ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Các thuật toán FFT và ứng dụng

TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

Năm học 2017 - 2018

Outline

Ứng dụng của DFT

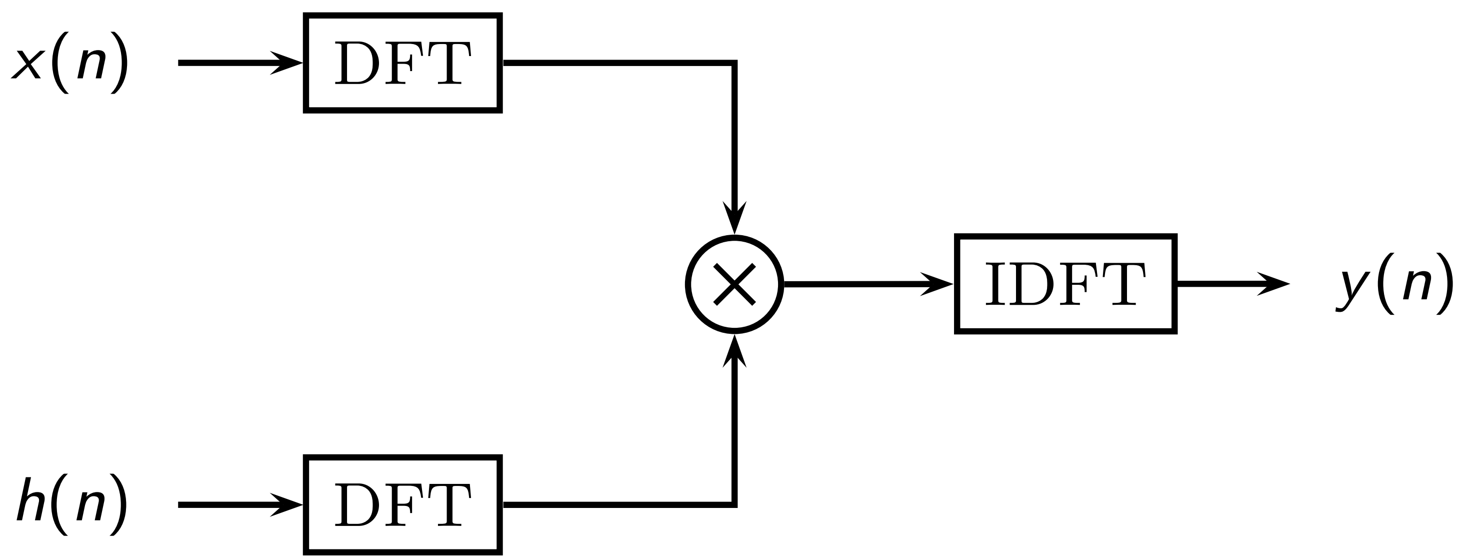
Các thuật toán FFT

Thực hiện hệ thống FIR

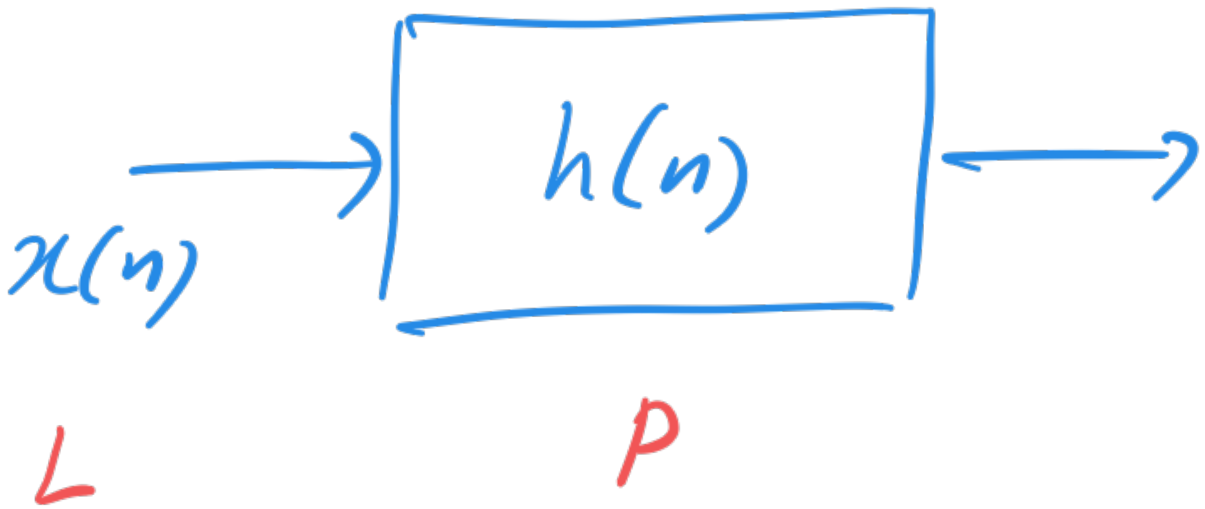
Xét hệ thống LTI với đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài hữu hạn P. Khi đầu vào $x(n)$ chiều dài L, ta có:

$$y(n) = x(n) * h(n) = x(n)_N (*)_M h(n)_N$$

trong đó $N \geq L + P - 1$, các dãy $x(n)_N, h(n)_N$ được chèn thêm 0 vào cuối.



Trên thực tế, đầu vào $x(n)$ rất dài so với đáp ứng xung $h(n)$ (có thể coi dài tới vô hạn): $L \gg P$. Khi đó, chia $x(n)$ thành các đoạn nhỏ trước khi chập $\rightarrow$ chập phân đoạn.

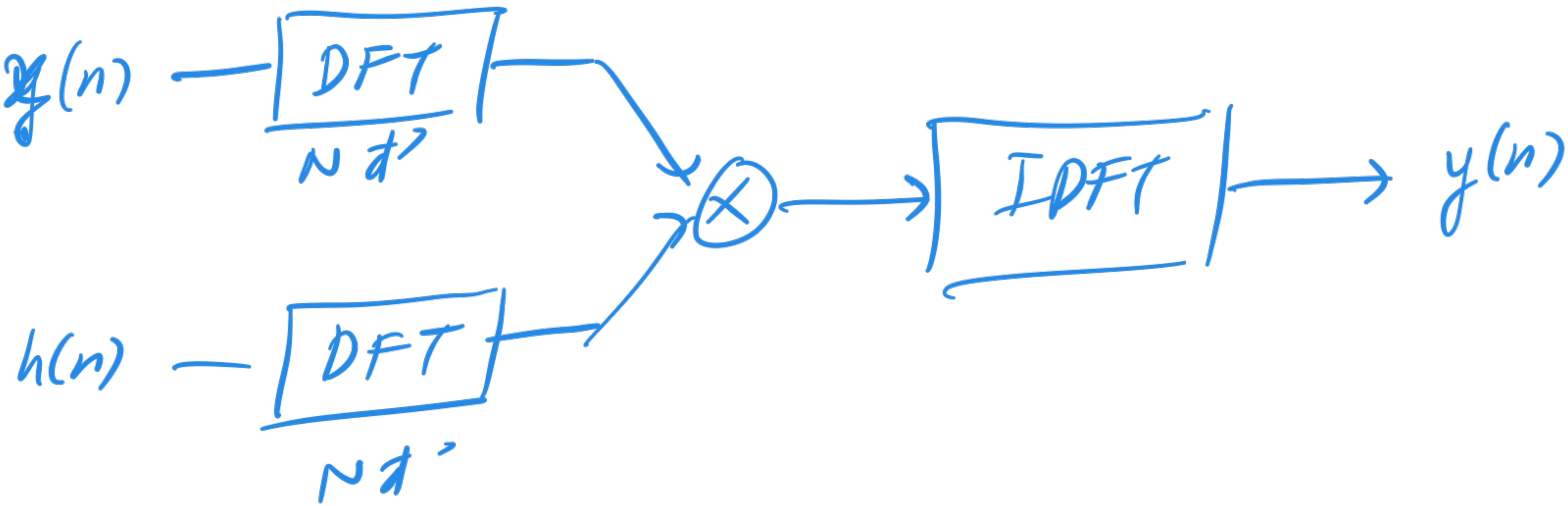


$$y(n) = x(n) * h(n)$$

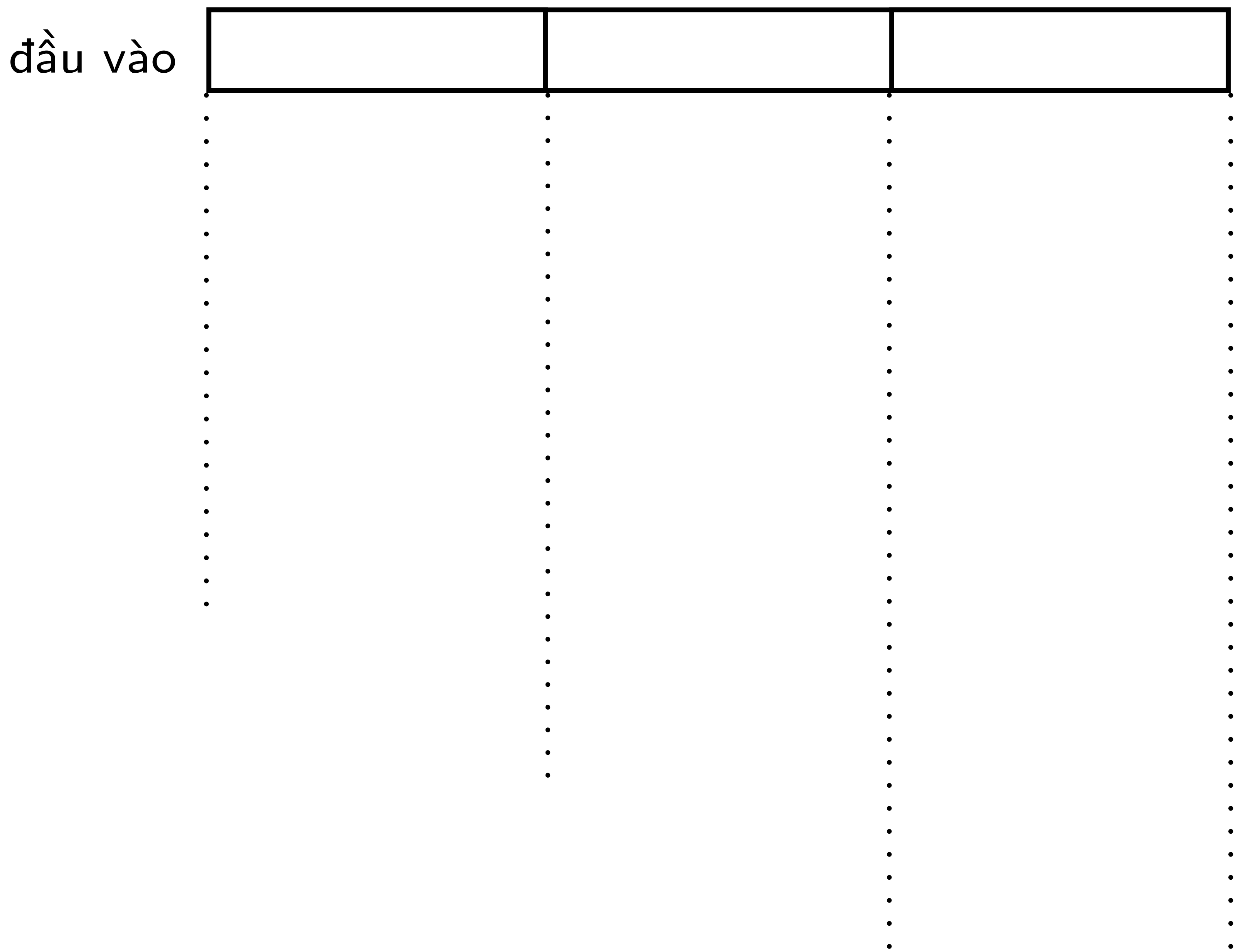
$L+P-1$

$$= x(n) \circledast_N h(n)$$

$$(N \geq L+P-1)$$



Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)

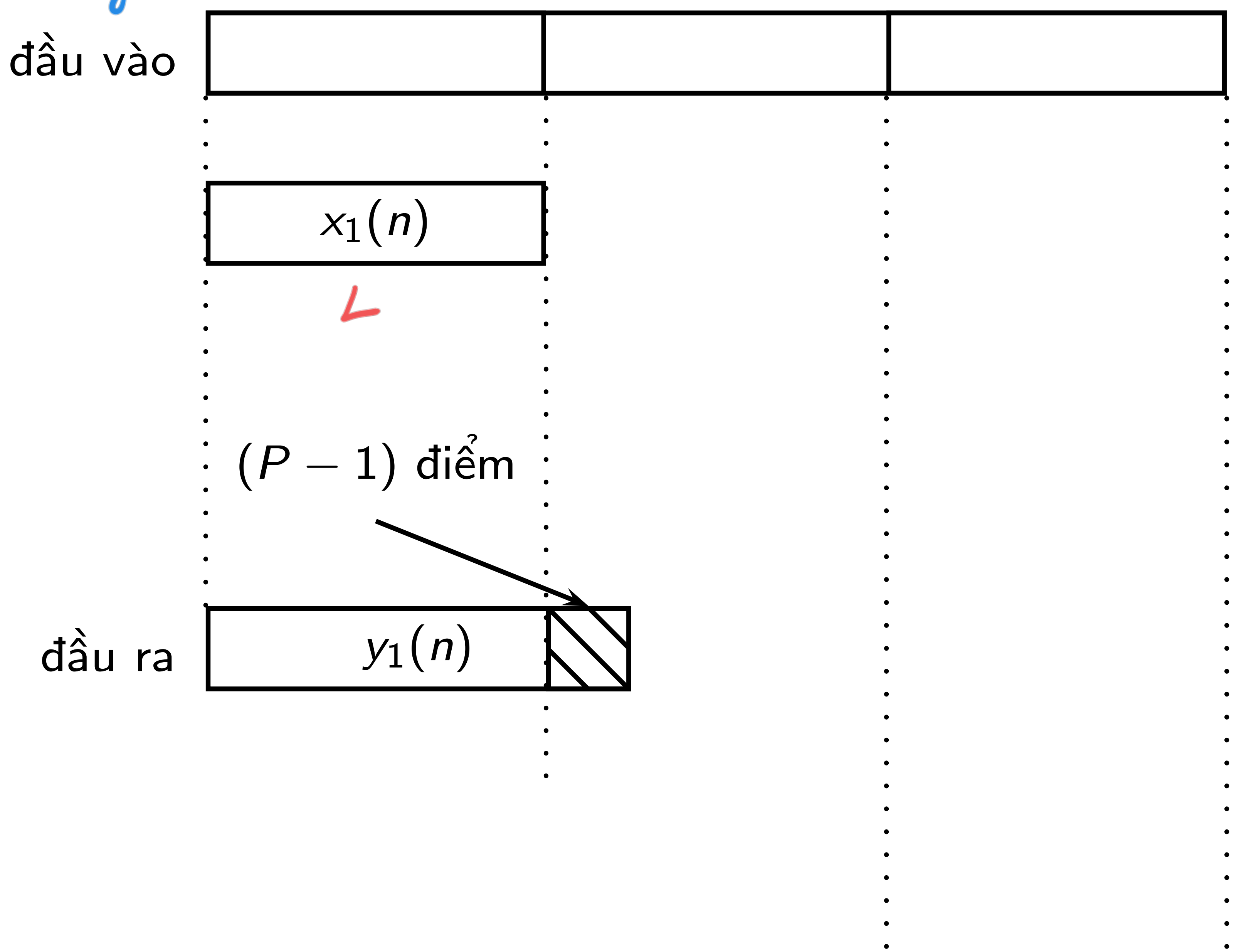


Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)

