BÀI GIẢNG MÔN XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Số tiết lý thuyết: 45

Số tiết thực hành: 15

Người soạn: Lã Thế Vinh

<u>Đề cương bài giảng:</u>

Chương 0: Mở đầu (2 tiết): Giới thiệu tổng quan về môn học xử lý tín hiệu số. Ứng dụng trong thực tế và yêu cầu môn học.

Chương 1: Tín hiệu và các hệ rời rạc (16 tiết): Tìm hiểu về các khái niệm cơ bản của môn học: tín hiệu, các hệ xử lý tín hiệu, các tính chất của hệ, các đại lượng đặc trưng của hệ xử lý tín hiệu…

Chương 2: Biến đổi Z (15 tiết): Giới thiệu phép biến đổi Z và Z ngược dùng trong phân tích và tổng hợp các hệ xử lý tín hiệu số.

Chương 3: Biểu diễn hệ XLTH và tín hiệu trong miền tần số liên tục (9 tiết): Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, đáp ứng tần số và các bộ lọc…

Chương 4: Phép biến đổi Fourier rời rạc(DFT) và phép biến đổi Fourier nhanh(FFT) (3 tiết).

MỤC LỤC

CHƯƠNG O

MỞ ĐẦU

(Tổng thời lượng: 2 tiết)

Tóm tắt bài giảng (1): Thời lượng 2 tiết

- *Giới thiệu cho sinh viên thế nào là XLTHS và ứng dụng trong thực tế*
- *So sánh giữa tín hiệu số và tín hiệu tương tự để rút ra ưu điểm nổi bật của phương pháp xử lý tín hiệu số*
- *Giới thiệu nhiệm vụ của môn học*

Ứng dụng XLTHS trong thực tế

- Khái niệm tín hiêu: Tín hiệu là biểu hiện vật lý của thông tin.
- Xử lý tín hiệu số: là xử lý bằng máy tính trong đó sử dụng các công cụ toán học, các giải thuật và kỹ thuật để can thiệp vào các tín hiệu ở dạng số nhằm mục đích
    - Khai thác các thông tin cần thiết
    - Cải thiện chất lượng
    - Nén số liệu
    - ...

Xử lý tín hiệu số được ứng dụng nhiều trong thực tế, đặc biệt là trong các lĩnh vực:

- Công nghiệp giải trí: âm nhạc(số) Mp3, Mp4, Nhạc trực tuyến...
- Xử lý ảnh: Nhận dạng ảnh, cải thiện chất lượng ảnh, nén dữ liệu ảnh(Chuẩn JPG)...

- Xử lý tiếng nói: Nhận dạng và tổng hợp tiếng nói, mã hoá tiếng nói...
- Truyền thông: Nén số liệu...

<u>Ưu điểm của tín hiệu số</u>

- Độ chính xác cao
- Sao chép trung thực nhiều lần
- Không bị ảnh hưởng của môi trường
- Cho phép giảm dung lượng lưu trữ , tăng tốc độ truyền
- Linh hoạt và mềm dẻo do xử lý bằng máy tính

<u>Nhiệm vụ môn học</u>

Giới thiệu nền tảng chung nhất áp dụng cho tất cả các lĩnh vực có ứng dụng xử lý tín hiệu số.

CHƯƠNG 1

TÍN HIỆU VÀ CÁC HỆ THỐNG RỜI RẠC

(Tổng thời lượng: 19 Tiết)

Tóm tắt bài giảng(2): Thời lượng 3 tiết

- *Định nghĩa và phân loại tín hiệu và các hệ xử lý tín hiệu*
- *Giới thiệu mô hình chung của xử lý tín hiệu số*
- *Lấy ví dụ thực tế cho mô hình đã đưa ra*
- *Định nghĩa tín hiệu rời rạc và một số tín hiệu rời rạc quan trọng*

1.1 Định nghĩa và phân loại tín hiệu, hệ xử lý tín hiệu

1.1.1 Định nghĩa tín hiệu

Tín hiệu là biểu hiện vật lý của thông tin. Về mặt toán học tín hiệu được coi là hàm của một hay nhiều biến độc lập.

Ví dụ: Tín hiệu âm thanh là sự biến thiên của áp suất theo thời gian P(t) hoặc cũng có thể coi tín hiệu âm thanh là sự biến thiên áp suất theo không gian P(x,y,z).

Quy ước: Trong môn học XLTHS chúng ta chủ yếu coi tín hiệu là hàm của biến độc lập thời gian.

1.1.2 Phân loại tín hiệu

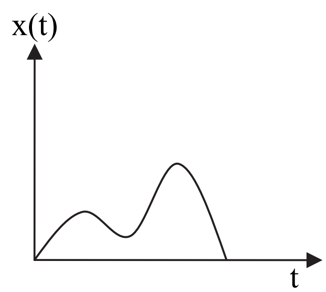
1.1.2.1 Phân loại theo biến độc lập

- Tín hiệu liên tục theo thời gian: là tín hiệu có biến thời gian liên tục (nhận mọi giá trị trong một khoảng giá trị nào đó)
- Tín hiệu rời rạc: là tín hiệu có biến độc lập thời gian chỉ nhận một số giá trị(Ví dụ: Các chỉ số thị trường chứng khoán, các số liệu khí tượng…). Nghĩa là tín hiệu có thể biểu diễn bằng một dãy số, hàm tín hiệu chỉ có giá trị xác định ở những thời điểm

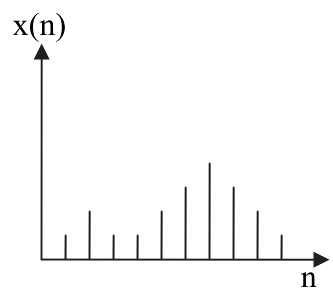
nhất định. Tín hiệu rời rạc (còn được gọi là tín hiệu lấy mẫu) thu được bằng cách lấy mẫu tín hiệu liên tục.

<u>1.1.2.2 Phân loại theo biên độ</u>

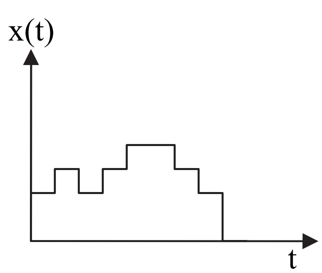
- Tín hiệu liên tục theo biên độ: là tín hiệu mà hàm biên độ nhận bất kỳ giá trị nào. Ví dụ: Hàm x(t) = sin(t) nhận mọi giá trị trong khoảng [-1,1].
- Tín hiệu rời rạc theo biên độ hay còn gọi là tín hiệu được lượng tử hoá: là tín hiệu mà hàm biên độ chỉ nhận các giá trị nhất định. Ví dụ: $x(t) = 0$ với $t < 0$ và $x(t) = 1$ với $t \geq 0$.
- Tín hiệu tương tự là tín hiệu có biên độ và thời gian liên tục.
- Tín hiệu số là tín hiệu có biến độ và thời gian rời rạc.



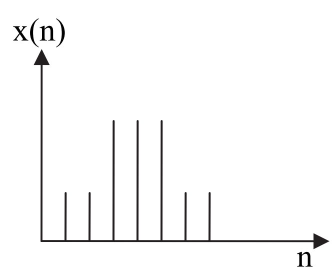
H1.1 – Tín hiệu tương tự



H1.2 – Tín hiệu rời rạc



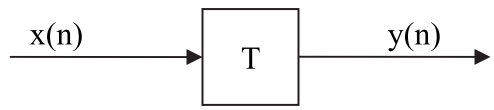
H1.3 – Tín hiệu được lượng tử hoá



H1.4 – Tín hiệu số

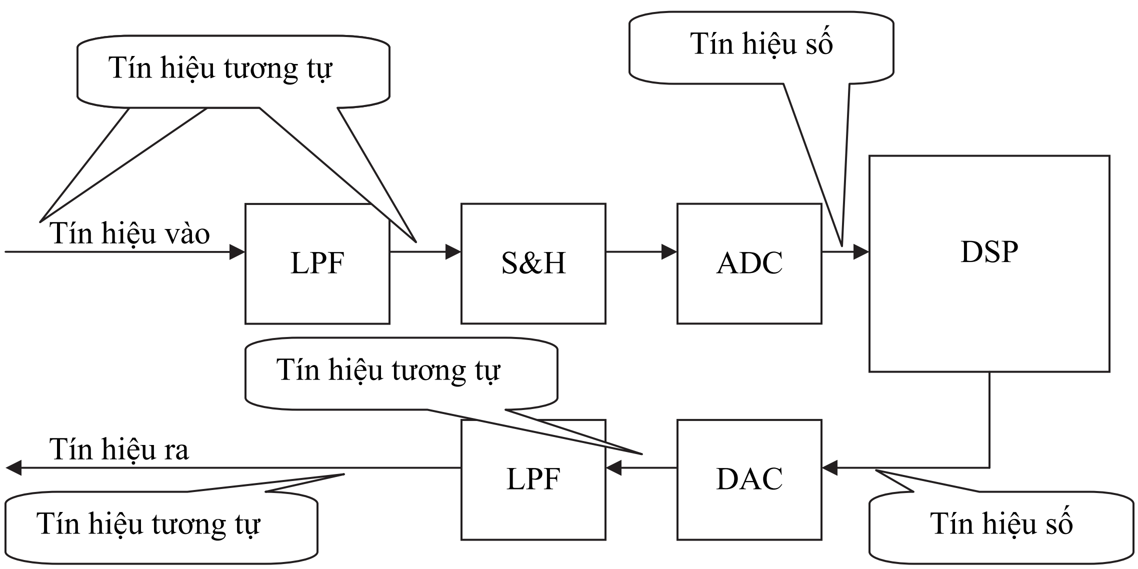
1.1.3 Hệ xử lý tín hiệu

- Một hệ thông xử lý tín hiệu sẽ xác lập mối quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra: y = T[x].



H1.5 – Mô hình một hệ xử lý

- Phân loại hệ xử lý theo tín hiệu vào và tín hiệu ra:
    - Hệ rời rạc: là hệ xử lý tín hiệu rời rạc.
    - Hệ tương tự: là hệ xử lý tín hiệu tương tự.



H1.6 – Mô hình xử lý tín hiệu số trong thực tế

- LPF(Low Pass Filter): Bộ lọc thông thấp để loại bỏ nhiễu và đảm bảo định lý Shannon.
- S&H(Sampling and Hold): Mạch trích giữ mẫu giữ cho tín hiệu ổn định trong quá trình chuyển đổi sang tín hiệu số.

- ADC(Analog to Digital Converter): Bộ chuyển đổi tương tự thành số.
- DAC(Digiatal to Analog Converter): Bộ chuyển đổi số thành tương tự.
- DSP(Digital Signal Processing) Xử lý tín hiệu số.

Cho sinh viên quan sát hình vẽ và giải thích các khối chức năng.

Ví dụ về một hệ xử lý tín hiệu thực tế: Hãy quan sát phần mềm hát trên máy tính (Herosoft):

Tín hiệu vào: Tín hiệu âm thanh (tiếng hát)

LPF+S&H+ADC: Sound card của máy tính

DSP: Phần mềm Herosoft

DAC + LPF: Sound card của máy tính

Tín hiệu ra: Âm thanh (phát ra từ loa)

Những thao tác xử lý nào có thể thực hiện được với Herosoft?

1.2 Tín hiệu rời rạc

1.2.1 Định nghĩa

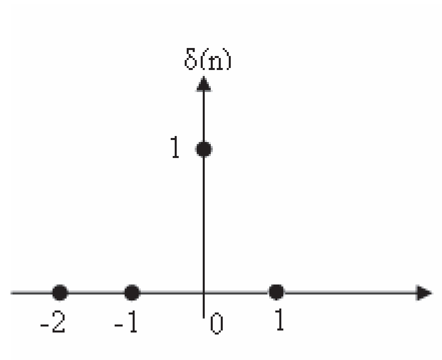
- Là tín hiệu có thể được biểu diễn bằng một dãy các giá trị (thực hoặc phức) với phần tử thứ n được ký hiệu là x(n). x = { x(n) } n = -∞...+∞
- Thông thường tín hiệu rời rạc có được bằng cách lấy mẫu các tín hiệu liên tục trong thực tế. Phương pháp lẫy mẫu thường gặp là lấy mẫu đều tức là các thời điểm lấy mẫu cách nhau một khoảng T_s gọi là chu kỳ lấy mẫu.

Ví dụ: Tín hiệu về nhiệt đọ là 1 tín hiệu liên tục. Tại trạm khí tượng cứ 15 phút người ta ghi lại nhiệt độ một lần. Như vậy tức là đã thực hiện thao tác lẫy mẫu tín hiệu nhiệt độ với chu kỳ lẫy mẫu T_s = 15 phút, số liệu thu được là tín hiệu nhiệt độ rời rạc.

1.2.2 Một vài tín hiệu rời rạc quan trọng

- **Tín hiệu xung đơn vị:**

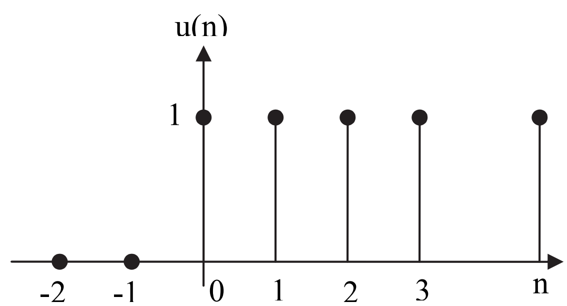
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



H1.7 – Xung đơn vị

- **Tín hiệu xung nhảy bậc đơn vị:**

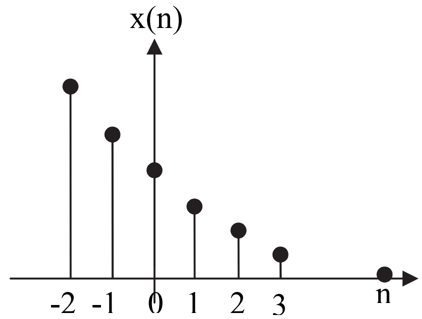
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



H1.8 – Xung nhảy bậc đơn vị

- **Tín hiệu hàm số mũ:**

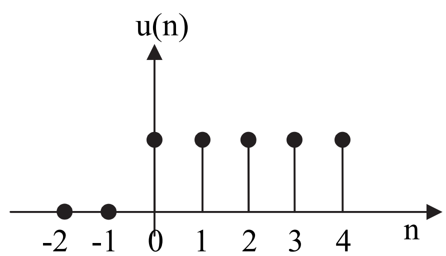
$$x(n) = a^n$$



H1.9 - Tín hiệu hàm số mũ với 0 < a < 1

- **Tín hiệu Rect$_N$**

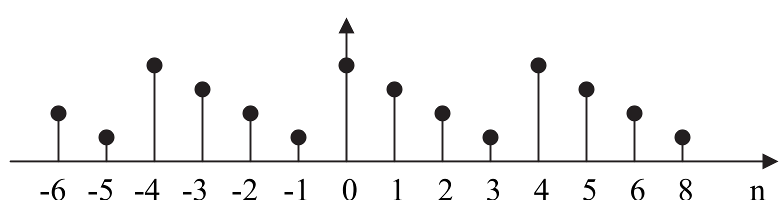
$$x(n) = RECT_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n > N, n < 0 \end{cases}$$



H1.10 – Tín hiệu Rect$_N$

- **Tín hiệu tuần hoàn**

  Xét tín hiệu x(n) ta nói rằng tín hiệu x(n) là tuần hoàn với chu kỳ N nếu: x(n) = x(n+N) = x(n+kN) với mọi n. Hình vẽ dưới đây minh hoạ tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N = 4.



