ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Phân tích tín hiệu và hệ thống trên miền z

TS. Đặng Quang Hiếu
http://dsp.edabk.org

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

Năm học 2014 - 2015

Biến đổi z

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, bend left, "ZT"] & z \arrow[l, bend left, "IZT"] \end{tikzcd}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

trong đó z là biến số phức $z = re^{j\omega}$.

- Miền hội tụ (ROC) của $X(z)$? Khi $x(n)$ là dãy một phía bên phải, một phía bên trái, hai phía?
- Các tính chất: trễ, chập, đạo hàm, v.v.
- Biến đổi z ngược: Phân tích thành các phân thức tối giản.

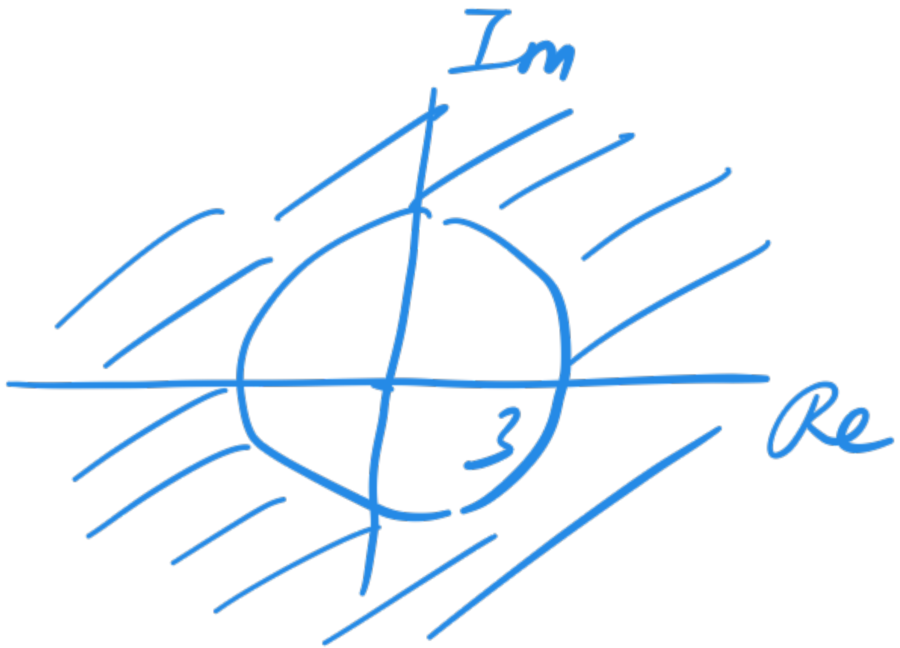
+) $x(n) = \{5, -1, \underset{\uparrow}{4}, 0, 2\}$

$$X(z) = 5.z^{2} - 1z^{1} + 4.z^{0} + 0.z^{-1} + 2z^{-2}$$

$ROC\{X(z)\}: \mathbb{C} \setminus \{\infty, 0\}$

+) $x(n) = 3^{n} u(n) \rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1 - 3z^{-1}} \quad |z| > 3$

vô hạn 1 phía bên phải



$ROC\{X(z)\}$

$x(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} u(n+3)$ $\quad X(z)$, $ROC\{X(z)\}$?

$x(n-n_0) \xrightarrow{ZT} z^{-n_0} X(z)$

$x(n) = \cdots \left(\frac{4}{9}\right)^{n+3} u(n+3)$

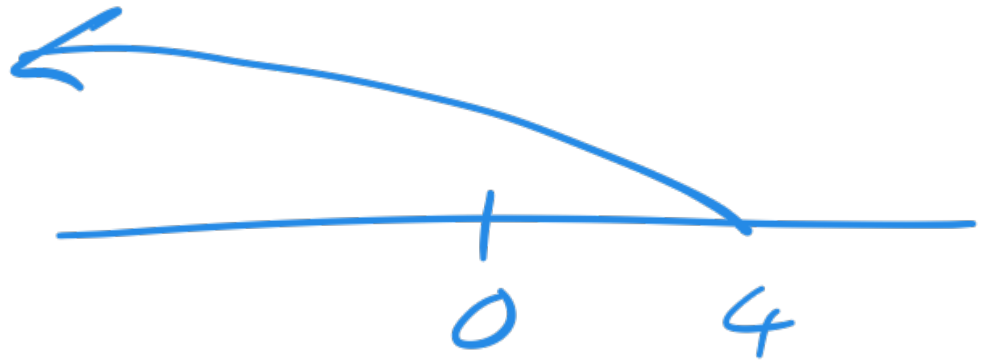
$\downarrow ZT$

$\cdots \dfrac{z^3}{1 - \frac{4}{9} \cdot z^{-1}}$ $\quad |z| < \infty$

$|z| > \frac{4}{9}$

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+2} u(-n+4) \qquad X(z),\ ROC\{X(z)\}\ ?$$

$$-a^n u(-n-1) \xrightarrow{ZT} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| < |a|$$



$$x(n) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^n u(-n+4)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^5} \cdot \left[-\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-5} u(-(n-5)-1)\right]$$

$$= A \cdot \frac{z^{-5}}{1+\frac{1}{8}\cdot z^{-1}} \qquad 0 < |z| < \frac{1}{8}$$

$$X(z) = \frac{5z+3}{z^2-2z-3} \qquad x(n) = ?$$

$$= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}$$

$$A = \left.\frac{5z+3}{z+1}\right|_{z=3} = \frac{9}{2}$$

$$B = \left.\frac{5z+3}{z-3}\right|_{z=-1} = \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{9}{2} 3^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} u(n-1), & |z| > 3 \\ -\frac{9}{2} 3^{n-1} u(-n) + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} u(n-1), & 1 < |z| < 3 \\ -\frac{9}{2} 3^{n-1} u(-n) - \frac{1}{2} (-1)^{n-1} u(-n), & |z| < 1 \end{cases}$$

Matlab: residue

$$\left.\begin{matrix} a^n u(n) \\ -a^n u(-n-1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\left.\begin{matrix} a^{n-1} u(n-1) \\ -a^{n-1} u(-n) \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{1}{z-a} \begin{cases} |z| > |a| \\ |z| < |a| \end{cases}$$

$$x(n-n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$a^n x(n) \rightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$x(-n) \rightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$u(-n) \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

$$u(-n-1) = u(-(n+1)) \rightarrow \frac{z}{1-z}$$

$$-a^n u(-n-1) \rightarrow -\frac{\left(\frac{z}{a}\right)}{1-\left(\frac{z}{a}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}}$$

†) $u(n) \xrightarrow{ZT} \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$

†) $a^n u(n) \rightarrow \dfrac{1}{1-\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} \quad \left|\frac{z}{a}\right| > 1$

$$\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

†) $-a^n u(-n-1) \rightarrow$

$$X(z) = \frac{5z+3}{z^2-2z-3}$$

$$A = \left.\frac{5z+3}{(z-3)(z+1)}\right|_{z=0} = -1$$

$$B = \left.\frac{5z+3}{z(z+1)}\right|_{z=3} = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5z+3}{z(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z+1}$$

$$\rightarrow X(z) = A + B \cdot \frac{z}{z-3} + C \cdot \frac{z}{z+1}$$

$$x(n) = \begin{cases} -\delta(n) + \frac{3}{2} 3^n u(n) - \frac{1}{2}(-1)^n u(n) & |z| > 3 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{cases}$$

Matlab: residuez

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

transfer func.

$H(z)$ <
- hàm truyền (đạt)
- – hệ thống

system func.

$$X(z) . H(z) = Y(z)$$

$H(z)$

$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

Ổn định ?

$h(n)$

PTSP

Sơ đồ –

+) Hệ thống LTI (nhân quả)

$$y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = 5x(n) - 2x(n-1)$$

Tìm $h(n)$?

residuez

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$\rightarrow h(n) = A\,3^n u(n) + B.u(n)$$

+ Cho hệ thống $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

Tìm nghịch đảo của h.t trên?

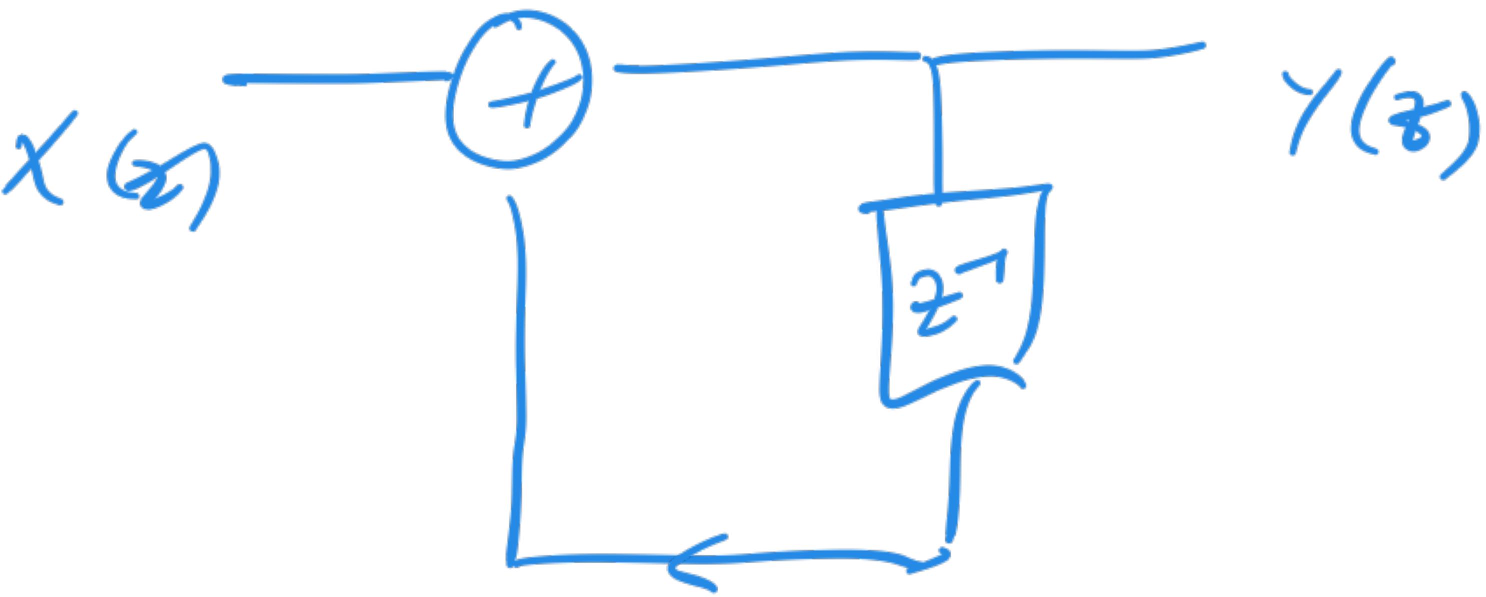
$$x(n) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \boxed{T^{-1}} \longrightarrow x(n)$$

$$X(z) \qquad H(z) \qquad ? = \frac{1}{H(z)} \qquad X(z)$$

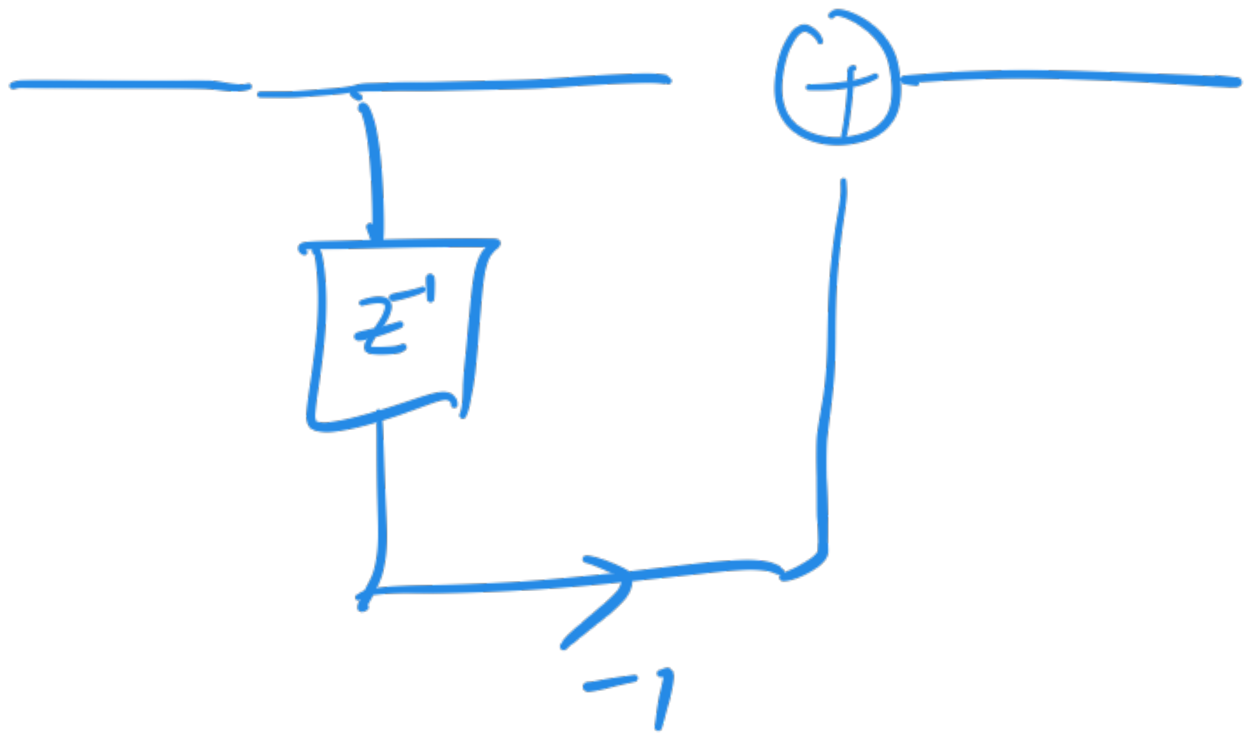
$$y(n) = x(n) + y(n-1)$$

$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{1}{H(z)} = 1 - z^{-1}$$



X(z)
+
z^{-1}
Y(z)