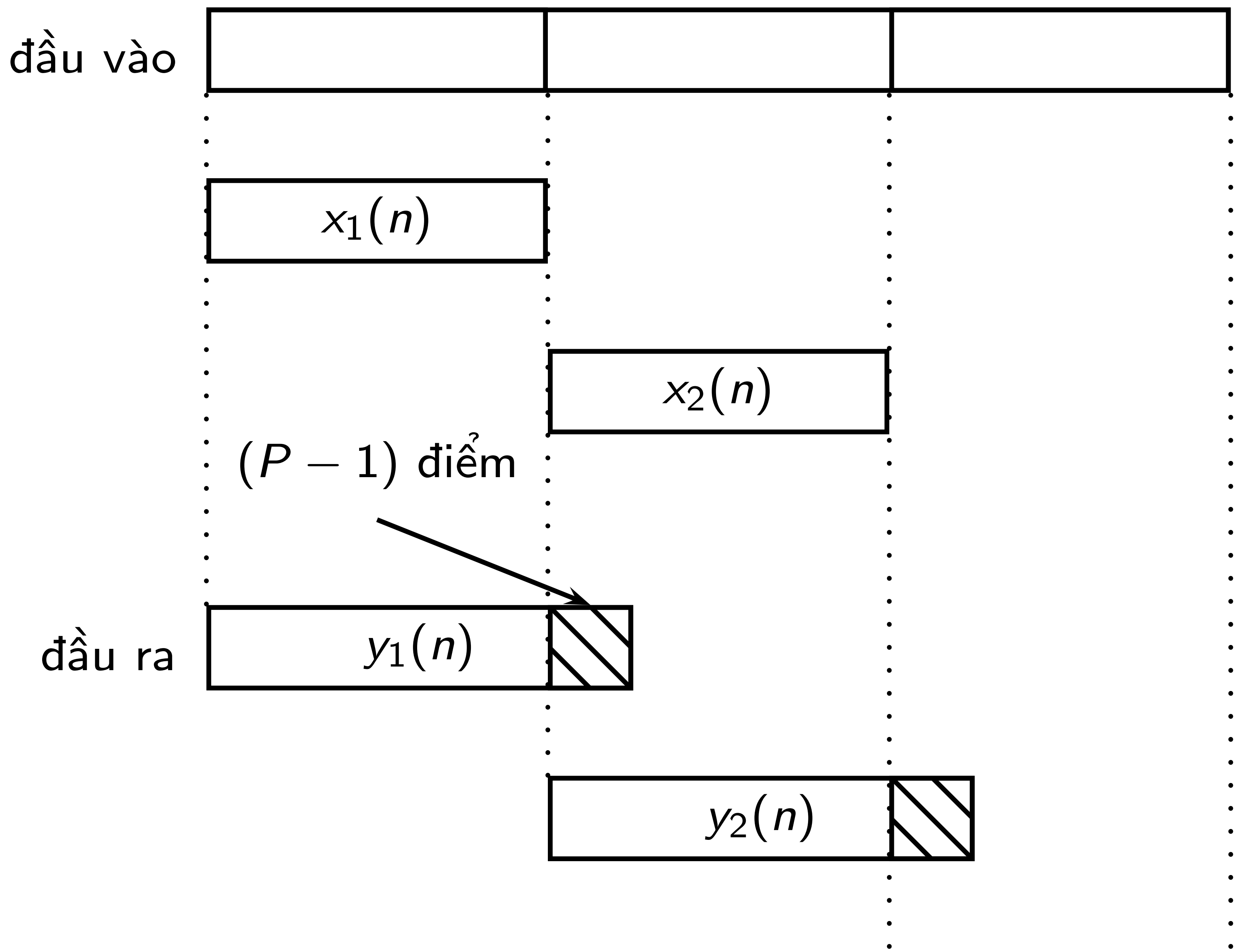
$h(n)$ - P

$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + \dots$

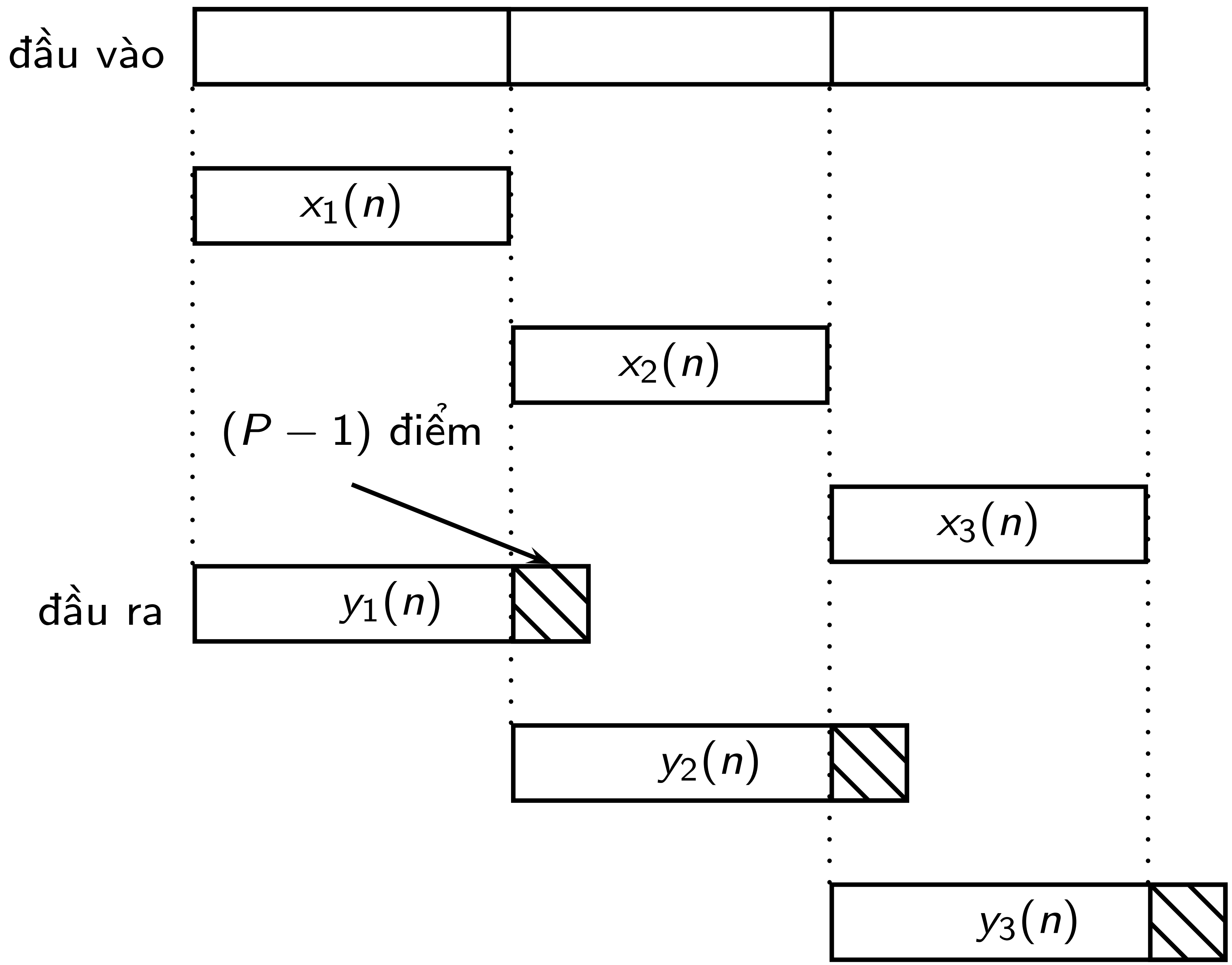
$y(n) = x(n) * h(n) = x_1(n) * h(n) + x_2(n) * h(n) + \dots$



Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)

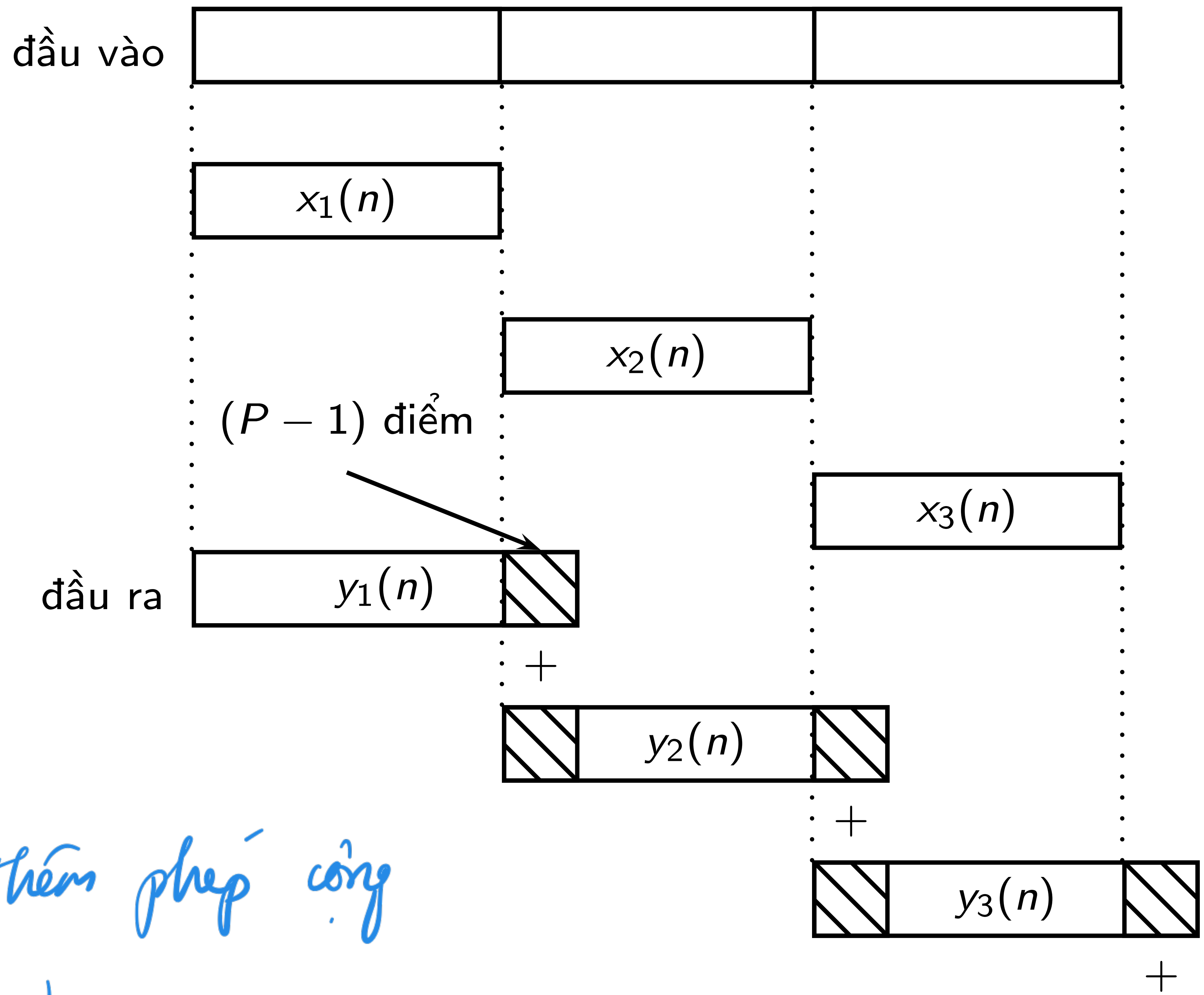


Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)



$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + \dots$

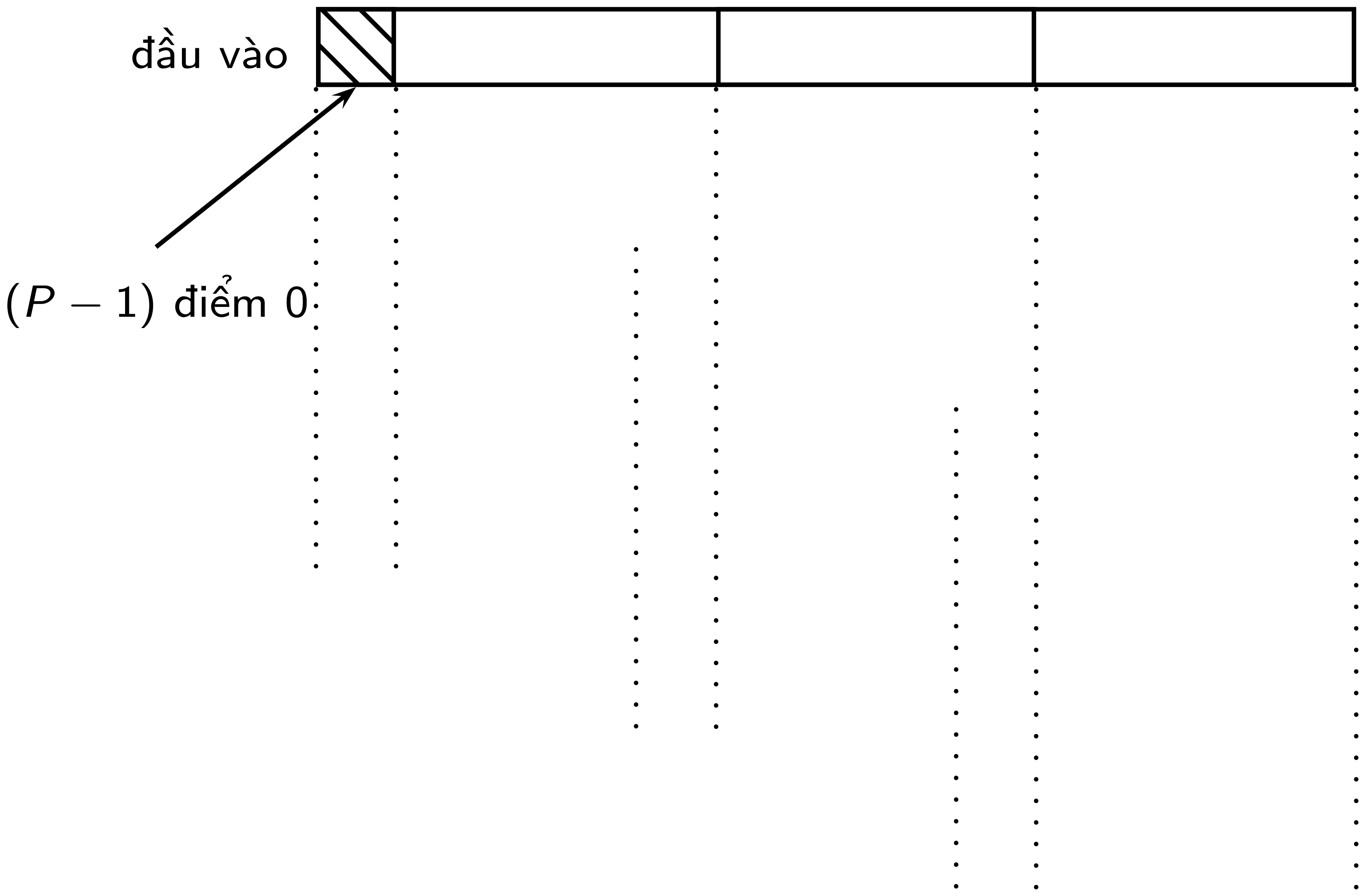
Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)



