- LP
- HP
- BP
- BS



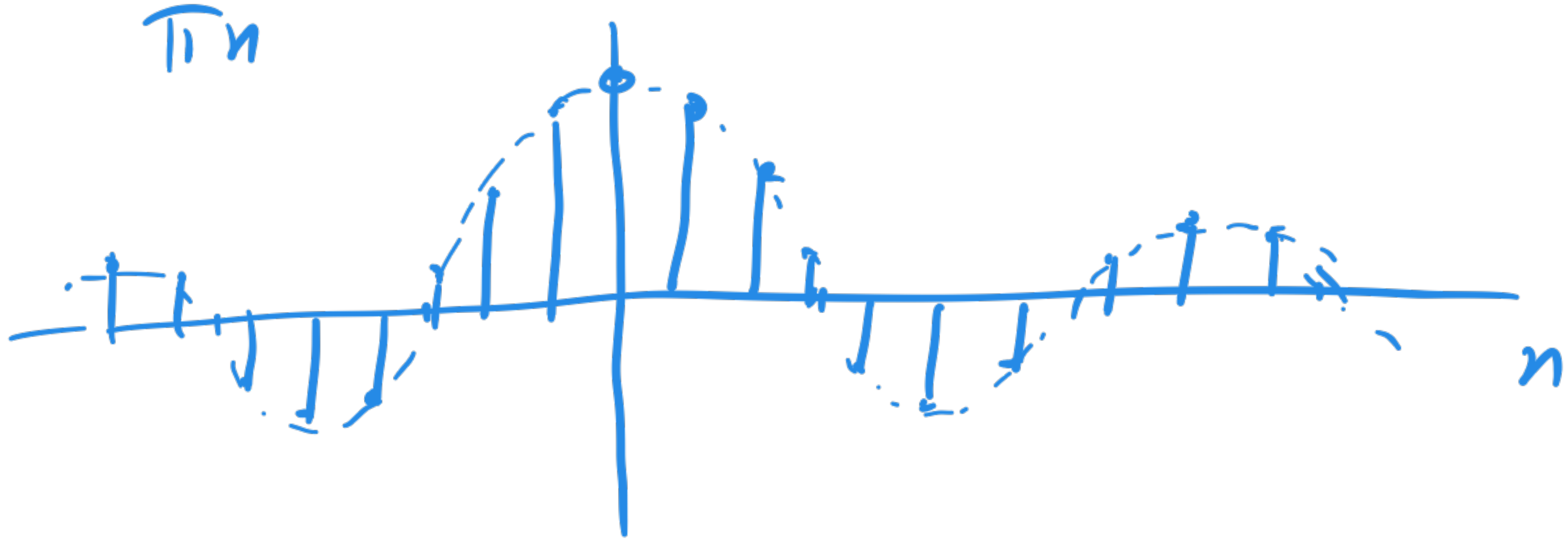
thông thấp

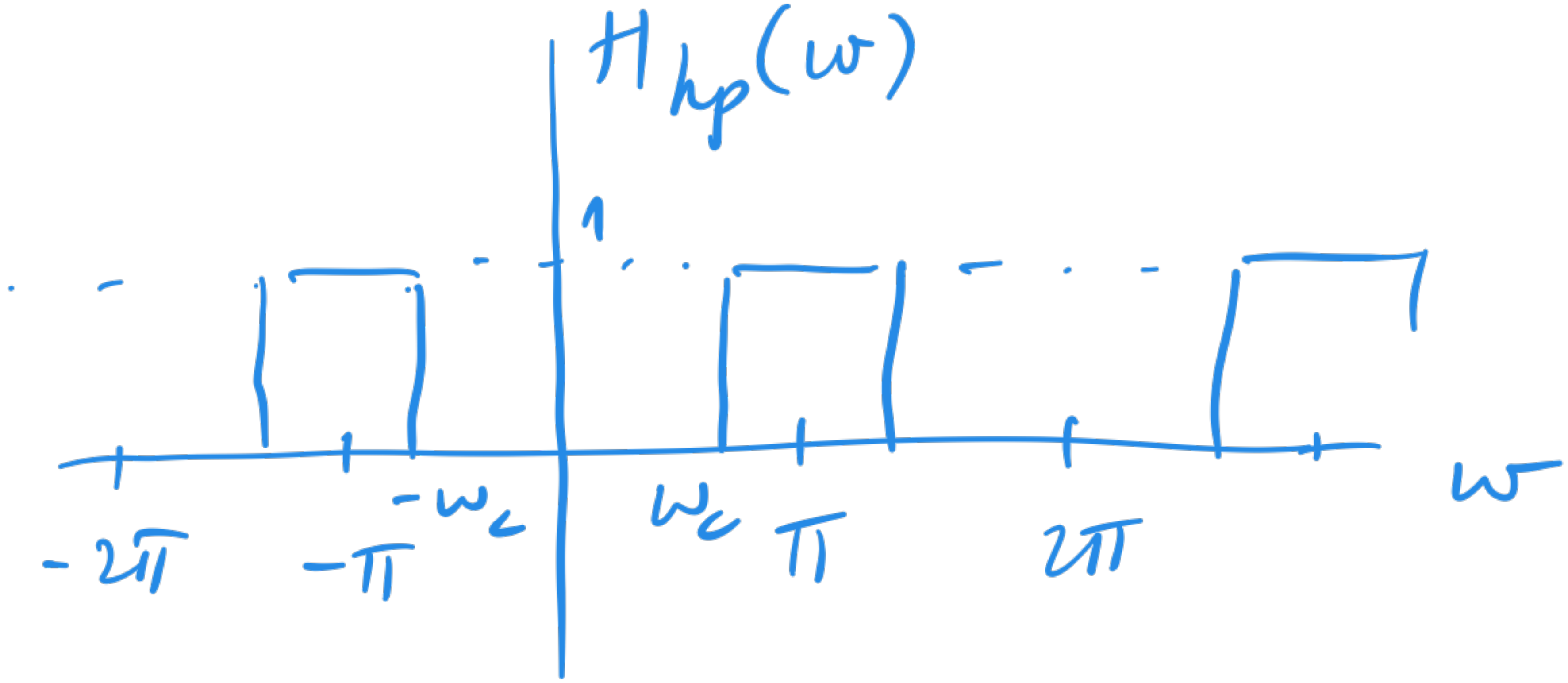


$$h_{lp}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(w)\cdot e^{jwn}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jwn}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\left(e^{jw_c n} - e^{-jw_c n}\right)$$

$$= \frac{\sin(w_c n)}{\pi n} \qquad (\text{sinc})$$





$$H_{hp}(\omega) = 1 - H_{lp}(\omega)$$

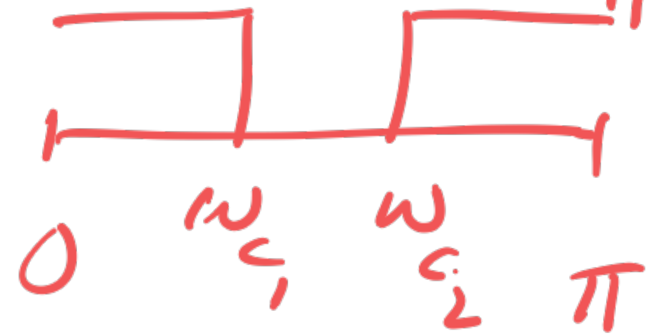
$$\Big\downarrow FT^{-1}$$

$$h_{hp}(n) = \delta(n) - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

BP - thông dải

BS - chắn dải

$h(n)$?



Outline

Biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier rời rạc cho dãy tuần hoàn (DFS, DFT cho dãy tuần hoàn)

Biến đổi Fourier rời rạc

Khái niệm dãy tuần hoàn

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n - N), \quad \forall n$$

tuần hoàn

- Chu kỳ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow$ ký hiệu $\tilde{x}(n)_N$. chu kỳ
- Tồn tại khai triển Fourier
- Khác hệ số N so với khái niệm chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn trong môn Tín hiệu và hệ thống!

Định nghĩa cặp chuỗi Fourier rời rạc cho dãy tuần hoàn

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Tín hiệu & hệ thống

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.
- Biên độ và pha: $|\tilde{X}(k)|$, $\arg\{\tilde{X}(k)\}$.