Giá trị N nhỏ nhất thoả mãn x(n) = x(n+N) được gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

Nhận xét: Một tín hiệu rời rạc bất kỳ có thể biểu diễn bởi công thức:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Tóm tắt bài giảng(3): Thời lượng 3 tiết

- *Tóm tắt nội dung đã học bài trước*
- *Các phép toán trên tín hiệu rời rạc*
- *Lấy ví dụ tính toán cụ thể cho từng phép toán*
- *Khái niệm về các hệ TT và TTBB, phân loại các hệ*
- *Hệ TT:*
    - *Đáp ứng xung*
    - *Ý nghĩa*
- *Hệ TTBB*
    - *Đáp ứng xung*
    - *Phép tổng chập*

1.2.3 Các phép toán trên tín hiệu rời rạc

- Phép nhân 2 tín hiệu: Cho tín hiệu x = {x(n)} y = {y(n)} tín hiệu z = x.y = {z(n)}thoả mãn: z(n) = x(n).y(n)
- Phép nhân với hệ số: Cho tín hiệu x = {x(n)} y = α.x = {y(n)}thoả mãn: y(n) = α.x(n)
- Phép cộng 2 tín hiệu: Cho tín hiệu x = {x(n)} y = {y(n)} tín hiệu z = x + y = {z(n)}thoả mãn: z(n) = x(n) + y(n)
- Phép dịch phải: Cho tín hiệu x = {x(n)} phép dịch phải tín hiệu x đi k mẫu tạo ra tín hiệu y = {y(n)} thoả mãn: y(n) = x(n – k) trong đó k là một hằng số nguyên dương.

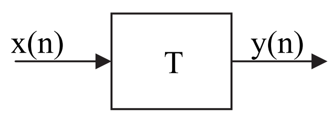
- Phép dịch trái: Cho tín hiệu x = {x(n)} phép dịch trái tín hiệu x đi k mẫu tạo ra tín hiệu y = {y(n)} thoả mãn: y(n) = x(n + k) trong đó k là một hằng số nguyên dương.

1.2.4 Năng lượng của tín hiệu rời rạc

$$W = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

1.3 Các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

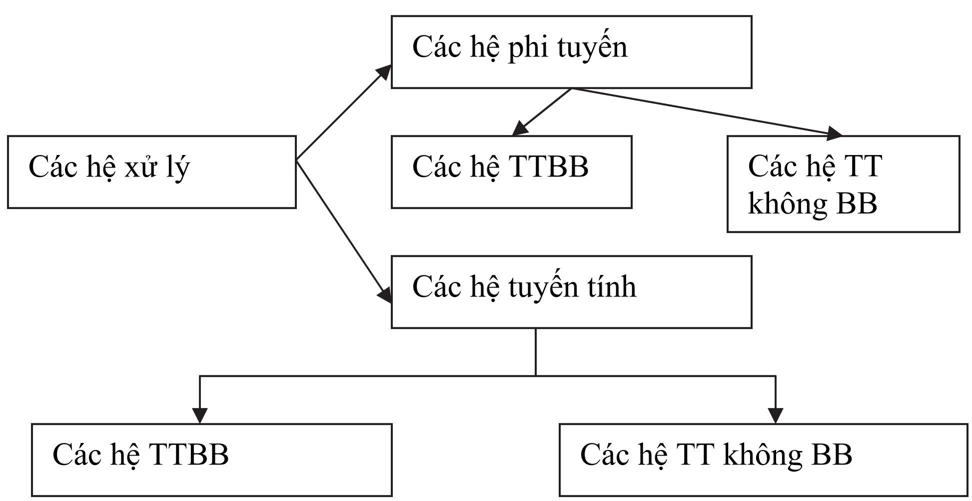
Khái niệm: Một hệ xử lý tín hiệu sẽ xác lập mối quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra.



H1.11 – Hệ xử lý tín hiệu

y(n) = T[x(n)]

1.3.1 Phân loại hệ theo tính chất



H1.12 Phân loại các hệ xử lý tín hiệu

1.3.1.1 Hệ tuyến tính

Một hệ được gọi là tuyến tính nếu nó thoả mãn nguyên lý xếp chồng: giả sử $y_1(n)$ và $y_2(n)$ là tín hiệu ra của hệ tương ứng với các tín hiệu vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$ hay:

$$y_1(n) = T[x_1(n)] \text{ và}$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

Thì ta có:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

Với a,b là các hằng số.

Ý nghĩa của hệ tuyến tính: Một hệ tuyến tính có thể xử lý tổng các tác động như thể các tác động được xử lý độc lập sau đó các kết quả độc lập được cộng lại. Từ đó ta có thể phân tích các tín hiệu phức tạp thành nhiều tín hiệu đơn giản hơn nhằm làm dễ dàng công việc nghiên cứu. Các hệ phi tuyến có thể được xấp xỉ tuyến tính với các điều kiện nào đó.

Ví dụ 1: Hãy xét tính tuyến tính của hệ sau:

a. $y(n) = a^2x(n)$

b. $y(n) = ax(n)$

Với a là một hằng số.

Đáp ứng xung của hệ TT:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n)$$

$h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ tuyến tính, hay chính là đầu ra của hệ khi đầu vào là xung đơn vị.

1.3.1.2 Hệ tuyến tính bất biến

Một hệ tuyến tính là bất biến theo thời gian nếu tín hiệu vào bị dịch đi k mẫu thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi k mẫu, nghĩa là nếu $x'(n) = x(n-k)$ thì $y'(n) = y(n-k)$. Khi một hệ tuyến tính là bất biến ta có: $h_k(n) = h(n-k)$ do đó ta có:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Công thức 2.8 được viết tương đương như sau:

$$y(n) = x(n)*h(n)$$

Nhận xét: Một hệ hoàn toàn xác định nếu biết tham số h(n) hay đáp ứng xung của hệ.

Ví dụ 2: Hãy nhận xét tính bất biến của hệ sau:

a. $y(n) = nx(n)$

b. $y(n) = a^2x(n)$

Ví dụ 3: Cho một hệ TTBB có đáp ứng xung

$$h(n) = a^n u(n) \quad a < 1$$

Tìm đáp ứng của hệ khi tín hiệu vào là tín hiệu chữ nhật có độ rộng N, hay $x(n) = RECT_N(n)$.

Tóm tắt bài giảng(4): Thời lượng 3 tiết

- *Nhắc lại nhanh các kiến thức về hệ TT và hệ TTBB*
- *Lấy ví dụ về các hệ TT, hệ BB, hệ TTBB*
- *Lấy ví dụ về phép tổng chập*
- *Các tính chất của phép tổng chập*
    - *Tính giao hoán → Hệ quả*

- *Tính phân phối → Hệ quả*
- *Chứng minh các tính chất*

- *Ứng dụng các hệ quả trên → Có thể tạo ra một hệ phức tạp bằng cách ghép nối nhiều hệ đơn giản (Lấy ví dụ ghép nối tiếp và song song 2 hệ đơn giản → Tính đáp ứng xung tương đương)*
- *Tính nhân quả và ổn định của hệ:*
  - *Thế nào là hệ ổn định và nhân quả*
  - *Tại sao phải xét tính nhân quả và ổn định*
  - *Định lý được dùng để xét tính nhân quả, ổn định*
  - *Chứng minh định lý*

1.4 Các hệ tuyến tính bất biến

1.4.1 Tính chất của tổng chập

- **Tính giao hoán:**

  y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)

  CM:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$t = n - k \Rightarrow k = n - t$$

$$t = -\infty \; khi \; k = +\infty$$

$$t = +\infty \; khi \; k = -\infty$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x(n-t)h(t) = h(n) * x(n)$$

- **Tính phân phối:**

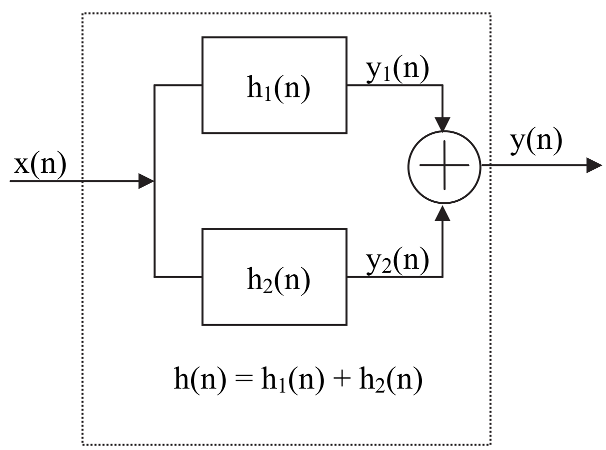
  $y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)[h_1(n-k) + h_2(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_2(n-k) \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

Hệ quả 1: Từ tính chất giao hoán của phép tổng chập ta có hệ quả sau: Nếu ghép nối tiếp 2 hệ TTBB có đáp ứng xung tương ứng là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ thì ta sẽ được một hệ tương đương có đáp ứng xung là $h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$ không phụ thuộc vào thứ tự mắc nối tiếp của các hệ.

Hệ quả 2: Từ tính chất phân phối của phép tổng chập ta có hệ quả sau: Nếu ghép song song 2 hệ nối tiếp có đáp ứng xung tương ứng là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ thì ta sẽ được một hệ tương đương có đáp ứng xung là $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.



H1.14 – Ghép song song 2 hệ TTBB

Ta có:

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= x(n) * h_1(n) \\
y_2(n) &= x(n) * h_2(n) \\
y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\
&= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \\
&= x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) \\
&= x(n) * h(n)
\end{aligned}
$$

1.4.2 Hệ nhân quả

Một hệ TTBB là nhân quả nếu: $x_1(n) = x_2(n)$ với $n < n_0$ và

$x_1(n) \neq x_2(n)$ với $n \geq n_0$ thì:

$y_1(n) = y_2(n)$ với $n < n_0$ và

Một hệ là nhân quả nếu tín hiệu ra không phụ thuộc tín hiệu vào ở tương lai.

Định lý: Một hệ TTBB là nhân quả khi và chỉ khi h(n) = 0 với n < 0.

CM:

- **Nếu hệ là nhân quả:**

Ta có:

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_1(k)h(n-k) \\
y_2(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_2(k)h(n-k)
\end{aligned}
$$

Do với $n < n_0$ thì $y_1(n) = y_2(n)$ và $x_1(n) = x_2(n)$ nên:

$$
\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k)
$$

Từ đó suy ra:

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_1(k)h(n-k) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_2(k)h(n-k)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n_0}^{+\infty} h(n-k)[x_1(k) - x_2(k)] = 0$$

Theo giả thiết $x_1(k) \neq x_2(k)$ với $k \geq n_0$ nên ta suy ra:

$h(n-k) = 0$ với mọi $n < n_0$ và $k \geq n_0$

Đặt $m = n-k \Rightarrow h(m) = 0$ với mọi $m < 0$ (ĐPCM).

- **Nếu h(n) = 0 với mọi n < 0 (Tự chứng minh)**

Nhận xét: Hệ TTBB và nhân quả có phương trình:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(n-k)h(k)$$

1.4.3 Tính ổn định

Một hệ TTBB được gọi là ổn định nếu với tín hiệu vào có biên độ hữu hạn thì tín hiệu ra cũng có biên độ hữu hạn.

Định lý: Một hệ TTBB là ổn định nếu và chỉ nếu

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

CM:

Nếu tác động x(n) thoả mãn: |x(n)| < A với mọi n khi đó:

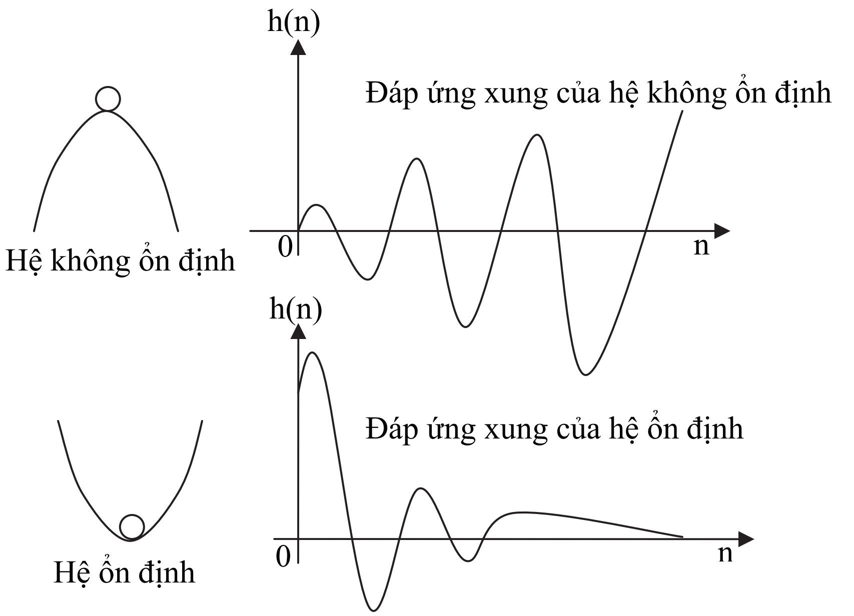
$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k) \right| \leq A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|$$

Do đó nếu S < ∞ thì |y(n)| < ∞ hay hệ ổn định

Nếu y(n) < ∞ ta chọn x(n) = 1 với h(n) ≥ 0 và x(n) = -1 với h(n) còn lại, tính đáp ứng của hệ tại thời điểm 0 ta có:

$$y(0) = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(-k)h(k) \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|$$

Từ đó suy ra S < ∞



H1.15 – Minh hoạ các hệ ổn định và không ổn định

<u>Tóm tắt bài giảng(5):</u> Thời lượng 4 tiết

- *Nhắc lại về hệ TTBB và đáp ứng xung*
- *Nêu khó khăn khi sử dụng đáp ứng xung để biểu diễn hệ TTBB*
- *Khó khăn đó sẽ được khắc phục thế nào sử dụng PT-SP-TT-HSH*
- *Các bài toán đặt ra với PT-SP-TT-HSH và cách giải quyết chúng*
    - *Giải phương trình SPTTHSH: Phương pháp và lấy ví dụ*
    - *Xác định đáp ứng xung*
    - *Sử dụng sơ đồ để mô tả PT-SP-TT-HSH*
        - *Mục đích sử dụng sơ đồ*
        - *Các chuẩn biểu diễn: Chuẩn I và chuẩn II*

1.5 Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

Tồn tại một lớp các hệ xử lý tín hiệu có thể được biểu diễn bởi phương trình dạng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p(n)x(n-p)$$

Dạng biểu diễn trên gọi là phương trình sai phân. Trong đó:

$a_k(n)$ và $b_p(n)$: Là các hàm hệ số

M,N: là các hằng số nguyên, N được gọi là bậc của phương trình

Đối với các hệ tuyến tính và bất biến thì các hàm hệ số sẽ trở thành các hằng số, do đó ta có hệ tuyến tính bất biến được biểu diễn bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH) có dạng sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

Rõ ràng với phương pháp biểu diễn hệ tuyến tính bất biến bởi PT-SP-TT-HSH ta có thể thấy rằng hệ được biểu diễn bởi một tập hữu hạn các tham số bao gồm:

a_k và b_p: là tập gồm N+1 và M+1 hằng số tương ứng

M,N: là 2 hằng số nguyên

N được gọi là bậc của phương trình

Phương pháp biểu diễn hệ TTBB sử dụng PT-SP-TT-HSH được sử dụng trong hầu hết các hệ xử lý tín hiệu.