+
z^{-1}
-1

Hàm truyền đạt

$$H(z) = \mathrm{ZT}\{h(n)\}$$

- Các điểm cực z_{pk} và các điểm không z_{0r}? Vẽ trên mặt phẳng phức?
- Hệ thống LTI ổn định: Miền hội tụ chứa vòng tròn đơn vị
- Hệ thống LTI nhân quả ổn định:

$$|z_{pk}| < 1, \quad \forall k$$

- Sử dụng biến đổi z một phía để giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

$H(z)$ nhân quả, ổn định:

$$|z_{pk}| < 1 \quad \forall k$$

Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn (1)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Tất cả các nghiệm của $A(z)$ có nằm trong vòng tròn đơn vị không?
Xét các đa thức $A_m(z)$ và $B_m(z)$

$$A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} \qquad a_m(0) = 1$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_m(m-k) z^{-k}$$

Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn (2)

Hệ thống ổn định khi $|K_m| < 1$, $\forall m = 1, 2, \ldots, N$, trong đó các hệ số K_m được tính theo các bước như sau

1. Đặt $A_N(z) = A(z), \quad K_N = a_N(N)$
2. Với $m = N, N-1, \ldots, 1$,

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad K_m = a_m(m)$$

Ví dụ: Kiểm tra xem các nghiệm của đa thức sau có nằm trong vòng tròn đơn vị hay không?

$$A(z) = 1 - 0.3z^{-1} + 1.5z^{-2} - 0.2z^{-3} + 0.75z^{-4}$$

$$A(z) = 1 - 0.3z^{-1} + 1.5z^{-2} - 0.2z^{-3} + \underline{0.75}\, z^{-4}$$

$$A_4(z) = A(z) \qquad |K_4 = 0.75| < 1$$

$$B_4(z) = z^{-4} A_4(z^{-1}) = z^{-4} - 0.3z^{-3} + 1.5z^{-2} - 0.2z^{-1} + 0.75$$

$$A_3(z) = \frac{A_4(z) - K_4 B_4(z)}{1 - K_4^2} = 1 - \frac{12}{35} z^{-1} + \frac{6}{7} z^{-2} + \underline{\frac{2}{35}}\, z^{-3}$$

$$\rightarrow \left| K_3 = \frac{2}{35} \right| < 1$$

$$B_3(z) = z^{-3} - \frac{12}{35} z^{-2} + \frac{6}{7} z^{-1} + \frac{2}{35}$$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 \ldots z^{-1} \underbrace{\ldots\ldots}\, z^{-2}$$

$$|K_2| < 1 \;?$$

$$H(z) = \frac{\qquad}{3 - 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - 2z^{-3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdots\cdots}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} - \underbrace{\frac{2}{3}}z^{-3}}$$

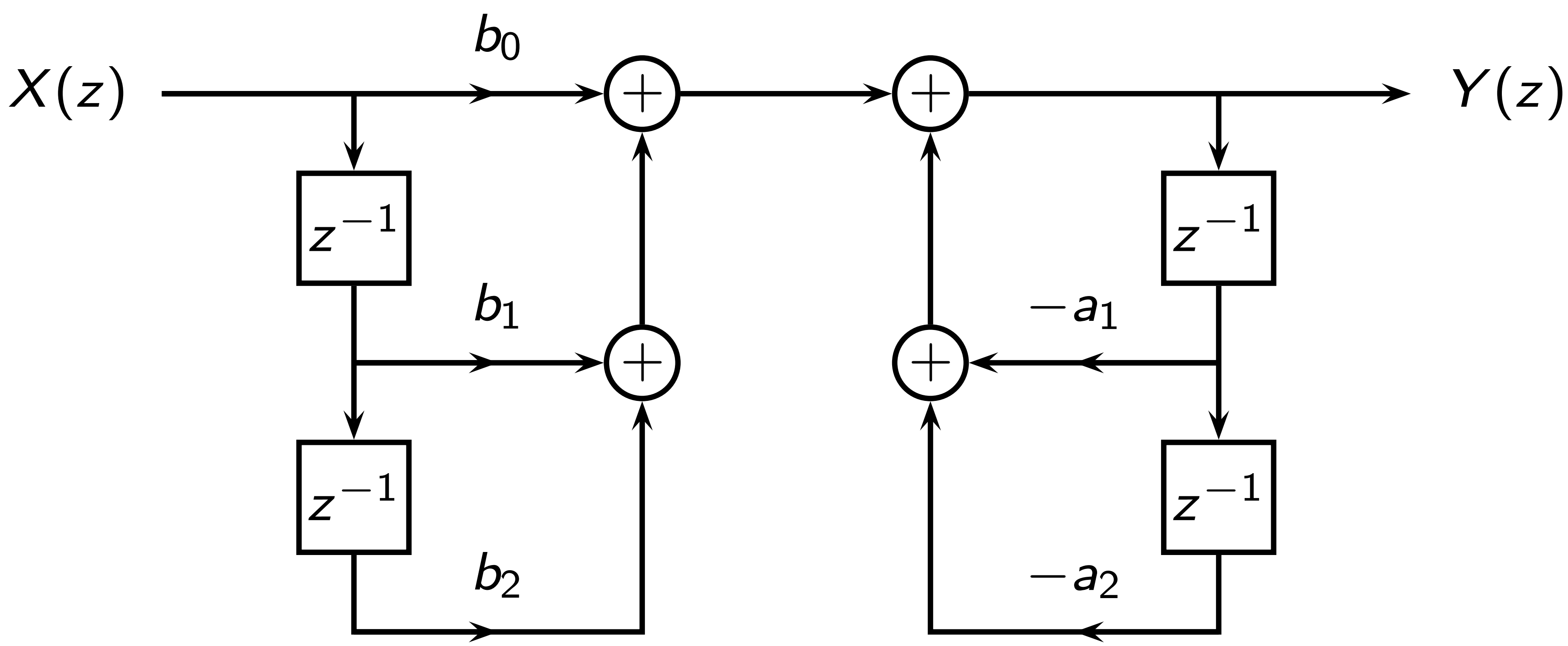
$$K_3 = -\frac{2}{3}$$

$$|K_3| < 1$$

Chưa biết !

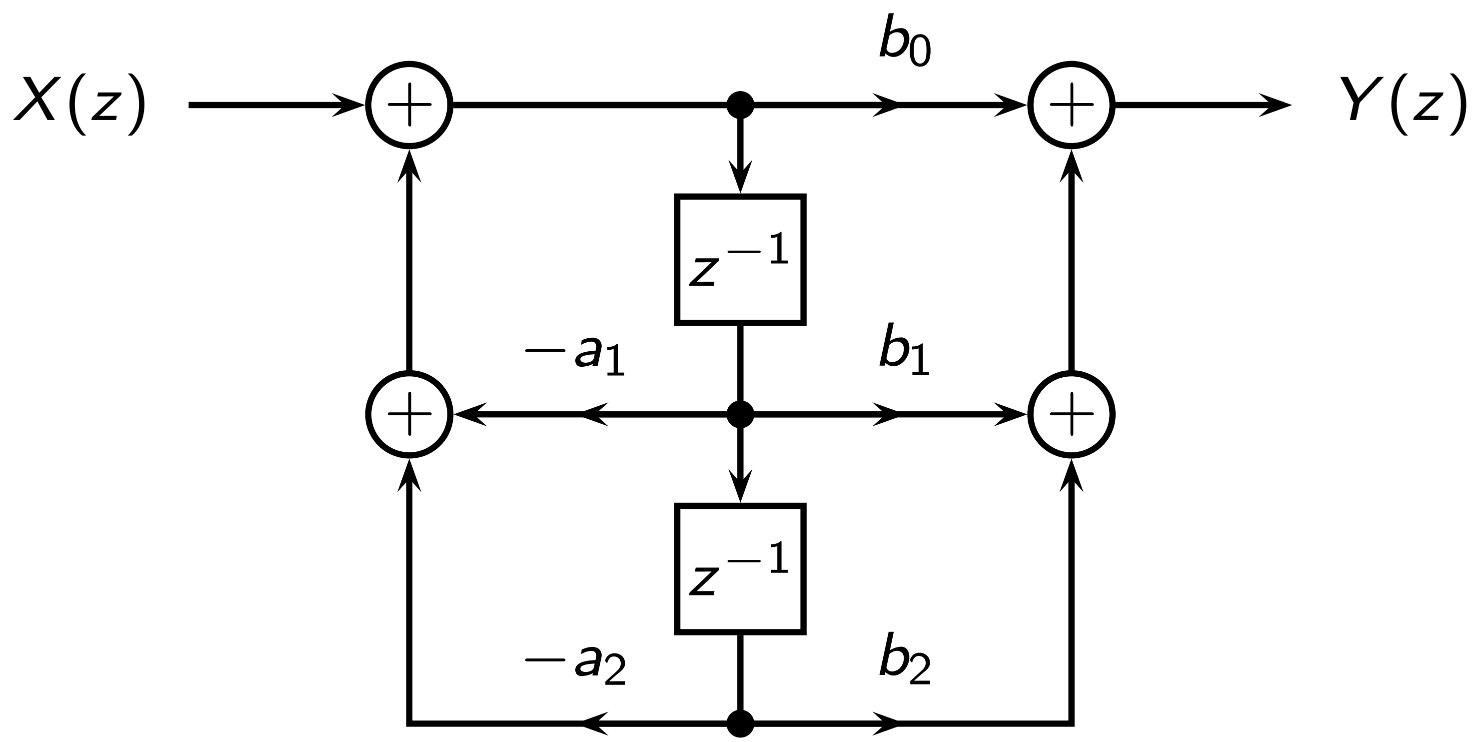
Sơ đồ thực hiện hệ thống LTI: Dang trực tiếp I

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$



Dạng trực tiếp: Nhân trực tiếp với các hệ số a_k, b_r của phương trình sai phân.