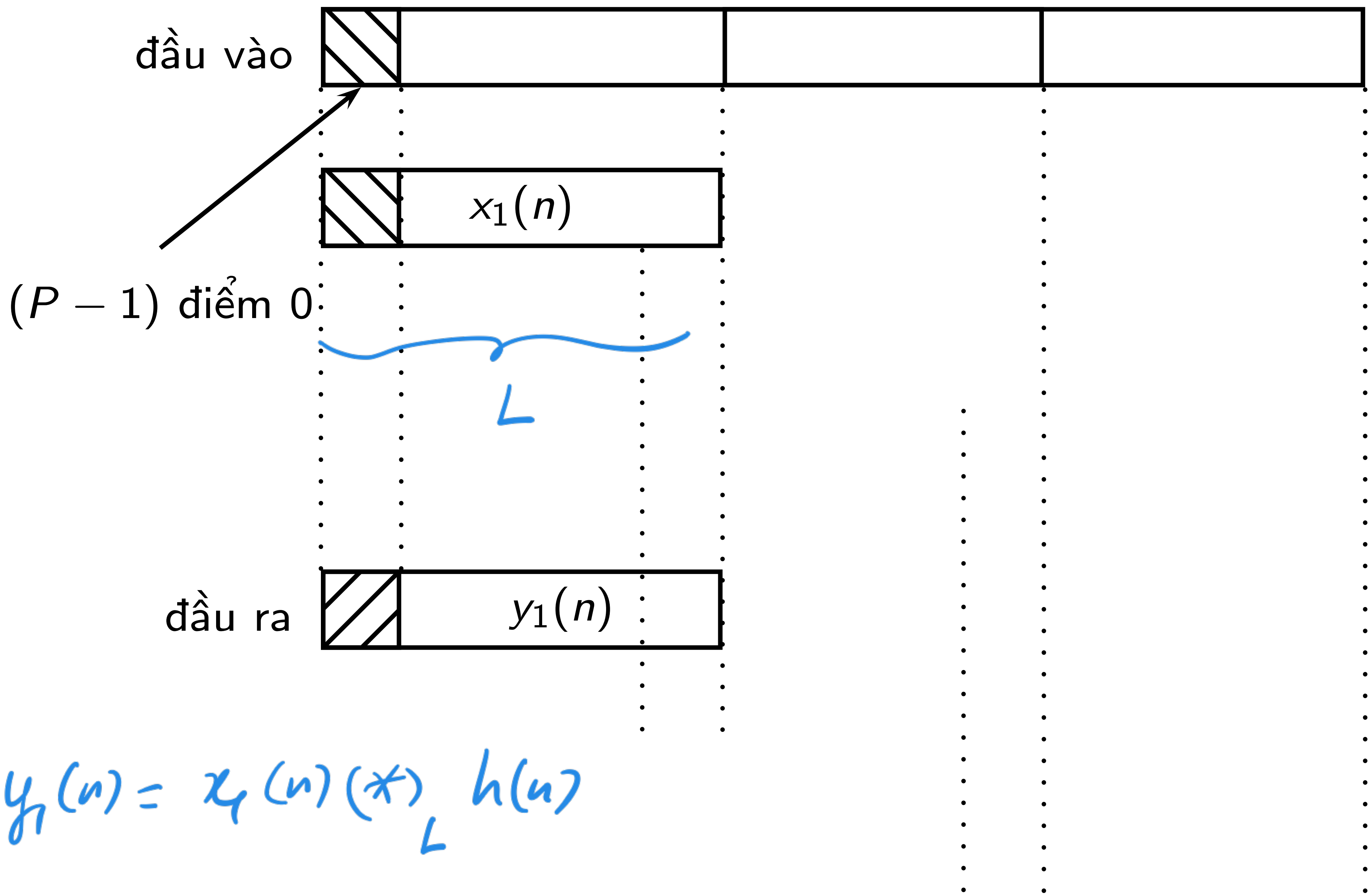
thêm phép cộng

trễ 1 đoạn

Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)

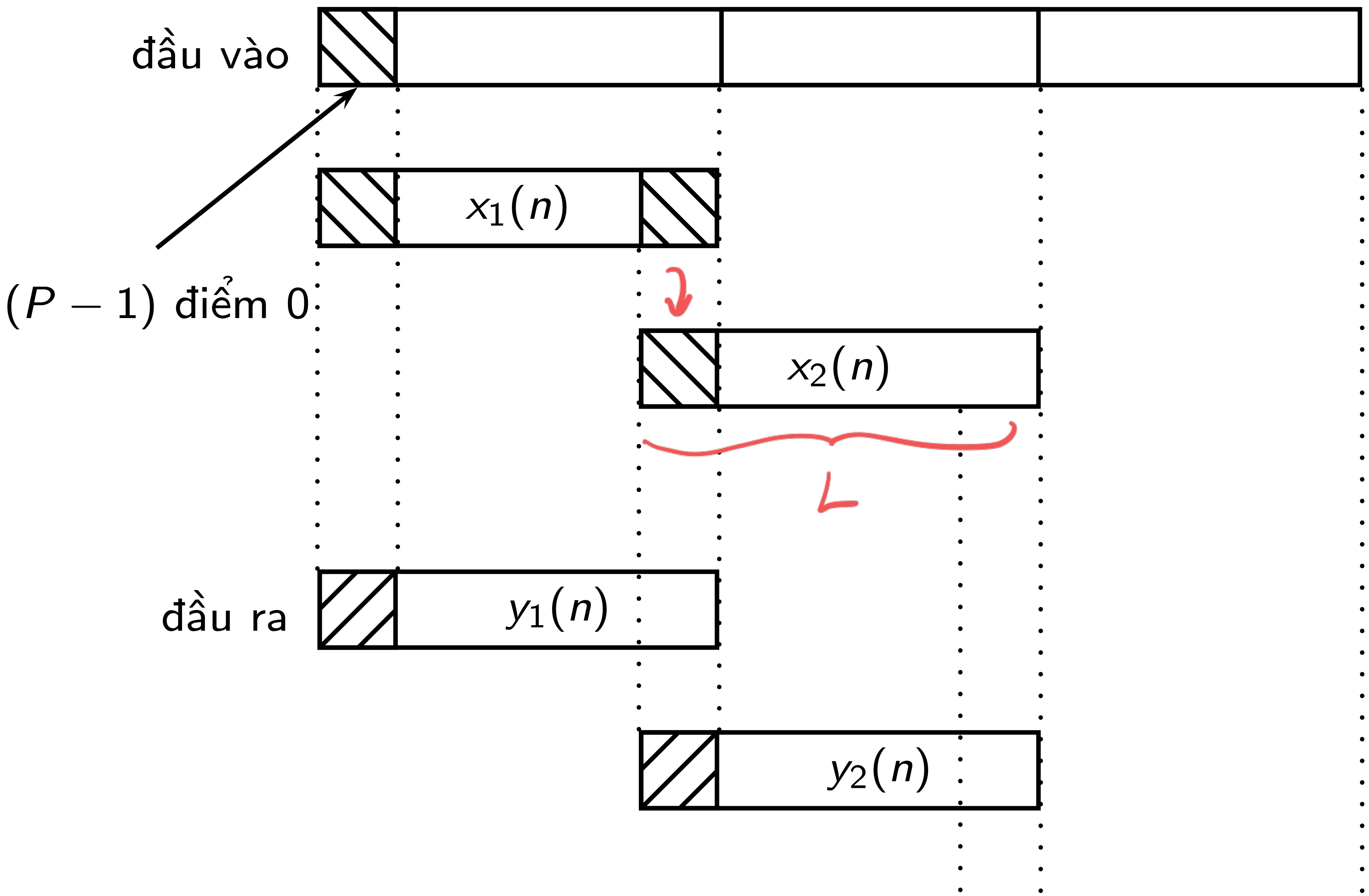


Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)



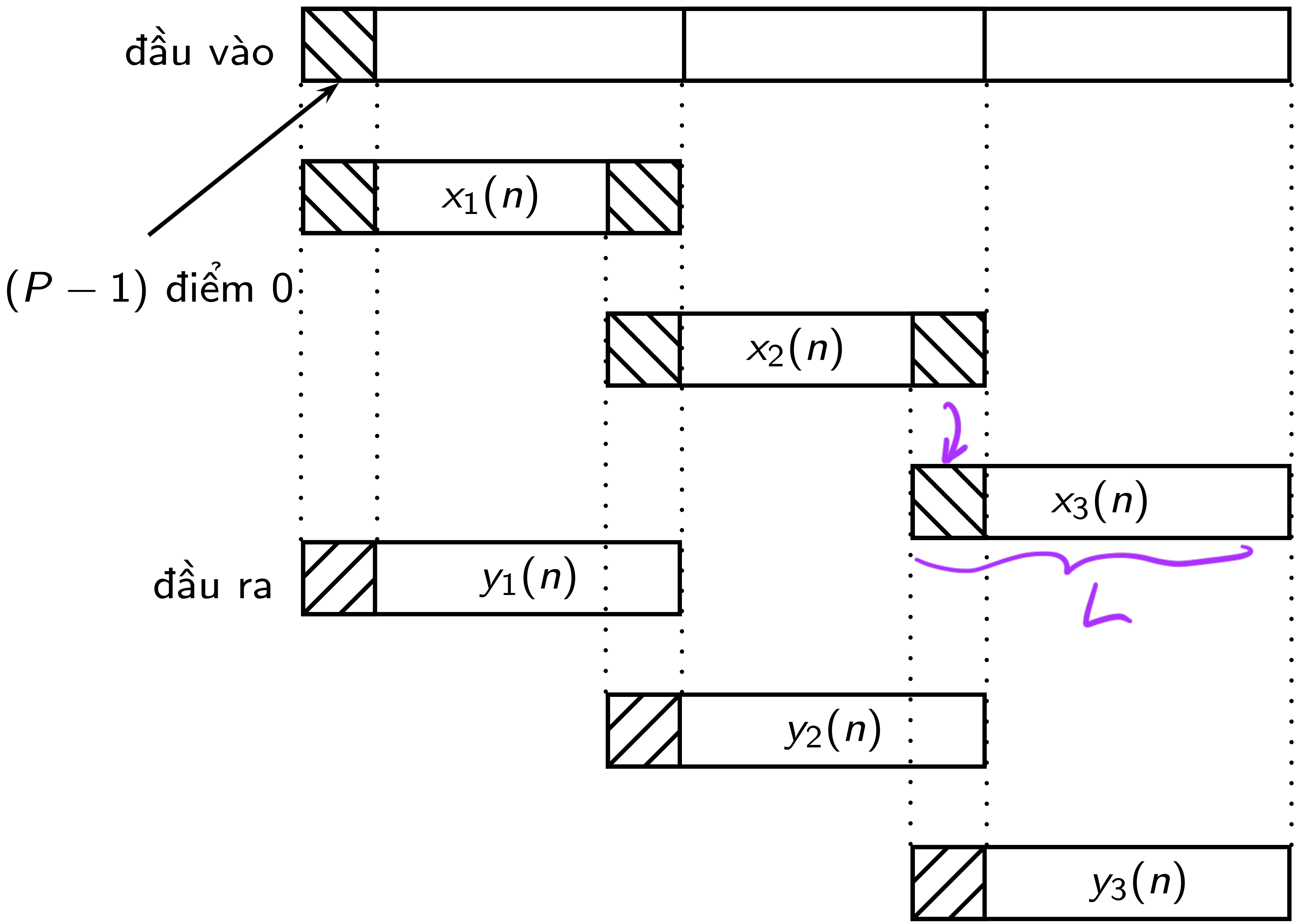
$y_1(n) = x_1(n) \circledast_L h(n)$

Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)



$y_2(n) = x_2(n) (*)_L\, h(n)$

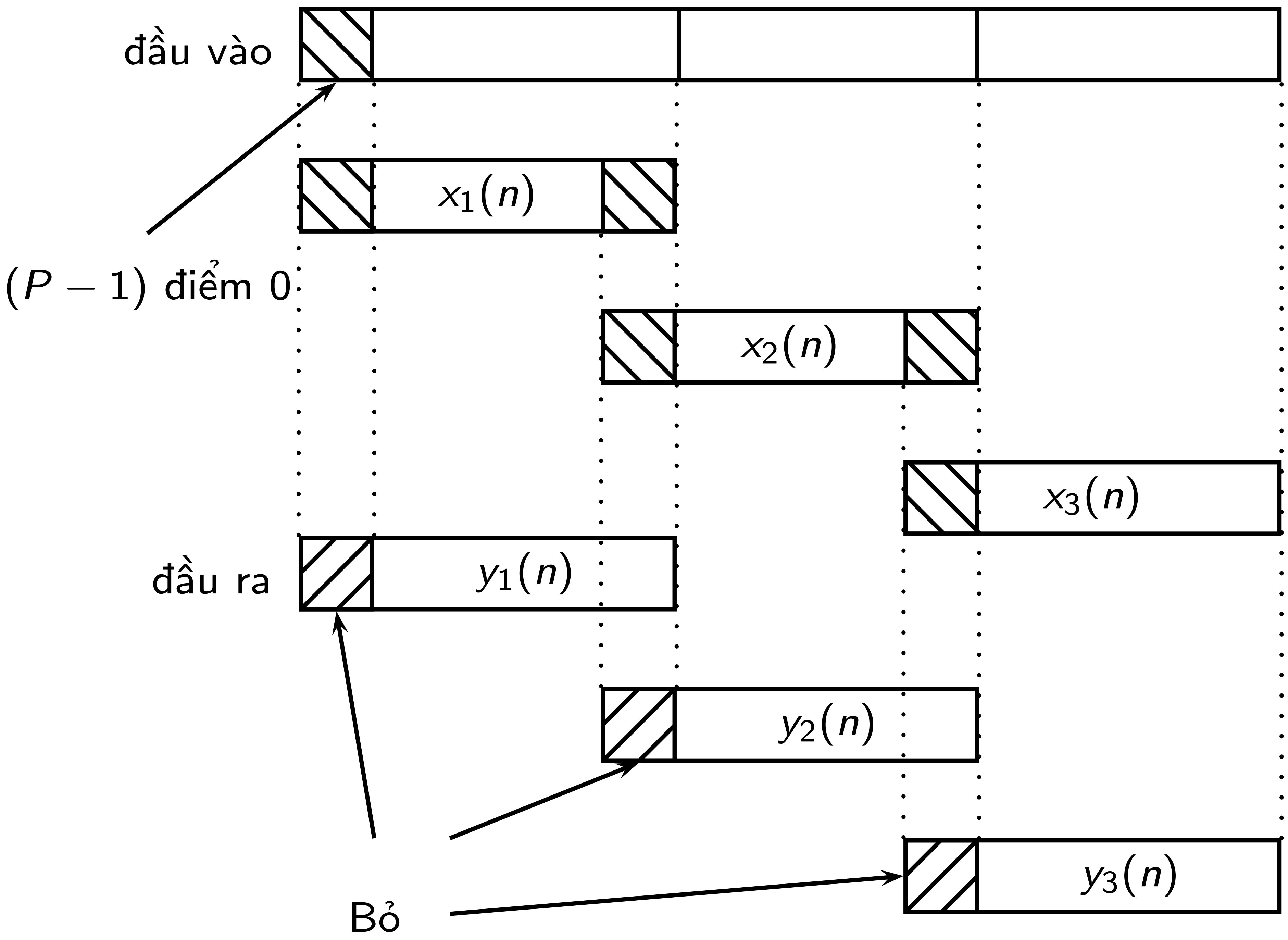
Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)



$y_3(n) = x_3(n) \circledast_L h(n)$

Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)

input output



k° cần thêm phép cộng

k° bị trễ 1 đoạn

Phân tích phổ của tín hiệu thời gian thực

Nguyên lý: Chia tín hiệu thành các đoạn (thường là chồng lên nhau), thực hiện biến đổi FFT trên từng đoạn, với các loại cửa sổ khác nhau.