1.5.1 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Bài toán đặt ra là:

Cho một hệ TTBB có PT-SP-TT-HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

Biết tín hiệu vào x(n) và các điều kiện đầu hãy tìm tín hiệu ra y(n).

Tương tự như bài toán giải phương trình vi phân trong giải tích, chúng ta sẽ giải phương trình sai phân với các điều kiện nêu trên qua các bước sau:

- Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $y_0(n)$

  Xét phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

  Ta chọn nghiệm: $y(n) = \alpha^n$ với $\alpha \neq 0$, sau đó thay vào phương trình trên ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{n-k} = 0$$

  Giải phương trình trên ta sẽ tìm được đúng N nghiệm $\alpha_1 \ldots \alpha_N$

  Khi đó nghiệm tổng quát được xác định bởi:

$$y_0(n) = \sum_{k=1}^{N} P_{S_k-1}(n) \alpha_k{}^n$$

  Trong đó: $P_Q(n)$ là đa thức bậc Q của n

  S_k là bậc của nghiệm α_k

  Trong trường hợp các nghiệm α_k là nghiệm đơn thì ta có:

$$y_0(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k \alpha_k{}^n$$

  Trong đó A_k là các hằng số.

- Bước 2: Tìm nghiệm riêng $y_p(n)$

  Xét phương trình đầy đủ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

  Thay giá trị x(n) đã biết vào phương trình trên và chọn y(n) đồng dạng với x(n) ta sẽ giải được nghiệm riêng $y_p(n)$ đồng dạng x(n)

- Bước 3: Xác định các hệ số nhờ điều kiện đầu

  Nghiệm cuối của phương trình có dạng $y(n) = y_0(n) + y_p(n)$

Sử dụng các điều kiện đầu để tìm các hệ số còn chưa biết trong 2 bước trên và kết luận nghiệm cuối cùng.

1.5.2 Đáp ứng xung của hệ TTBB từ PT-SP-TT-HSH

1.5.2.1 Hệ có đáp ứng xung hữu hạn (FIR)

Xét phương trình sai phân

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

Với N = 0 phương trình trở thành:

$$y(n) = \sum_{p=0}^{M} (b_p / a_0) x(n-p)$$

Đồng nhất phương trình trên với phương trình quan hệ vào-ra của hệ TTBB biết đáp ứng xung h(n):

$$y(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(p) x(n-p)$$

Ta suy ra đáp ứng xung của hệ có dạng:

$h(n) = b_p/a_0$ với $0 \le n \le M$

h(n) = 0 với các n còn lại

Rõ ràng ta thấy rằng trong trường hợp này h(n) được xác định dễ dàng và có độ dài hữu hạn, khi đó hệ được gọi là hệ có đáp ứng xung hữu hạn (FIR).

1.5.2.2 Hệ có đáp ứng xung vô hạn (IIR)

Xét phương trình sai phân

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

Với N > 0. Khi đó ta thấy rằng để tính h(n) ta sẽ thay x(n) = δ(n) vào phương trình trên và ta có:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p \delta(n-p)$$

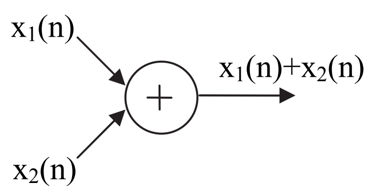
Đây là một phương trình hồi quy do đó h(n) có độ dài vô hạn. Khi đó hệ được gọi là hệ có đáp ứng xung vô hạn (IIR)

1.5.3 Biểu diễn PT-SP-TT-HSH sử dụng sơ đồ

Nhằm phục vụ việc phân tích và tối ưu các phép toán cũng như bộ nhớ cần dùng để thực hiện một hệ TTBB biểu diễn bởi PT-SP-TT-HSH, người ta sẽ biểu diễn PT-SP-TT-HSH dưới dạng một sơ đồ các phần tử, dựa trên sơ đồ đó để biến đổi tương đương nhằm đưa ra một sơ đồ sao cho số phép tính hay bộ nhớ sử dụng để cài đặt sẽ tiết kiệm hơn sơ đồ ban đầu. Sau đây chúng ta sẽ xem xét 2 chuẩn biểu diễn PT-SP-TT-HSH sử dụng sơ đồ.

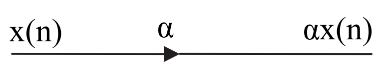
1.5.3.1 Các phần tử cơ bản

- Phần tử cộng



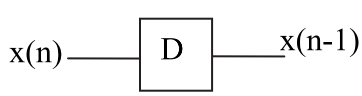
Hình 1.16 - Phần tử cộng

- Phần tử nhân



Hình 1.17 - Phần tử nhân

- Phần tử trễ



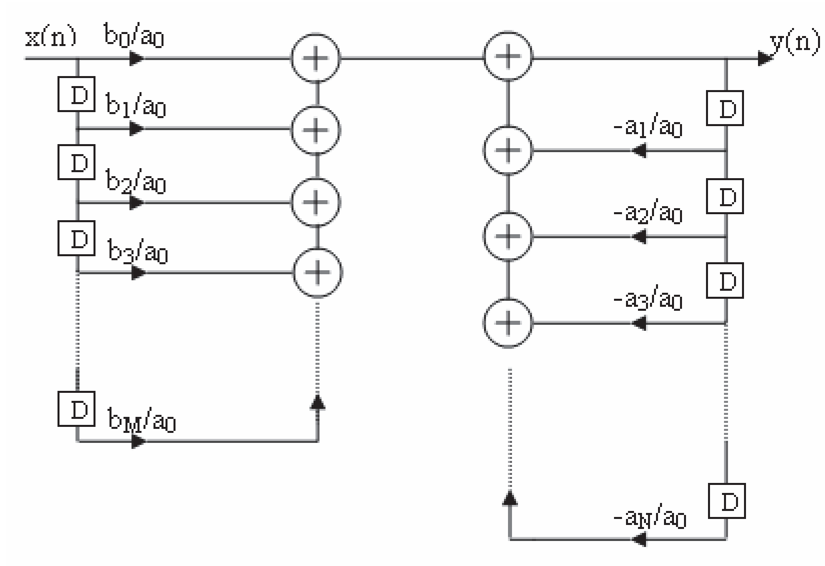
Hình 1.18 - Phần tử trễ

1.5.3.2 Sơ đồ chuẩn 1

Sơ đồ chuẩn một được suy ra trực tiếp từ phương trình SPTTHSH sau khi đã thực hiện chuẩn hoá phương trình về dạng sau:

$$y(n) = \sum_{p=0}^{M} \frac{b_p}{a_0} x(n-p) + \sum_{k=1}^{N} -\frac{a_k}{a_0} y(n-k)$$

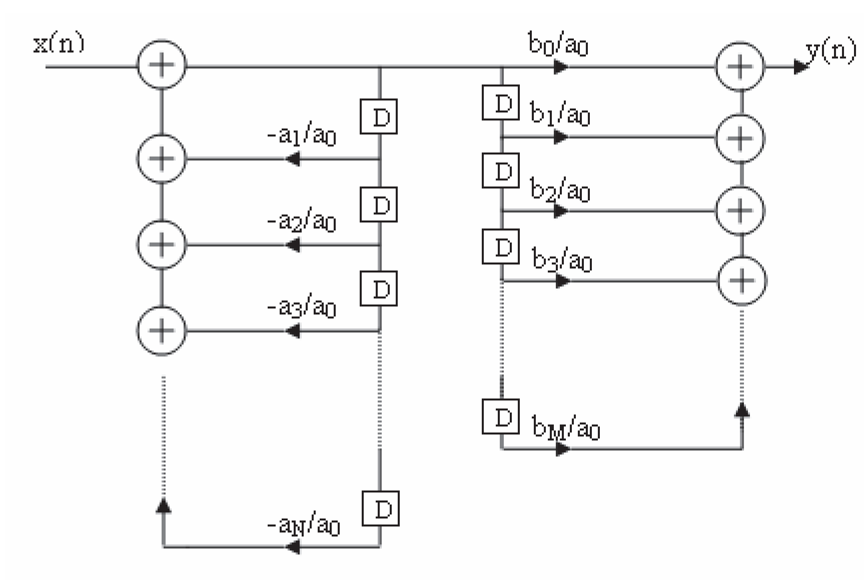
Sơ đồ chuẩn 1 có dạng sau:



Hình 1.19 – Sơ đồ chuẩn 1

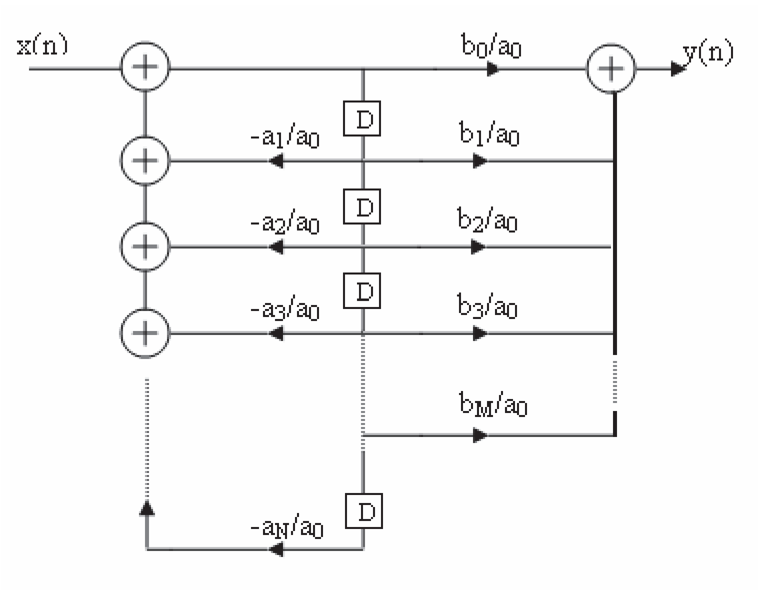
1.5.3.2 Sơ đồ chuẩn 2

Trong sơ đồ chuẩn 1 ta có thể thấy rằng hệ được xem như ghép nối tiếp của 2 hệ TTBB nhỏ hơn. Như vậy ta hoàn toàn có thể đảo vị trí của 2 hệ mà không ảnh hưởng gì. Thao tác đó sẽ tạo ra sơ đồ trung gian có dạng sau



Hình 1.20 – Sơ đồ trung gian

Trên sơ đồ trung gian ta sẽ ghép các bộ trễ cùng mức để tạo ra sơ đồ chuẩn 2 có dạng:



Hình 1.21 – Sơ đồ chuẩn 2

Ta thấy rằng trong chuẩn 2, số lượng bộ trễ đã giảm so với chuẩn 1 điều đó đồng nghĩa với việc số lượng phép tính và bộ nhớ sử dụng khi cài đặt sẽ tiết kiệm hơn.

<u>Tóm tắt bài giảng(6):</u> Thời lượng 3 tiết

- *Ôn tập chương I*
- *Làm bài tập cuối chương*
- *Bài kiểm tra 1 tiết*

CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ

HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU TRÊN MIỀN Z

Tóm tắt bài giảng(7): Thời lượng 2 tiết

- *Nhắc lại tóm tắt chương 1*
- *Khái niệm miền tín hiệu, và các phép biến đổi, gợi nhớ cho sinh viên phép biến đổi Laplace mà sinh viên đã học trong môn học "Mạch và tín hiệu"*
- *Miền Z là gì, mục đích sử dụng miền Z*
- *Định nghĩa phép biến đổi Z*
  - *Một phía*
  - *Hai phía*
  - *Khi nào dùng một phía và khi nào dùng hai phía*
  - *Lấy 2 ví dụ tính toán cụ thể*
- *Miền hội tụ của phép biến đổi Z*
  - *Lấy 1 ví dụ tính toán cụ thể*

Mục đích: Trong chương I chúng ta đã khảo sát tín hiệu và các hệ xử lý tín hiệu, như chúng ta đã thấy khi biểu diễn tín hiệu và các hệ xử lý trên miền thời gian sẽ có những bài toán trở nên khó khăn. Với biến đổi Z chúng ta sẽ biểu diễn tín hiệu và hệ xử lý trên miền Z (biến độc lập z là biến số phức), trên miền Z các bài toán về khảo sát hệ xử lý (tính ổn định, tính nhân quả, điểm cực(cộng hưởng), điểm không(phản cộng hưởng)…) sẽ trở nên dễ dàng và thuận lợi hơn (Sinh viên nhớ lại phép biến đổi Laplace khi học môn mạch và tín hiệu).

2.1 Định nghĩa phép biến đổi Z

Cho tín hiệu rời rạc x(n), phép biến đổi Z của x(n) được định nghĩa như sau:

a. Phép biến đổi Z 2 phía: (Khảo sát về mặt lý thuyết)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

b. Phép biến đổi Z 1 phía: (Khảo sát về mặt thực tế)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Trong tài liệu này chúng ta sử dụng cụm từ phép biến đổi Z mặc định cho phép biến đổi Z 2 phía.

2.2 Miền hội tụ của phép biến đổi Z

2.2.1 Định nghĩa

Cho tín hiệu rời rạc x(n), X(z) là biến đổi Z của x(n), tập các giá trị của z sao cho $|X(z)| < +\infty$ được gọi là miền hội tụ của phép biến đổi Z của x(n) (ROC)

2.2.2 Xác định miền hội tụ với tín hiệu rời rạc x(n) cho trước

a. Định lý Cauchy

Chuỗi $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{n \to +\infty} |u(n)|^{1/n} < 1$$

b. Miền hội tụ

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}$$

Đặt $X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$, $X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$

Áp dụng định lý Cauchy đối với $X_1(z)$ ta được:

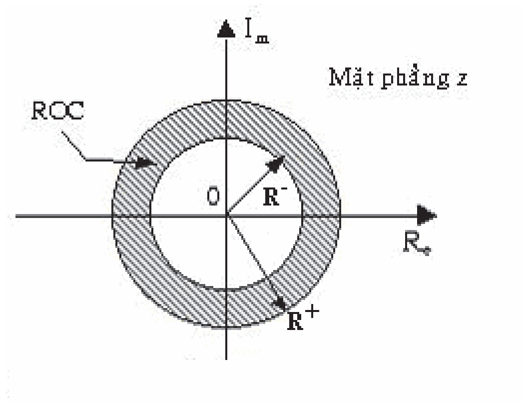
$$|z| > \lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n} = R_x^{-}$$

Áp dụng định lý Cauchy đối với $X_2(z)$ ta được:

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |x(-n)|^{1/n}} = R_x^{+}$$

Cuối cùng ta có:

$$ROC = \{z \mid R_x^- < |z| < R_x^+\}$$



H2.1 - Miền hội tụ

*** Miền hội tụ của tín hiệu có chiều dài hữu hạn**

Khi tín hiệu x(n) có chiều dài hữu hạn (giả sử x(n) = 0 với mọi n không thuộc đoạn [n1,n2]) thì chúng ta không sử dụng định lý cauchy để xác định miền hội tụ của X(z) mà khi đó chỉ cần từng phần tử trong công thức biến đổi Z của x(n) là hữu hạn:

- $0 \le n1 < n2$: Khi đó để các phần tử dạng z^n hữu hạn thì $|z| \neq +\infty$

- $n1 < n2 \le 0$: Khi đó để các phần tử dạng z^n hữu hạn thì $z \neq 0$

- $n1 < 0 < n2$: Khi đó để các phần tử dạng z^n hữu hạn thì $z \neq 0$ và

$|\mathbf{z}| \neq +\infty$

Ví dụ: Cho tín hiệu x(n) = u(n) Hãy tính X(z) và miền hội tụ

<u>Tóm tắt bài giảng(8):</u> Thời lượng 3 tiết

- *Điểm cực và điểm không*
- *Phép biến đổi Z ngược:*
  - *Mục đích*
  - *Công thức*
  - *Phương pháp*
  - *Ví dụ tính toán*
- *Các tính chất của phép biến đổi Z*
  - *Sử dụng các tính chất để tính nhanh một số biến đổi Z ngược*

2.3 Điểm cực và điểm không

Một loại biến đổi Z thông dụng và quan trọng đó là biến đổi Z mà X(z) của nó có dạng là một hàm hữu tỉ với mọi z thuộc miền hội tụ, nghĩa là:

$$X(z) = P(z)/Q(z)$$

Trong đó, P(z) và Q(z) là các đa thức biến z hay z^{-1}.