Ví dụ: Cho dãy xung chữ nhật tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ với chu kỳ N:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & \ell N \leq n \leq \ell N + M - 1, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq M \leq N \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{X}(k), |\tilde{X}(k)|, \arg\{\tilde{X}(k)\}$.

$$\tilde{x}(n)_2 = \{\ldots, \underset{\uparrow}{2}, -1, 2, -1, \ldots\}$$

$$\tilde{X}(k)_2 = DFS\{\tilde{x}(n)\} \quad ?$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{2} \cdot k \cdot n}$$

$$= \left(2 \cdot e^{0} + (-1) \cdot e^{-j\pi \cdot k \cdot 1}\right)$$

$$\tilde{X}(0) = 2 - 1 = 1$$

$$\tilde{X}(1) = 2 - e^{-j\pi \cdot 1} = 3$$

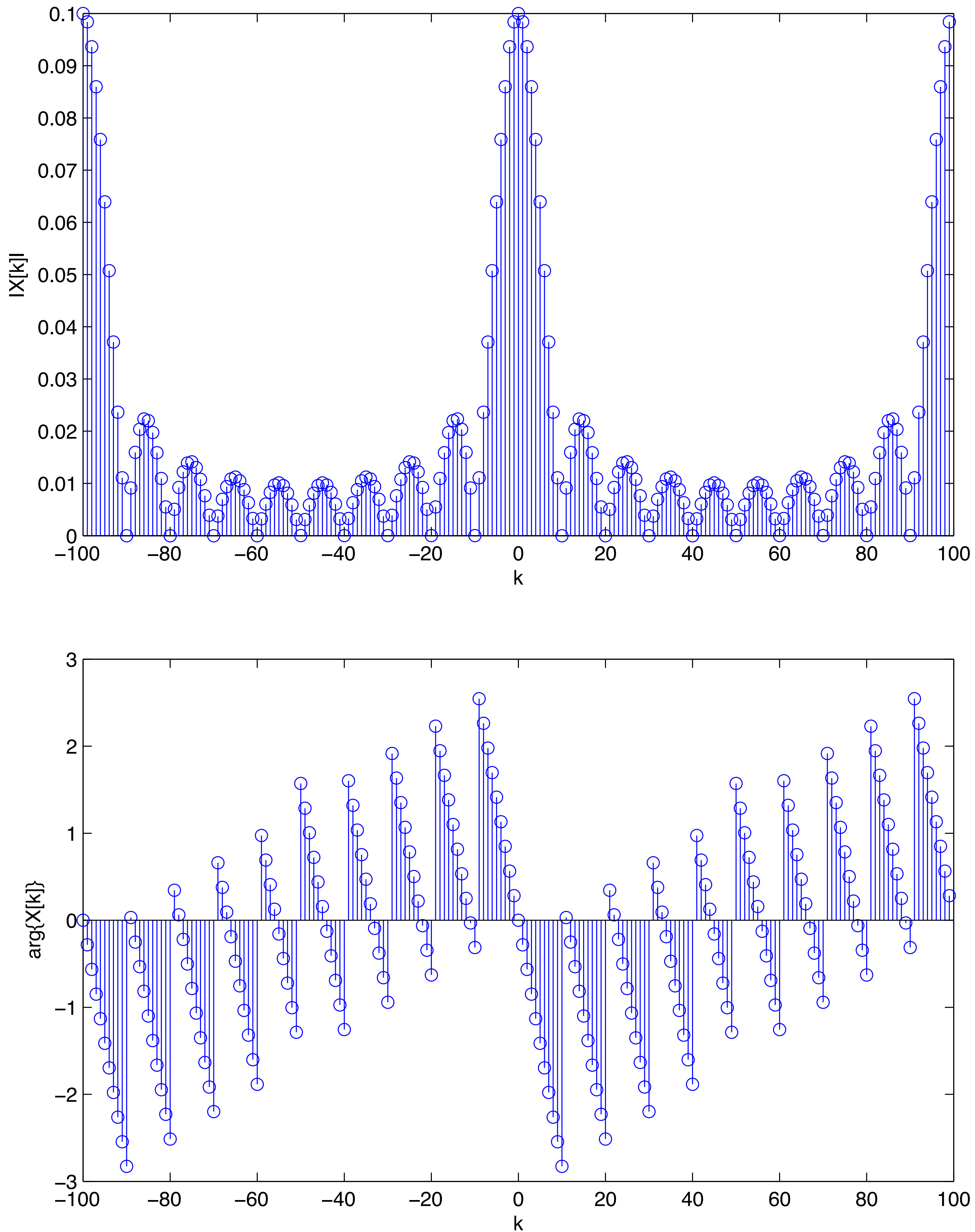
$$\tilde{X}(k) = \{\ldots, \underset{\uparrow}{1}, 3, 1, 3, \ldots\}$$

<u>例</u>

$$\tilde{x}(n)_4 = \{\cdots, \underset{\uparrow}{2}, 0, -j, 4, 2, 0, -j, \cdots\}$$

$$\tilde{X}(k)_4 \ ?$$

Khi $N = 100, M = 10$



Các tính chất

- Tuyến tính, dịch thời gian, dịch tần số
- Đối ngẫu: Nếu

$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

thì

$$\tilde{X}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}(-k)$$

- Các tính chất đối xứng

Chập tuần hoàn

$\tilde{x}_1(n)_{N} \quad \tilde{(*)}_N \quad \rightarrow \quad \tilde{x}_3(n)_{N}$

$\tilde{x}_2(n)_{N}$

$$\tilde{x}_1(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1(k)$$

$$\tilde{x}_2(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_2(k)$$

Nếu $\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$

$\longrightarrow$ Chập tuần hoàn:

$$\tilde{x}_3(n)_N = \tilde{x}_1(n)(\tilde{*})_N\tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

Chập tuyến tính | $x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, x_2(n-m)$

Các bước tính chập tuần hoàn

Tìm $\tilde{x}_3(n_0)$, $\forall n_0 \in [0,(N-1)]$

(1) Lấy đối xứng $\tilde{x}_2(m) \to \tilde{x}_2(-m)$

(2) Dịch theo trục thời gian đi n_0 mẫu

(3) Nhân: $\tilde{v}_{n_0}(m) = \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n_0-m)$ trong đoạn $[0,(N-1)]$

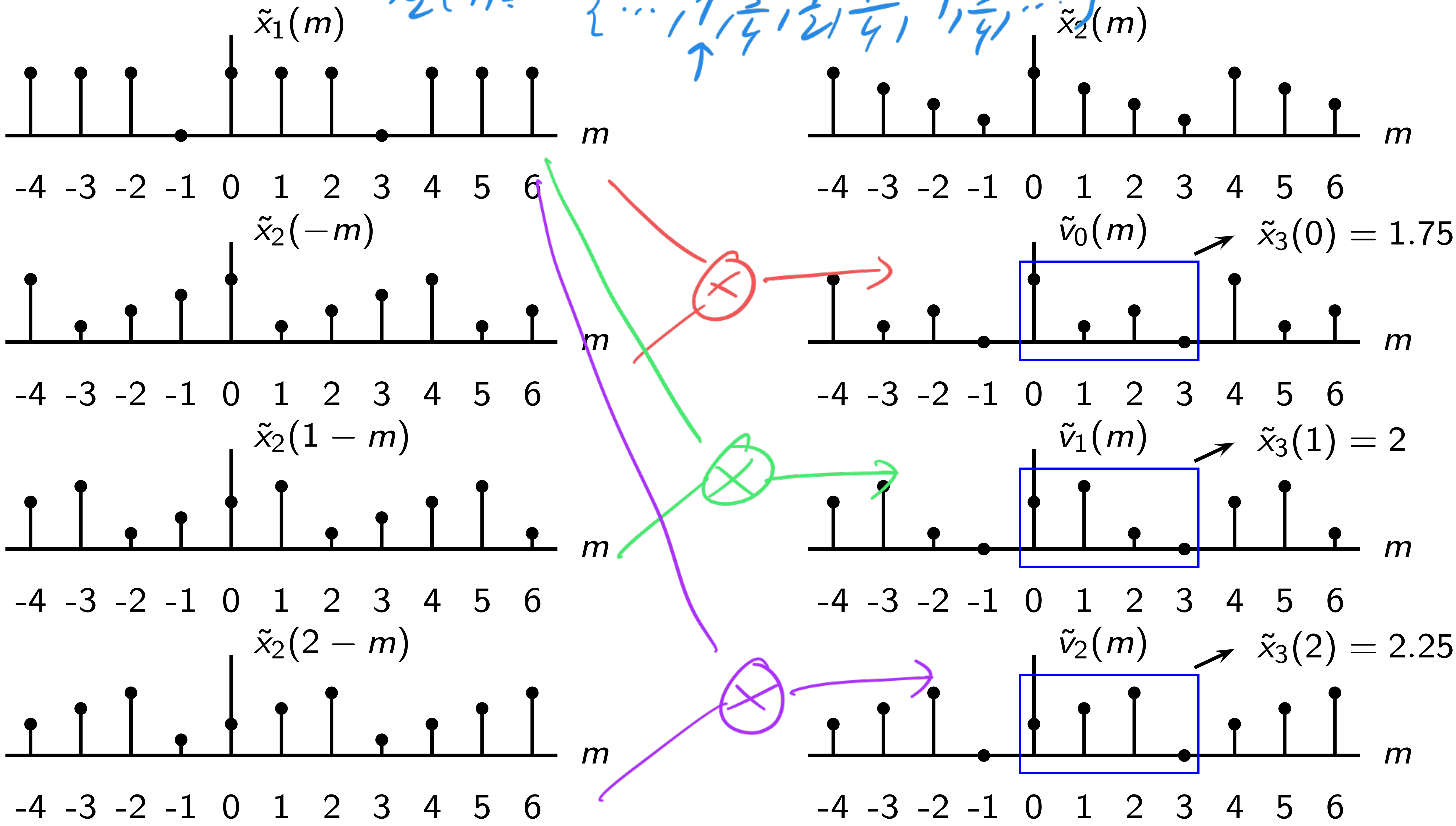
(4) Tính tổng: Cộng tất cả thành phần khác không của $\tilde{v}_{n_0}(m)$ trong đoạn $[0,(N-1)] \to \tilde{x}_3(n_0)$

(5) Kết quả là một dãy tuần hoàn với chu kỳ N: $\tilde{x}_3(n_0) = \tilde{x}_3(n_0+rn), \quad \forall r \in \mathbb{Z}$.