Các bước thực hiện trên một đoạn dữ liệu:

1. Rời rạc hóa tín hiệu $x(t) \rightarrow x(n)$, xét trên một đoạn N mẫu
2. Nhân với hàm cửa sổ $x_d(n) = x(n)w(n)$
3. Thực hiện FFT M-điểm cho $x_d(n)$, với $M \geq N$ (thêm các điểm 0 vào cuối ko làm thay đổi phổ tín hiệu!).
4. Chuẩn hóa tần số, biên độ khi vẽ $|X(k)|$

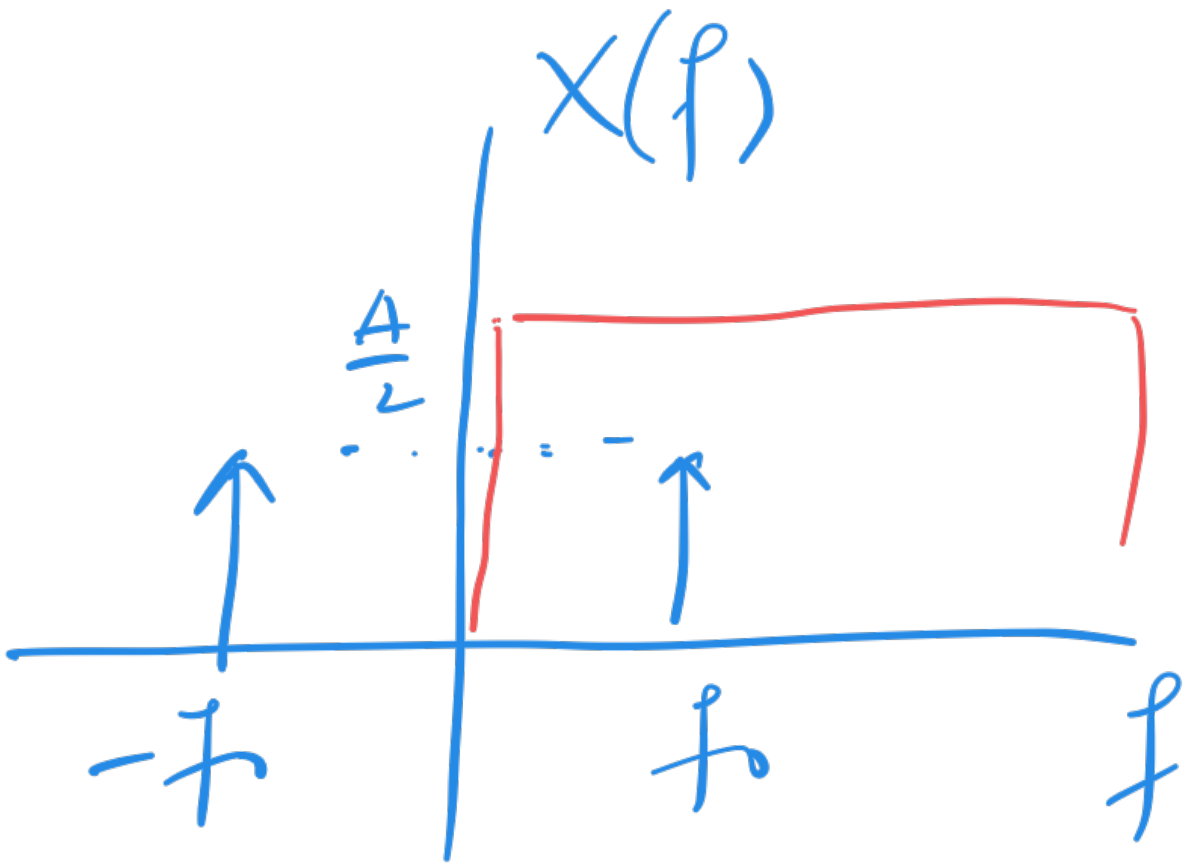
Lưu ý:

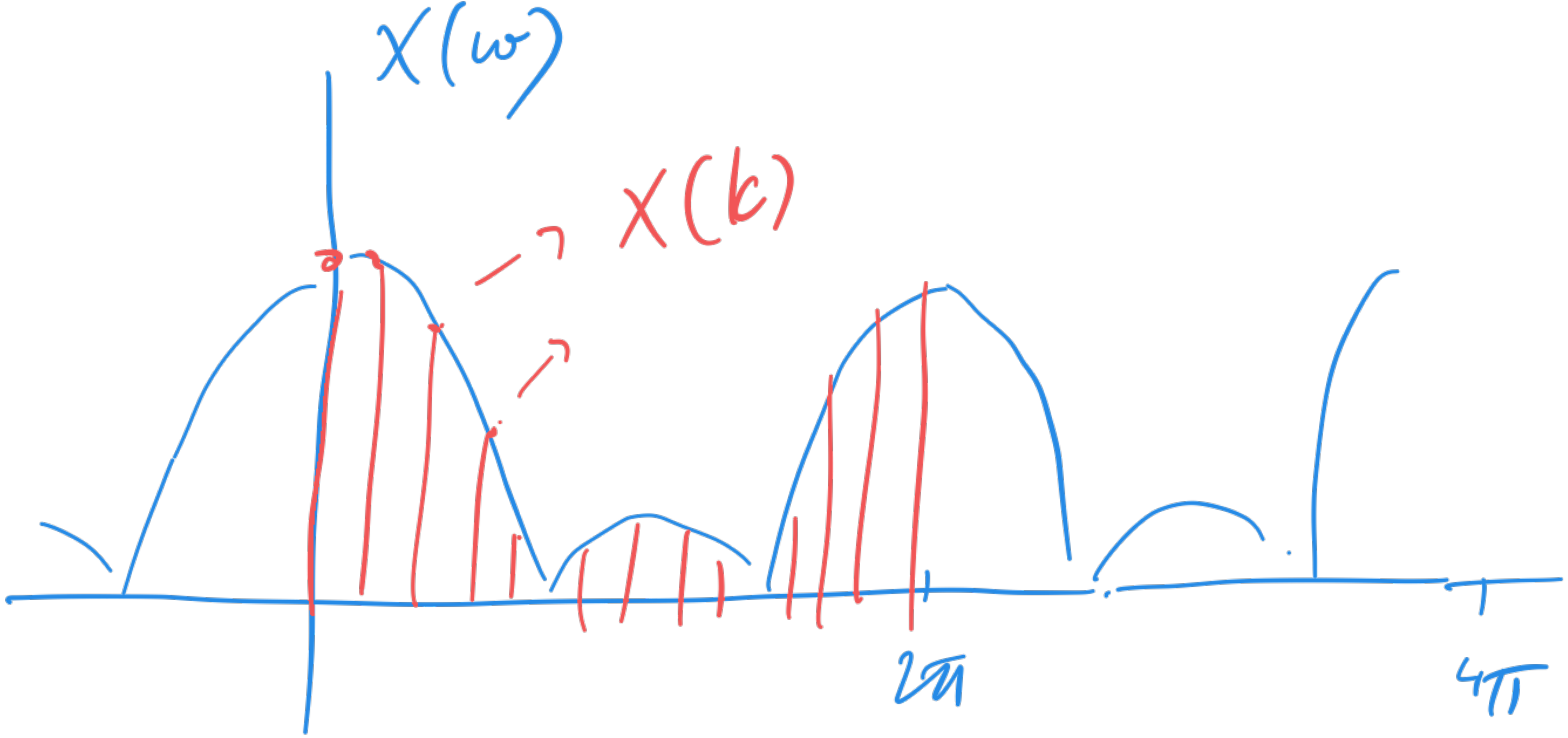
- Ảnh hưởng của cửa sổ: Rò rỉ công suất (leakage)
- Độ phân giải tần số
- Các đoạn chồng lên nhau (overlapping)

VD $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$

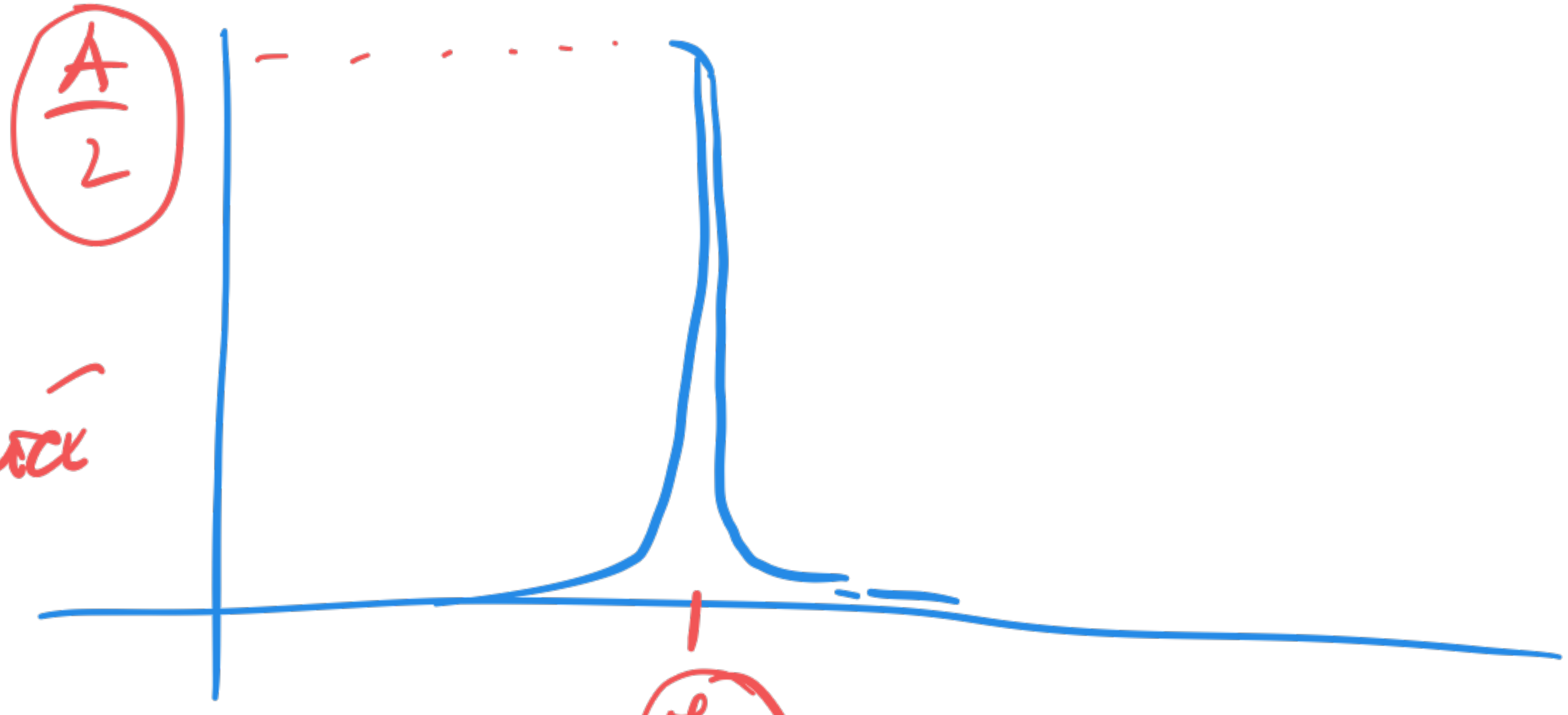
$$\Big\downarrow \text{FT}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$





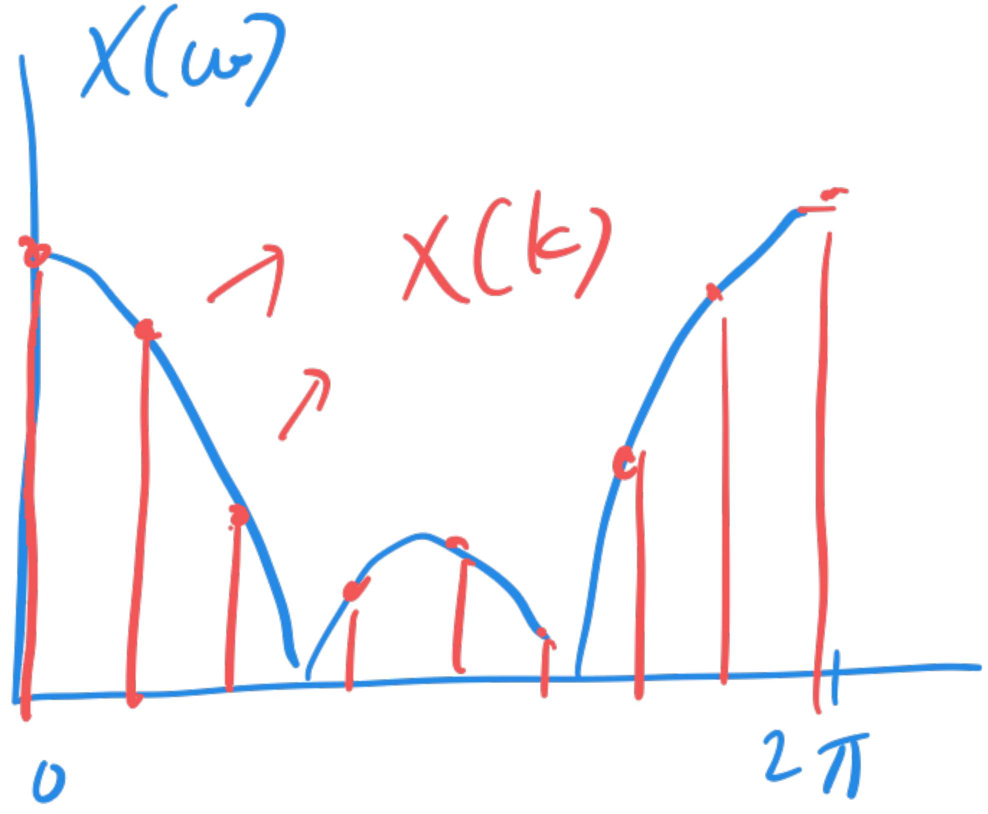
Do tín hiệu thực nên $X_k(1 ; \frac{N}{2})$



chuẩn hoá biên độ

f_0 → chuẩn hoá t/s

- Vẽ chính xác phổ tín hiệu ?