- Các giá trị của z sao cho X(z) = 0 được gọi là các điểm không của X(z) (Nghiệm của P(z))
- Các giá trị của z sao cho X(z) = ∞ được gọi là các cực của X(z). (Nghiệm của Q(z))

Như vậy chúng ta có nhận xét rằng: **Miền hội tụ không chứa các điểm cực**
Biểu diễn X(z) theo các điểm cực và không

2.4 Phép biến đổi Z ngược

Bài toán: Cho biết X(z) và miền hội tụ của nó, hãy tìm tín hiệu rời rạc x(n)

a. Định lý Cauchy

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-k}dz = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

b. Phép biến đổi Z ngược

Ta có:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Suy ra:

$$\oint_C \frac{1}{2\pi j} z^{k-1} X(z) dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} z^{k-n-1} dz = x(k)$$

Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

- Phương pháp thặng dư

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

$$= \sum_{k=1}^{N} RES(X(z) z^{k-1})_{|z=z_{pk}}$$

Trong đó N là số cực của $X(z)z^{k-1}$ và $z_{p1} \ldots z_{pN}$ lần lượt là các cực của $X(z)z^{k-1}$ với các bậc tương ứng là $s_1 \ldots s_N$. Đại lượng RES là thặng dư của hàm số được tính bởi:

$$RES(\Psi(z))_{|z=z_{pk}} = \frac{1}{(s_k - 1)!} \frac{d}{dz^{s_k - 1}} (\Psi(z)(z - z_k)^{s_k})_{|z=z_{pk}}$$

Ví dụ: Cho $X(z) = \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}}$ Hãy tính x(n) sử dụng phương pháp thặng dư

- Phương pháp phân tích thành phân thức đơn giản

Bảng các phép biến đổi Z đơn giản

Tín hiệu	Biến đổi Z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn mặt phẳng Z
u(n)	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
-u(-n-1)	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Toàn MPZ trừ 0 nếu m > 0, trừ ∞ nếu m < 0
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\Omega n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\Omega)z^{-1}}{1-(2\cos\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\Omega n)u(n)$	$\frac{(\sin\Omega)z^{-1}}{1-(2\cos\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$

Để tính biến đổi Z ngược của một biểu thức phức tạp, người ta có thể phân tích các biểu thức phức tạp này thành tổ hợp tuyến tính của các biểu thức đơn giản hơn, sau đó sử dụng tính tuyến tính của phép biến đổi Z suy ra kết quả cuối cùng từ các kết quả đã được tính sẵn có trong bảng.

Với một lớp các biểu thức ta có thể áp dụng phương pháp sau:

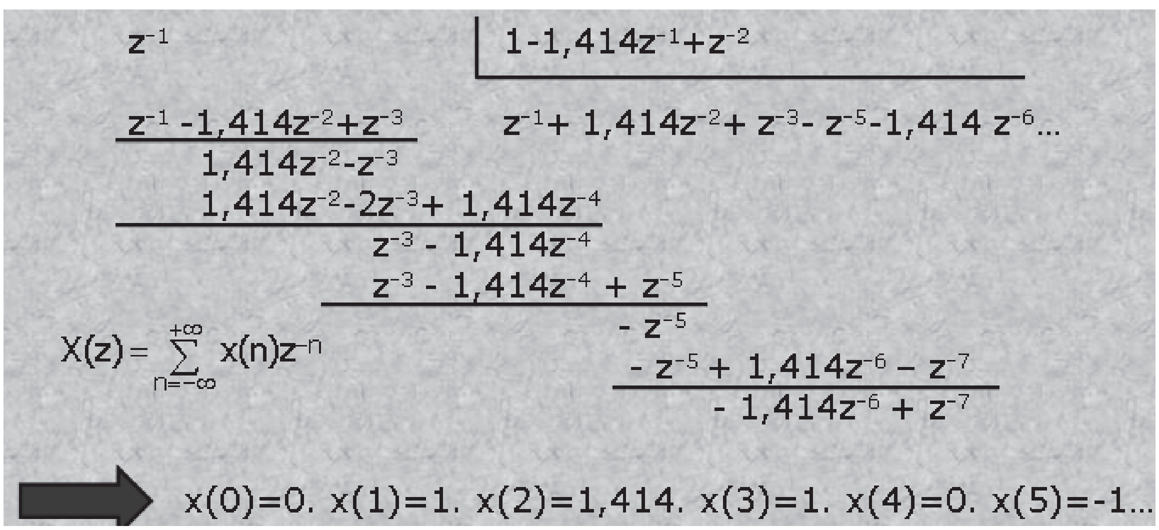
$$\frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{S_i}\frac{A_{\mathrm{ik}}}{(z - z_{p_i})^j}$$

Trong đó N(z) và D(Z) là 2 đa thức của z, giả sử rằng bậc của N(z) nhỏ hơn bậc của D(z) và phân thức là tối giản. N là số nghiệm của D(z), $z_{p1}\ldots z_{pN}$ là các nghiệm của D(z) với bậc tương ứng là $s_1\ldots s_N$, A_{ik} là các hệ số được tìm theo công thức:

$$A_{ik} = \frac{1}{(s_i - k)!}\frac{d}{dz^{s_i - k}}\left(\frac{N(z)}{D(z)}(z - z_{p_i})^{s_i}\right)_{|z = z_{p_i}}$$

Ví dụ: Cho $X(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 3z + 2}$ Hãy tính các tín hiệu x(n). Có tín hiệu x(n) nào nhân quả trong các tín hiệu tìm được hay không?

- Phương pháp chia đa thức



2.5 Các tính chất của phép biến đổi Z

2.5.1 Tính tuyến tính

Cho 2 tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ với các biến đổi z tương ứng là:

$$X_1(z) = ZT(x_1(n))\ MHT_1 = \{R^-_1 < |z| < R^+_1\}$$

$$X_2(z) = ZT(x_2(n))\ MHT_2 = \{R^-_2 < |z| < R^+_2\}$$

Khi đó:

$ZT(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$ với miền hội tụ là

$$MHT_1 \cap MHT_2$$

2.5.2 Tính dịch thời gian

Cho tín hiệu x(n) có biến đổi Z là X(z) = ZT(x(n)) với miền hội tụ (MHT) là $R^- < |z| < R^+$. Khi đó

$ZT(x(n-k)) = z^{-k}X(z)$ với cùng miền hội tụ trên, trong đó k là một hằng số nguyên.

2.5.3 Tính chất thay đổi thang tỷ lệ

Cho tín hiệu x(n) có biến đổi Z là X(z) = ZT(x(n)) với miền hội tụ (MHT) là $R^- < |z| < R^+$. Khi đó

$ZT(a^n x(n)) = X(\frac{z}{a})$ với miền hội tụ $|a|R^- < |z| < |a|R^+$

2.5.4 Tính đảo trục thời gian

Cho tín hiệu x(n) có biến đổi Z là X(z) = ZT(x(n)) với miền hội tụ (MHT) là $R^- < |z| < R^+$. Khi đó

$ZT(x(-n)) = X(\frac{1}{z})$ với miền hội tụ $\frac{1}{R^+} < |z| < \frac{1}{R^-}$

2.5.5 Tính chất vi phân trong miền Z

Cho tín hiệu x(n) có biến đổi Z là X(z) = ZT(x(n)) với miền hội tụ (MHT) là $R^- < |z| < R^+$. Khi đó

$$ZT(nx(n)) = -z\frac{dX}{dz}$$

2.5.6 Phép biến đổi Z của tổng chập

Cho 2 tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ với các biến đổi z tương ứng là:

$$X_1(z) = ZT(x_1(n))\ MHT_1 = \{R^-_1 < |z| < R^+_1\}$$

$$X_2(z) = ZT(x_2(n))\ MHT_2 = \{R^-_2 < |z| < R^+_2\}$$

Khi đó:

$$ZT(x_1(n)*x_2(n)) = X_1(z)X_2(z) \text{ với miền hội tụ là } MHT_1 \cap MHT_2$$

2.5.7 Định lý giá trị đầu

Cho tín hiệu x(n) có biến đổi Z là X(z) = ZT(x(n)) với miền hội tụ (MHT) là $R^- < |z| < R^+$. Khi đó nếu x(n) là tín hiệu nhân quả thì:

$$x(0) = \lim_{z->\infty} X(z)$$

Tóm tắt bài giảng(9): Thời lượng 3 tiết

- Sử dụng phép biến đổi Z một phía để giải PTSP
- Biểu diễn hệ xử lý tín hiệu trong miền Z
- Thực hiện các hệ rời rạc trong miền Z
- Tính ổn định và nhân quả của hệ TTBB

2.6 Sử dụng phép biến đổi Z một phía để giải PTSP

2.6.1 Biến đổi Z một phía

a. Định nghĩa

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

b. Tính chất

Hầu hết các tính chất của biến đổi z hai phía đều đúng với biến đổi z một phía ngọai trừ tính chất dịch thời gian.

Tính chất dịch thời gian:

Xét một tín hiệu x(n) có biến đổi z một phía là $X^+(z)$.

Xét tín hiệu $x_1(n) = x(n - k)$, ta có:

$$X_1^+(z) = z^{-k}(X^+(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x(n)z^{-n})$$

2.6.2 Giải PTSP

Ví dụ: Xác định đáp ứng xung của hệ được mô tả bởi phương trình sai phân sau biết x(n) = u(n):

y(n) = ay(n-1) + x(n) , với –1 < a < 1

với điều kiện đầu là: y(-1) = 1.

Giải: Lấy biến đổi Z một phía hai vế của phương trình sai phân ta được:

$$Y^+(z) = a[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

Với x(n) = u(n) ta có $X^+(z)$ = 1/(1-z-1). Thay thế y(-1) và $X^+(z)$ vào phương trình trên và sắp xếp lại ta được:

$$Y^+(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

Tìm biến đổi Z ngược bằng phương pháp khai triển thành các phân thức hữu tỉ đơn giản ta được y(n)

2.7 Biểu diễn hệ trong miền Z

2.7.1 Hàm truyền đạt của hệ tuyến tính bất biến (TTBB)

2.7.1.1. Hàm truyền đạt (hàm hệ thống)

Từ chương I, ta đã thấy rằng một hệ TTBB hoàn toàn có thể đặc trưng trong miền thời gian bởi đáp ứng xung h(n) của nó, với tín hiệu vào x(n), đáp ứng của hệ được tính bởi tổng chập:

y(n) = x(n) * h(n)

Gọi X(z) và H(z) lần lượt là biến đổi z của x(n) và h(n), áp dụng tính chất chập của biến đổi Z, ta được biến đổi Z của y(n) như sau:

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

với một miền hội tụ thích hợp.

Vậy, thông qua phép biến đổi Z, tổng chập của hai dãy đã biến thành phép nhân đơn giản. Sau khi có được Y(z), ta dùng phép biến đổi Z ngược để tính đáp ứng y(n). Cách làm này rõ ràng là dễ dàng hơn cách tính trực tiếp từ tổng chập.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

H(z) được gọi là hàm hệ thống (System function) hay hàm truyền đạt (Transfer function). Vì H(z) và h(n) là một cặp duy nhất, nên một hệ TTBB bất kỳ hoàn toàn có thể được đặc tả bởi hàm hệ thống của nó.

2.7.1.2. Hàm truyền đạt của một hệ được đặc trưng bởi PTSP

Xét một hệ TTBB mà quan hệ vào ra của nó thỏa mãn phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng như sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{p=0}^{M} b_p x(n-p)$$

Chúng ta cũng đã biết rằng, từ phương trình sai phân ta có thể tìm được y(n) theo phương pháp đệ qui. Áp dụng biến đổi Z cho cả hai vế của phương trình và để ý đến tính chất tuyến tính, dịch thời gian của biến đổi Z, ta có:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{p=0}^{M} b_p z^{-p} X(z)$$

Từ đó ta có:

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{p=0}^{M} b_p z^{-p}$$

Suy ra hàm truyền đạt của hệ có dạng:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{p=0}^{M} b_p z^{-p}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Từ các điều kiện đầu của PTSP, nếu ta xác định được ROC của H(z) thì H(z) đặc tả duy nhất một hệ.

Một cách biểu diễn khác:

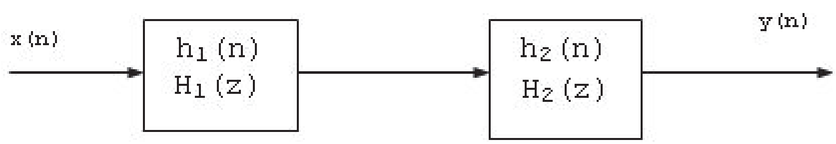
$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{p=1}^{M}(1 - c_p z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

Mỗi thừa số $(1-c_p z^{-1})$ trong tử số góp vào một điểm không tại $z=c_p$. Tương tự, mỗi thừa số $(1-d_k z^{-1})$ trong mẫu số đóng góp vào một cực tại $z=d_k$.

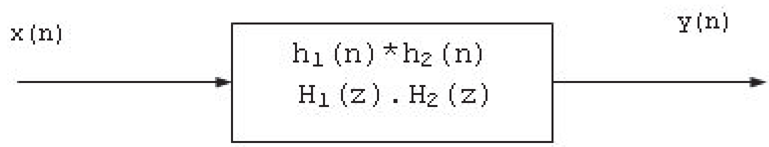
2.7.1.3 Ghép nối các hệ tuyến tính bất biến

Cho hai hệ có đáp ứng xung là h1(n) và $h_2(n)$, hàm truyền đạt tương ứng là $H_1(z)$ và $H_2(z)$ với các miền hội tụ xác định.