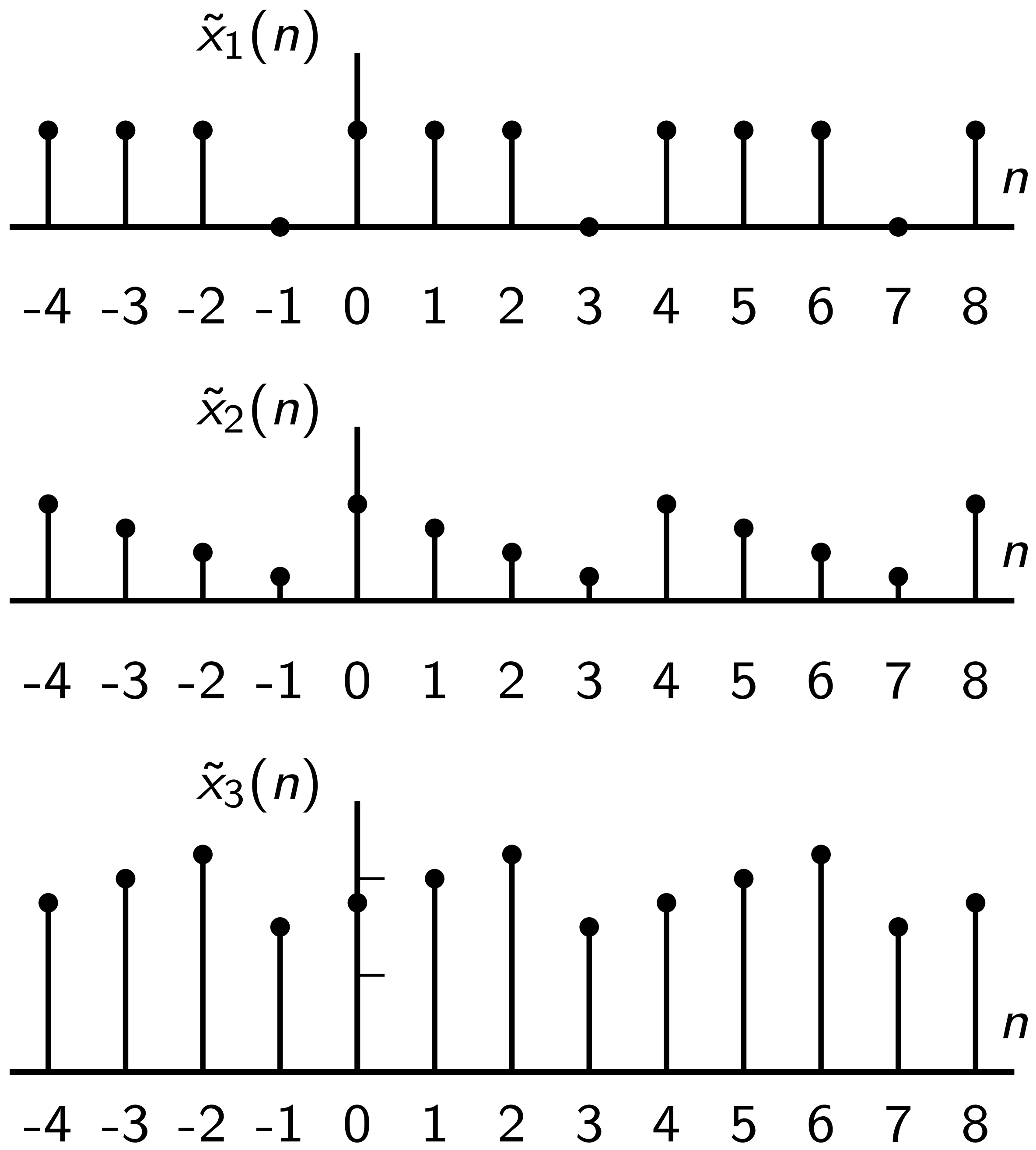
Minh họa các bước tính phép chập tuần hoàn

$\tilde{x}_1(n)_4 = \{\dots, 1, 1, 1, 0, 1, 1, \dots\}$

$\tilde{x}_2(n) = \{\dots, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}, \dots\}$



Kết quả phép chập tuần hoàn



$$\tilde{x}_1(n)_4 = \{\ldots, \underset{\uparrow}{2}, -1, 0, 3, 2, -1, \ldots\}$$

$$\tilde{x}_2(n)_4 = \{\ldots, \underset{\uparrow}{4}, 0, -3, 1, 4, 0, \ldots\}$$

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \; \tilde{\circledast}_4 \; \tilde{x}_2(n) \; ?$$

Bài tập

1. Viết chương trình Matlab để vẽ phổ biên độ và phổ pha của một dãy có chiều dài hữu hạn bất kỳ
2. Sử dụng hàm `freqz` trong Matlab để vẽ đáp ứng tần số của một hệ thống LTI từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.
3. *Lấy mẫu tần số*. Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn L với phổ $X(e^{j\omega})$ (chu kỳ 2π). Để biểu diễn phổ tín hiệu, người ta lấy các mẫu tại tần số $\omega = k\frac{2\pi}{N}$ để thu được $X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$ với chu kỳ lấy mẫu $\frac{2\pi}{N}$. Với những giá trị nào của N thì ta có thể tái tạo lại hoàn toàn $x(n)$ từ các mẫu $X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$?

Outline

Biến đổi Fourier FT

Chuỗi Fourier rời rạc cho dãy tuần hoàn DFS

Biến đổi Fourier rời rạc DFT

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (1)

$$\begin{tikzcd} n \arrow[rr, bend left, "\mathrm{DFT}"] & & k \arrow[ll, bend left, "\mathrm{IDFT}"] \end{tikzcd}$$

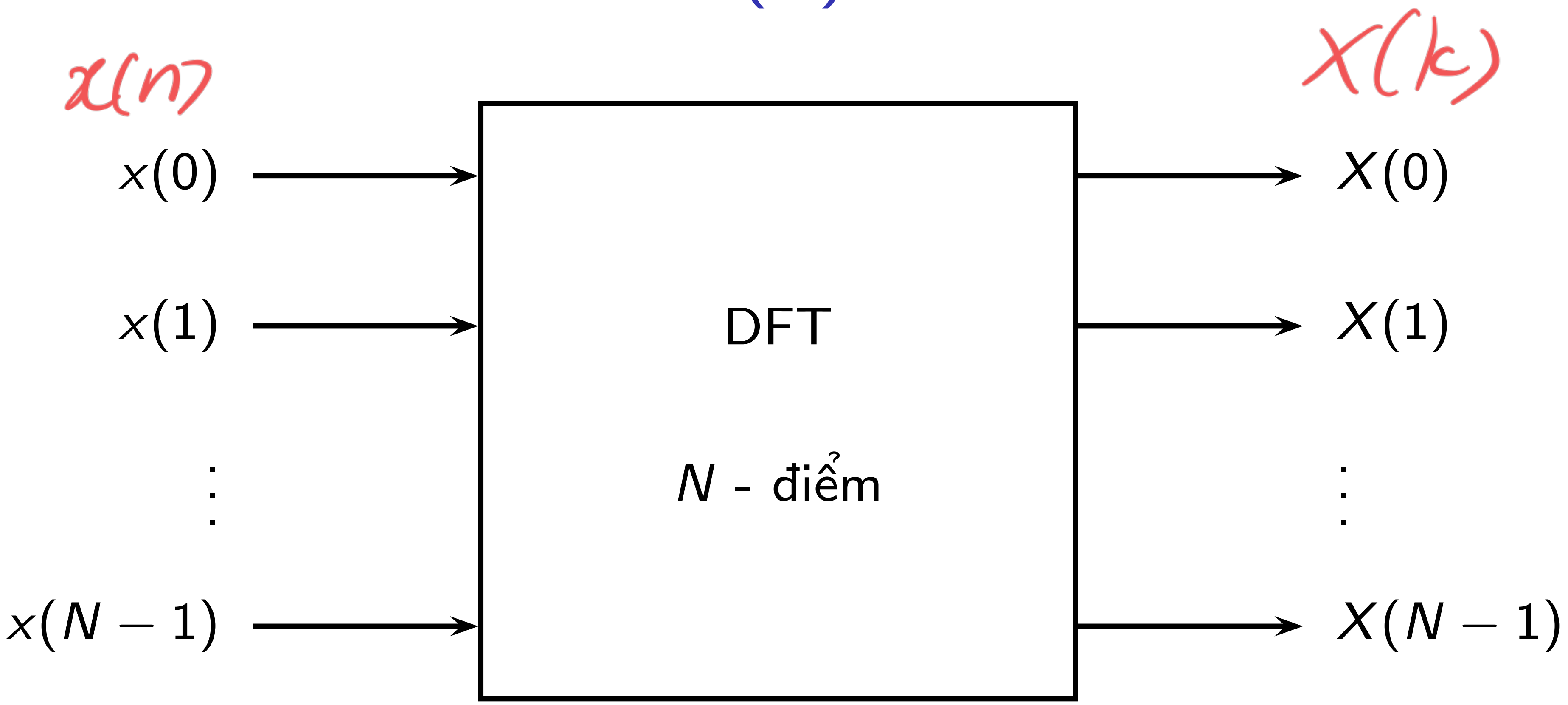
$$X(k) = \mathrm{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, \cdots, N-1$$