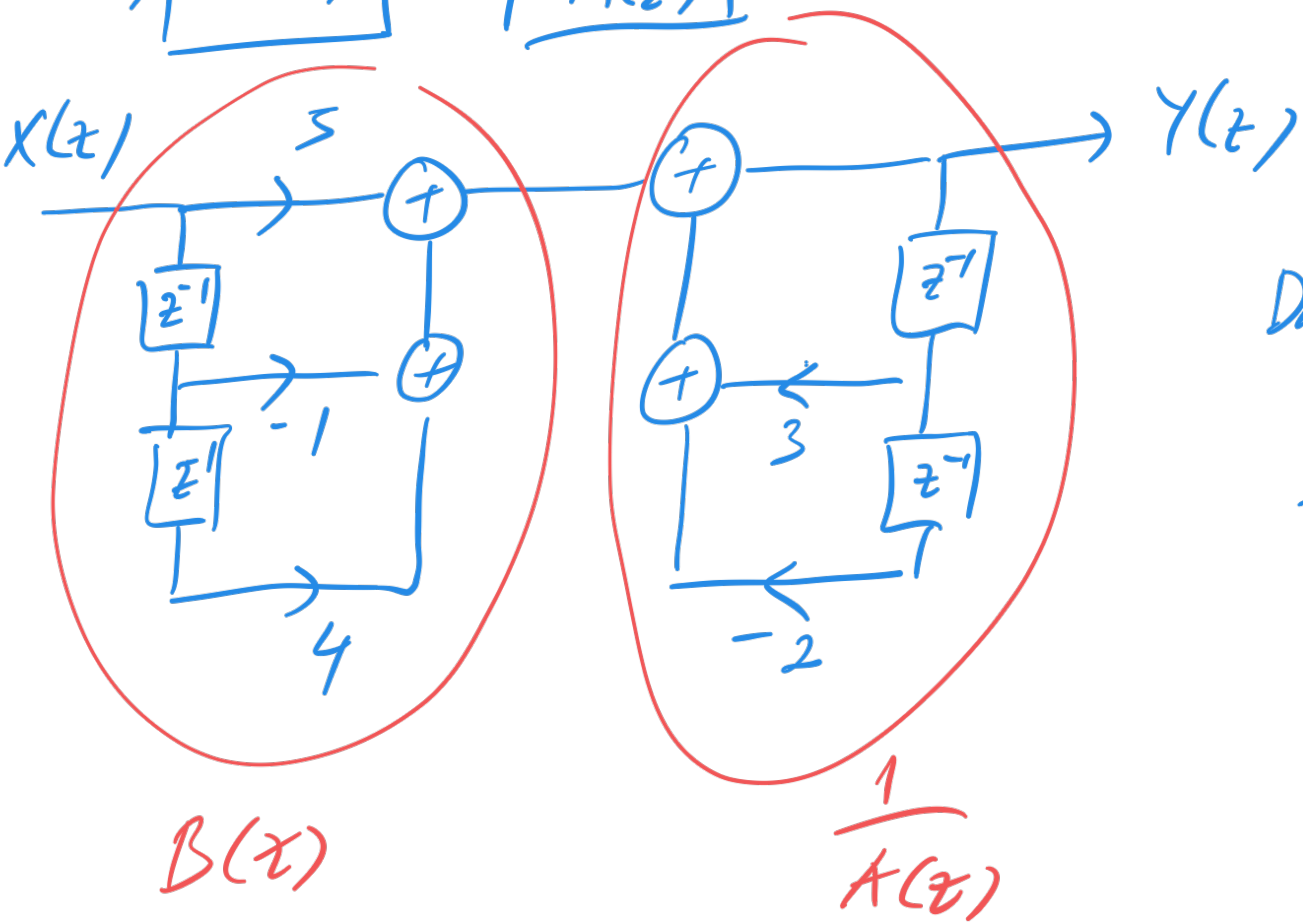
Sơ đồ thực hiện hệ thống LTI: Dạng trực tiếp II



Dạng chính tắc: Sử dụng ít bộ nhớ (số phần tử trễ) nhất - $\max\{N, M\}$

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 5x(n) - x(n-1) + 4x(n-2)$$

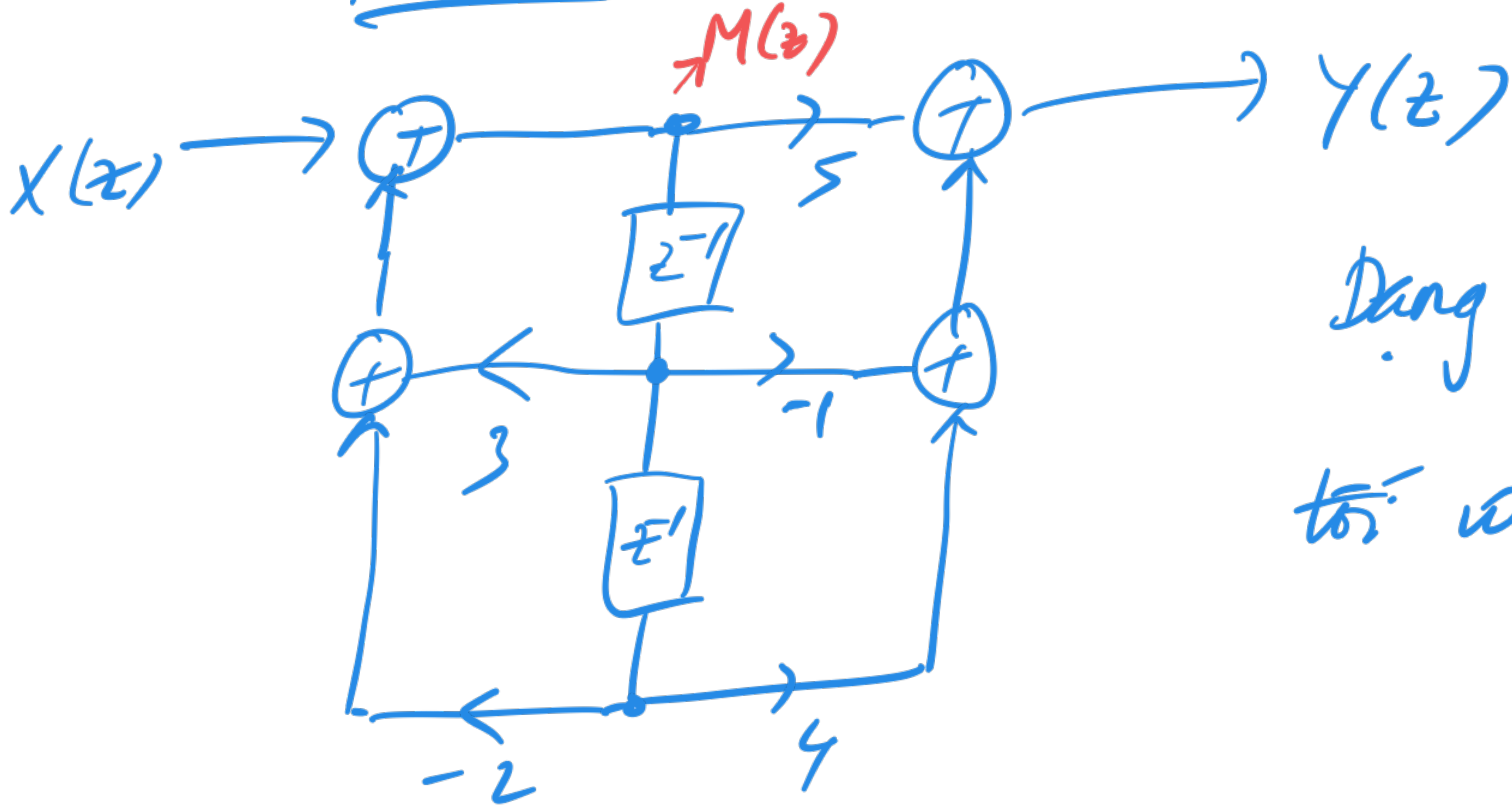
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5 - z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$



Dạng trực tiếp I

tối ưu $< \begin{matrix} + \\ \times \end{matrix}$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{A(z)}} \longrightarrow \boxed{B(z)} \longrightarrow Y(z)$$



Dạng trực tiếp II

tối ưu : +, ×, D

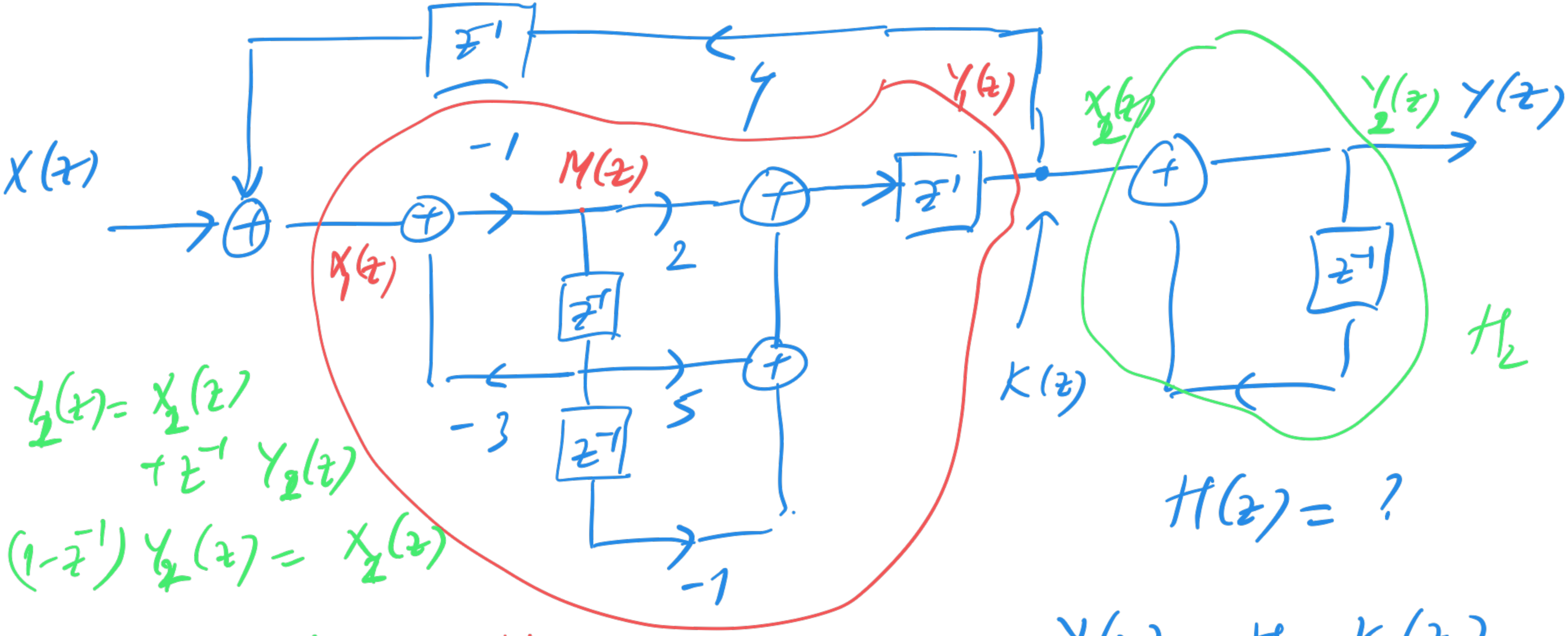
$$M(z) = X(z) + 3z^{-1}M(z) - 2z^{-2}M(z)$$

$$(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})M(z) = X(z) \rightarrow M(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} X(z) \quad (1)$$

$$Y(z) = 5M(z) - z^{-1}M(z) + 4z^{-2}M(z)$$

$$= (5 - z^{-1} + 4z^{-2})M(z) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow Y(z) = \frac{5 - z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \ldots$$



$H(z) = ?$

$Y_2(z) = X_2(z) + z^{-1} Y_2(z)$

$(1-z^{-1})\, Y_2(z) = X_2(z)$

$$H_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$Y_1(z) = z^{-1}\left(2M(z) + 5z^{-1} M(z) - z^{-2} M(z)\right)$