→ tăng số mẫu $X(k)$

+) $x(n)$: N đ'

$X(k) = FFT_{N\,đ'}$ của $x(n)$

+) thay N bằng $M \gg N$

$X(k) = FFT$ M đ' của $x(n)$

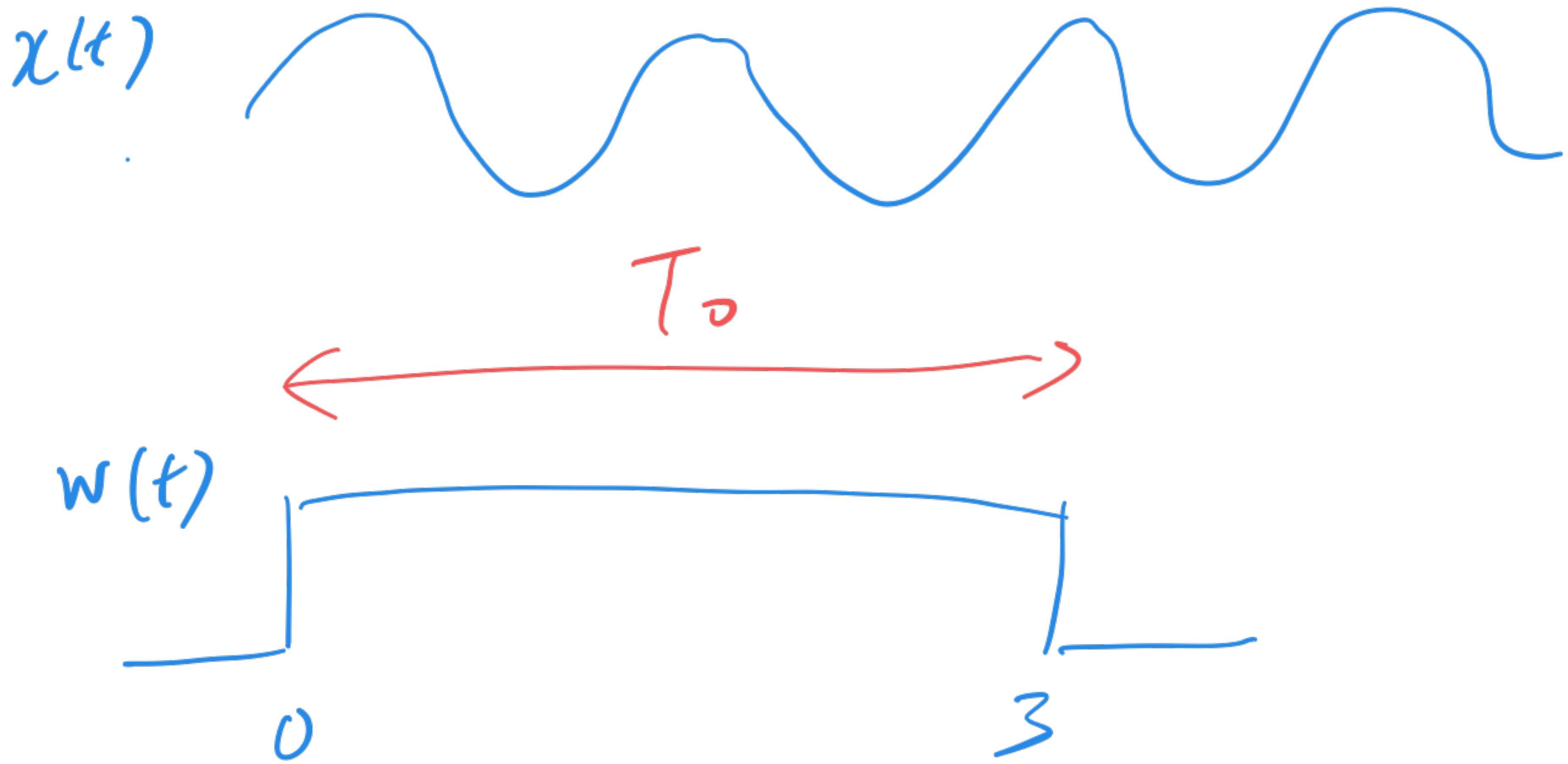
$$X(k) = DFT\{x(0), x(1), \ldots, x(N-1), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{thêm } 0}\}$$

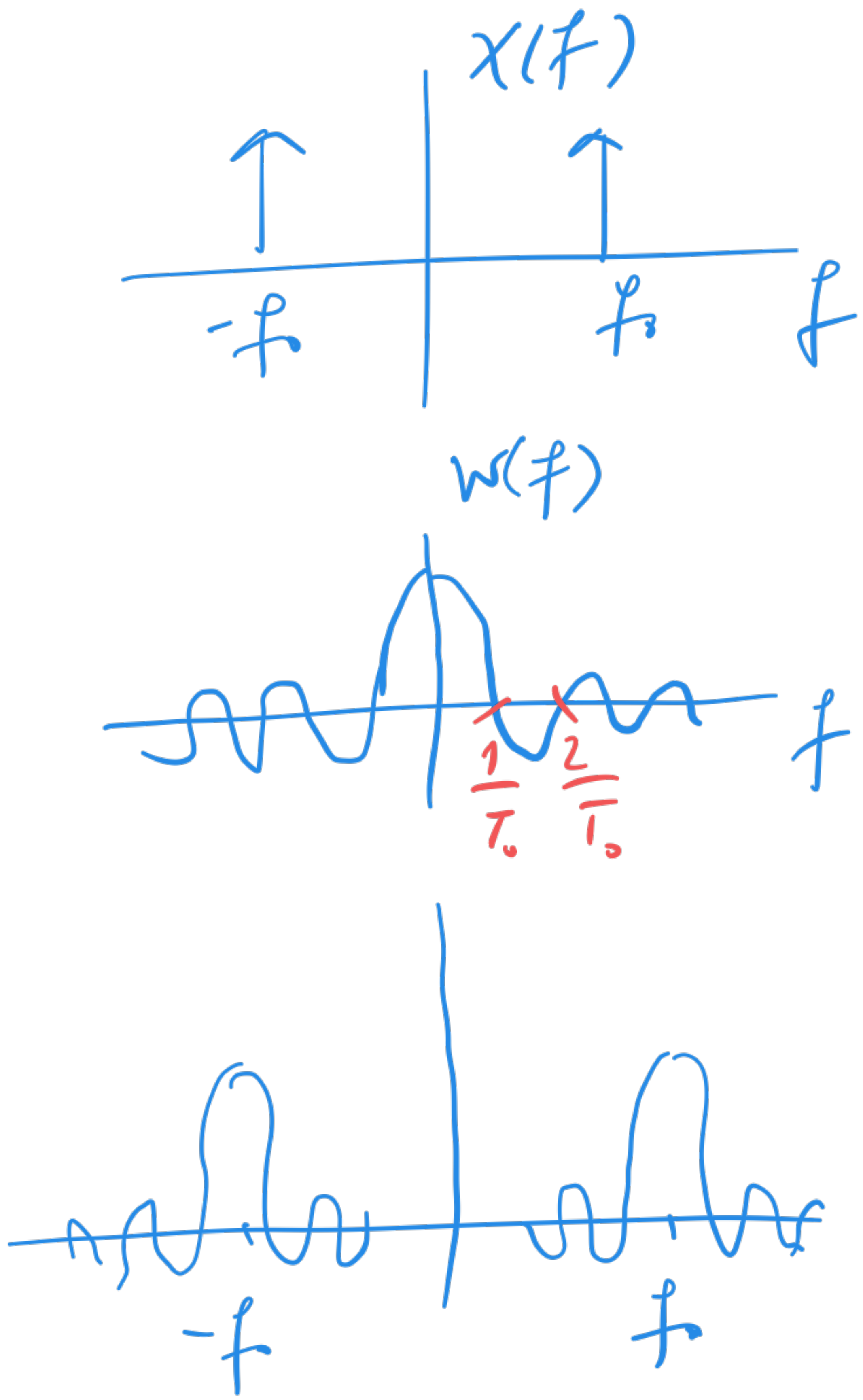
(zero padding)

VD

$x(n) = \{2, 1, 3, -1\}$

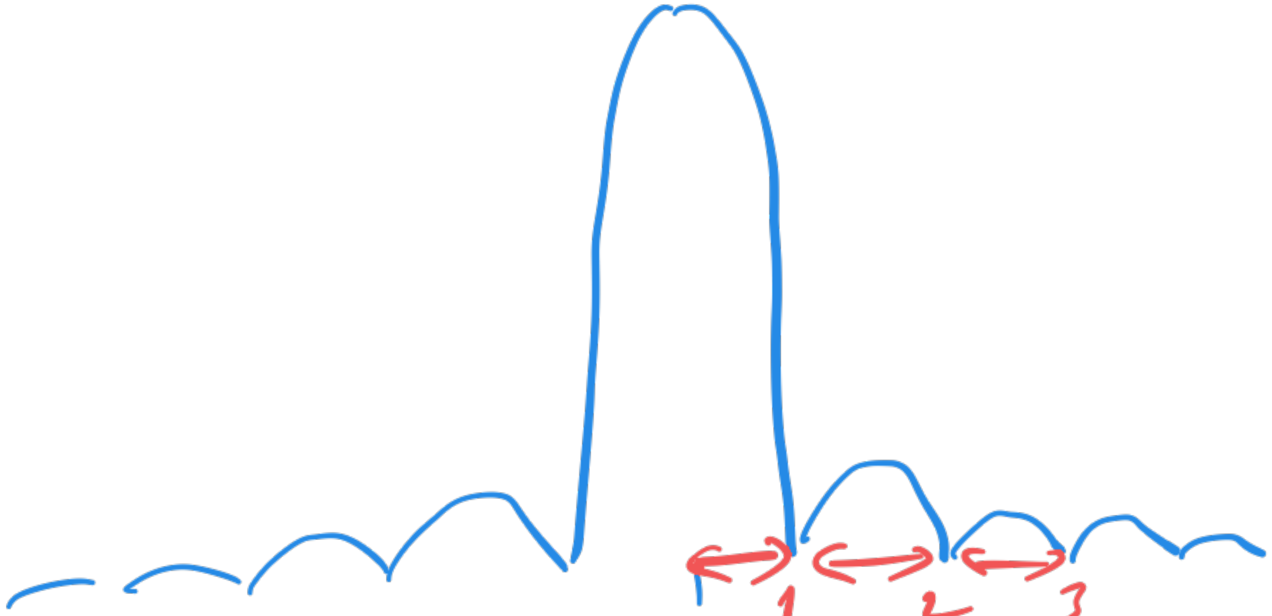
$$X(\omega) = 2 + 1 e^{-j\omega} + 3 e^{-j\omega \cdot 2} - e^{-j\omega \cdot 3}$$





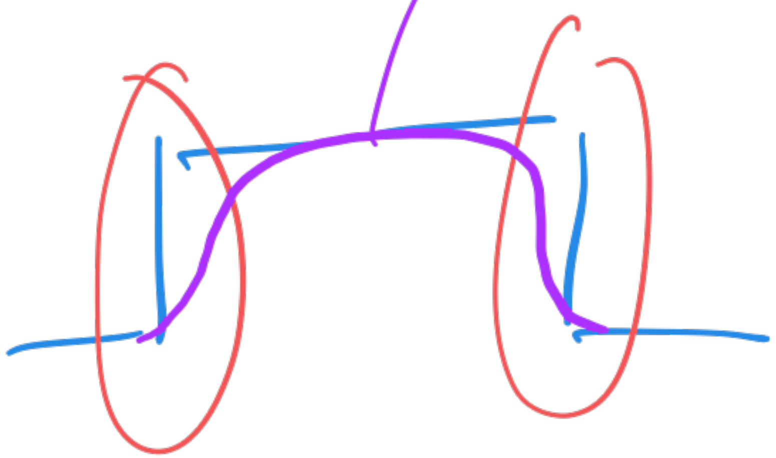
$$x(t)\cdot w(t) \xrightarrow{FT} X(f) * W(f)$$

Độ phân giải tần số tỷ lệ nghịch với độ rộng búp chính

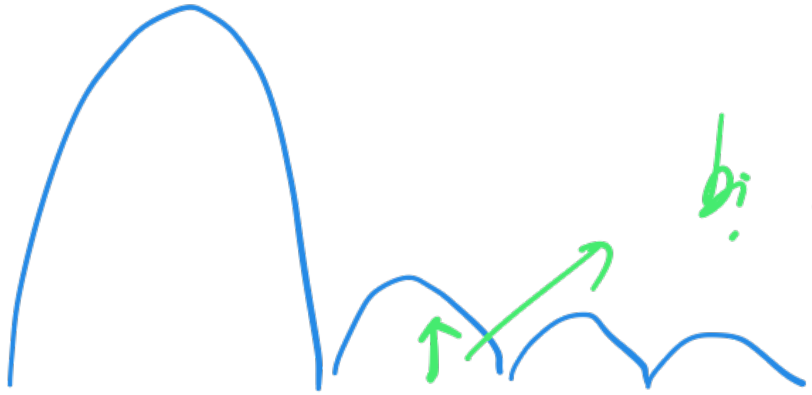


$f_0 + \Delta f < \frac{1}{T_0}$: bị che khuất.

chọn sườn thoải

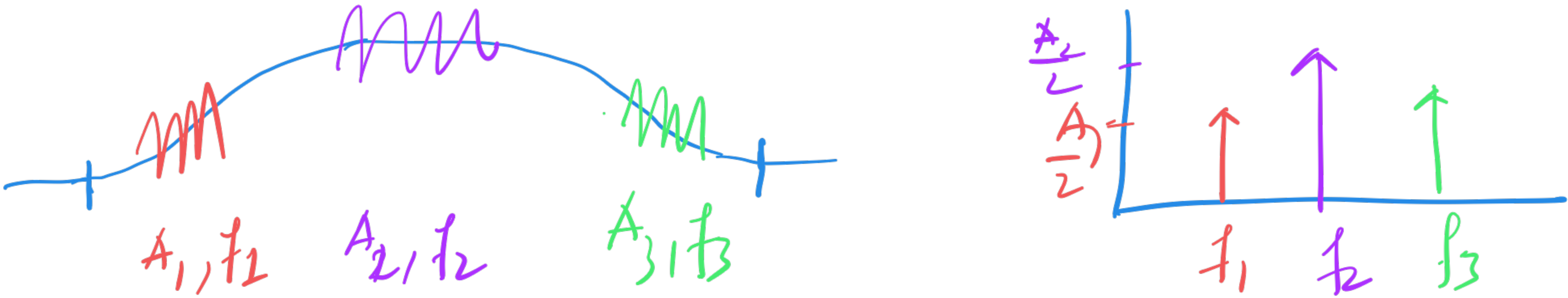


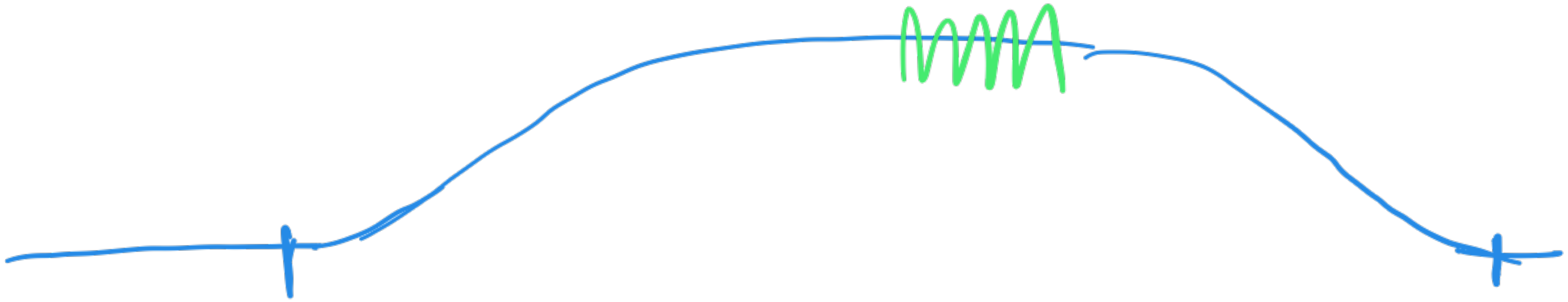
búp phụ



bị búp phụ che khuất : rò rỉ công suất

→ giảm độ lớn cái búp phụ?





$A_1' \ll A_1$

$A_3' \ll A_3$

→ cửa sổ chồng lên nhau (overlap) 75% → 90% ...