- **Ghép nối tiếp**

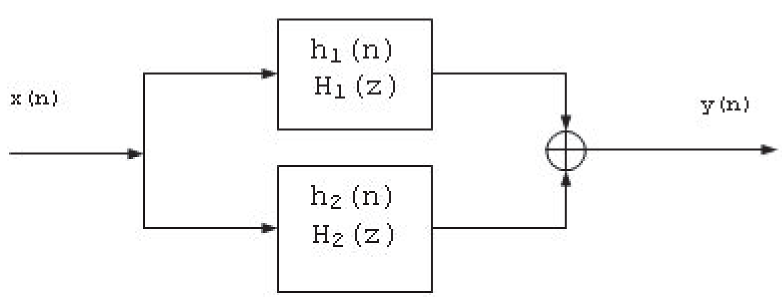


hệ tương đương:

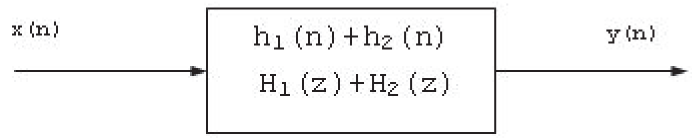


H2.2 – Ghép nối tiếp các hệ TTBB và hệ TTBB tương đương

- **Ghép song song**



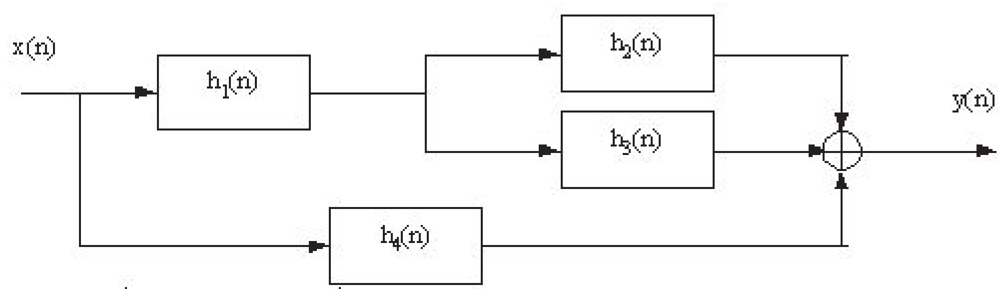
Hệ tương đương:



H2.3 – Ghép song song các hệ TTBBB và hệ TTBB tương đương

Từ 2 kết nối cơ bản trên ta có thể cấu trúc 1 hệ phức tạp. Ngược lại ta có thể phân chia 1 hệ lớn, phức tạp thành nhiều hệ nhỏ hơn kết nối nhau để tiện thiết kế.

Ví dụ: Hãy xác định hàm truyền đạt của hệ tương đương của hệ được kết nối bởi các hệ con như sau:



H2.4 – Ghép nhiều hệ TTBB

Hàm truyền đạt của hệ tương đương là:

$$H(z) = H4(z)+H1(z)[H2(z)+H3(z)]$$

2.8 Thực hiện các hệ rời rạc

2.8.1 Mở đầu

Như ở mục 2.6.2 ta thấy rằng một hệ TTBB có hàm truyền đạt hữu tỉ thì có thể được biểu diễn bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Phương trình sai phân này có thể suy ra một cách trực tiếp từ hàm truyền đạt, ngược lại, nếu cho trước PT-SP-TT-HSH ta có thể suy ra hàm truyền đạt.

Để thực hiện các hệ rời rạc, từ hàm truyền đạt hay PT-SP-TT-HSH ta sẽ biểu diễn cấu trúc hệ bằng sơ đồ khối, bao gồm sự kết nối của các phần tử cơ bản là cộng, nhân, nhân với hằng số và phép trễ. Các phép trễ hàm ý rằng cần phải lưu trữ các giá trị của dãy trong quá khứ.

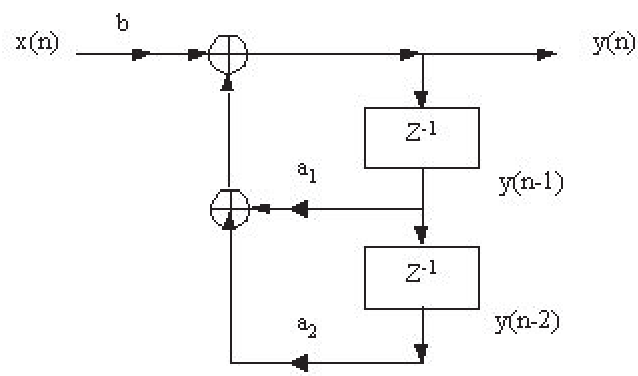
Ví dụ: Ta xét hệ có phương trình sai phân:

$$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+bx(n)$$

Sẽ tương ứng với một hàm truyền đạt là:

$$H(z)=\frac{b}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}$$

Sơ đồ khối biểu diễn hệ được trình bày trong hình dưới. Đây là một hệ bậc 2.



H2.5 – Sơ đồ khối của hệ

Một sơ đồ khối là cơ sở để xác định cấu trúc phần cứng cho một hệ hay để xây dựng một thuật toán cho phần mềm.

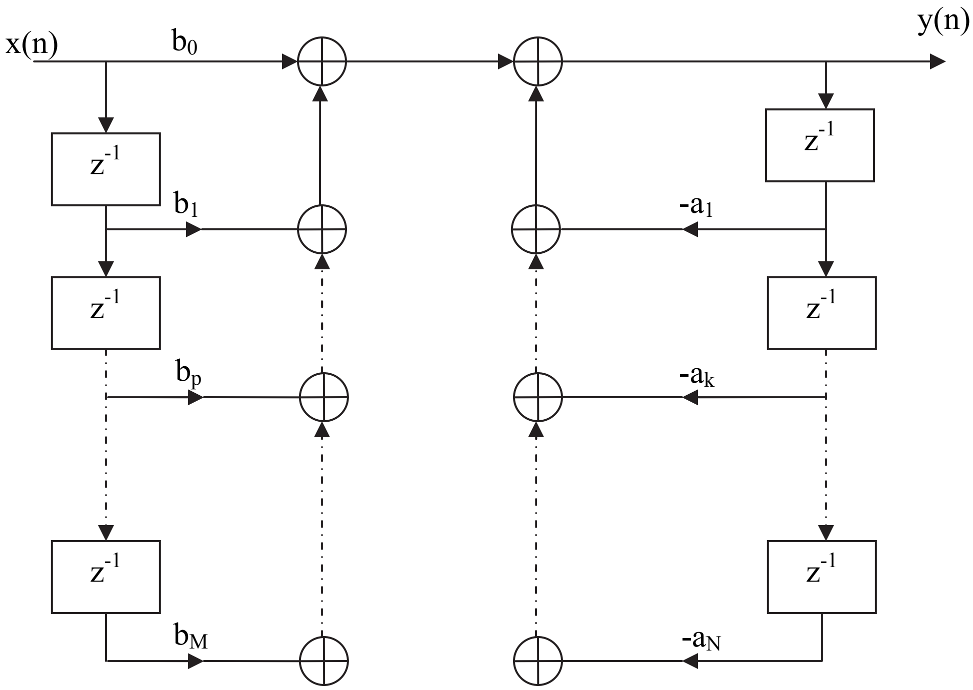
2.8.2 Dạng chuẩn 1 (Dạng trực tiếp 1)

Không làm mất tính tổng quát giả sử $a_0 = 1$ ta có:

$$y(n)-\sum_{k=1}^{N}a_ky(n-k)=\sum_{p=0}^{M}b_px(n-p)$$

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}-a_ky(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_kx(n-k)$$

Sơ đồ khối biểu diễn phương trình sai phân trên có dạng sau:

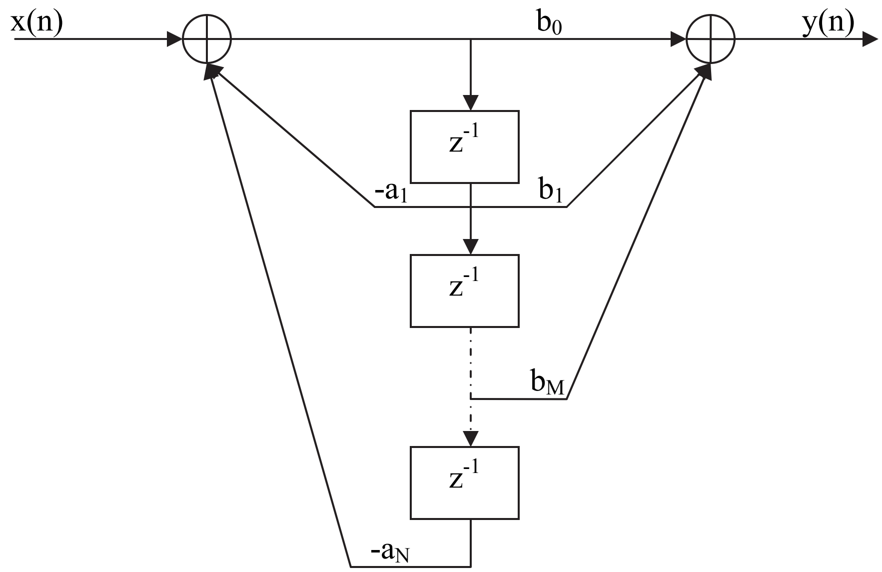


H2.6 – Sơ đồ khối dạng chuẩn 1

2.8.3 Dạng chuẩn 2 (Dạng trực tiếp 2)

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_K z^{-k}} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{M} b_K z^{-k} \right) = H_2(z) H_1(z)$$

Ta thấy rằng có thể xem hệ như là gồm hai hệ con (phần bên trái và phần bên phải) mắc liên tiếp nhau. Do tính giao hoán ta có thể hoán chuyển vị trí của hai hệ con để tạo ra dạng biểu diễn chuẩn 2 như sau:



H2.7 – Sơ đồ khối dạng chuẩn 2

2.8.4 Một số tên gọi của các hệ thường gặp

- **Hệ có đáp ứng xung có độ dài hữu hạn (FIR)**
- **Hệ có đáp ứng xung có độ dài vô hạn (IIR)**
- **Hệ đồng nhất:** $y(n) = x(n)$
- **Hệ khả đảo và hệ đảo:** Một hệ $y(n) = T[x(n)]$ được gọi là hệ khả đảo nếu tồn tại quan hệ T' thoả mãn: $x(n) = T'[y(n)]$. Khi đó người ta cũng gọi hệ có quan hệ T' là **hệ đảo** của hệ ban đầu. Nếu ghép nối tiếp một hệ khả đảo với hệ đảo của nó ta được một hệ đồng nhất.

2.9 Hàm truyền đạt của hệ TTBB nhân quả và ổn định

2.9.1 Hàm truyền đạt của hệ TTBB ổn định

Tính ổn định của một hệ TTBB đã được chúng ta khảo sát trong chương số 1. Chúng ta đã có định lý sau đây để khảo sát tính ổn định của một hệ TTBB nếu biết đáp ứng xung h(n) của hệ: Một hệ TTBB có đáp ứng xung h(n) là ổn định khi và chỉ khi:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

Hay nói cách khác S là một giá trị hữu hạn.

Mặt khác chúng ta thấy rằng: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$

Nếu xét |H(z)| khi z nằm trên đường tròn đơn vị hay |z| = 1 ta sẽ có:

$$|H(z)|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = S$$

Như vậy ta thấy rằng nếu hệ TTBB là ổn định thì chắc chắn hàm truyền đạt của hệ sẽ hội tụ tại các điểm z nằm trên đường tròn đơn vị, hay nói cách khác đường tròn đơn vị chắc chắn nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt.

Định lý: Một hệ TTBB là ổn định khi và chỉ khi đường tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt.

2.9.2 Hàm truyền đạt của hệ TTBB nhân quả và ổn định

Đối với hệ TTBB và NQ chúng ta cũng đã biết rằng miền hội tụ của hàm truyền đạt H(z) sẽ là toàn bộ vùng mặt phẳng Z phía ngoài đương tròn bán kính R_h^-. Do đó theo định lý trên thì để hệ ổn định thi đường tròn đơn vị phải bao đường tròn bán kính R_h^- hay: $R_h^- < 1$.

Mặt khác ta thấy rằng các điểm cực của hàm truyền đạt chắc chắn không nằm trong miền hội tụ, trong trường hợp này thì chúng chỉ có thể nằm trong đường tròn bán kính R_h^- nên $Max|z_p| < 1$

Định lý: một hệ TTBB và NQ là ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt đều nằm trong đường tròn đơn vị.

Ví dụ: Cho một hệ TTBB bởi PT-SP-TT-HSH:

$$y(n) + 0.5y(n-1) = 2x(n)-x(n-3$$

a. Hãy xác định hàm truyền đạt của hệ
b. Hãy tính và vẽ các điểm cực và không trên mặt phẳng Z
c. Hệ có nhân quả và ổn định không?

<u>Tóm tắt bài giảng(10):</u> Thời lượng 6 tiết

- Ôn tập chương 2 (1 Tiết)
- Làm bài tập cuối chương (5 tiết)

CHƯƠNG 3

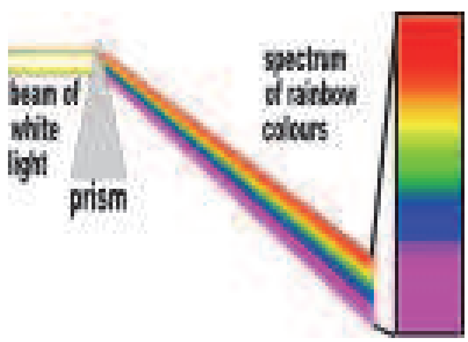
BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Tóm tắt bài giảng(11): Thời lượng 3 tiết

- Giới thiệu về miền tần số
- Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn
- Phép biến đổi Fourier thuận và nghịch của tín hiệu rời rạc
- Các tính chất của phép biến đổi Fourier

Mục đích: Phân tích các đặc tính về pha và tần số của hệ và tín hiệu.

Ví dụ: Xét một ví dụ về lăng kính khi cho ánh sáng trắng đi qua (có thể coi là tín hiệu trên miền thời gian) ta sẽ thu được các vạch phổ tương ứng với các thành phần tần số của ánh sáng: đỏ, da cam, vàng...



Hình 3.1 - Phổ của ánh sáng trắng

Nhận xét: cùng một sự vật hiên tượng nếu quan sát ở những vị trí, góc độ khác nhau ta sẽ thu được các thông tin khác nhau về sự vật hiện tượng đó.

3.1 Phép biến đổi Fourier với tín hiệu liên tục

3.1.1 Tín hiệu liên tục tuần hoàn

- **Định nghĩa:** Một tín hiệu liên tục theo thời gian x(t) là tuần hoàn với chu kỳ T nếu: x(t) = x(t + T) với mọi giá trị thực của t. Giá trị $T_0 > 0$

nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức trên được gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu x(t), khi đó $f_0 = 1/T_0$ được gọi là tần số cơ bản.