$= z^{-1}\left(2 + 5z^{-1} - z^{-2}\right) M(z)$

$M(z) = -\left(X_1(z) - 3z^{-1} M(z)\right)$

$(1-3z^{-1})\, M(z) = -X_1(z)$

$$\rightarrow M(z) = -\frac{1}{1-3z^{-1}} X_1(z)$$

$H_1(z) =$

$Y(z) = H_2 \cdot K(z)$

$K(z) = H_1\left(X(z) + 4z^{-1} K(z)\right)$

$(1-4z^{-1}H_1)\, K(z) = H_1 X(z)$

$$K(z) = \frac{H_1}{1-4z^{-1}H_1} X(z)$$

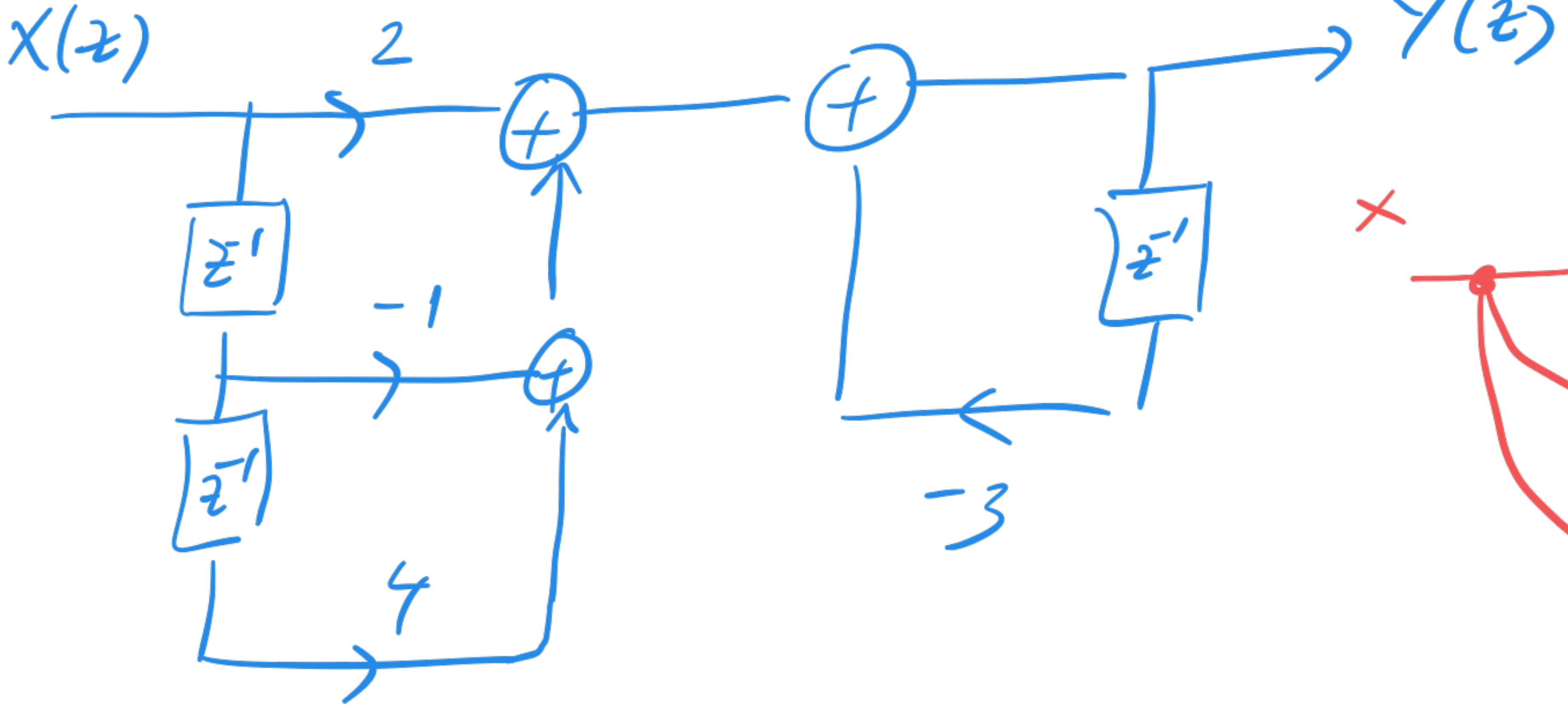
$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1 H_2}{1-4z^{-1}H_1}$$

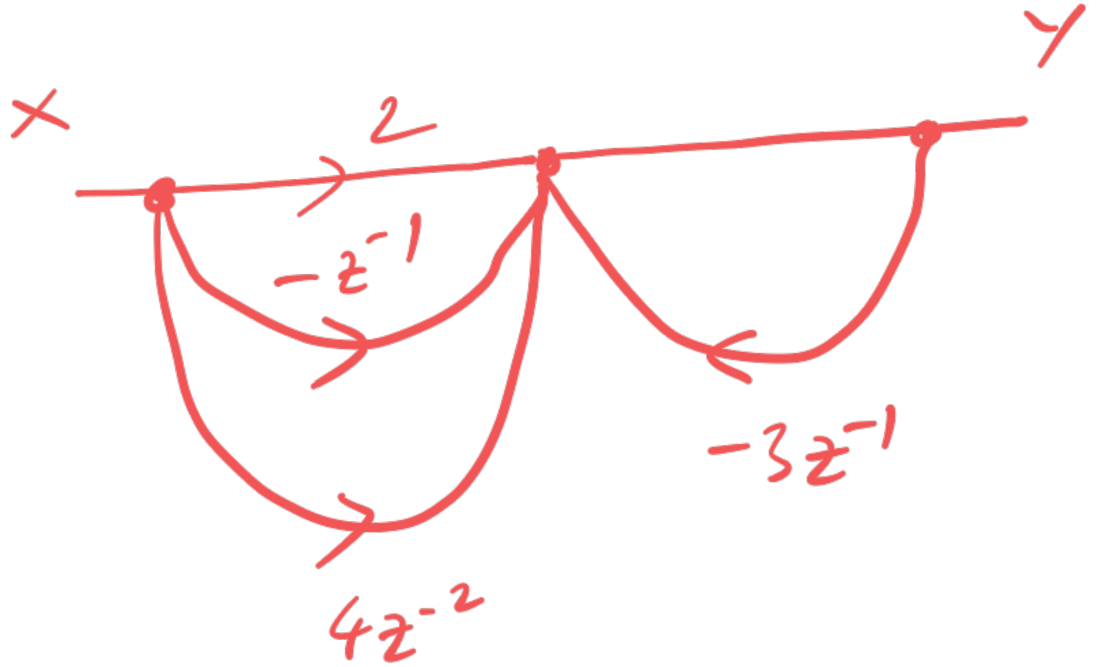
$H(z)$ {
Chia nhỏ thành các hệ thống con
Đặt tín hiệu trung gian

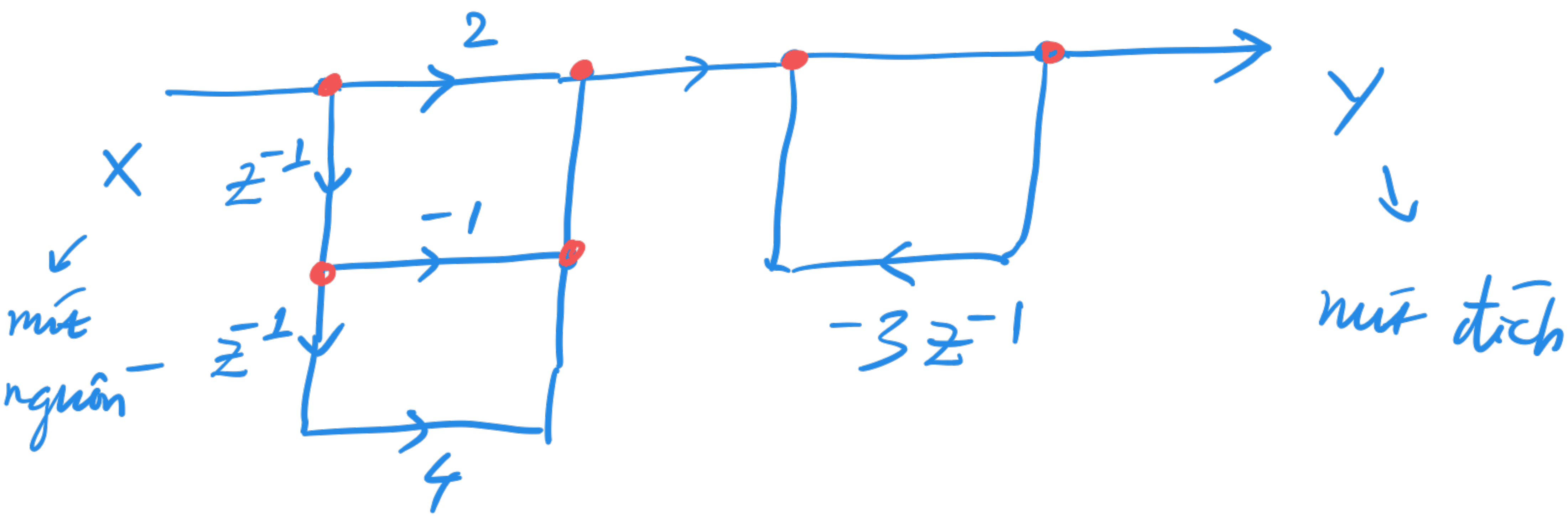
Lưu đồ tín hiệu

- Nút
- Nhánh

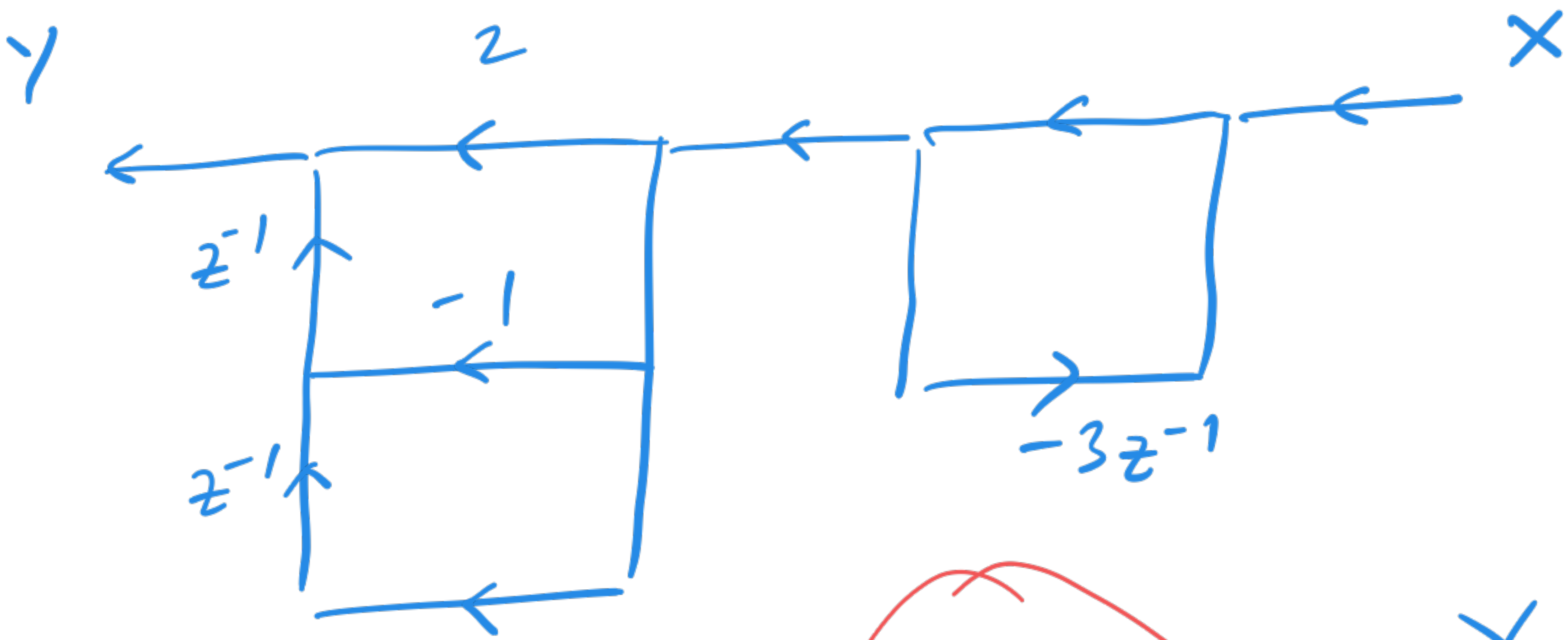
$$H(z) = \frac{2 - z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + 3z^{-1}}$$