chiều dài hữu hạn

$$x(n) = \mathrm{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, \cdots, N-1$$

- $x(n)$ và $X(k)$ - chiều dài hữu hạn $[0, N-1]$
- Khi cần viết gọn: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
- Khi cần nhấn mạnh chiều dài hữu hạn: $x(n)_N, X(k)_N$

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (2)



Ví dụ:

1. Tìm DFT 4-điểm $(X(k), |X(k)|, \arg\{X(k)\})$ của dãy

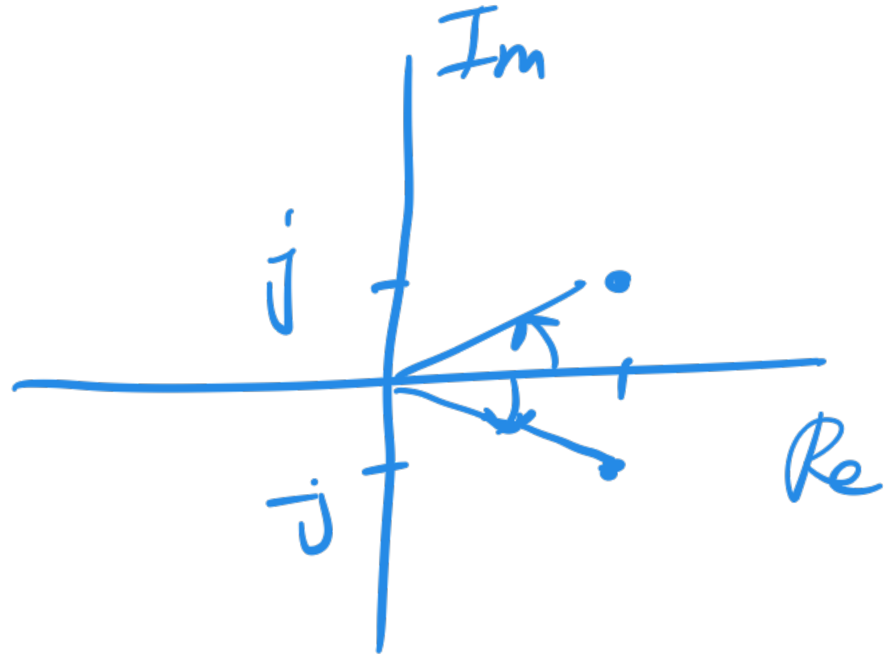
$$x(n) = \{1, j, -j, 1\}$$

2. Tìm DFT N-điểm của $x(n) = rect_M(n)$ cho các trường hợp:
   (a) $M = 1$
   (b) $M = N$
   (c) $1 < M < N$

VD $x(n)_2 = \{\underset{\uparrow}{2}, -j\}$ $(n=0)$

chiều dài hữu hạn $N=2$

$[0 \div (N-1)]$



$$X(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, (N-1)$$

$$X(k)_2 = 2.e^{0} - j.e^{-j\frac{2\pi}{2}.k.1}$$

$$X(0) = 2 - j$$

$$X(1) = 2 - je^{-j\frac{2\pi}{2}.1.1} = 2+j$$

$$X(k)_2 = \{2-j, 2+j\}$$

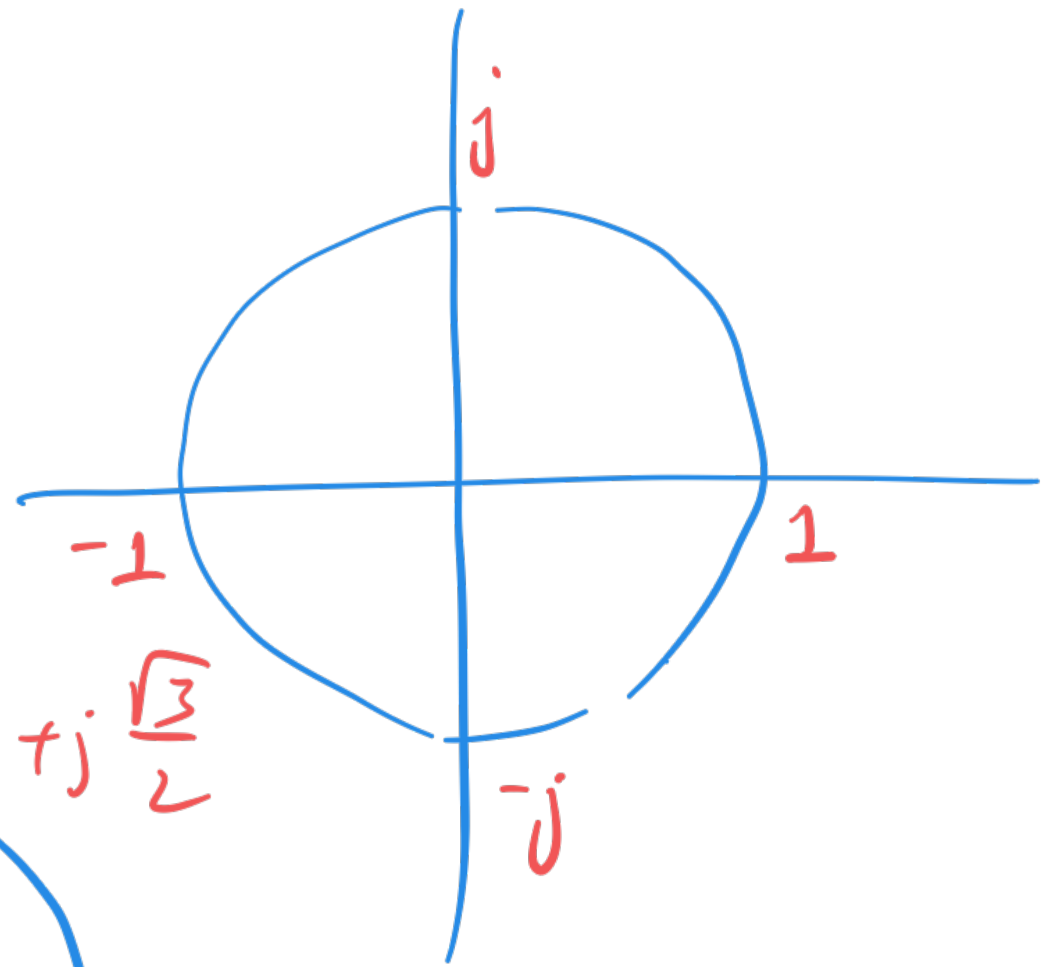
$$|X(k)| = \{\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$\arg\{X(k)\} = \{-\operatorname{atan}\tfrac{1}{2}, \operatorname{atan}\tfrac{1}{2}\}$$