- **2 Tín hiệu điều hoà:**

$$x(t) = Cos(\varpi_0 t)$$
$$x(t) = e^{j\varpi_0 t}$$

2 tín hiệu trên đều có chu kỳ cơ bản là: $T_0 = 2\pi/\omega$ và tần số cơ bản $f_0 = \omega/2\pi$

Từ đó suy ra tín hiệu điều hoà phức: $x_k(t) = e^{jk\varpi_0 t}$ $k = 1,2,3,4...$ là các tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ cơ bản $T_0^k = T_0 / k$ do đó đương nhiên tín hiệu $x_k(t)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ T_0. Như vậy một tổ hợp tuyến tính của các hàm điều hoà phức sẽ là một tín hiệu có chu kỳ T_0:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\varpi_0 t}$$

Trong công thức trên các hệ số a_k là các hệ số thực hoặc phức. Thành phần phức ứng với k = 0 là thành phần một chiều (hay không đổi) khi k = 1 hoặc -1 thì thành phần tương ứng có chu kỳ cơ bản đúng bằng T_0 được gọi là thành phần cơ bản hay hài bậc 1, khi k = 2 hoặc -2 thì thành phân tương ứng có chu kỳ cơ bản bằng một nửa T_0 được gọi là hài bậc 2,...thành phần ứng với k = N hoặc –N gọi là hài bậc N. Tín hiệu tuần hoàn x(t) được biểu diễn như trên được gọi là chuỗi Fourier.

Ví dụ:

Xét một tín hiệu tuần hoàn với tần số góc cơ bản $\omega_0 = 2\pi$, biểu diễn theo chuỗi Fourier có dạng:

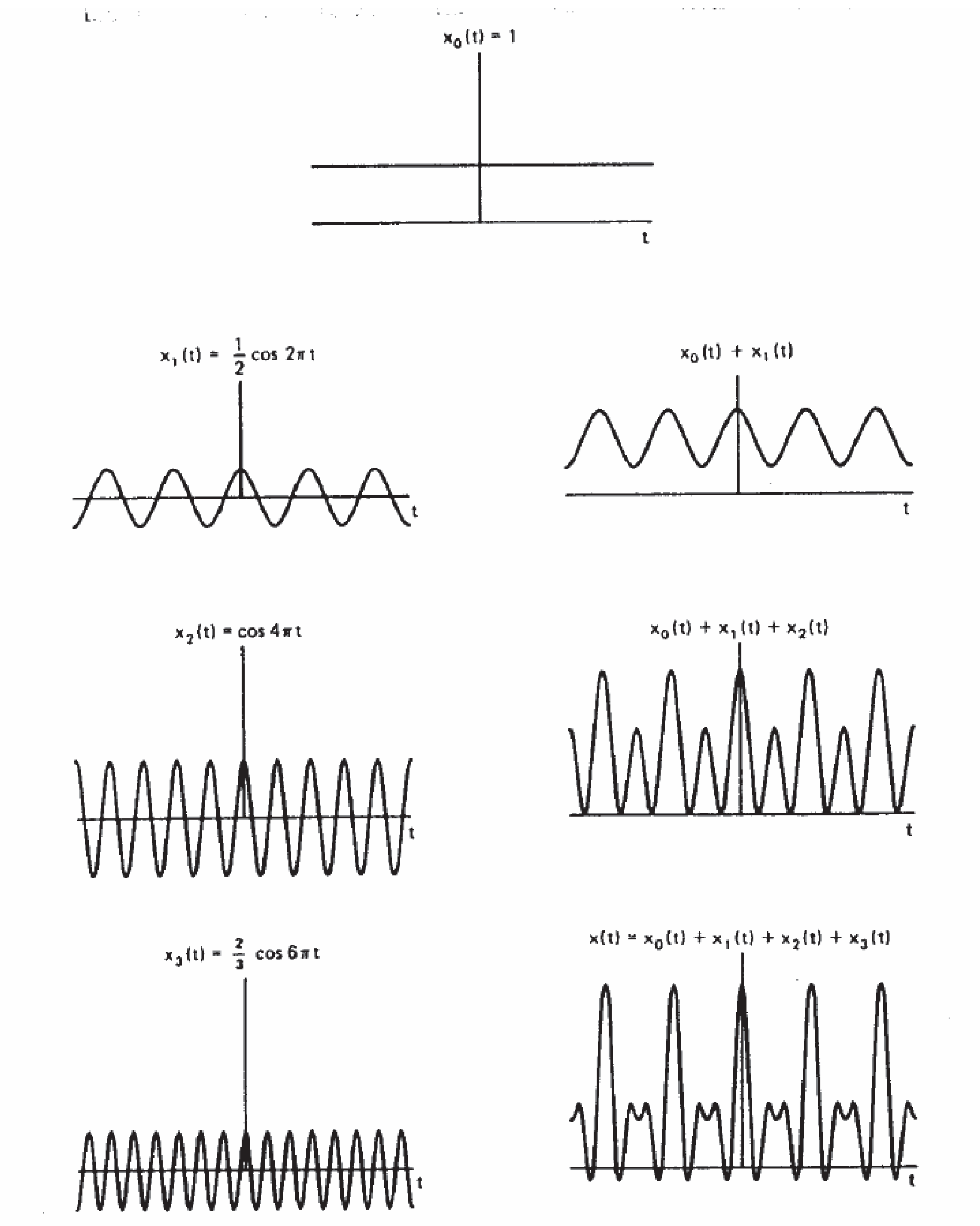
$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

Với $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = 1/2$, $a_2 = a_{-2} = 1/3$ $a_3 = a_{-3} = ¼$

$$x(t) = 1 + 1/4(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + 1/2(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + 1/3(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

$$= 1 + 1/2\mathrm{Cos}(2\pi t) + \mathrm{Cos}(4\pi t) + 2/3\mathrm{Cos}(6\pi t)$$

Kết quả này là một dạng của chuỗi Fourier của tín hiệu thực mà chúng ta đã quen thuộc trong chương trình toán phổ thông. Công thức tổng quát của dạng biểu diễn này sẽ được trình bày trong phần dưới đây. Hình 3.2 minh hoạ việc tổ hợp các thành phần để tạo nên tín hiệu x(t)



H3.2 – Tổ hợp tuyến tính của các thành phần

Xét tín hiệu x(t) thực và tuần hoàn với chu kỳ cơ bản T_0. Gọi $x^*(t)$ là liên hợp phức của x(t) ta có:

$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^*{}_k e^{-jk\varpi_0 t} \\
&= \sum_{k=+\infty}^{-\infty} a^*{}_{-k} e^{jk\varpi_0 t}
\end{aligned}
$$

Trong đó $a^*{}_k$ là liên hợp phức của a_k. Do x(t) là thực nên $x(t) = x^*(t)$. So sánh công thức trên với chuỗi Fourier của tín hiệu x(t) ta có: $a_k = a^*{}_{-k}$ hay $a^*{}_k = a_{-k}$. Từ đó ta viết lại chuỗi Fourier của x(t) như sau:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\varpi_0 t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\varpi_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jk\varpi_0 t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\varpi_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} e^{-jk\varpi_0 t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k e^{jk\varpi_0 t} + a_{-k} e^{-jk\varpi_0 t}) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k e^{jk\varpi_0 t}]
\end{aligned}
$$

Nếu biểu diễn a_k dưới dạng biên độ và pha ta có:

$$
a_k = A_k e^{j\theta_k}
$$

Thay vào đẳng thức cuối cùng ở trên ta có:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k e^{jk\varpi_0 t}] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}[A_k e^{jk\varpi_0 t + \theta_k}] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 A_k \mathrm{Cos}(\mathrm{k}\varpi_0 t + \theta_k)
\end{aligned}
$$

Nếu ta thay:

$$a_k = B_k + jC_k$$

vào đẳng thức trên, thì ta sẽ có:

$$x(t) \quad = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}[B_k Cos(k\varpi_0 t) - C_k Sin(k\varpi_0 t)]$$

là công thức phân tích Fourier mà ta đã quen thuộc trong chương trình toán phổ thông đối với tín hiệu thực, công thức phân tích Fourier của tín hiệu tổng quát (thực hoặc phức) thường được cho dưới dạng $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\varpi_0 t}$, các hệ số a_k còn được gọi là hệ số phổ.

- **Tính toán các hệ số trong công thức phân tích Fourier**

  Giả sử rằng một tín hiệu liên tục tuần hoàn x(t) có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier. Khi đó các hệ số a_n sẽ được xác định bởi công thức sau:

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

3.2 Phép biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục không tuần hoàn

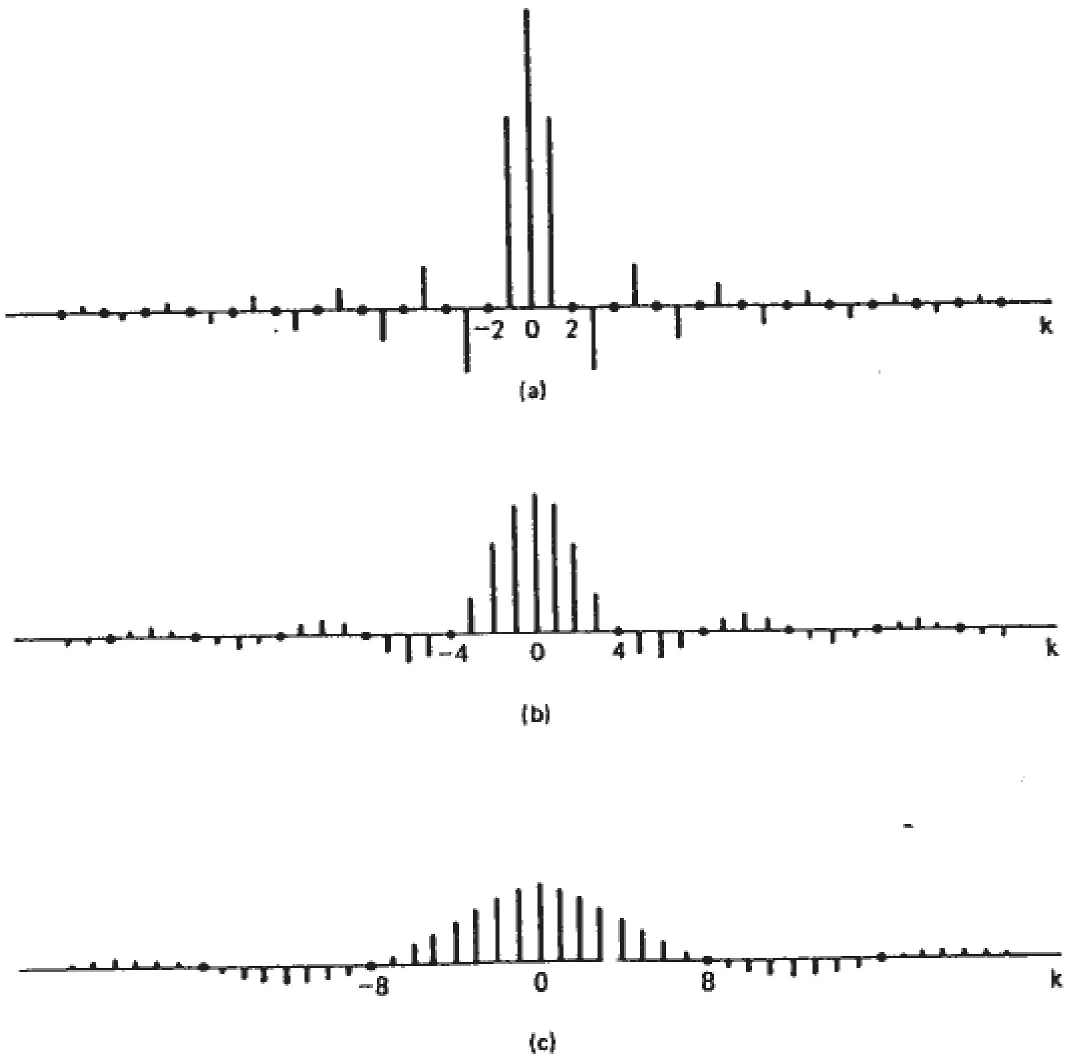
Như trong phần trên chúng ta đã xem xét cách biểu diễn một tín hiệu liên tục tuần hoàn dưới dạng một chuỗi Fourier. Dưới đây chúng ta minh hoạ cách biểu diễn này bằng một ví dụ. Xét tín hiệu x(t) là một xung vuông tuần hoàn với chu kỳ $T_{0:}$

$$x(t) = \begin{cases} 1 |t| < T_1 < T_0 \\ 0 |t| > T_1 \end{cases}$$

Khi đó sử dụng công thức chuôi Fourier ở trên ta có thể tính được:

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Nếu biểu diễn a_k trên đồ thị ta có hình minh hoa như sau:



H3.3 - Biểu diễn các hệ số chuỗi Fourier của xung vuông tuần hoàn

a – $T_0 = 4T_1$

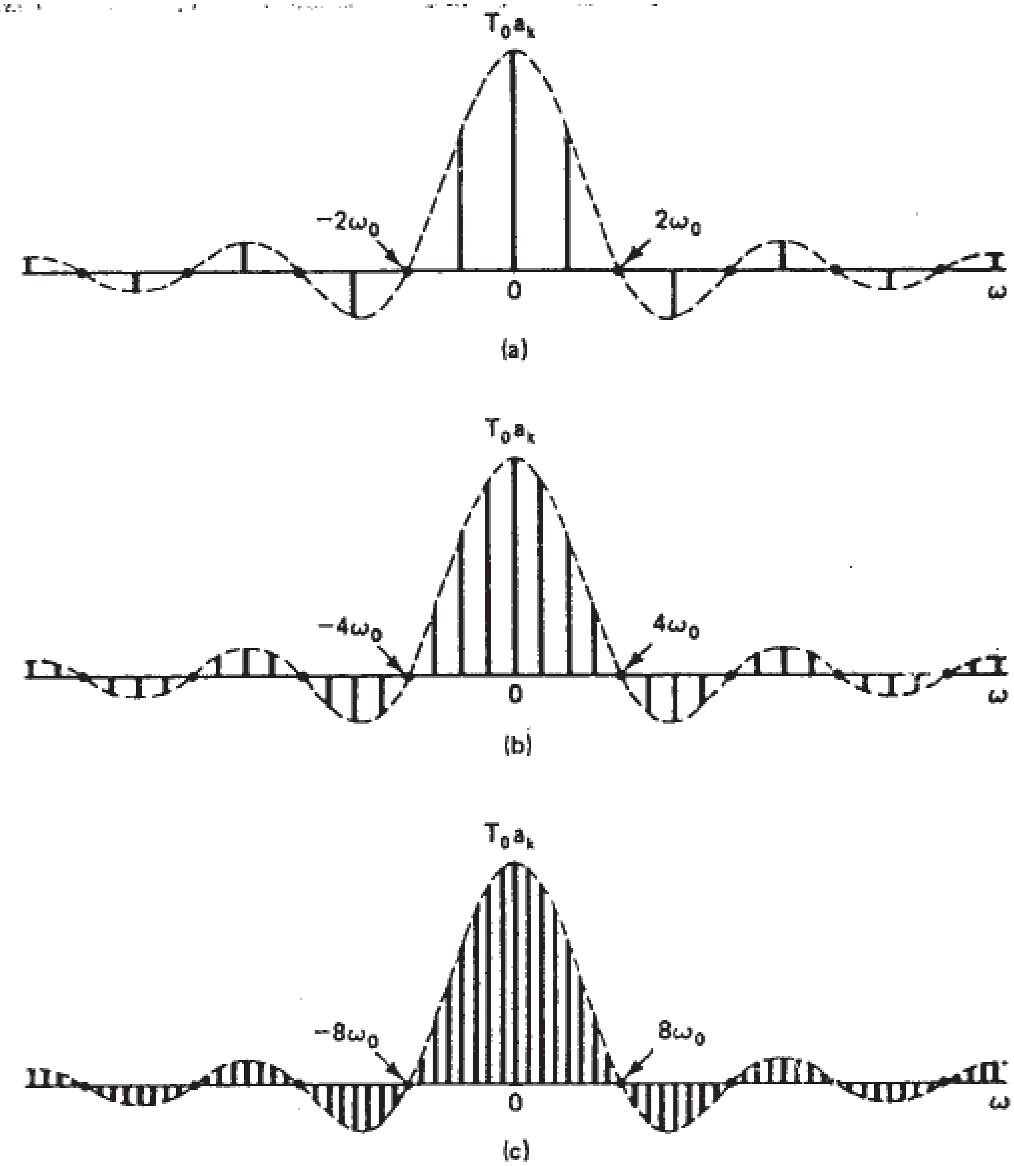
b – $T_0 = 8T_1$

c – $T_0 = 16T_1$

Mặt khác ta thấy rằng $\omega_0 = 2\pi/T_0$ do đó ta có thể viết:

$$T_0 a_k = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

Công thức trên cho ta thấy rằng $T_0 a_k$ chỉ là các mẫu rời rạc của một hàm số liên tục theo biến ω đó là $X(\omega) = \dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$. Hình dưới đây minh hoạ cho ta thấy rằng khi T_0 càng lớn thì số lượng mẫu của hàm X(ω) càng dày đặc.