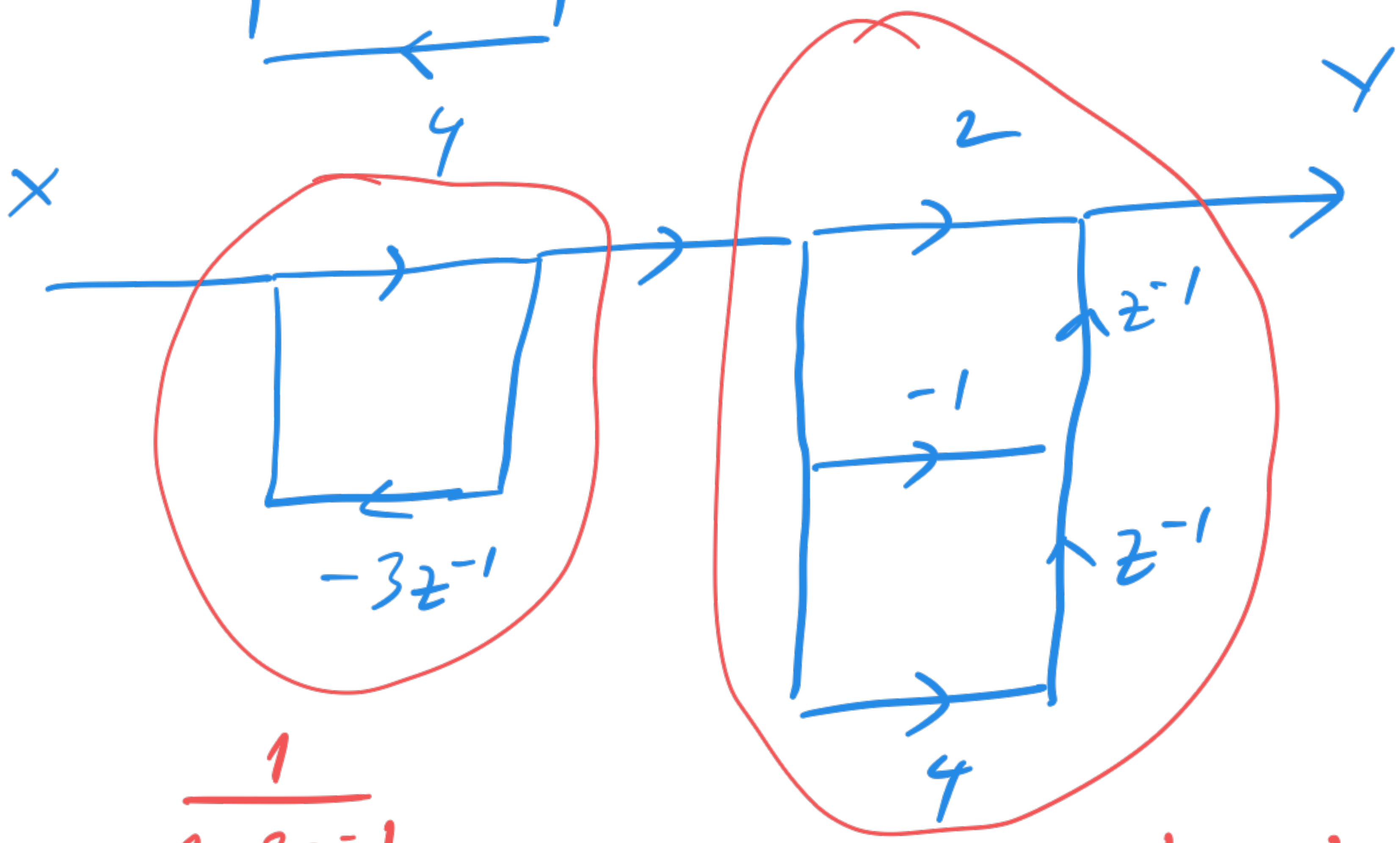






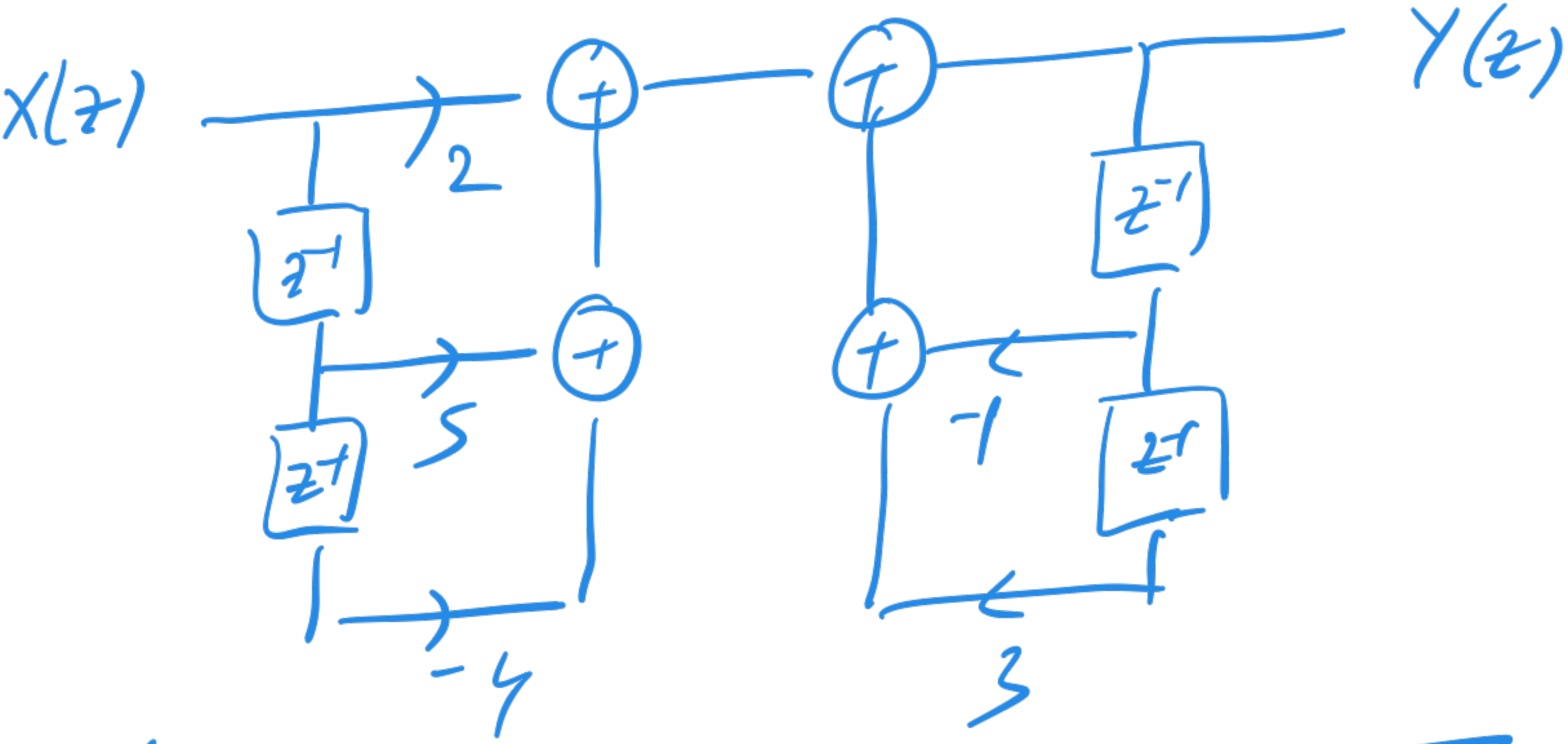
Lau đồ chuyển vị
- đổi chỗ nguồn – đích
- đảo hướng + nhánh