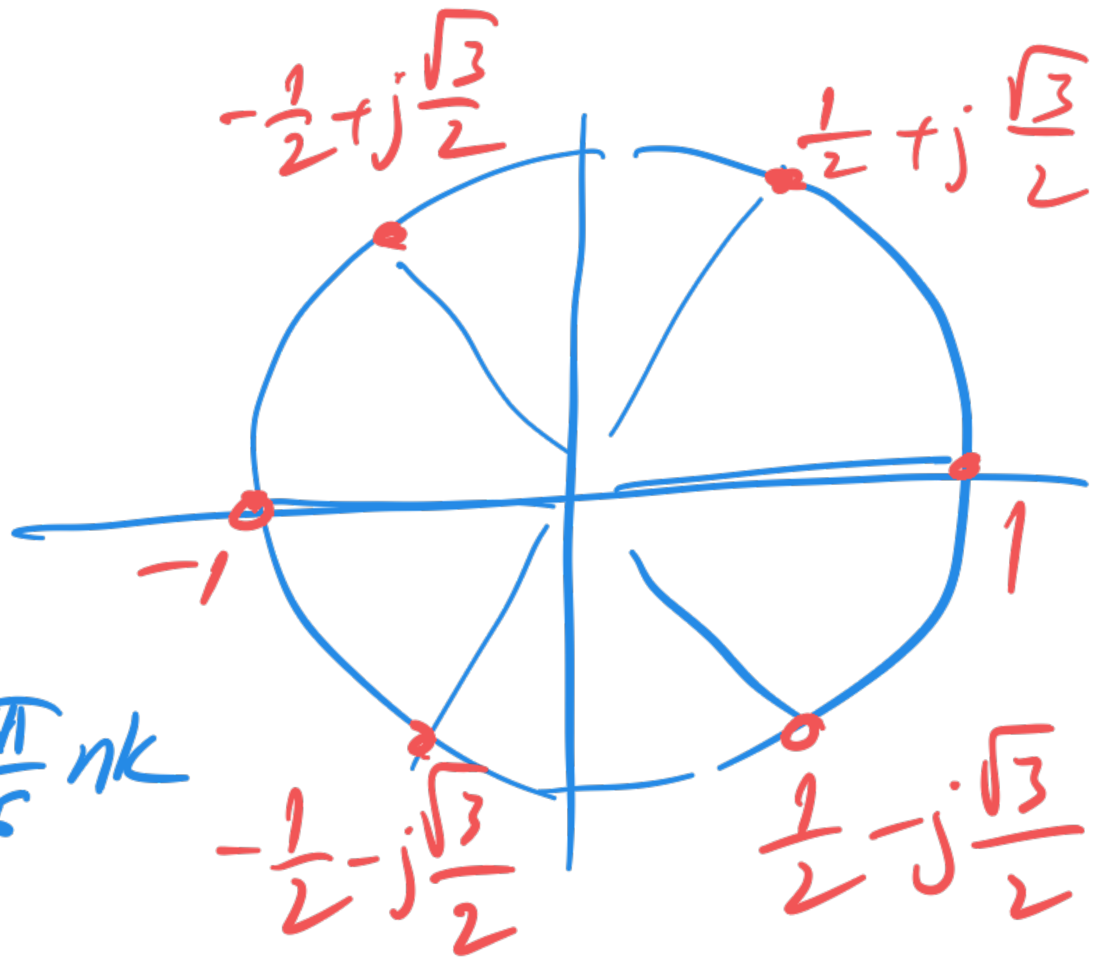
例 $x(n)_4 = \{3, -3, 0, -j\}$

$X(k)_4$, $|X(k)|$, $\arg\{X(k)\}$?

$$X(k)_4 = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}$$



$x(n)_6$



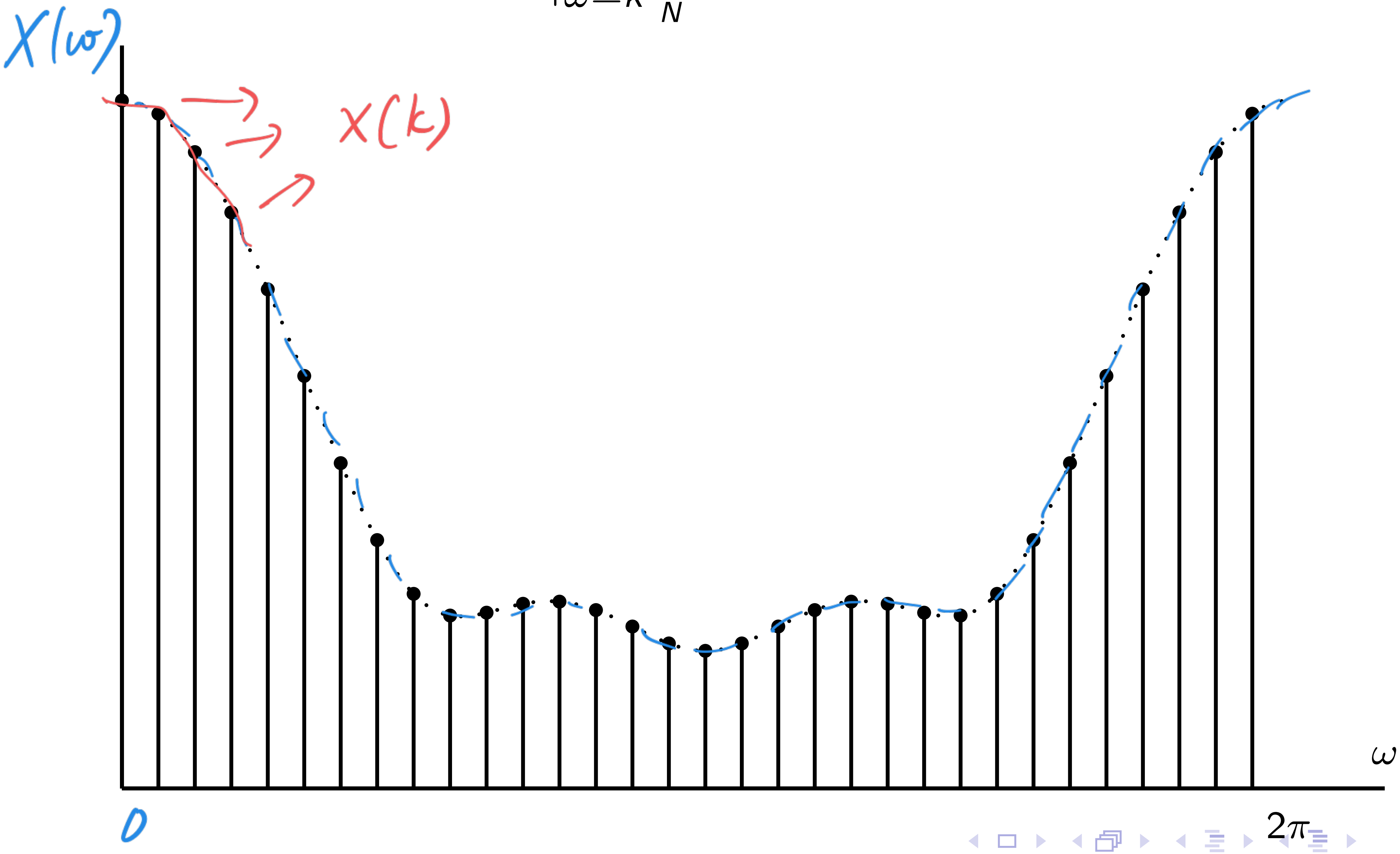
$$X(k) = \sum_{n=0}^{5} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

Mối liên hệ giữa $X(k)$ và $X(e^{j\omega})$

Xét tín hiệu $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N. Phổ $X(e^{j\omega})$ của $x(n)$ là hoàn toàn xác định nếu thực hiện lấy mẫu ít nhất N mẫu trong đoạn $[0, 2\pi]$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, \cdots, (N-1)$$



Mối liên hệ giữa $X(k)$ và $\tilde{X}(k)$

$$x(n)_N \longrightarrow \tilde{x}(n)_N \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)_N \xrightarrow[0-(N-1)]{\text{trích 1 chu kỳ}} X(k)$$

$$\tilde{x}(n)_N \xrightarrow{\text{1 chu kỳ}} x(n)_N \xrightarrow{DFT} X(k)_N \longrightarrow \tilde{X}(k)_N$$

- Nếu tính $X(k)_N$, $x(n)_N$ từ định nghĩa của DFT và IDFT mà không hạn chế trong đoạn $[0, N-1]$ thì ta được hai dãy tuần hoàn với chu kỳ N: $\tilde{X}(k)_N$, $\tilde{x}(n)_N$.

$$\tilde{X}(k)_N = X(k \bmod N)$$

- Nếu trích một chu kỳ của các dãy $\tilde{X}(k)_N$, $\tilde{x}(n)_N$ thì ta được $X(k)_N$, $x(n)_N$

$$X(k)_N = \tilde{X}(k) \cdot \mathrm{rect}_N(n) = \begin{cases} \tilde{X}(k), & 0 \le k \le (N-1) \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Biểu diễn DFT và IDFT dưới dạng ma trận

Xét ma trận $\mathbf{W}_{N\times N}$ trong đó $W_{kn} = W_N^{kn}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{(N-1)2} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

và

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X(0), X(1), \cdots, X(N-1)]^T \\ \mathbf{x} &= [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]^T \end{aligned}$$