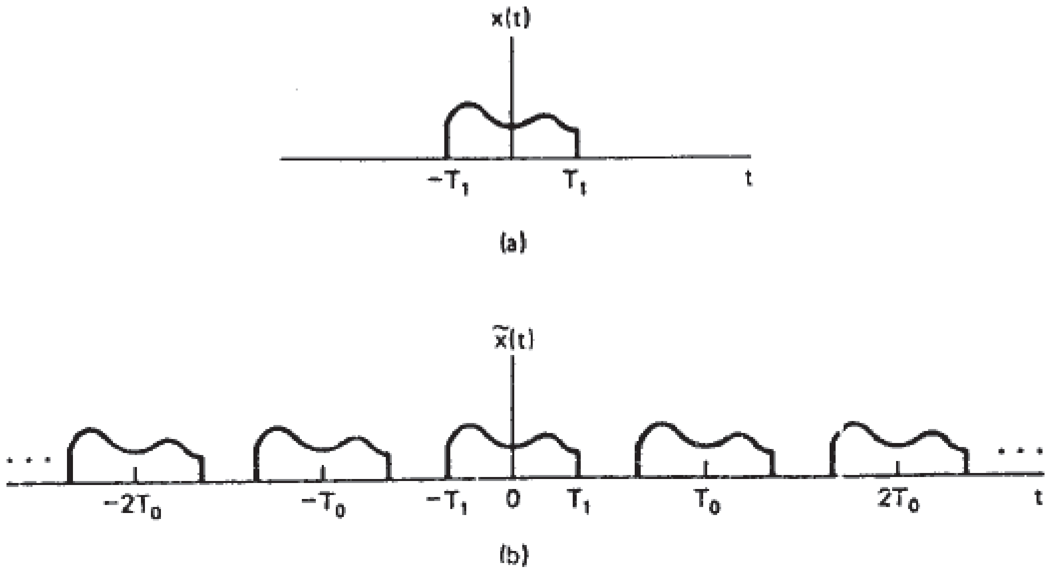
H3.4 – Các hệ số Fourier và đường bao các mẫu

a – $T_0 = 4T_1$

b – $T_0 = 8T_1$

c – $T_0 = 16T_1$

Trở lại với bài toán của chúng ta đối với tín hiệu liên tục không tuần hoàn, rõ ràng khi đó ta có thể giả định rằng chu kỳ của tín hiệu là vô cùng lớn, mặt khác ta hoàn toàn có thể tạo ra tín hiệu liên tục tuần hoàn từ tín hiệu liên tục có độ dài hữu hạn bằng cách xếp chồng. Giả sử ta xét tín hiệu x(t) có độ dài hữu hạn T_0. Khi đó ta sẽ tạo ra tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}$ có dạng sau:



H3.5 - Xếp chồng tuần hoàn

a – Tín hiệu hữu hạn

b – Tín hiệu tuần hoàn

Áp dụng công thức Fourier đối với tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}$ ta có:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Do $\tilde{x}$(t) = x(t) với mọi |t| < $T_0/2$ và x(t) = 0 ngoài khoảng này nên ta có:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Từ đó chúng ta ta tính được ngay đường bao các mẫu T_0a_k được cho bởi:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$$

2 công thức trên được gọi là cặp công thức biến đổi thuận-nghịch của phép biến đổi Fourier đối với tín hiệu liên tục không tuần hoàn.

3.3 Phép biến đổi Fourier với tín hiệu rời rạc

3.3.1 Định nghĩa

Cho tín hiệu rời rạc x(n), phép biến đổi Fourier của x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Như vậy phép biến đổi Fourier đã chuyển tín hiệu x(n) từ miền thời gian sang miền tần số ω (hay tần số f = ω/2π). Chúng ta sẽ dùng ký hiệu sau để mô tả phép biến đổi Fourier của tín hiệu x(n)

$$FT(x(n)) = X(e^{j\omega})$$

$$x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

3.3.2 Các phương pháp biểu diễn $X(e^{j\omega})$

- Biểu diễn dưới dạng phần thực và phần ảo

Bởi vì $X(e^{j\omega})$ là một hàm biến phức nên ta có thể biểu diễn nó trong miền tần số ω dưới dạng phần thực và phần ảo như biểu thức dưới đây:

$$X(e^{j\omega}) = R_e[X(e^{j\omega})] + jI_m[X(e^{j\omega})]$$

$R_e[X(e^{j\omega})]$: là phần thực của $X(e^{j\omega})$

$I_m[X(e^{j\omega})]$: là phần ảo của $X(e^{j\omega})$

- Biểu diễn dưới dạng biên độ và pha

  $X(e^{j\omega})$ làm một hàm biến số phức vậy ta có thể biểu diễn nó dưới dạng module và argument như sau:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

$|X(e^{j\omega})|$: được gọi là phổ biên độ của x(n)

$\arg(X(e^{j\omega}))$: được gọi là phổ pha của x(n)

Ta có quan hệ sau:

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{R_e^{\,2}[X(e^{j\omega})] + \mathrm{I_m}^2[X(e^{j\omega})]}$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{I_m}[X(e^{j\omega})]}{R_e[X(e^{j\omega})]}$$

<u>3.3.3 Sự tồn tại của phép biến đổi Fourier</u>

Phép biến đổi Fourier hội tụ khi và chỉ khi x(n) thoả mãn điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$$

Từ đó suy ra

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Nói cách khác phép biến đổi Fourier luôn hội tụ với các tín hiệu có năng lượng hữu hạn.

Ví dụ: Cho x(n) = $RECT_N(n)$. Hãy tính và vẽ phổ biên độ của x(n)

3.4 Phép biến đổi Fourier ngược

Định lý: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega k} d\omega = \begin{cases} 2\pi & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

Mặt khác ta xét công thức biến đổi Fourier trong 3.3:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega k} X(e^{j\omega})d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)}d\omega$$

Áp dụng định lý nêu trên vào đẳng thức cuối cùng ta có được:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega k} X(e^{j\omega})d\omega$$

Đây chính là công thức biến đổi Fourier ngược, cho phép chuyển tín hiệu từ miền tần số về miền thời gian.

Ví dụ: cho

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Hãy tính x(n).

3.5 Các tính chất của phép biến đổi Fourier

3.5.1 Tính tuyến tính

$FT(\alpha x_1(n)+\beta x_2(n))=\alpha FT(x_1(n))+\beta FT(x_2(n))$

Trong đó α, β là các hằng số thực, $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là các tín hiệu rời rạc.

3.5.2 Tính chất trễ

$FT(x(n-k)) = e^{-j\omega k}FT(x(n))$

Trong đó k là một hằng số nguyên, x(n) là một tín hiệu rời rạc

3.5.3 Tính đối xứng

Xét tín hiệu rời rạc x(n), giả sử $x^*(n)$ là liên hợp phức của x(n). Khi đó ta có: $FT(x(n)) = X(e^{j\omega})$

$FT(x^*(n)) = X^*(e^{-j\omega})$

Trong đó $X^*(e^{j\omega})$ là liên hợp phức của $X(e^{-j\omega})$. Từ đó ta có thể suy ra:

Nếu x(n) là thực ($x(n)=x^*(n)$) thì phổ biến độ $|X(e^{j\omega})|$ là hàm chẵn và phổ pha $\arg[X(e^{j\omega})]$ là hàm lẻ.

3.5.4 Tính đảo trục thời gian

Xét tín hiệu rời rạc x(n), biến đổi Fourier của x(n) là: $FT(x(n)) = X(e^{j\omega})$. Khi đó x(-n) có biến đổi Fourier là: $FT(x(-n)) = |X(e^{j\omega})|e^{-j\varphi(\omega)}$, trong đó:

$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})]$. Như vậy ta thấy rằng phổ biên độ của 2 tín hiệu x(n) và x(-n) như nhau, còn phổ pha của chúng thì trái dấu.

3.5.5 Biến đổi Fourier của tổng chập

$FT(x_1(n)*x_2(n))=FT(x_1(n))FT(x_2(n))$

Trong đó $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là các tín hiệu rời rạc.

3.5.6 Biến đổi Fourier của tích

$FT(x_1(n)x_2(n)) = FT(x_1(n))*FT(x_2(n))$

Trong đó $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là các tín hiệu rời rạc. Phép * ở trên là phép tích chập của 2 tín hiệu liên tục, được định nghĩa như sau:

$$X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(e^{j\upsilon}) X_2(e^{j(\omega-\upsilon)}) d\upsilon$$

3.5.7 Vi phân trong miền tần số

Nếu $FT(x(n))=X(e^{j\omega})$ thì $FT(nx(n)) = j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

3.5.8 Quan hệ Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

Công thức trên cho ta thấy năng lượng của tín hiệu trên miền thời gian và miền tần số luôn bằng nhau.

Tóm tắt bài giảng(12): Thời lượng 3 tiết

- So sánh phép biến đổi Fourier với phép biến đổi Z
- Đánh giá phép biến đổi Fourier trên miền Z
- Biểu diễn hệ rời rạc trên miền tần số
    - Đáp ứng tần số của hệ
    - Quan hệ vào ra trên miền tần số
    - Ý nghĩa của đáp ứng tần số
    - Các bộ lọc lý tưởng

3.6 So sánh phép biến đổi Fourier với phép biến đổi Z

3.6.1 Quan hệ giữa biến đổi Fourier với biến đổi Z

Quan sát công thức biến đổi Z trong chương số 2 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$

và công thức biến đổi Fourier trong mục 3.3 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ ta thấy ngay rằng: $X(e^{j\omega}) = X(z)$ khi $z = e^{j\omega}$ hay khi điểm phức z di chuyển trên đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng phức.

3.6.2 Đánh giá $X(e^{j\omega})$ sử dụng X(z)

Ở trên ta thấy rằng phép biến đổi Fourier là một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi Z. Do đó người ta có thể sử dụng phép biến đổi Z như một công cụ toán học để giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến đổi

Fourier như xác định phổ biên độ hay phổ pha của một tín hiệu. Sau đây ta sẽ xem xét phương pháp đánh giá $X(e^{j\omega})$ sử dụng X(z).

Giả sử X(z) được biểu diễn ở dạng cực và không (dạng thường thấy)

$$X(z) = C\frac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_{o_r})}{\prod_{l=1}^{N}(z - z_{p_l})}$$

Trong đó z_0 và z_p là các điểm không và cực của X(z), M,N là số không và cực tương ứng. Khi đó thay $z = e^{j\omega}$ vào đẳng thức trên ta được $X(e^{j\omega})$ như sau:

$$X(e^{j\omega}) = C\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega} - z_{o_r})}{\prod_{l=1}^{N}(e^{j\omega} - z_{p_l})}$$

Đặt

$$M_{o_r} = | e^{j\omega} - z_{o_r} |$$
$$\varphi_{o_r} = \arg[e^{j\omega} - z_{o_r}]$$
$$M_{p_l} = | e^{j\omega} - z_{p_l} |$$
$$\varphi_{p_l} = \arg[e^{j\omega} - z_{p_l}]$$

Khi đó ta có thể viết $X(e^{j\omega})$ ở dạng sau:

$$X(e^{j\omega}) = C \frac{\prod_{r=1}^{M} M_{o_r}}{\prod_{l=1}^{N} M_{p_l}} e^{j(\sum_{r=1}^{M} \varphi_{o_r} - \sum_{l=1}^{N} \varphi_{p_l})}$$

Từ đó suy ra:

$$| X(e^{j\omega}) | = C \frac{\prod_{r=1}^{M} M_{o_r}}{\prod_{l=1}^{N} M_{p_l}}$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \sum_{r=1}^{M} \varphi_{o_r} - \sum_{l=1}^{N} \varphi_{p_l}$$

Ví dụ: Cho $X(z) = \frac{z-1}{z^2+z+1}$ Hãy đánh giá $X(e^{j\omega})$ với $\omega=\pi/3$.

3.7 Biểu diễn hệ rời rạc trong miền tần số liên tục

3.7.1 Đáp ứng tần số

Trong chương 1 chúng ta đã biết rằng đáp ứng xung h(n) là một tham số đặc trưng cho hệ xử lý tín hiệu TTBB, mặt khác h(n) chính là tín hiệu ra khi tín hiệu vào hệ là δ(n) hay: h(n) = T(δ(n)). Chuyển sang miền tần số ta có tín hiệu vào

$$X(e^{j\omega}) = FT(\delta(n)) = e^{j\omega n}$$

Khi đó đáp ứng ta của hệ được tính như sau:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega m}\right]e^{j\omega n} \end{aligned}$$

Đặt $H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega m}$ khi đó ta có: $y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$.

$H(e^{j\omega})$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ TTBB.

Nhận xét: Đáp ứng tần số của hệ TTBB chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung. Từ đó ta có cặp công thức:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega n}H(e^{j\omega})d\omega$$

3.7.2 Quan hệ vào ra trên miền tần số

Theo tính chất biến đổi Fourier của tổng chập mà ta xét ở trên thì ta có:

Trên miền thời gian: $y(n) = x(n)*h(n)$

Trên miền tần số: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

Ý nghĩa: Phổ của tín hiệu cho ta biết các thành phần tần số của tín hiệu còn đáp ứng tần số của hệ TTBB cho ta biết ứng xử của hệ TTBB với các thành phần tần số của tín hiệu vào.