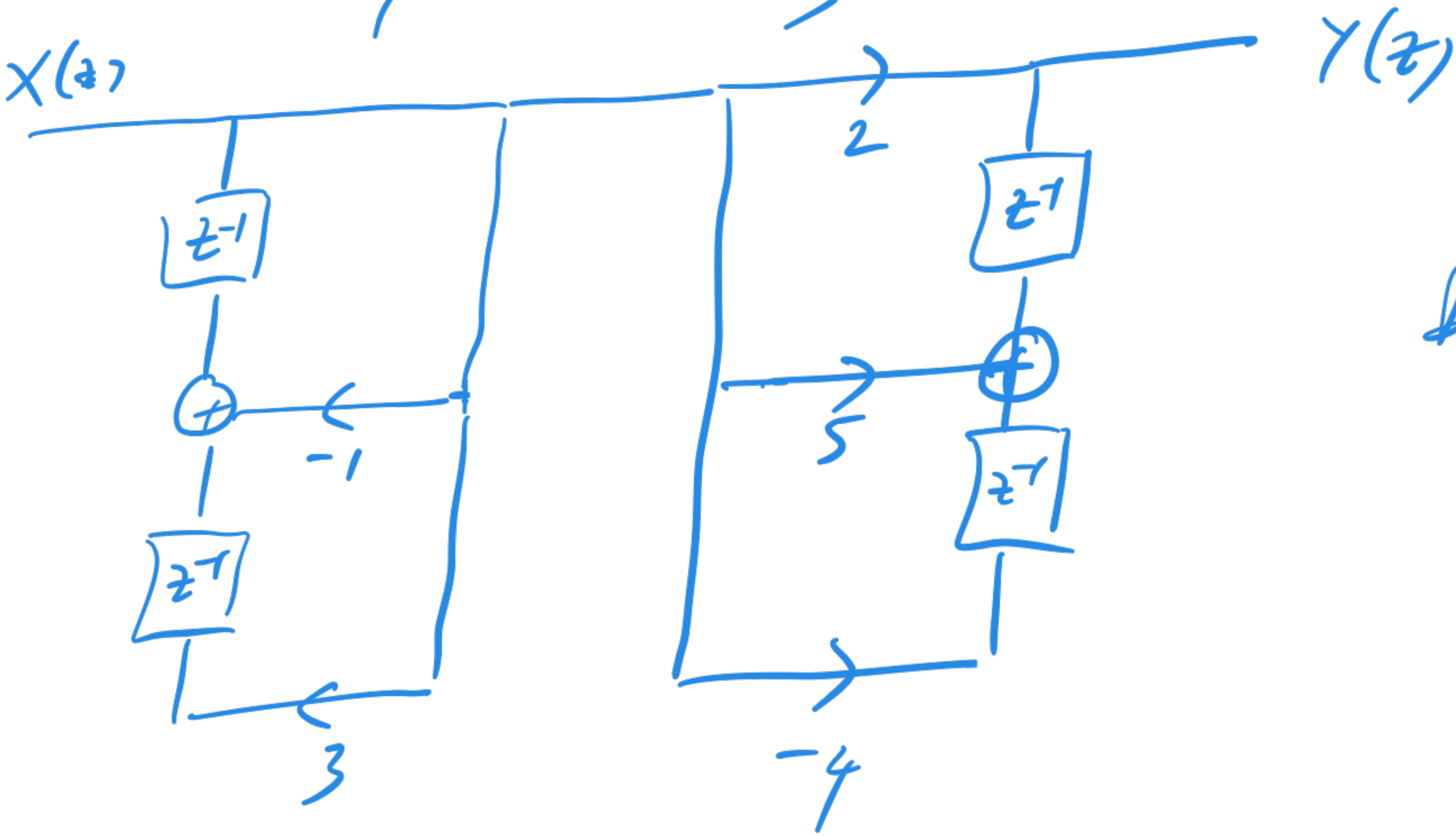




$\frac{1}{1+3z^{-1}}$

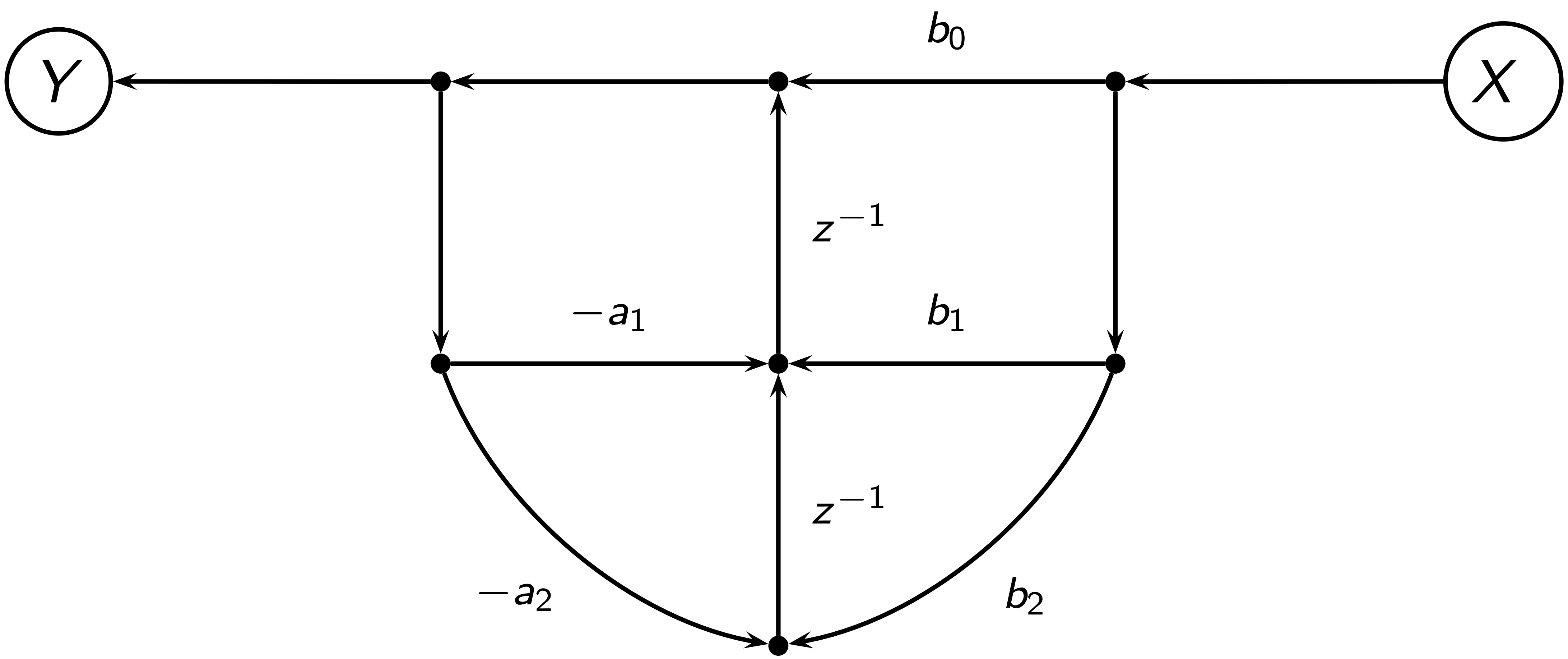
$2+z^{-1}+4z^{-2}$





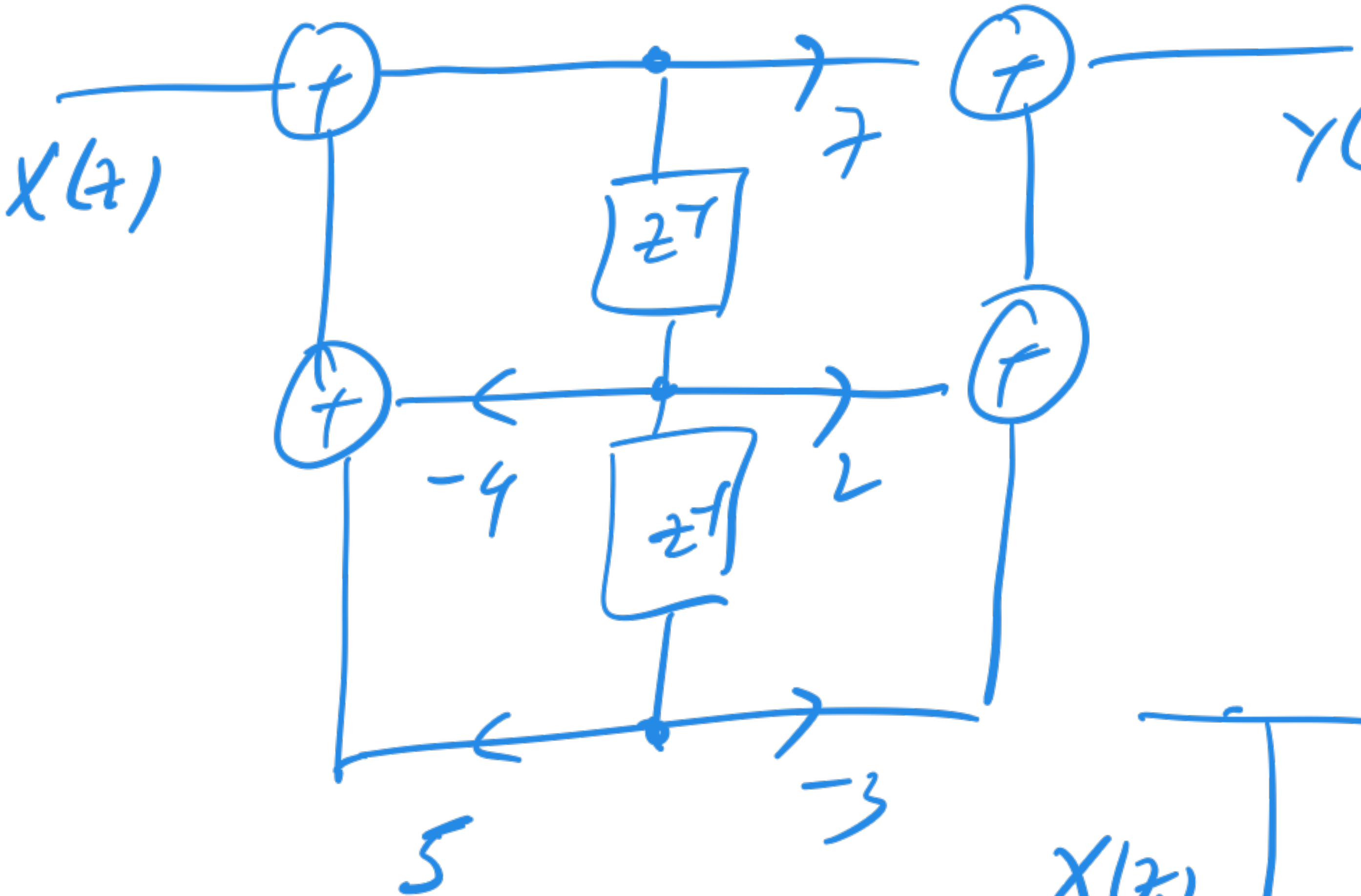
Dang trực tiếp I_t

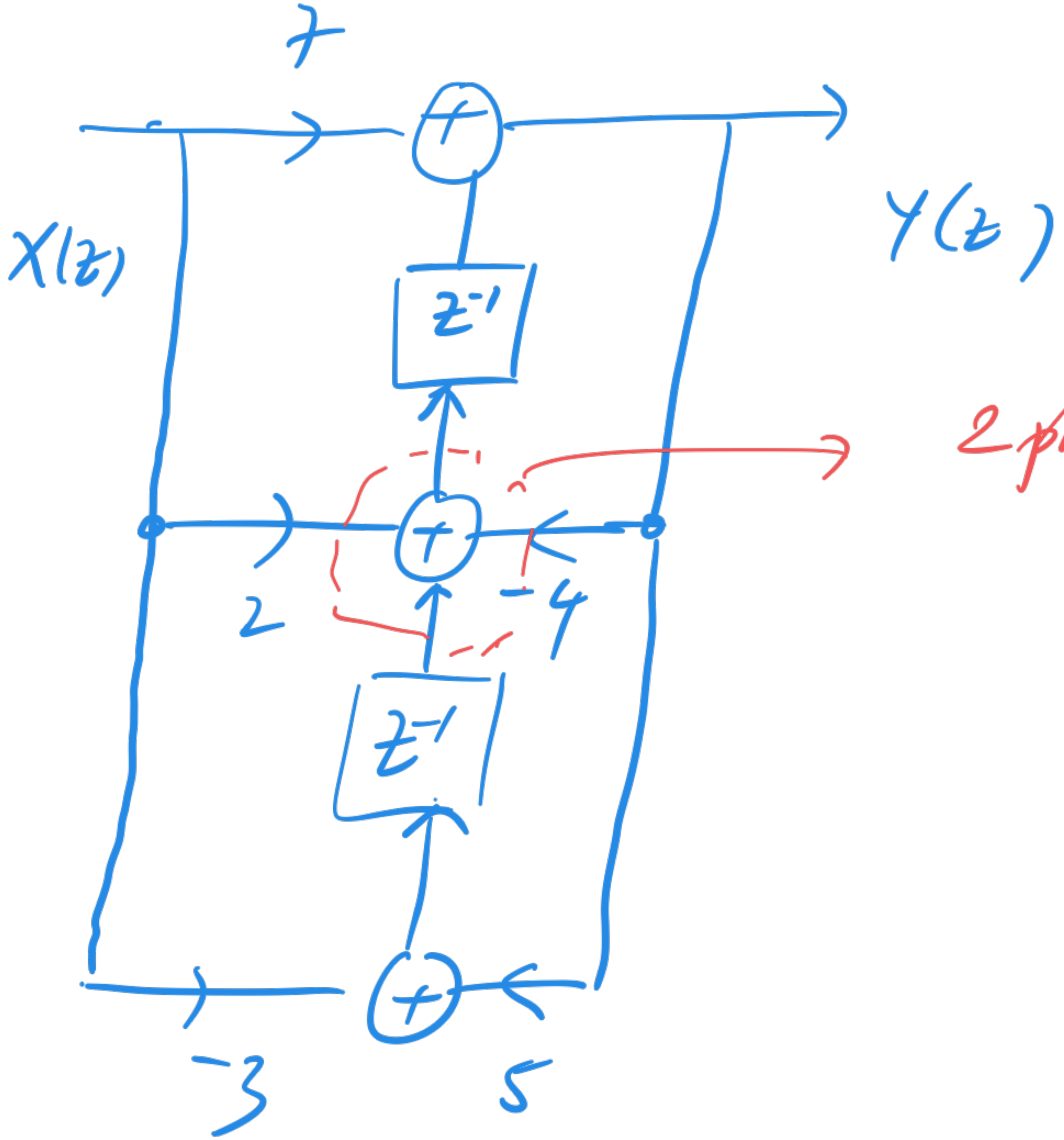
Lưu đồ tín hiệu - Dạng chuyển vị



- Đổi chỗ đầu vào / đầu ra
- Đảo hướng tất cả các nhánh

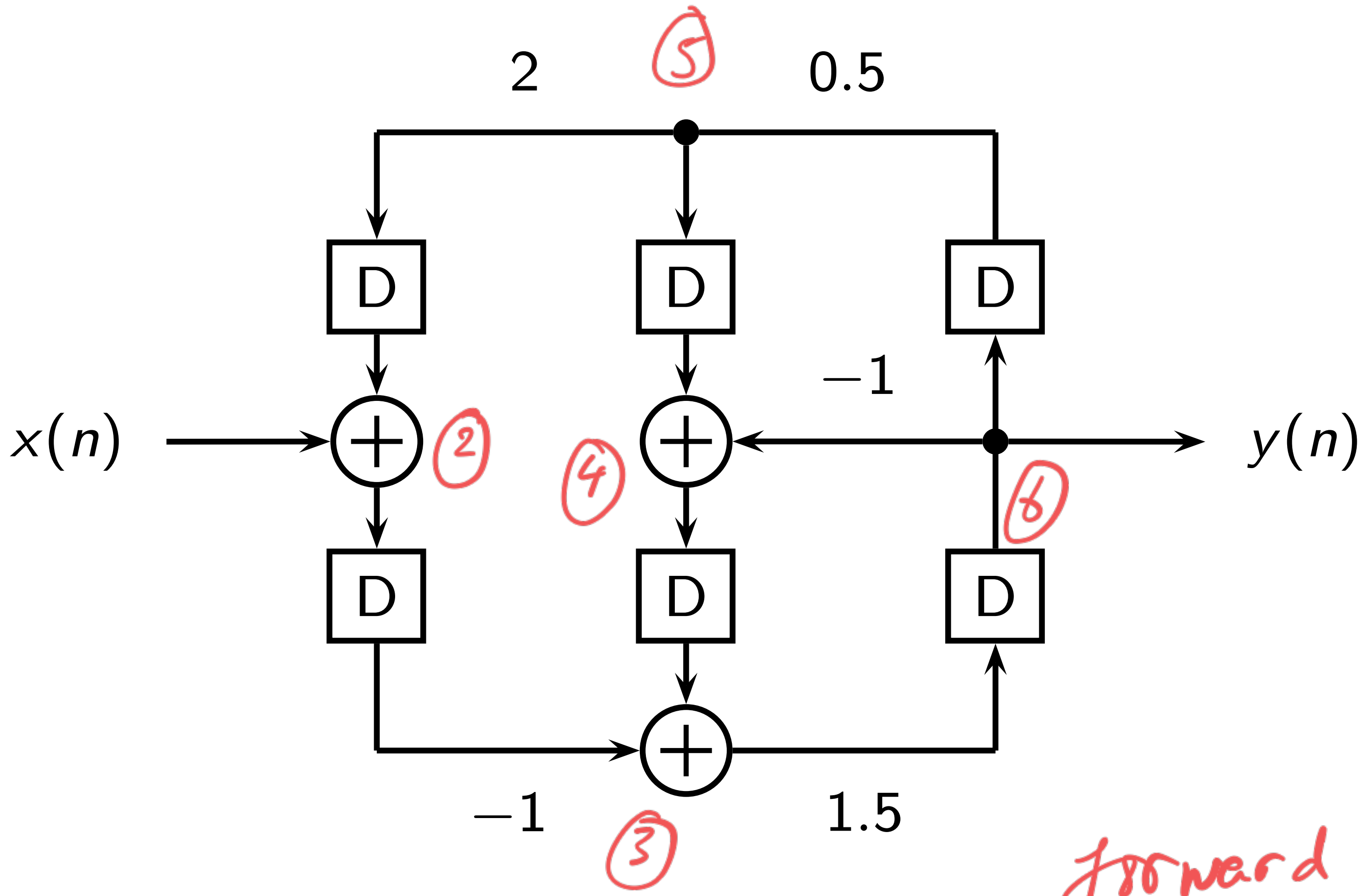
II_t ?