DFT và IDFT có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{Wx} \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{W_N} \qquad k = \overline{0, (N-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn}$$

$$X_k = W \cdot x_n$$

$$x_n = W^{-1} \cdot X_k$$

$$= \frac{1}{N} W^H \cdot X_k$$

$$X(0) = x(0) \cdot W_N^{0.0} + x(1)\, W_N^{0.1} + \dots + x(N-1)\, W_N^{0.(N-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} W_N^{0.0} & W_N^{0.1} & \dots & W_N^{0(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X(1) = \begin{bmatrix} W_N^{1.0} & W_N^{1.1} & \dots & W_N^{1(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0.0} & W_N^{0.1} & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ W_N^{1.0} & W_N^{1.1} & \dots & W_N^{1(N-1)} \\ \vdots & & & \\ W_N^{(N-1)0} & W_N^{(N-1)1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X_k = W \, x_n$$

$$x_n = W^{-1} . X_k$$

$$= \frac{1}{N} W^{H} . X_k$$

$\downarrow$

chuyển vị Hermit

VD

$$A = \begin{bmatrix} 2-j & 3+2j \\ -1-j & -4-j \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2-j & -1-j \\ 3+2j & -4-j \end{bmatrix}$$

$$A^H = \begin{bmatrix} 2+j & -1+j \\ 3-2j & -4+j \end{bmatrix}$$

<u>VD</u> +) DFT 2 điểm

$$X(k) = \sum_{n=0}^{1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{2}.kn}$$

$$= x(0) + x(1).\, e^{-j\pi.k}$$

$$X(0) = x(0) + x(1)$$

$$X(1) = x(0) + (-1)\, x(1)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

$$X_k \qquad W \qquad x_n$$

+) IDFT

$$x(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{2}\left(X(0) + X(1) e^{j\pi k}\right)$$

$$x(0) = \frac{1}{2}\left(X(0) + X(1)\right)$$

$$x(1) = \frac{1}{2}\left(X(0) - X(1)\right)$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{2} W^H . X_k$$

DFT 4 điểm

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} W_4^{0.0} & W_4^{0.1} & W_4^{0.2} & W_4^{0.3} \\ W_4^{1.0} & W_4^{1.1} & W_4^{1.2} & W_4^{1.3} \\ W_4^{2.0} & W_4^{2.1} & W_4^{2.2} & W_4^{2.3} \\ W_4^{3.0} & W_4^{3.1} & W_4^{3.2} & W_4^{3.3} \end{bmatrix} x_n$$

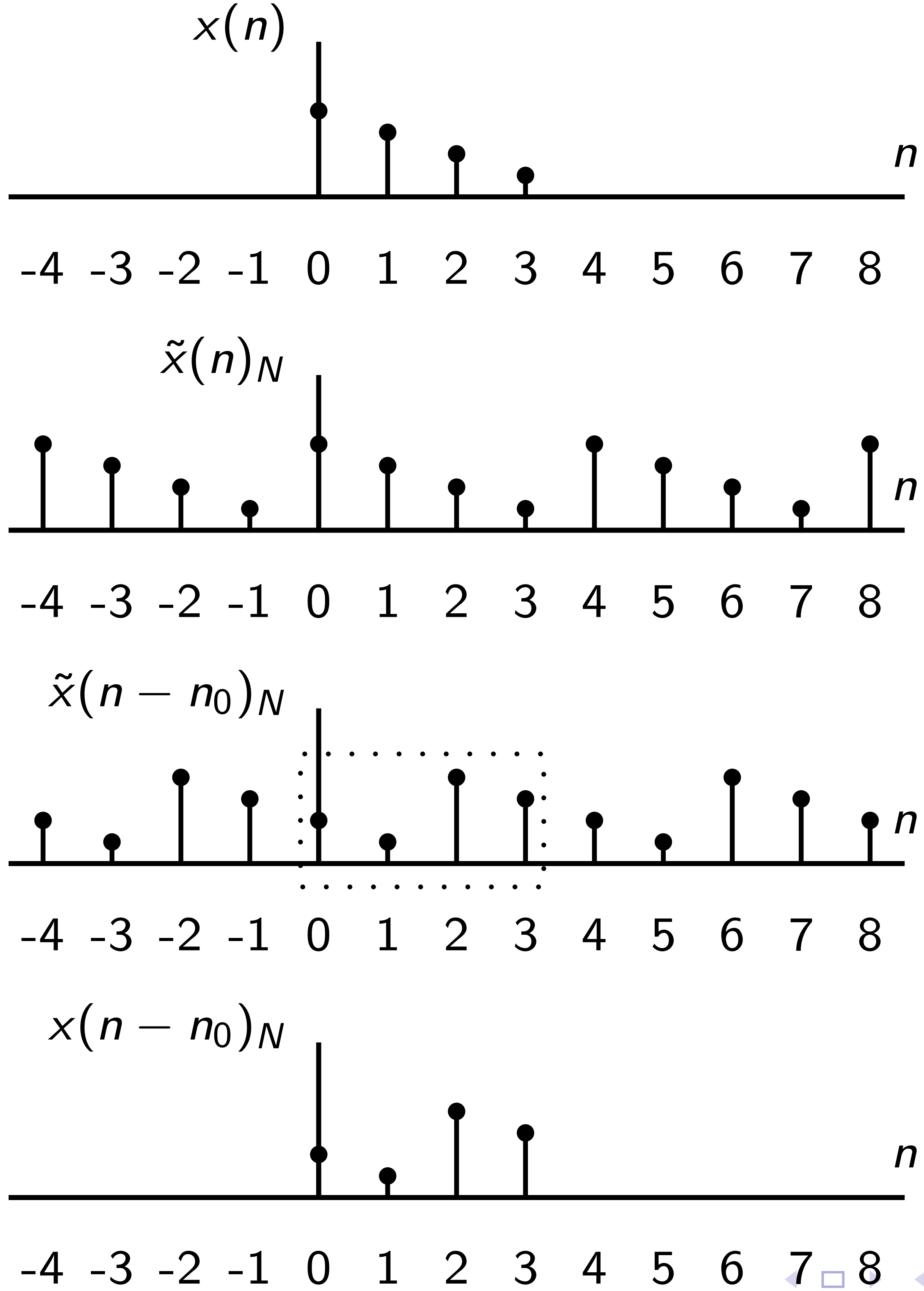
IDFT

$$x(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$x_n = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^{-0.0} & W_4^{-0.1} & W_4^{-0.2} & W_4^{-0.3} \\ W_4^{-1.0} & W_4^{-1.1} & W_4^{-1.2} & W_4^{-1.3} \\ W_4^{-2.0} & W_4^{-2.1} & W_4^{-2.2} & W_4^{-2.3} \\ W_4^{-3.0} & W_4^{-3.1} & W_4^{-3.2} & W_4^{-3.3} \end{bmatrix} \cdot X_k$$

Dịch vòng: Một chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn sau dịch

$$x(n-n_0)_N = \tilde{x}(n-n_0)_N \cdot \mathrm{rect}_N(n)$$



$\left\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

0 (N-1)