+ Độ phân giải thời gian: K phân biệt được thời gian các tín hiệu trong cùng 1 cửa sổ

t.g >< t.s

Outline

Ứng dụng của DFT

Các thuật toán FFT

Độ phức tạp tính toán của DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

trong đó, $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

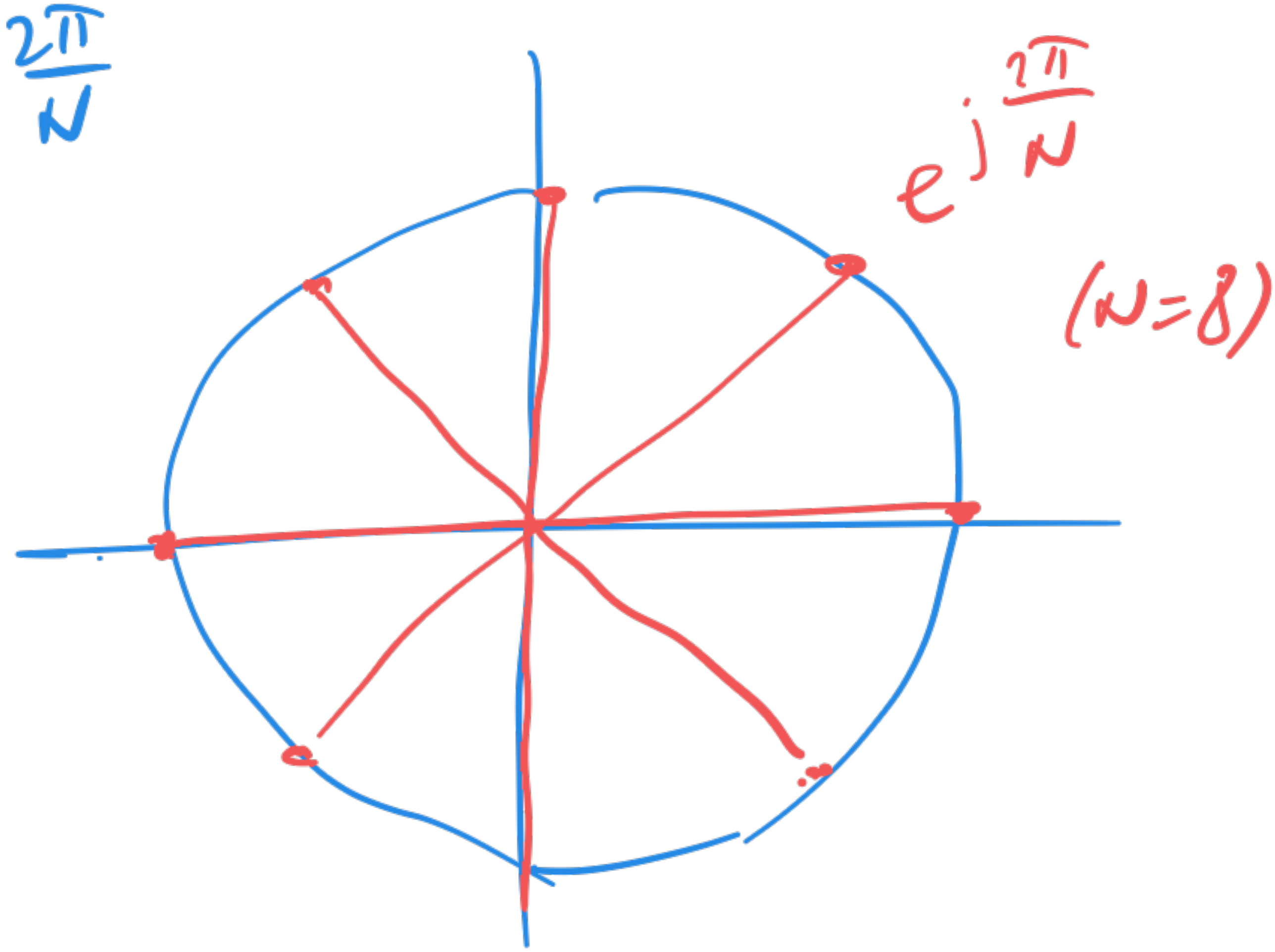
Để tính trực tiếp mỗi giá trị của $X(k)$:

- N phép nhân phức ($4N$ phép nhân thực và $2N$ phép cộng thực)
- $N-1$ phép cộng phức ($2N-2$ phép cộng thực)
- $2N$ phép tính giá trị các hàm sin, cos.

Độ phức tạp tính toán của DFT - N điểm: $O(N^2)$.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, (N-1)$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



$$= x(0)\, W_N^{k\cdot 0} + x(1)\, W_N^{k\cdot 1}$$

$$+ \dots + x(N-1)\, W_N^{k(N-1)}$$

1 giá trị $X(k)$: N phép nhân

$(N-1)$ phép cộng

DFT N điểm: N^2 $\times$

$N(N-1)$ $+$

$$(a+jb)+(c+jd) = (a+c)+j(b+d)$$

2 +
0 ×

$$(a+jb)(c+jd) = (ac-bd)+j(ad+bc)$$

2 +
4 ×

DIT Radix-2 FFT (phân chia theo thời gian, cơ số 2)

Xét $N = 2^v$, chia $x(n)$ thành hai dãy chỉ số chẵn $x(2m)$ và chỉ số lẻ $x(2m+1)$:

$n: \; 0 \div (N-1)$

$m: \; 0 \div \left(\frac{N}{2}-1\right)$

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, (N-1) \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{k2m} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)}
\end{aligned}
$$

$$W_N^{k.2m} = e^{-j\frac{2\pi}{N}.k.2m} = e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}.k.m} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

DIT Radix-2 FFT (phân chia theo thời gian, cơ số 2)

Xét $N = 2^v$, chia $x(n)$ thành hai dãy chỉ số chẵn $x(2m)$ và chỉ số lẻ $x(2m+1)$:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, (N-1) \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{k2m} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} \end{aligned}$$

Với $k = 0, 1, \ldots, \cancel{N/2}$ $\left(\frac{N}{2}-1\right)$, ta có:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{km} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \end{aligned}$$

$F_1(k) =$ DFT $\frac{N}{2}$ đ² của $\{x(2m)\}$, $F_2(k) =$ DFT $\frac{N}{2}$ đ² của $\{x(2m+1)\}$

$$X(k) = \sum x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ N điểm

$$X(k+N) = \sum x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n}$$

$$= \sum x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1}$$

$$= X(k)$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = \underbrace{\sum x(2m)\, W_{N/2}^{\left(k+\frac{N}{2}\right)m}}_{} + W_N^{k+\frac{N}{2}} \cdot \underbrace{\sum x(2m+1)\, W_{N/2}^{\left(k+\frac{N}{2}\right)m}}_{}$$

$$k = 0 \div \left(\frac{N}{2}-1\right)$$

$$F_1\left(k+\frac{N}{2}\right) \qquad F_2\left(k+\frac{N}{2}\right)$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k \cdot W_N^{\frac{N}{2}}$$

$$= W_N^k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}$$

$$= -W_N^k$$

DIT Radix-2 FFT: Độ phức tạp tính toán

$k = \frac{N}{2} \div (N-1) \Rightarrow (k+\frac{N}{2})$ $\quad k = 0 \div (\frac{N}{2}-1)$

Nhận xét:

$$\begin{aligned} F_1(k + N/2) &= F_1(k) \\ F_2(k + N/2) &= F_2(k) \\ W_N^{k+N/2} &= -W_N^k \end{aligned}$$

do vậy,

$k = 0 \div (\frac{N}{2}-1)$

$$\begin{aligned} X(k + \frac{N}{2}) &= F_1(k) - W_N^k F_2(k) \\ X(k) &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \end{aligned}$$

nửa sau

nửa đầu

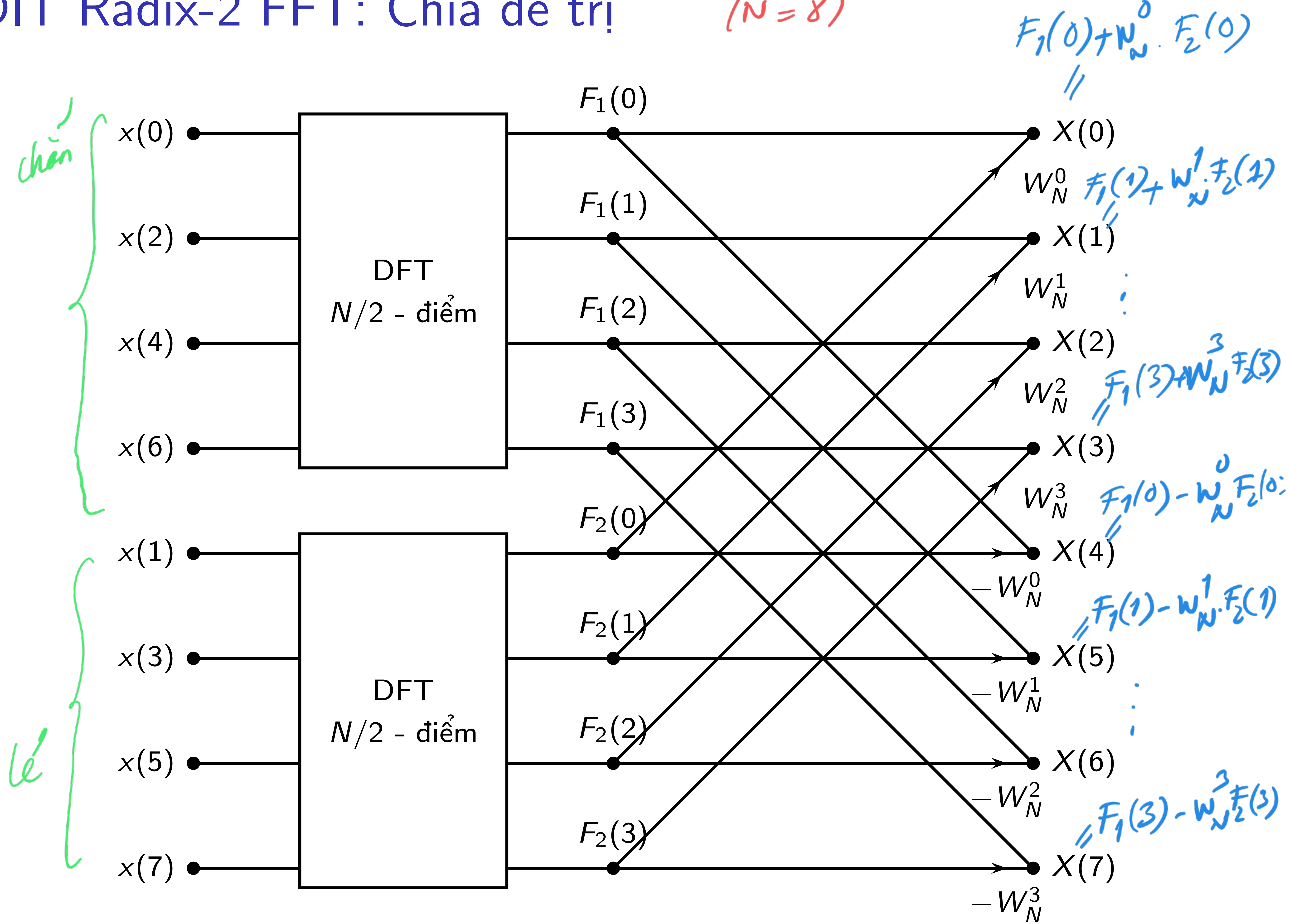
Nếu tính toán trực tiếp $F_1(k)$ và $F_2(k)$, tổng số phép nhân phức là:

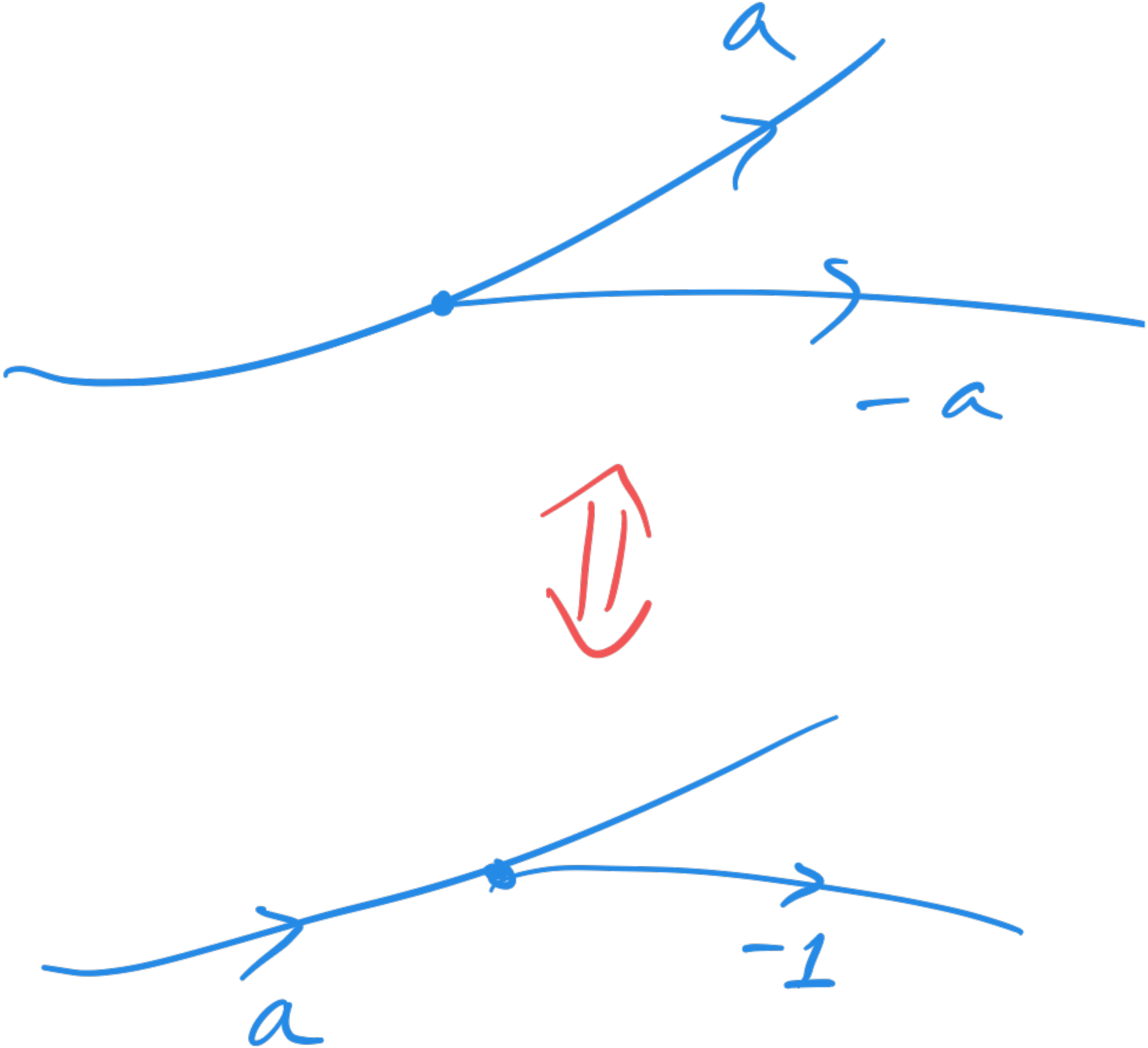
$$2(N/2)^2 + N/2$$

$2(\frac{N}{2})^2 + \frac{N}{2}$

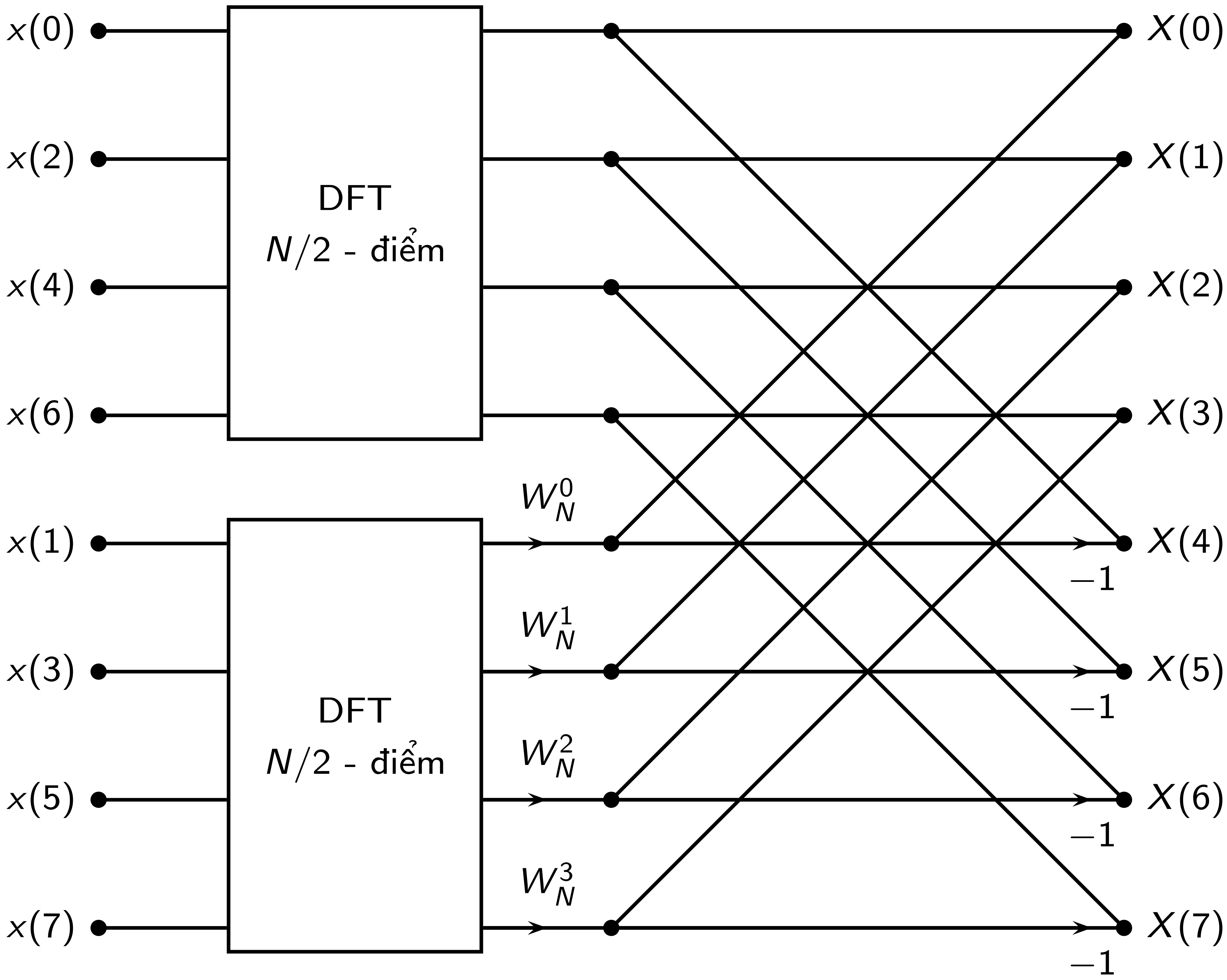
DIT Radix-2 FFT: Chia để trị

(N = 8)

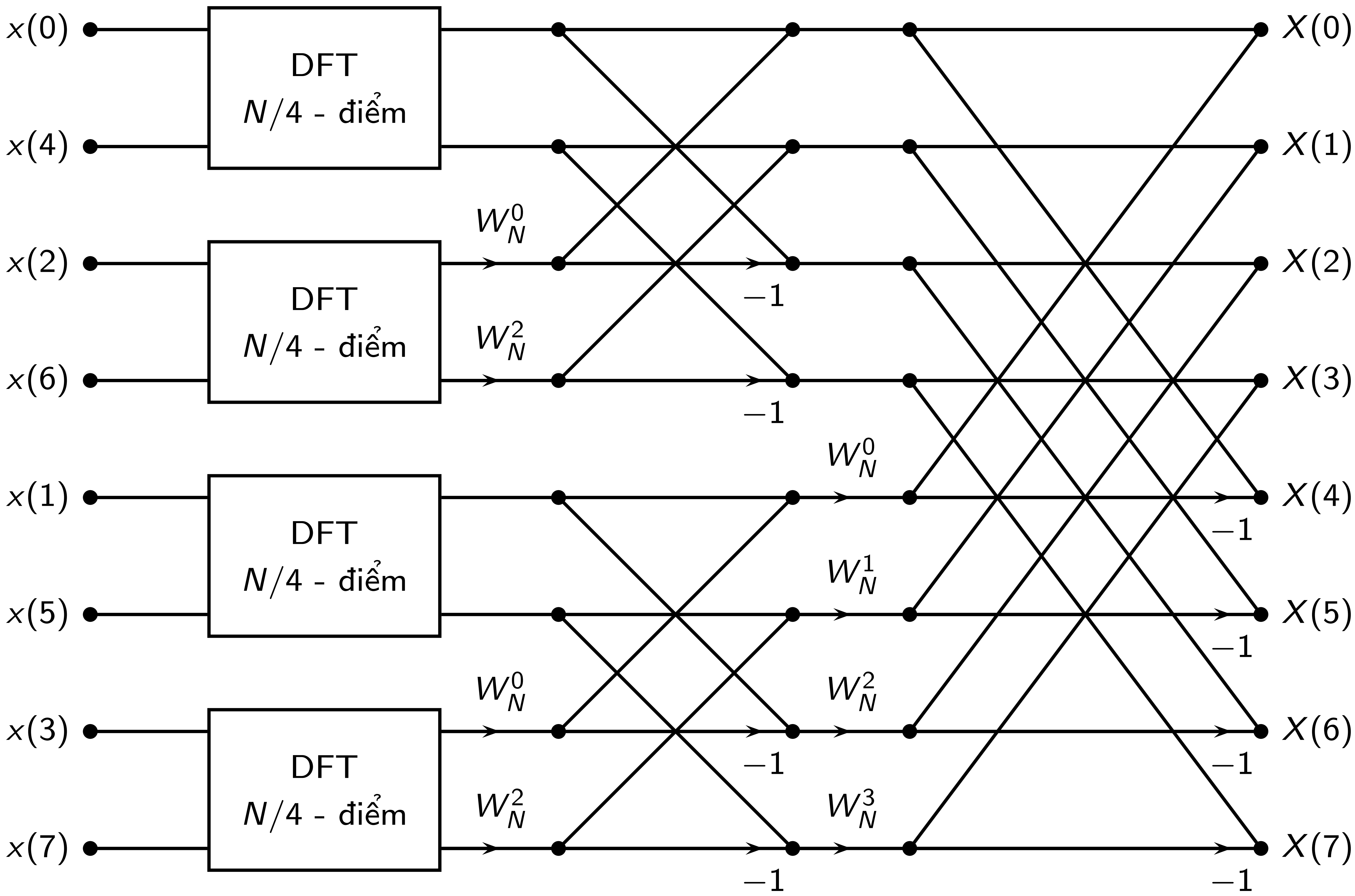



a
-a
-1
a

DIT Radix-2 FFT: Rút gọn



DIT Radix-2 FFT: Tiếp tục phân chia



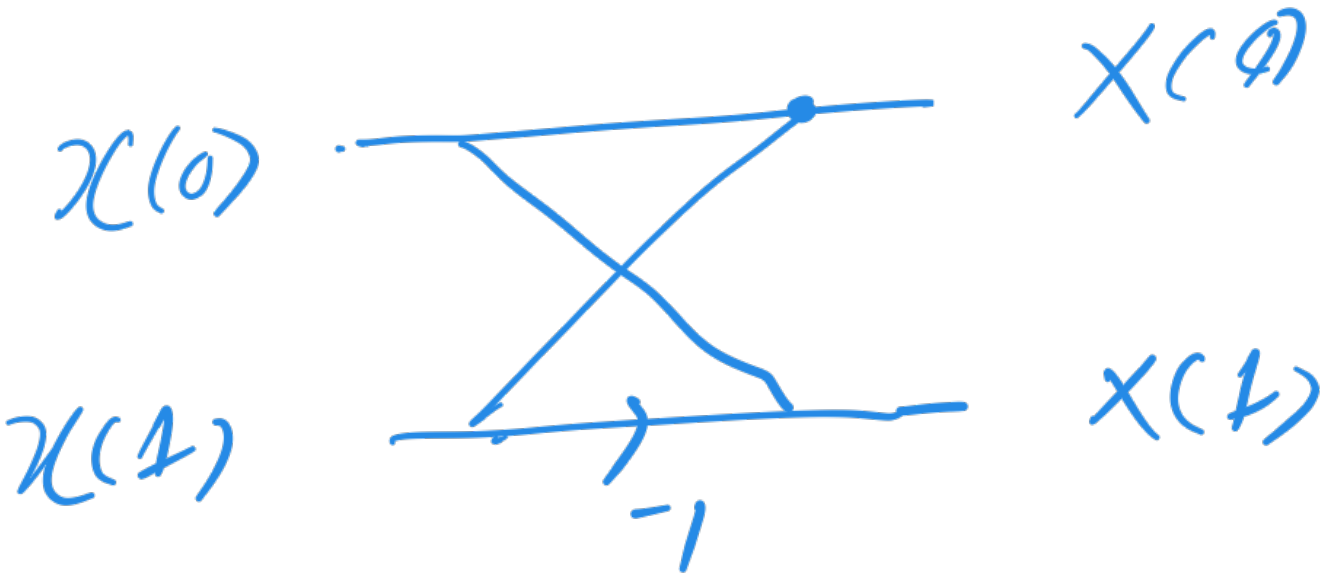
DFT 2 điểm

$$X(k) = \sum_{n=0}^{1} x(n) W_2^{kn}$$

$$= x(0) \cdot \underbrace{W_2^{k.0}}_{1} + x(1) W_2^{k.1}$$

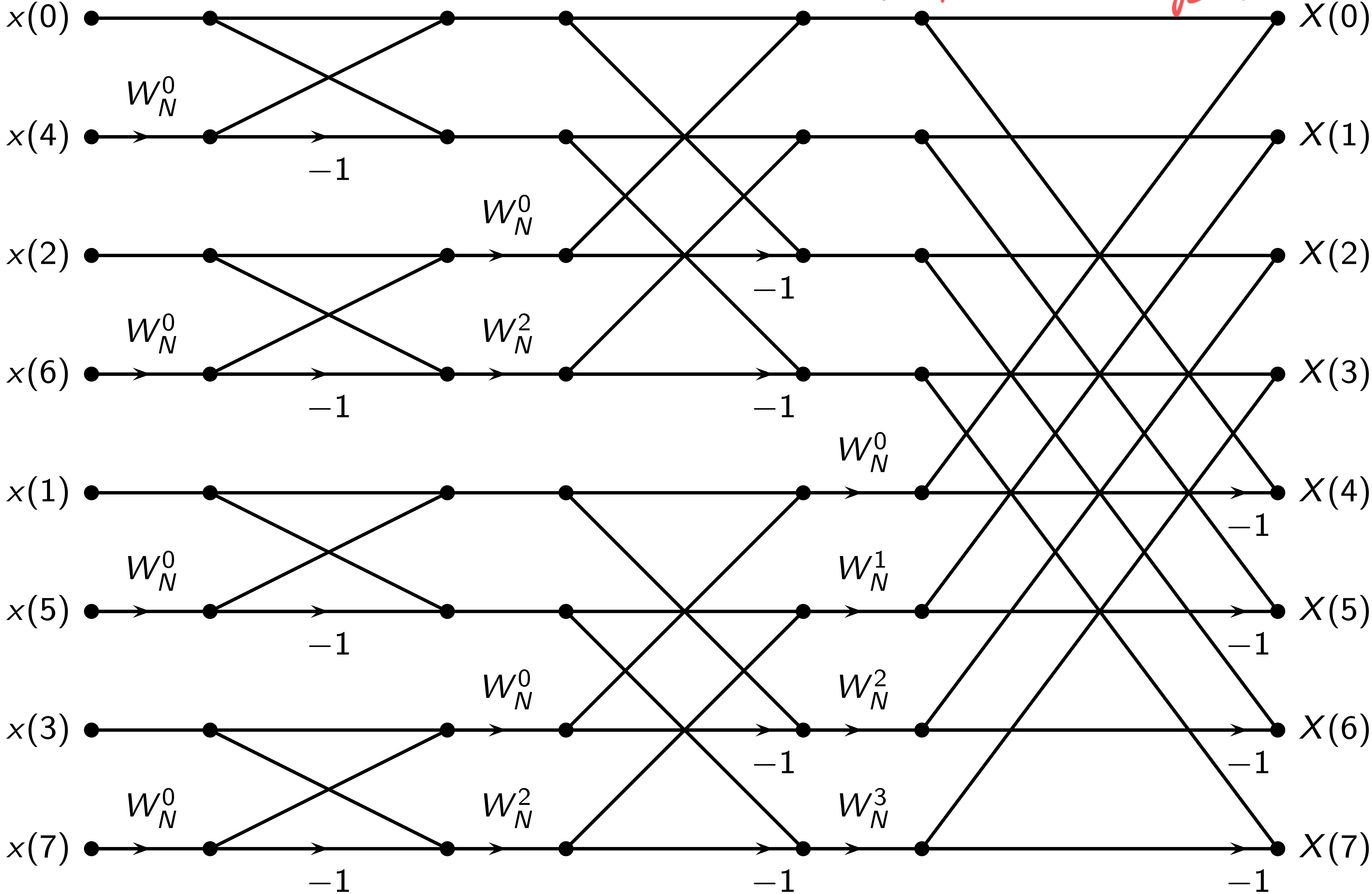
$$X(0) = x(0) + x(1)$$

$$X(1) = x(0) - x(1)$$



DIT Radix-2 FFT: Lưu đồ tín hiệu hoàn chỉnh

$\log_2(N)$ chặng $\begin{cases} \frac{N}{2} \times \\ N + \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{N}{2}\log_2(N) \times \\ N\log_2(N) + \end{matrix}$