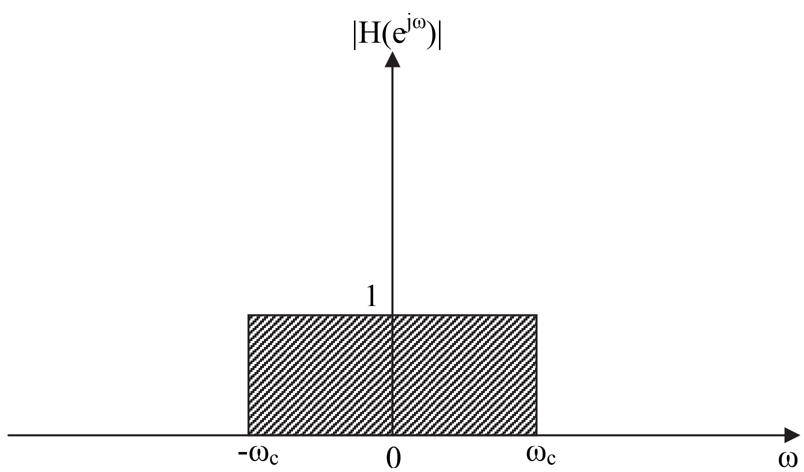
3.7.3 Các bộ lọc lý tưởng

- **Bộ lọc thông thấp lý tưởng**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c > 0 \end{cases}$$

Hình dưới đây minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp lý tưởng



H3.6 – Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp lý tưởng

Ví dụ: Xét bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng xung cho bởi

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c > 0 \end{cases}$$

Sử dụng công thức biến đổi Fourier ngược ta có thể tính được đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp lý tưởng như sau:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega = \left.\frac{e^{j\omega n}}{2\pi jn}\right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2j\sin(\pi n)}{2\pi jn} = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \end{aligned}$$

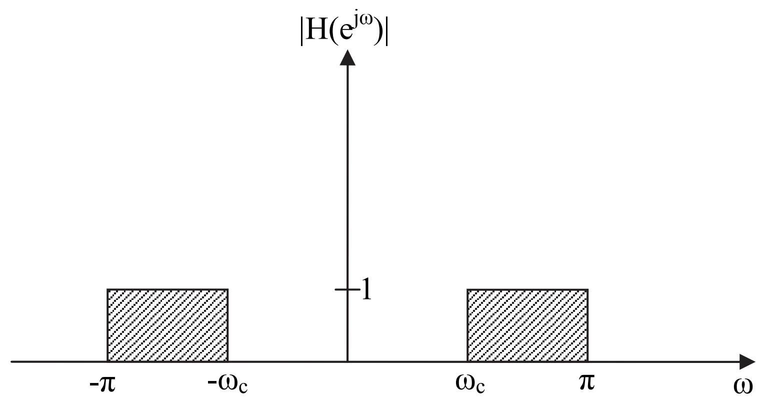
Nhận xét:

- Đáp ứng xung h(n) là đối xứng
- Đáp ứng xung h(n) không nhân quả
- Bộ lọc thông thấp lý tưởng không thực hiện được về mặt vật lý

- **Bộ lọc thông cao lý tưởng**

Bộ lọc thông cao lý tưởng có đáp ứng biên độ được cho bởi

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c > 0 \end{cases}$$

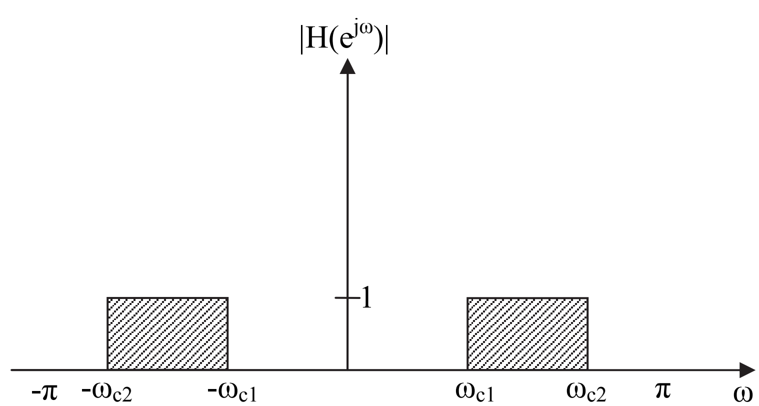


H3.7 – Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng

- **Bộ lọc thông dải lý tưởng**

Bộ lọc thông dải lý tưởng có đáp ứng biên độ cho bởi

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0 & |\omega| > \omega_{c2}, |\omega| < \omega_{c1} \end{cases}$$



H3.8 – Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông dải lý tưởng

<u>Tóm tắt bài giảng(13):</u> Thời lượng 3 tiết

- Ôn tập chương 3
- Làm bài tập chương 3

CHƯƠNG 4
PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC VÀ GIẢI THUẬT TÍNH BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH

Tóm tắt bài giảng(14): Thời lượng 3 tiết

- Nhắc lại nhanh về phép biến đổi Fourier liên tục
- Phép biến đổi Fourier thuận và nghịch
- Lấy ví dụ tính trực tiếp DFT
- Giải thuật FFT
- Lấy ví dụ tính theo giải thuật FFT và so sánh với cách tính trực tiếp
- Giao bài tập thực hành về lập trình FFT
- Hàm cửa sổ

4.1 Phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu tuần hoàn

Trong chương số 3 chúng ta đã biết đến phép biến đổi Fourier liên tục của tín hiệu rời rạc x(n): $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$. Chúng ta thấy ngay rằng trong công thức trên $X(e^{j\omega})$ là một hàm số phức liên tục theo ω, do đó phổ biên độ và phổ pha tương ứng cũng sẽ là các hàm thực liên tục theo biên số ω tương ứng. Mặt khác để cài đặt trong thực tế chúng ta chỉ có thể lưu trữ được số lượng hữu hạn các giá trị rời rạc, do đó trong phần này chúng ta sẽ xem xét một biểu diễn rời rạc của công thức biến đổi Fourier nói trên. Trước hết ta sẽ rời rạc hoá miền giá trị ω từ 0 đến 2π thành N điểm với khoảng cách 2π/N.

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k \qquad k = 0,1,2...N$$

Khi đó giá trị của $X(e^{j\omega})$ tại các điểm rời rạc Ω_k được tính bằng:

$$X(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Trong đó khoảng [-∞,+∞] là chu kỳ của tín hiệu của tín hiệu không tuần hoàn. Do đó với tín hiệu x(n) tuần hoàn với chu kỳ N ta có công thức sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0,1,2...N$$

Công thức trên được gọi là phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu tuần hoàn.

Nhận xét: Các giá trị X(k) chính là các mẫu rời rạc của $X(e^{j\omega})$.

4.2 Phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc có chiều dài hữu hạn

Trong thực tế chúng ta thường chỉ thu được các tín hiệu rời rạc có số lượng mẫu hữu hạn (chiều dài hữu hạn) do đó để áp dụng được phép biến đổi Fourier rời rạc nói trên với tín hiệu rời rạc có chiều dài hữu hạn, ta sẽ xem tín hiệu có chiều dài hữu hạn như là một chu kỳ của một tín hiệu rời rạc tuần hoàn. Giả sử ta xét tín hiệu x(n) có N mẫu, khi đó ta sẽ xem x(n) như một chu kỳ của tín hiệu rời rạc tuần hoàn $\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n+kN)$. Áp dụng phép biến đổi Fourier rời rạc với tín hiệu $\tilde{x}(n)$ ta có:

$$\tilde{X}(k) \quad = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Mặt khác ta thấy rằng $\tilde{X}(k)$ cũng là một tín hiệu rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N và X(k) là một chu kỳ của $\tilde{X}(k)$ từ đó ta có công thức biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu x(n):

$$X(k) \quad = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad k = 0,1,2...N-1$$

Từ công thức trên ta có thể tinh được x(n) bằng công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược sau:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Ví dụ: Cho tín hiệu x(n) có độ dài 4 x(n) = {-1,1,2,3} Hãy tính các giá trị X(k) với k=0,1,2,3.

4.3 Giải thuật FFT

Trong phần 4.2 chúng ta đã xây dựng công thức biến đổi Fourier rời rạc tuy nhiên có thể thấy qua ví dụ trên rằng số lượng phép tính cần thực hiện là khá lớn tỷ lệ thuận với $N^{2,}$ hay nói cách khác công thức có độ phức tạp $O(N^2)$ do đó với các giá trị N lớn phương pháp tính trực tiếp sẽ tốn khá nhiều thời gian, sau đây ta sẽ xem xét giải thuật để tính biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc có chiều dài N x(n) với độ phức tạp nhỏ hơn.

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{\substack{r=0 \\ n=2r}}^{\frac{N}{2}-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{\substack{l=0 \\ n=2l+1}}^{\frac{N}{2}-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}rk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2l+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}rk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}lk}
\end{aligned}$$

Đến đây chúng ta có thể thấy rằng chúng ta gặp lại 2 bài toán tính biến đổi Fourier rời rạc của 2 dãy con x(2r) và x(2l+1) với chiều dài N/2. Sử dụng các kỹ thuật đệ quy bài toán biến đổi Fourier rời rạc sẽ được giải quyết với độ phức tạp O(NlogN) nhỏ hơn rất nhiều so với việc ta tính toán trực tiếp công thức ban đầu độ phức tạp lên tới $O(N^2)$.

Ví dụ: Cho x(n) = {-1,1,2,3} Hãy tính X(k) với k=0,1,2,3 sử dụng cách tính trực tiếp và giải thuật FFT, So sánh số lượng phép tính cần thực hiện trong 2 phương pháp.

4.4 Hàm cửa sổ

Chúng ta đều biết rằng trong công thức biến đổi Fourier liên tục $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$ tín hiệu được giả định là tồn tại trên toàn trục thời gian từ -∞ đến +∞, trong khi đó thực tế ta luôn sử dụng từng đoạn có chiều dài hữu hạn (N) của tín hiệu x(n) (tín hiệu quan sát được) thu được bằng cách nhân x(n) với một hàm cửa sổ:

$$x^{'}(n) = x(n)W(n)$$

W(n) – là một hàm cửa sổ, để giới hạn chiều dài quan sát x(n),Ví dụ: W(n) = $RECT_N(n)$.

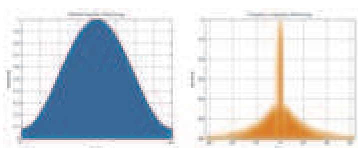
Thực hiện phép biến đổi Fourier với tín hiệu $x^{'}(n)$ ta có:

$$X^{'}(f) = X(f)*W(f)$$

Trong đó X(f) là phổ tín hiệu x(n) còn W(f) là phổ của hàm cửa sổ w(n). Như vậy để phổ của tín hiệu quan sát và tín hiệu gốc sai khác nhau ít nhất ta thấy rằng hàm W(f) cần có dạng của một xung đơn vị.

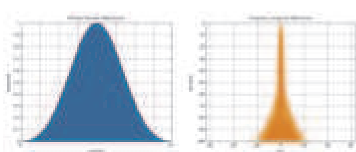
Dưới đây là một vài hàm cửa sổ quan trọng và phổ tương ứng:

- Cửa sổ Hamming



$$w(n) = 0.53836 - 0.46164\ \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

- Cửa sổ Blackman



$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

$$a_0 = 0.42; \quad a_1 = 0.5; \quad a_2 = 0.08$$

<u>Tóm tắt bài giảng(15):</u> Thời lượng 1 tiết

- Trả lời các câu hỏi, thắc mắc của sinh viên

BÀI TẬP MÔN XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Bài 1.1 Cho tín hiệu rời rạc $x(n) = \begin{cases} -3n & -2 \le n \le 2 \\ 2n & 3 \le n \le 5 \\ 0 & n\, khac \end{cases}$

Hãy vẽ tín hiệu x(n), x(2n), x(n/2), $x(n^2)$, x(-n)

Bài 1.2 Hãy xem xét tính tuyến tính và bất biến của hệ sau:

a. $T(x(n)) = x^2(n)$
b. T(x(n)) = nx(n)

Bài 1.3 Hãy tính tổng chập x(n)*h(n) biết rằng:

a. x(n) = u(n), h(n) = $RECT_3(n+1)$
b. x(n) = $RECT_4(n-2)$, h(n) = u(n) – u(n-3)
c. x(n) = u(-n), h(n) = δ(n+3)+δ(n-2)

Bài 1.4 Cho 2 hệ TTBB như sau:

Hệ S1: y(n) = 2x(n) + x(n-2)

Hệ S2: y(n) = x(n+1)-x(n-1)

a. Ghép nối tiếp 2 hệ trên
b. Ghép song song 2 hệ trên

Hãy tìm quan hệ vào-ra của hệ tương đương

Bài 1.5 Cho 2 hệ TTBB có đáp ứng xung tương ứng là:

$h_1(n) = 3^n u(n)$ và $h_2(n) = 2^{-n}$.

Ghép nối tiếp 2 hệ TTBB trên, hãy tìm đáp ứng xung của hệ tương đương.

Bài 1.6 Cho hệ TTBB có PTSP:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k) + \ldots$$

Hỏi hệ có ổn định không?

Bài 1.7 Giải PTST sau:

$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n)+2x(n-1)$

Với $y(-1)=y(-2)=0$ và $x(n) = 4^n u(n)$

Bài 1.8 Cho hệ TTBB có PTSP sau:

$y(n) + 2y(n-2) = 2x(n)-3x(n-1)+x(n-3)$

Hãy sơ đồ chuẩn I và chuẩn II.

Bài 2.1 Cho tín hiệu rời rạc $x(n) = u(n)$. Hãy tính $X(z)$ và miền hội tụ của $X(z)$.

Bài 2.2 Hãy tính tổng chập $x1(n)*x2(n)*x3(n)$ sử dụng phép biến đổi Z

$$x_1(n) = RECT_3(n),\ x_2(n) = u(n) - u(n-4),\ x_3(n) = \delta(n)$$

Bài 2.3 Dùng phương pháp thặng dư tìm x(n) biết

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

Bài 2.4 Hãy tính biến đổi Z ngược

$$X(z) = \frac{1+z}{z^2-3z+2} \text{ với } |z|>2$$

Bài 2.5 Sử dụng phép biến đổi Z một phía để giải PTST:

$$y(n) +2y(n-2)=2x(n)-3x(n-1)+x(n-3)$$

Biết $y(n)=0$ với $n<0$ và $x(n) =3^n$

Bài 2.6 Hãy khảo sát tính nhân quả và ổn định của hệ TTBB có PTSP:

$$y(n)+y(n-2)=x(n)+3x(n-1)+x(n-2)$$

Vẽ sơ đồ chuẩn I và II.

Bài 2.7 Cho hệ TTBB có PTSP:

$$2y(n)+y(n-1)=x(n)-3x(n-1)+2x(n-2)$$

a. Xác định hàm truyền đạt của hệ

b. Hệ có nhân quả và ổn định không

Bài 3.1 Cho bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & \omega\, khac \end{cases}$$

Hãy vẽ đáp ứng biên độ và tính đáp ứng xung của hệ. Hệ có nhân quả không?

Bài 3.2 Một hệ FIR có đáp ứng xung $h(0)=h(1)=\alpha$, $h(2)=\beta$, $h(n)=0$ với các giá trị n còn lại. Hãy tính đáp ứng biên độ của hệ.

Bài 3.3 Cho hệ TTBB có đáp ứng xung

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

a. Tính đáp ứng tần số của hệ
b. Tìm y(n) biết $x(n) = Ae^{j\pi/2}$

Bài 3.4 Cho hệ TTBB có PTSP

$$y(n) + y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

Tính đáp ứng tần số và hàm truyền đạt của hệ.

Bài 4.1 Cho tín hiệu rời rạc x(n) = {-1,2,3,4} Tính X(k),k = 0..3

Bài 4.2 Sử dụng giải thuật FFT hãy tính X(k), k=0..7 của dãy sau

x(n)={-1,2,4,-3,4,2,2,4}