$\left\{0, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

$x(n-1)$

$\neq x(n-1)_N$

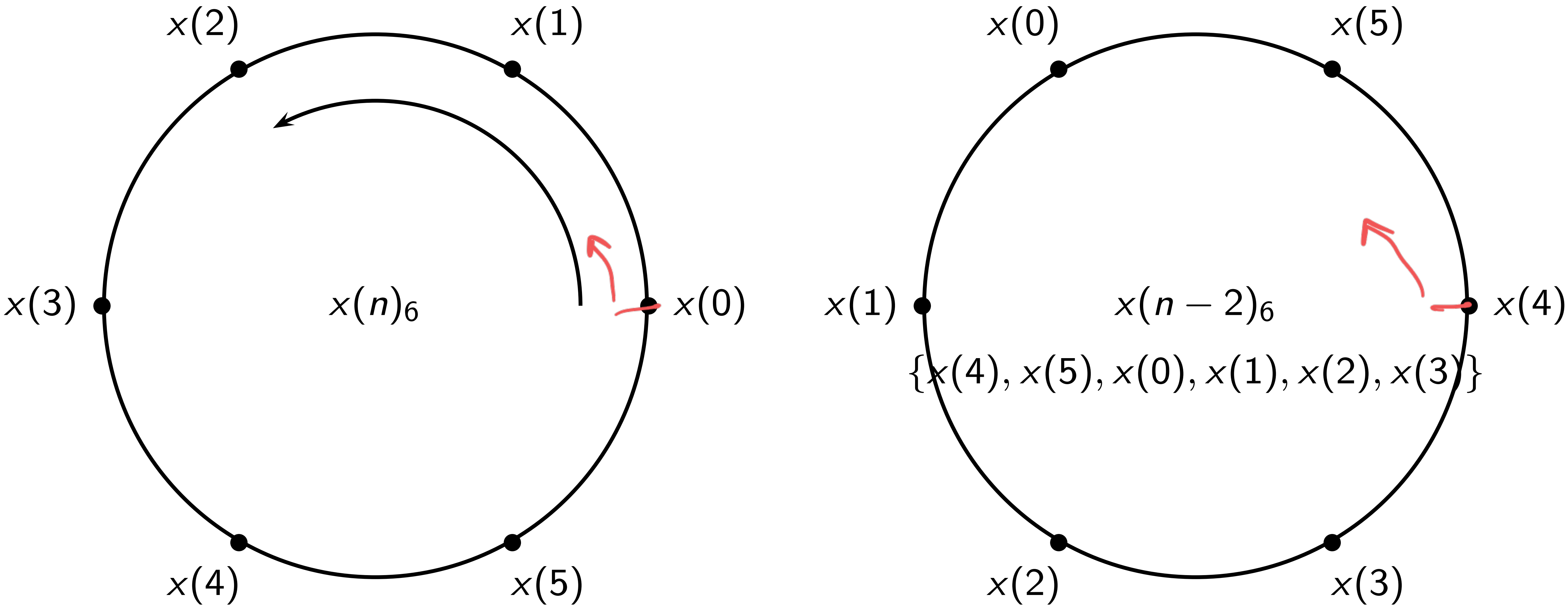
dịch vòng

$x(n-1)_4$

$= \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$

Dịch vòng: Đặt lên vòng tròn và quay quanh tâm

$(N=6)$



VD

$x(n)_7 = \{2, -7, 1, 0, 3, 4, 6\}$

$x(n-2002)_7 =$

Tính chất dịch

- Dịch thời gian

$$\mathrm{DFT}\{x(n-n_0)_N\} = e^{-j(2\pi/N)kn_0}X(k)$$

- Dịch tần số

$$\mathrm{DFT}\{e^{j(2\pi/N)k_0 n}x(n)\} = X(k-k_0)_N$$

Đảo trục thời gian (lấy đối xứng)

$$x(n)_4 = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$x(-n) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \underset{\uparrow}{1} \right\}$$

$$x(-n)_4 \;?$$

Nếu

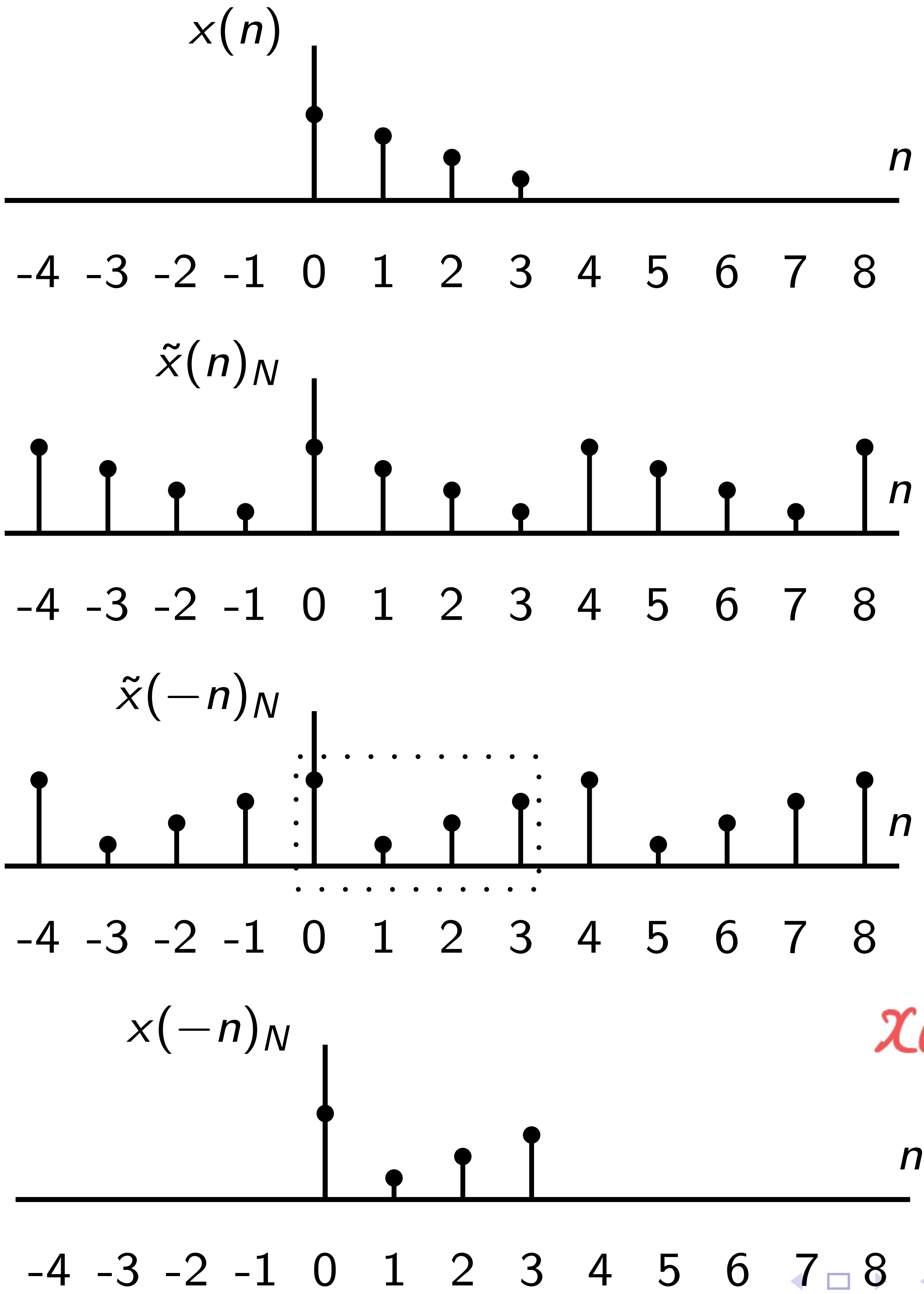
$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k)$$

thì

$$\mathrm{DFT}\{x(-n)_N\} = X(-k)_N$$

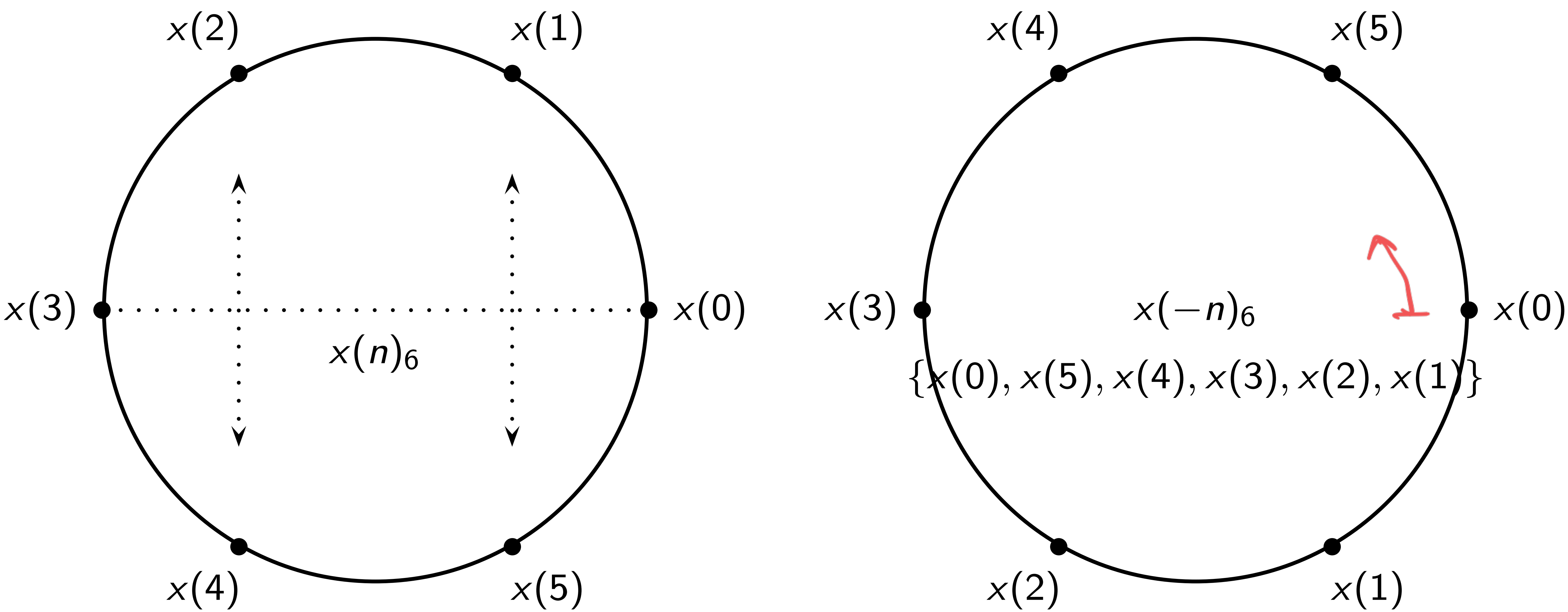
Lấy đối xứng cho dãy có chiều dài hữu hạn (1)

$$x(-n)_N = \tilde{x}(-n)_n \cdot \mathrm{rect}_N(n)$$



$x(-n)_4 = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Lấy đối xứng cho dãy có chiều dài hữu hạn (1)



$$x(-n)_N = \{x(0), x(N-1), x(N-2), \dots, x(1)\}$$

giữ nguyên ngược

VD

$$x(n)_7 = \{2, -7, 9, 0, 3, -2, 5\}$$

$$x(-n)_7 = \{2, 5, -2, 3, 0, 9, -7\}$$

Đối ngẫu

VD $x(n) = \{2, 3-j, 4+2j, 5\}$

$X(k) = DFT\{x(n)\}$

$DFT\{X(k)\}$? $= 4.\{2, 5, 4+2j, 3-j\}$

Nếu

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k)$$

thì

$$\mathrm{DFT}\{X(n)\} = Nx(-k)_N$$

Lưu ý: $x(-k)_N = ?$

Các tính chất đối xứng

(a) $\mathrm{DFT}\{x^*(n)\} = X^*(-k)_N$

(b) $\mathrm{DFT}\{x^*(-n)_N\} = X^*(k)$

(c) $\mathrm{DFT}\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(-k)_N]$

(d) $\mathrm{DFT}\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)_N]\} = \mathrm{Re}[X(k)]$