2 phép cộng

Công thức Mason (1)



forward path thứ k

Δ của lưu đồ bỏ đi tất cả các loop chạm G_k rồi

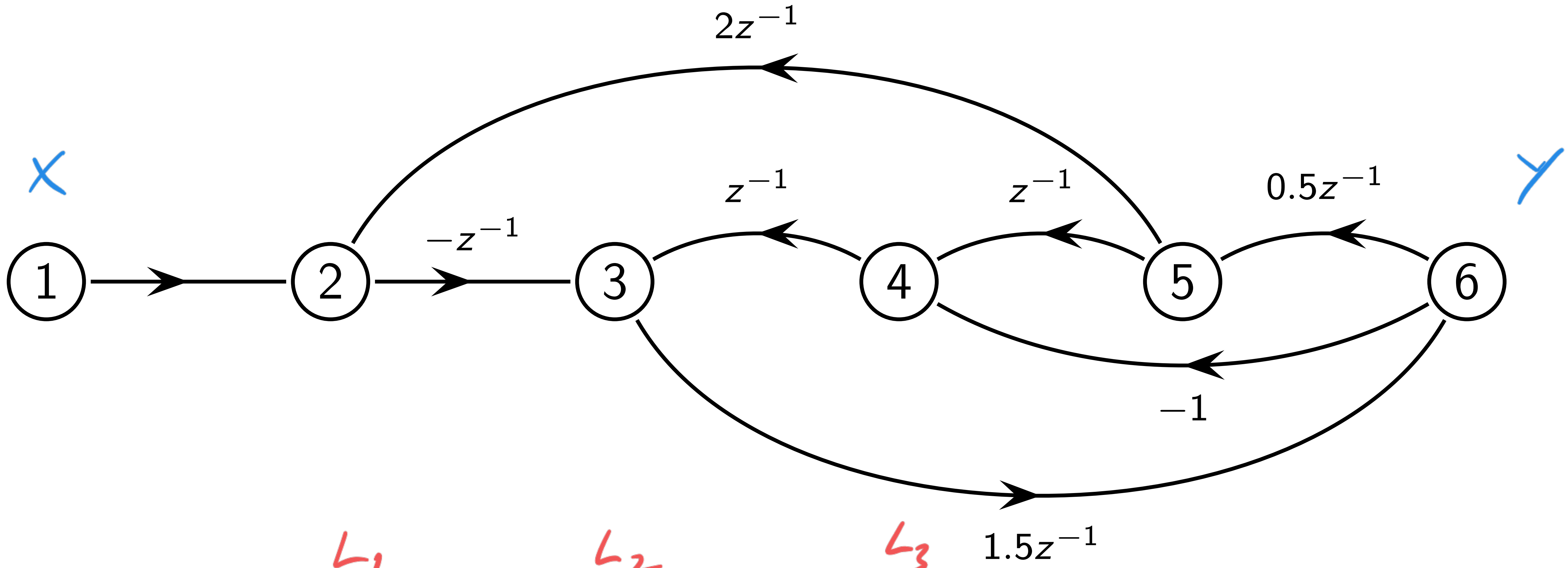
$$H(z) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N} G_k \Delta_k$$

cặp 2 loop k chạm nhau

trong đó

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \cdots + (-1)^m \sum \cdots + \ldots$$

Công thức Mason (2)



L_1 L_2 L_3

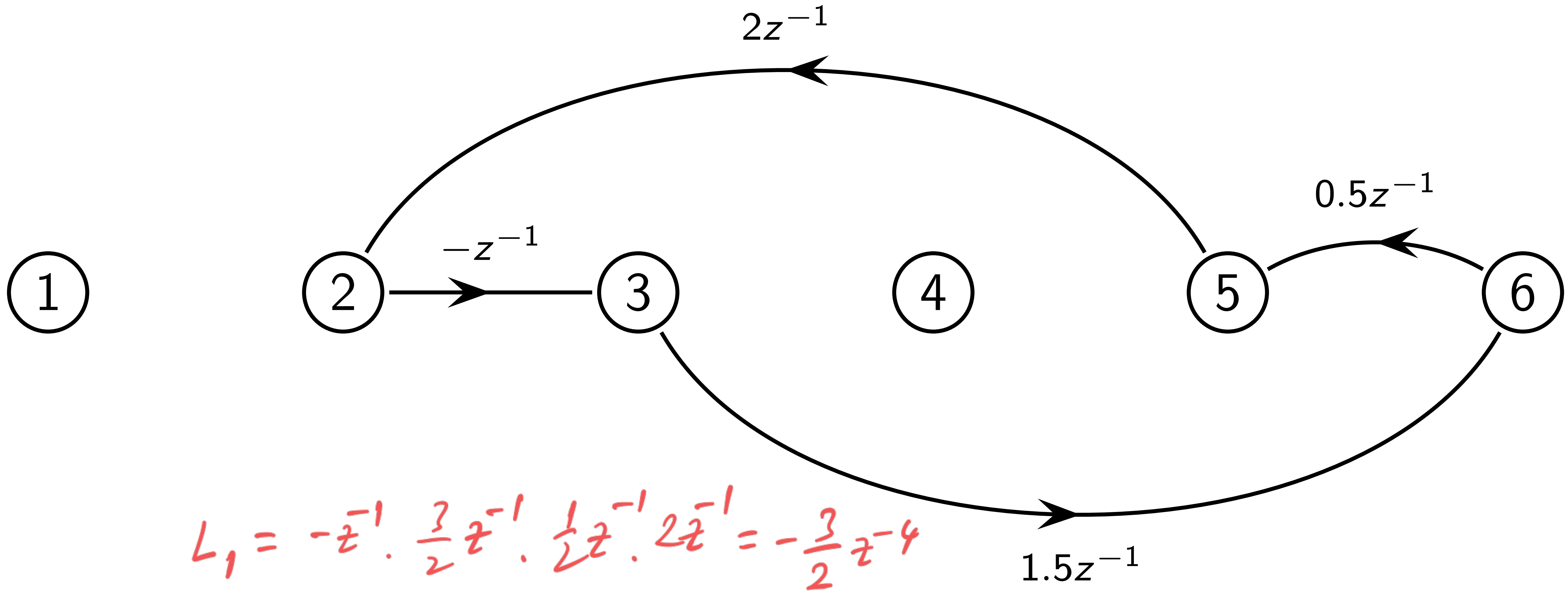
- Loop: (2,3,6,5,2), (3,6,5,4,3), và (3,6,4,3)
- Forward path: (1,2,3,6)

G_1 $\Delta_1 = 1$

$$\Delta = 1 - \sum L_i = 1 - \left(-\frac{3}{2}z^{-4}\right) - \frac{3}{4}z^{-4} + \frac{3}{2}z^{-2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{G_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-2}}{1 + \frac{3}{2}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-4}}$$

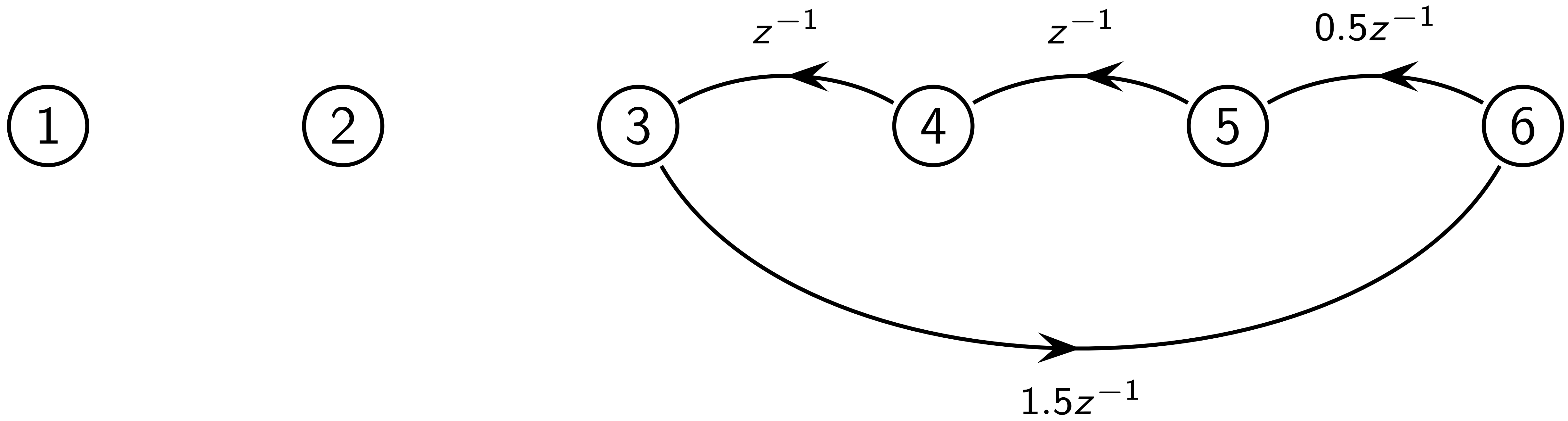
Công thức Mason (2)



$$L_1 = -z^{-1} \cdot \frac{3}{2} z^{-1} \cdot \frac{1}{2} z^{-1} \cdot 2z^{-1} = -\frac{3}{2} z^{-4}$$

- Loop: (2,3,6,5,2), (3,6,5,4,3), và (3,6,4,3)
- Forward path: (1,2,3,6)

Công thức Mason (2)

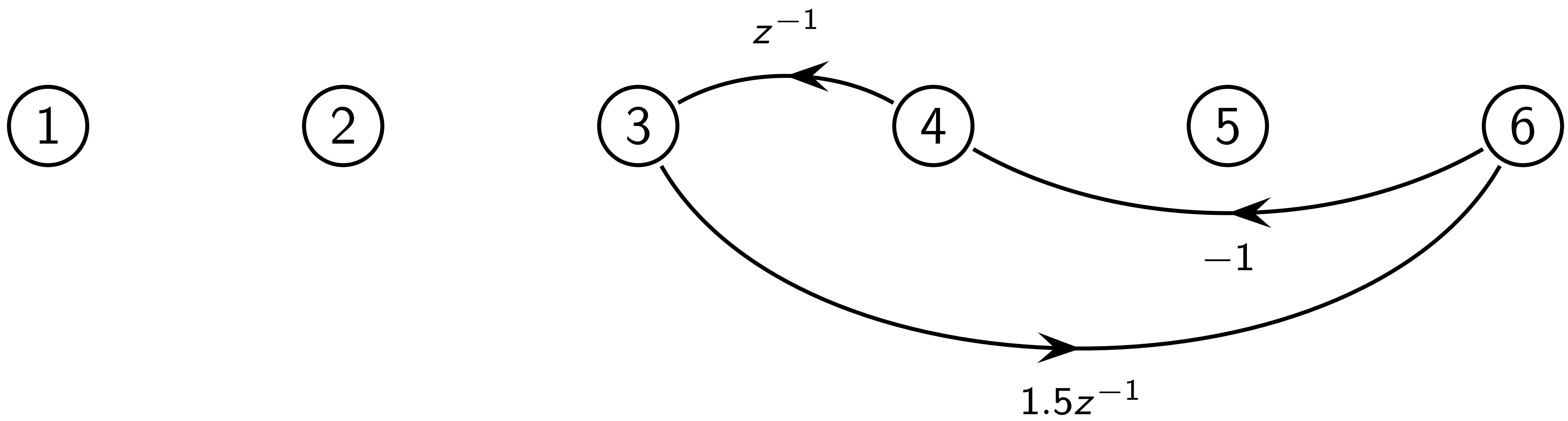


- Loop: (2,3,6,5,2), (3,6,5,4,3), và (3,6,4,3)
- Forward path: (1,2,3,6)

$$L_2 = \frac{3}{2}z^{-1} \cdot \frac{1}{2}z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1}$$

$$= \frac{3}{4}z^{-4}$$

Công thức Mason (2)