VD: DFT $N = 1024$ đ

trực tiếp: $N^2 \approx 1M$ ×

FFT $\frac{N}{2}\log_2 N \approx 5K$ ×

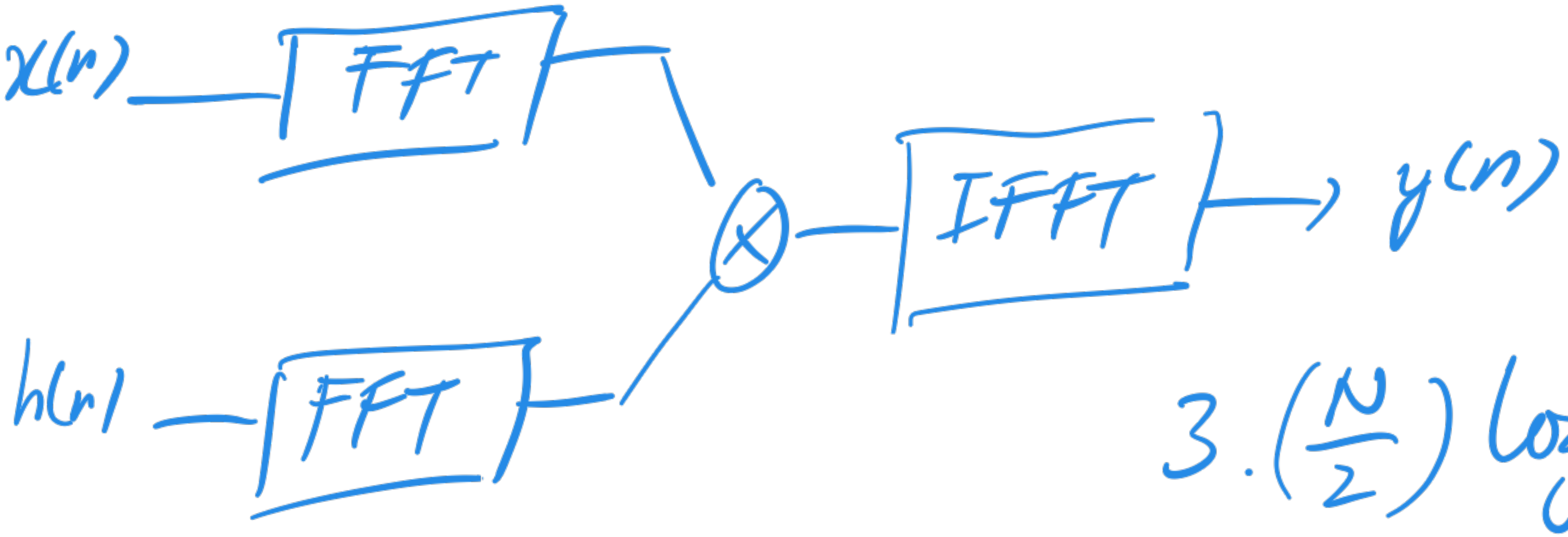
VD: $x(n)$ 2000

$h(n)$ 500

$x(n) * h(n)$ $2000 \times 500 = \underbrace{1M \times}$

$y(n)$: $2000 + 500 - 1$

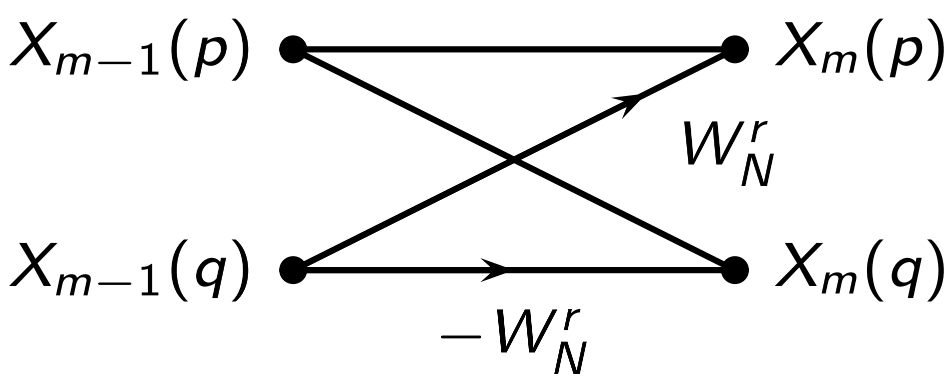
FFT : $N = 4096 = 2^{12}$



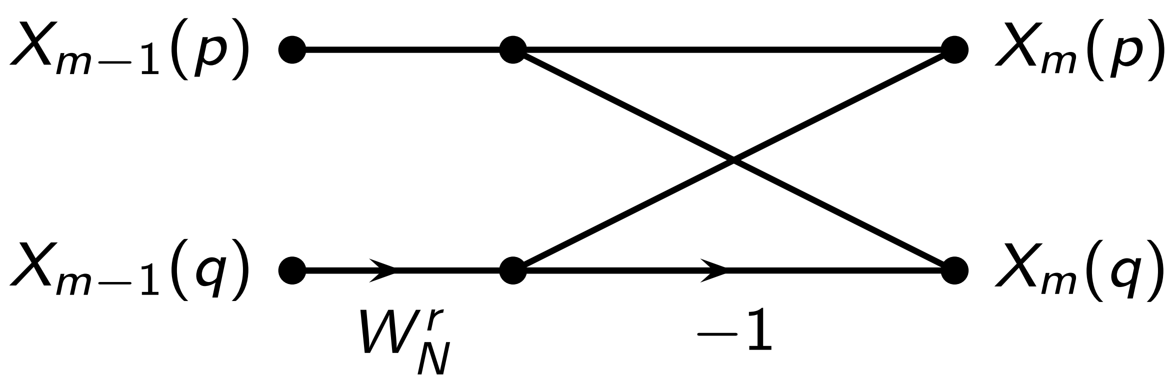
$$3 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)\log_2(N) + N$$

$$\approx \underbrace{76K \quad \times}$$

DIT Radix-2 FFT: Sơ đồ cánh bướm



Hình: Sơ đồ cánh bướm cơ bản



Hình: Sơ đồ cánh bướm rút gọn

Tính toán tại chỗ và đảo bit

$$
\begin{aligned}
X_m(p) &= X_{m-1}(p) + W_N^r X_{m-1}(q) \\
X_m(q) &= X_{m-1}(p) - W_N^r X_{m-1}(q)
\end{aligned}
$$

Không cần có bộ nhớ trung gian!

Khi đó, cần đảo thứ tự tại đầu vào (chặng 0):

Thứ tự	Nhị phân	Đảo bit	Giá trị
$X_0(0)$	000	000	$x(0)$
$X_0(1)$	001	100	$x(4)$
$X_0(2)$	010	010	$x(2)$
$X_0(3)$	011	110	$x(6)$
$X_0(4)$	100	001	$x(1)$
$X_0(5)$	101	101	$x(5)$
$X_0(6)$	110	011	$x(3)$
$X_0(7)$	111	111	$x(7)$

DIF Radix-2 FFT (phân chia theo tần số, cơ số 2)

$$W_N^{k.\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k.\frac{N}{2}} = e^{-j\pi k}$$

$$= (-1)^k$$

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, (N-1) \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{kN/2} W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + (-1)^k x(n + N/2)] W_N^{kn}
\end{aligned}$$

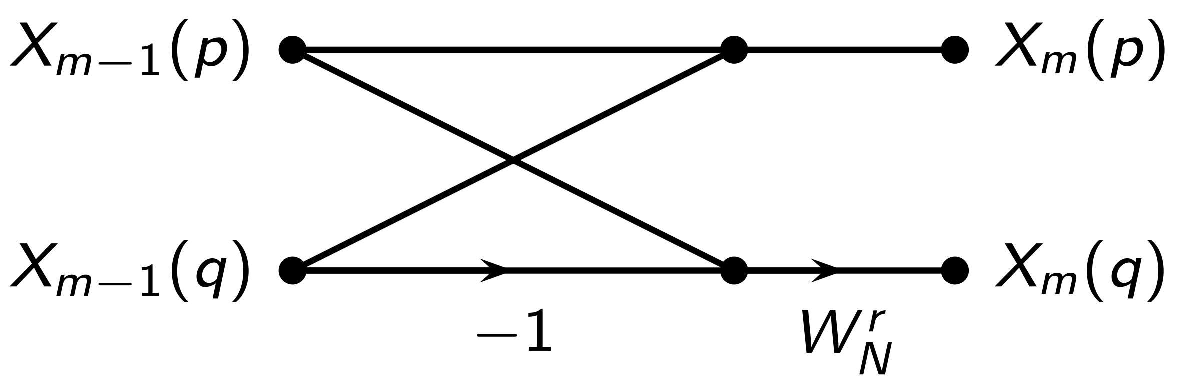
DIF Radix-2 FFT: Độ phức tạp tính toán

Tách $X(k)$ thành hai dãy có chỉ số chẵn, lẻ:

$$X(2k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] W_{N/2}^{kn}$$

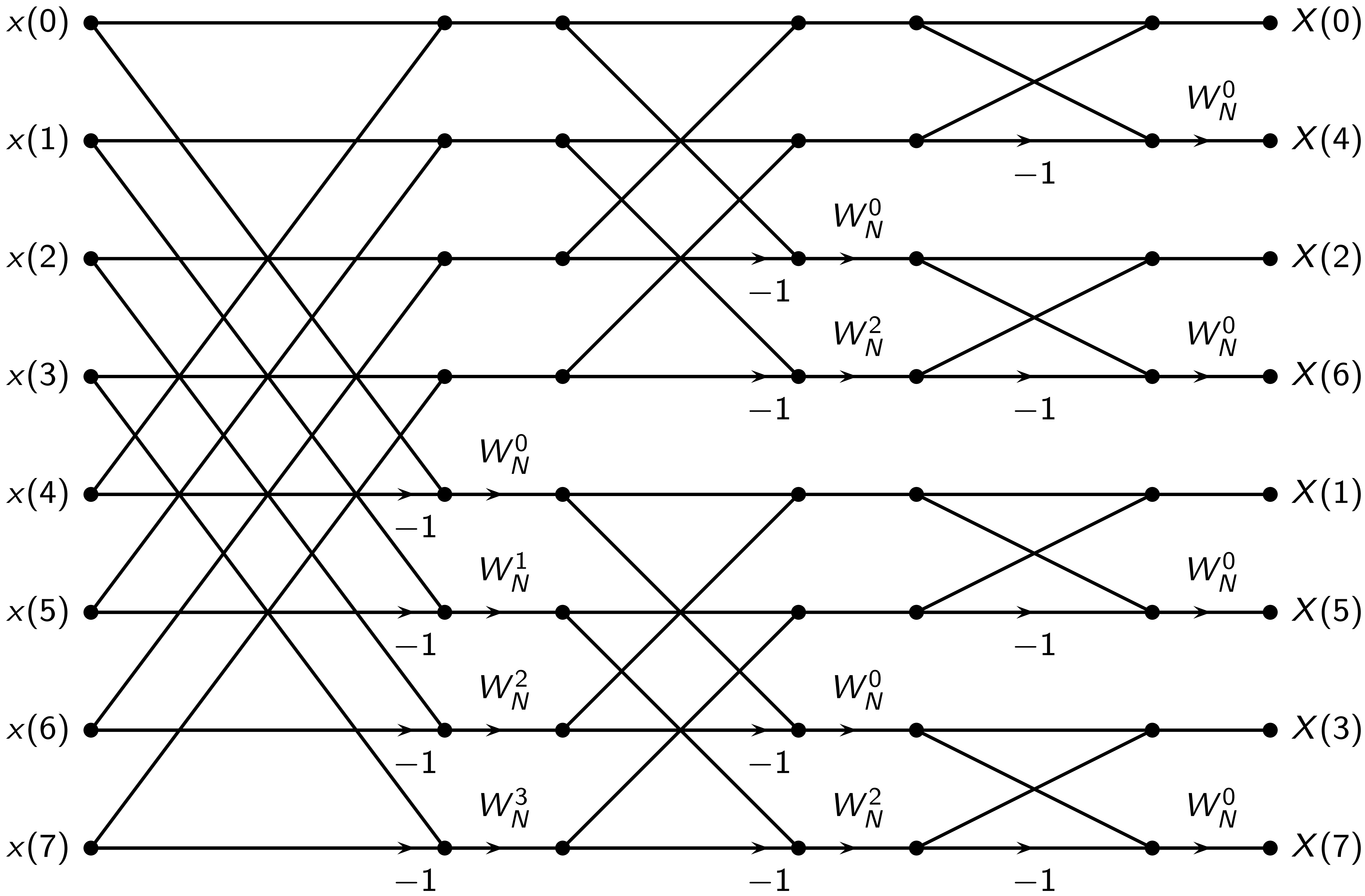
$$X(2k+1) = \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)] W_N^n W_{N/2}^{kn}$$

Độ phức tạp tính toán: $(N/2)\log_2 N$ phép nhân phức và $N\log_2 N$ phép cộng phức.



Hình: Sơ đồ cánh bướm

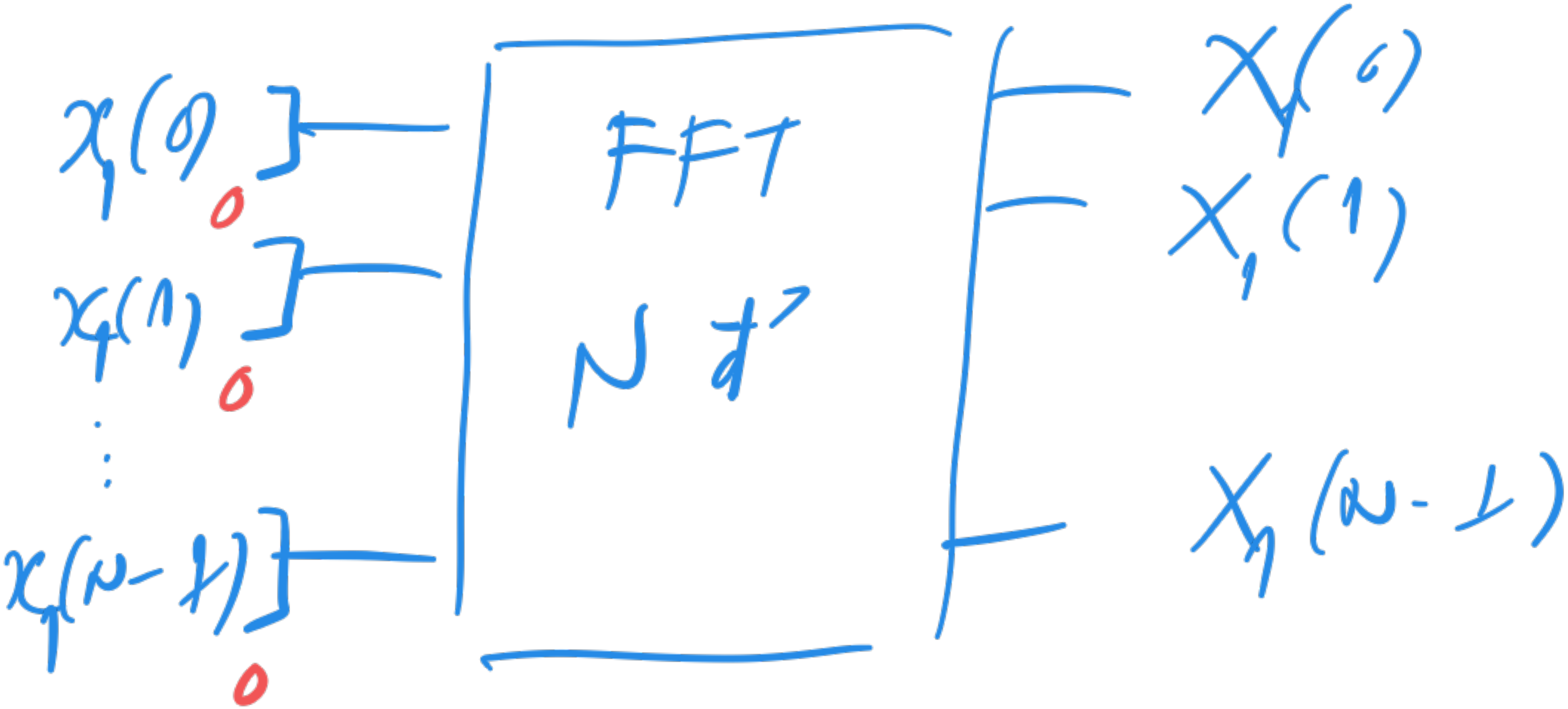
DIF Radix-2 FFT: Lưu đồ tín hiệu hoàn chỉnh



Bài về nhà

1. Vẽ lưu đồ tín hiệu cho thuật toán FFT trường hợp $N = 16$, phân chia theo tần số / thời gian, cơ số 2.
2. Tìm hiểu thuật toán FFT cơ số 4.
3. Triển khai các thuật toán FFT đã học bằng ngôn ngữ C, so sánh tốc độ.
4. Sử dụng bộ DFT N-điểm để tính DFT $2N$-điểm của dãy số thực.
5. Tính toán tối ưu DFT N-điểm của hai dãy số thực (cùng chiều dài hữu hạn N).

$x_1(n) \in \mathbb{R}$ N 点 $\rightarrow$ $X_1(k)$?



$x_2(n) \in \mathbb{R}$ N 点 $\rightarrow$ $X_2(k)$?

11)

$x_1(n) = \{3, -1, 2, 5\}$ $\quad X_1(k)$

$x_2(n) = \{-2, 4, -1, 3\}$ $\quad X_2(k)$

$x(n) = \{3-2j, -1+4j, 2-j, 5+3j\}$

$= x_1(n) + j\, x_2(n) \quad \big\downarrow \text{DFT}$ $\quad X(k) = \{9+4j, 2+5j, 1-10j, -7j\}$

$X(k)$

$$x_1(n) = \mathrm{Re}\{x(n)\} = \frac{x(n) + x^*(n)}{2} \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{X(k) + X^*(-k)_N}{2}$$

$$X^*(-k)_4 = \{9-4j, 7j, 1+10j, 2-5j\}$$

$$X_1(k) = \{9, 1+6j, 1, 1-6j\}$$