(e) Nếu $x(n) \in \mathbb{R}$ $\quad x(n) = x^*(n)$

- $X(k) = X^*(-k)_N = X^*(N-k)$
- $\mathrm{Re}[X(k)] = \mathrm{Re}[X(\cancel{N} - k)]_N$
- $\mathrm{Im}[X(k)] = -\mathrm{Im}[X(\cancel{N} - k)]_N$
- $|X(k)| = |X(\cancel{N} - k)|_N$
- $\arg\{X(k)\} = -\arg\{X(\cancel{N} - k)\}_N$

$$x(n)_5 = \{2-j,\ 3+2j,\ 0,\ 1,\ -4-3j\}$$

$$X(k)_5 = \mathrm{DFT}\{x(n)\}$$

$$X_1(k) = \mathrm{Re}\{X(k)_5\}$$

$$\mathrm{IDFT}\{X_1(k)\}\ ?$$

$$X(k)_5 = \{3-j,\ 0,\ -1-2j,\ 2,\ 7\}$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}\{X(k)\}$$

$$x_1(n) = \mathrm{Re}\{x(n)\}$$

$$\mathrm{DFT}\{x_1(n)\}\ ?$$

$x(n) \longrightarrow X(k)$ $\quad \{3-j,\ 0,\ -1-2j,\ 2,\ 7\}$

$x^*(n) \longrightarrow X^*(-k)_N$

$X(-k) = \{3-j,\ 7,\ 2,\ -1-2j,\ 0\}$

$X^*(-k) = \{3+j,\ 7,\ 2,\ -1+2j,\ 0\}$

$$Re\{x(n)\} = \frac{1}{2}\left(x(n) + x^*(n)\right)$$

$\downarrow$ DFT

$$\frac{1}{2}\left(X(k) + X^*(-k)_N\right) = \left\{3,\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}-j,\ \frac{1}{2}+j,\ \frac{7}{2}\right\}$$

$$Re\{X(k)\} = \frac{1}{2}\left(X(k) + X^*(k)\right)$$

$$\Big\downarrow \text{IDFT}$$

$$\frac{1}{2}\left(x(n) + x^*(-n)\right)$$

$$\{2+j,\ 3+2j,\ 0,\ 1,\ -4-3j\}$$

$$\{2+j,\ -4+3j,\ 1,\ 0,\ 3-2j\}$$

$$\{2,\ -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}j,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}-\frac{5}{2}j\}$$

vD

$$X(k)_4 = \{3-2j,\ 0,\ 1,\ 4\}$$

$$x(n)_4 = \{a,\ b,\ c,\ d\}$$

$$x(n)_8 = \{a,\ b,\ c,\ d,\ a,\ b,\ c,\ d\}$$

$$X(k)_8 = \sum_{n=0}^{7} x(n)_8\, e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$= a + b e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot k\cdot 1} + c\, e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 2} + d e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 3}$$

$$+ a e^{-j\frac{2\pi}{8}k 4} + b e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 5} + c e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 6} + d\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 7}$$

$$c\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot k\cdot 2}\left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 4}\right) = \begin{cases} 2e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot k\cdot 2} & k \text{ chẵn} \\ 0 & k \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$X(k)_8 = \begin{cases} 2\left(a + b e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 2k'\cdot 1} + c\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}2k'\cdot 2} + d e^{-j\frac{2\pi}{8}2k'\cdot 3}\right) & k = 2k' \\ = 2X(k')_4 & \\ 0 & k \quad k' \end{cases}$$

$$= \{6-4j, 0, 0, 0, 2, 0, 8, 0\}$$

VD: $x(n)_{12} = \{a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d\}$

$X(k)_{12} = ?$

Quan hệ Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

Nếu $x(n) = y(n)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Chập vòng

Định nghĩa chập vòng:

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$ chập t^2

$$x_3(n)_N = x_1(n)(*)_N x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)_N, \quad \forall n \in [0, N-1]$$

Áp dụng DFT ta có:

$$\mathrm{DFT}\{x_1(n)(*)_N x_2(n)\} = X_1(k) X_2(k)$$

Cách tính chập vòng:

- Miền thời gian: Tính trực tiếp sử dụng khái niệm dịch vòng hoặc tính qua chập tuần hoàn.
- Miền tần số

Ví dụ: Tính chập vòng 5-điểm ($N = 5$) của hai dãy sau:

$$x_1(n) = \mathrm{rect}_4(n) + 0.5\delta(n-4)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

例 $x_1(n)_5 = \{3, 0, -1, 2, 4\}$ $\qquad x_3(n) = x_1(n) ⊛_5 x_2(n)$

$x_2(n)_5 = \{-2, 1, 0, 3, 0\}$ $\qquad = ?$

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{4} x_1(m)\, x_2(n-m)_5$$

$x_1(m)$	3	0	-1	2	4	
$x_2(-m)_5$	-2	0	3	0	1	$\to x_3(0) = 3.(-2) + 0.0 + (-1).3 + 2.0 + 4.1 = -5$
$x_2(1-m)_5$	1	-2	0	3	0	$\to x_3(1) = 3.1 + 2.3 = 9$
$x_2(2-m)$	0	1	-2	0	3	$\to x_3(2) = (-1)(-2) + 4.3 = 14$
$x_2(3-m)$	3	0	1	-2	0	$\to x_3(3) =$
$x_2(4-m)$	0	3	0	1	-2	$\to x_3(4) =$

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\, x_2(n-m)_N$$

$$= x_1(0)\, x_2(n) + x_1(1)\, x_2(n-1)_N + x_1(2)\, x_2(n-2)_N + \cdots + x_1(N-1)\, x_2(n-N+1)_N$$

$$= \begin{bmatrix} x_2(n) & x_2(n-1)_N & \cdots & x_2(n-N+1)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ \vdots \\ x_1(N-1) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{X_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_1}$$

Dạng ma trận của chập vòng

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{x}_1$$

trong đó $\mathbf{x}_3 = [x_3(0), x_3(1), \cdots, x_3(N-1)]^T$,
$\mathbf{x}_1 = [x_1(0), x_1(1), \cdots, x_1(N-1)]^T$ và $\mathbf{X}_2$ là (circulant matrix):

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & \cdots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & \cdots & x_2(0) \end{bmatrix}$$

- Dạng ma trận của chập tuyến tính $\rightarrow$ ma trận Toeplitz!
- Làm thế nào để tính chập vòng bằng Matlab?

$$
\begin{tikzcd}
x_1(n)_N \arrow[r, "DFT", "N\text{点}"'] & X_1(k)_N \arrow[dr] & & & \\
 & & \otimes \arrow[r] & X_3(k)_N \arrow[r, "IDFT"] & x_3(n)_N \\
x_2(n) \arrow[r, "DFT"] & X_2(k)_N \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Mối quan hệ giữa chập vòng và chập tuyến tính

Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn, $x(n)$: $[0 \cdots (L-1)]$ và $h(n)$: $[0 \cdots (P-1)]$. Nếu

$$y_1(n) = x(n) * h(n)$$

$(L+P-1)$

và

$$y_2(n) = x(n)(*)_N h(n)$$

N

(a) Với những giá trị nào của N thì $y_1(n) = y_2(n), \forall n$? $N \geq L+P-1$

(b) Nếu $N = L$ thì tại những thời điểm n nào ta có $y_1(n) = y_2(n)$?

(c) Nếu lấy $(P-1)$ giá trị cuối của $x(n)$ vòng lên đầu và chập tuyến tính với $h(n)$ thì sao?

OFDM

cyclic prefix

khác nhau $(P-1)$ giá trị đầu