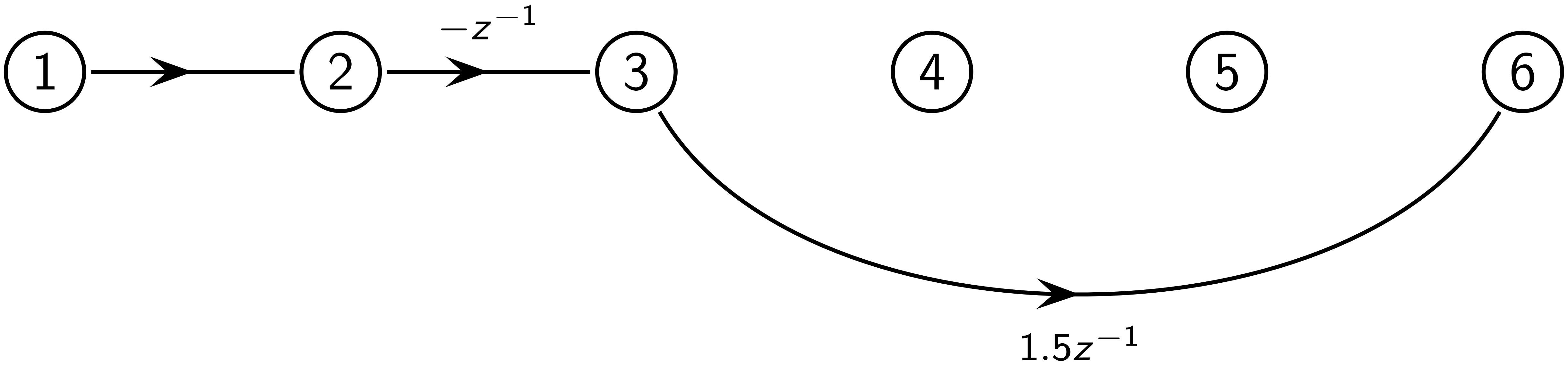


- Loop: (2,3,6,5,2), (3,6,5,4,3), và (3,6,4,3)
- Forward path: (1,2,3,6)

$$L_3 = \frac{3}{2} z^{-1} (-1) . z^{-1}$$

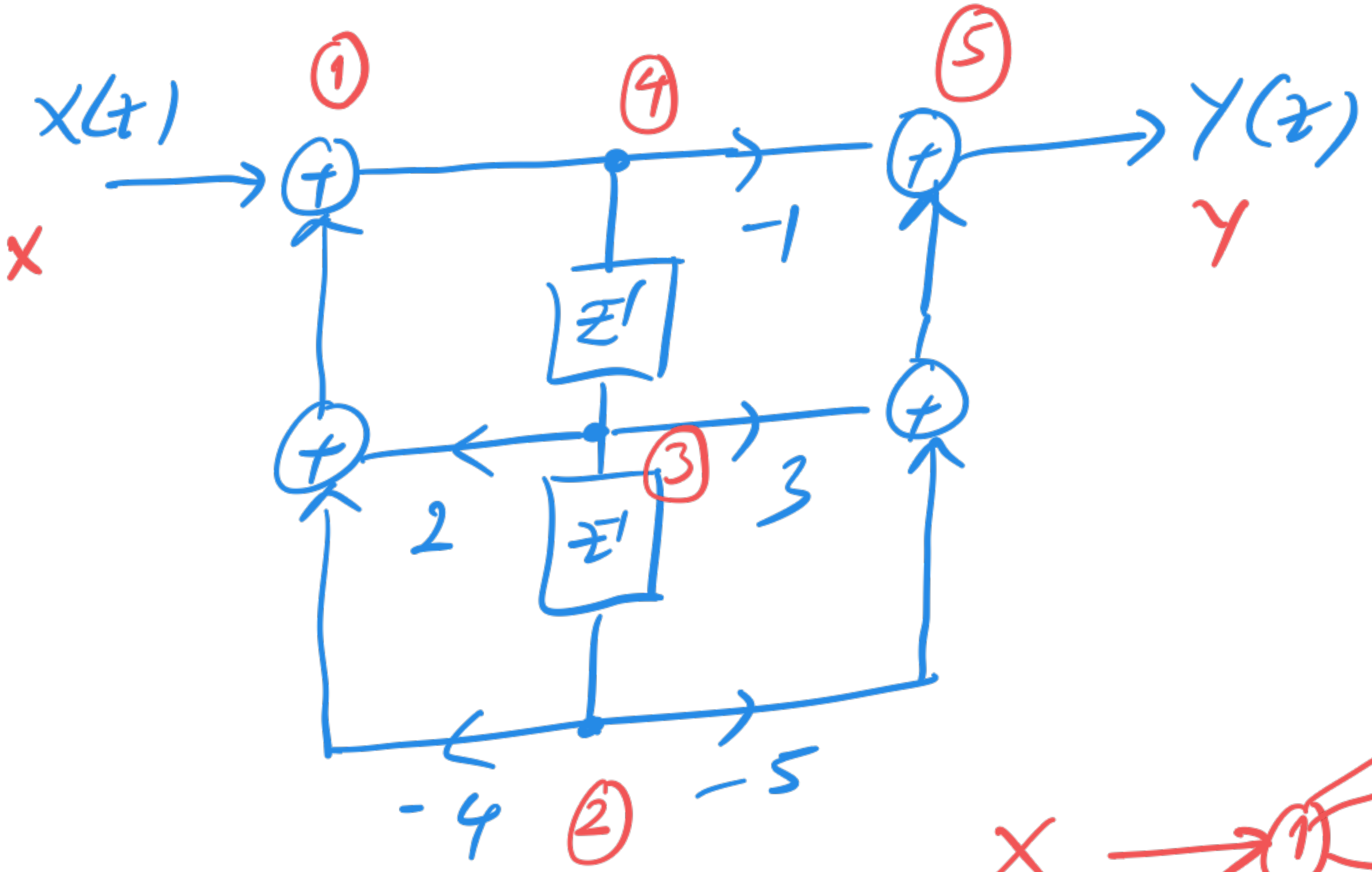
$$= -\frac{3}{2} z^{-2}$$

Công thức Mason (2)

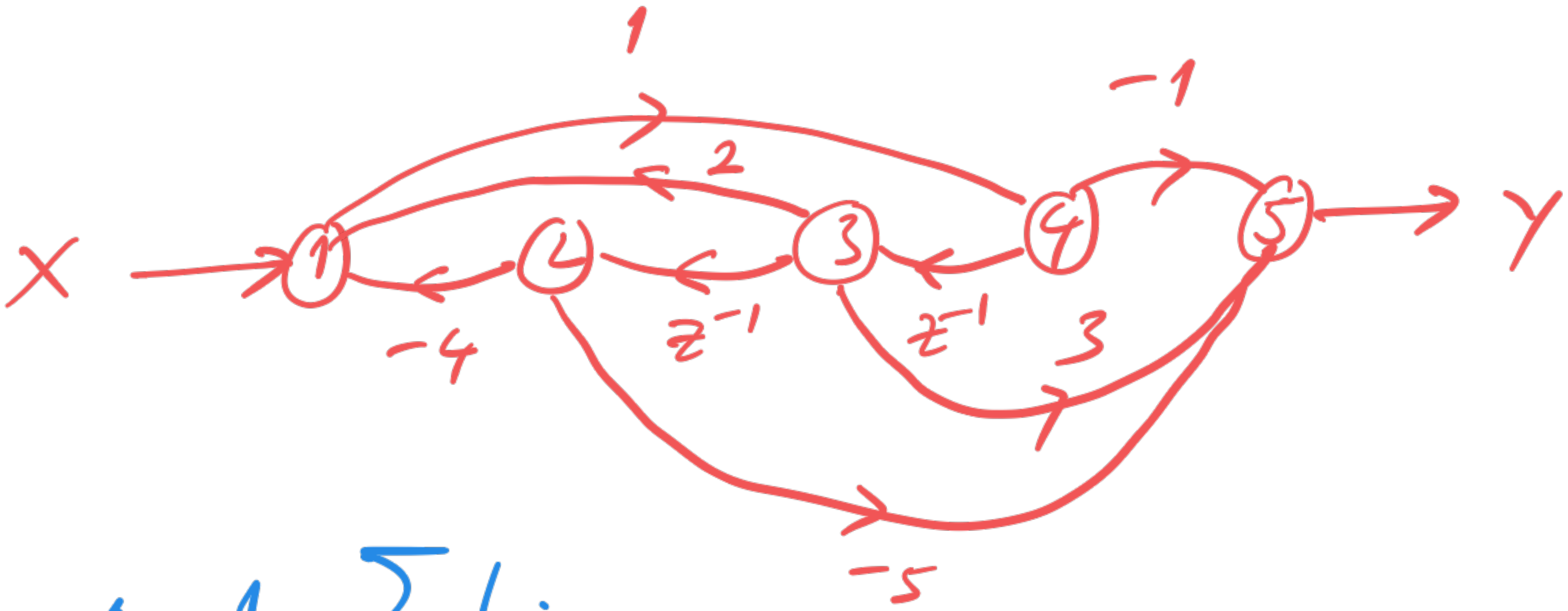


- Loop: (2,3,6,5,2), (3,6,5,4,3), và (3,6,4,3)
- Forward path: (1,2,3,6)

$$G_1 = -z^{-1} \cdot \frac{3}{2} z^{-1} = -\frac{3}{2} z^{-2}$$



H(z) ? CT Mason ?



Loops ?

L_1 : 1 4 3 2 1 : $-4z^{-2}$

L_2 : 1 4 3 1 : $2z^{-1}$

$$\Delta = 1 - \sum L_i$$
$$= 1 - 2z^{-1} + 4z^{-2}$$

Forward paths ?

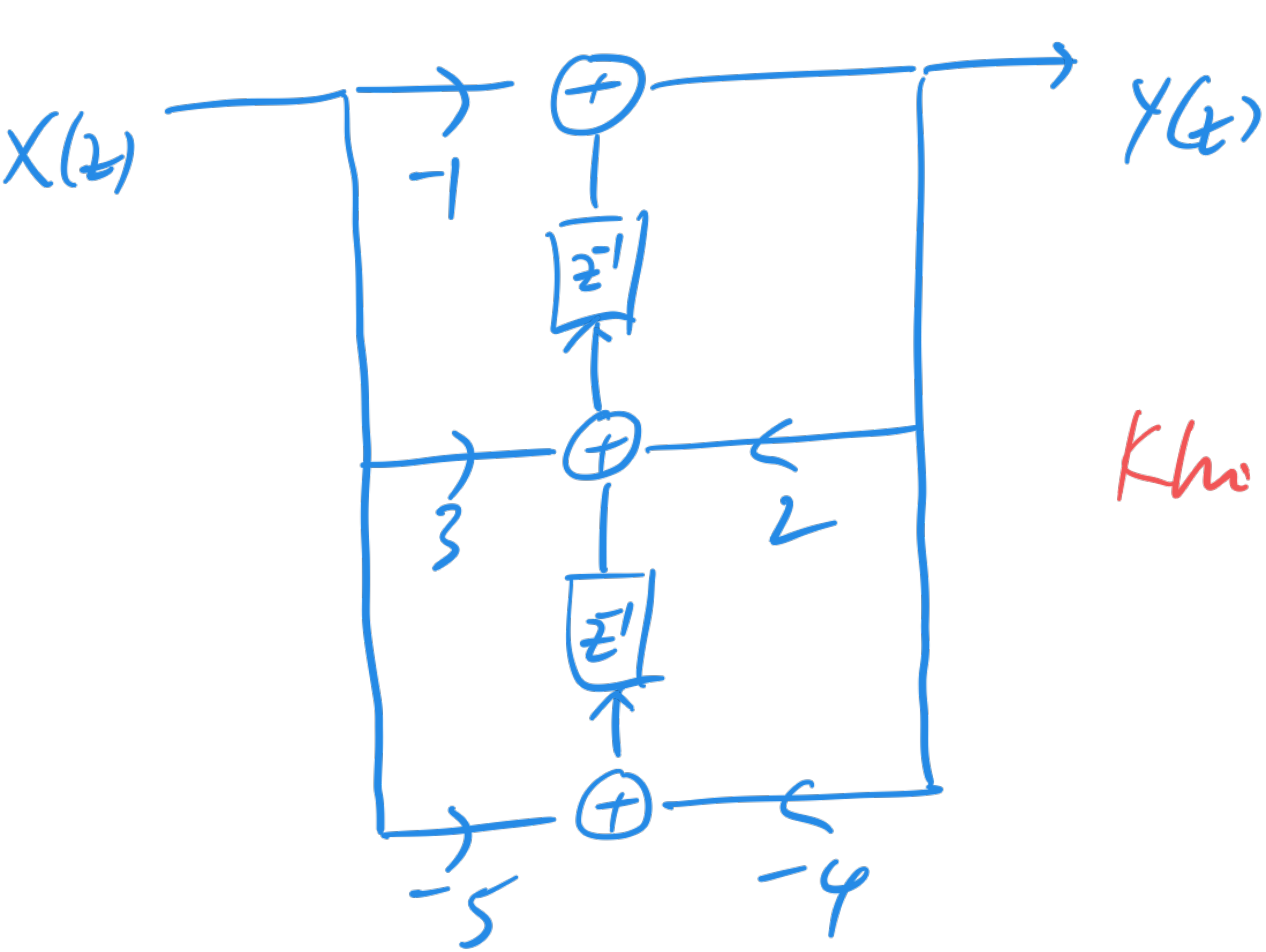
G_1: X 1 4 5 Y : -1 , $\Delta_1 = 1$

G_2: X 1 4 3 5 Y : $3z^{-1}$, $\Delta_2 = 1$

G_3 : X 1 4 3 2 5 Y : $-5z^{-2}$, $\Delta_3 = 1$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum G_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$$= \frac{-1 + 3z^{-1} - 5z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 4z^{-2}}$$



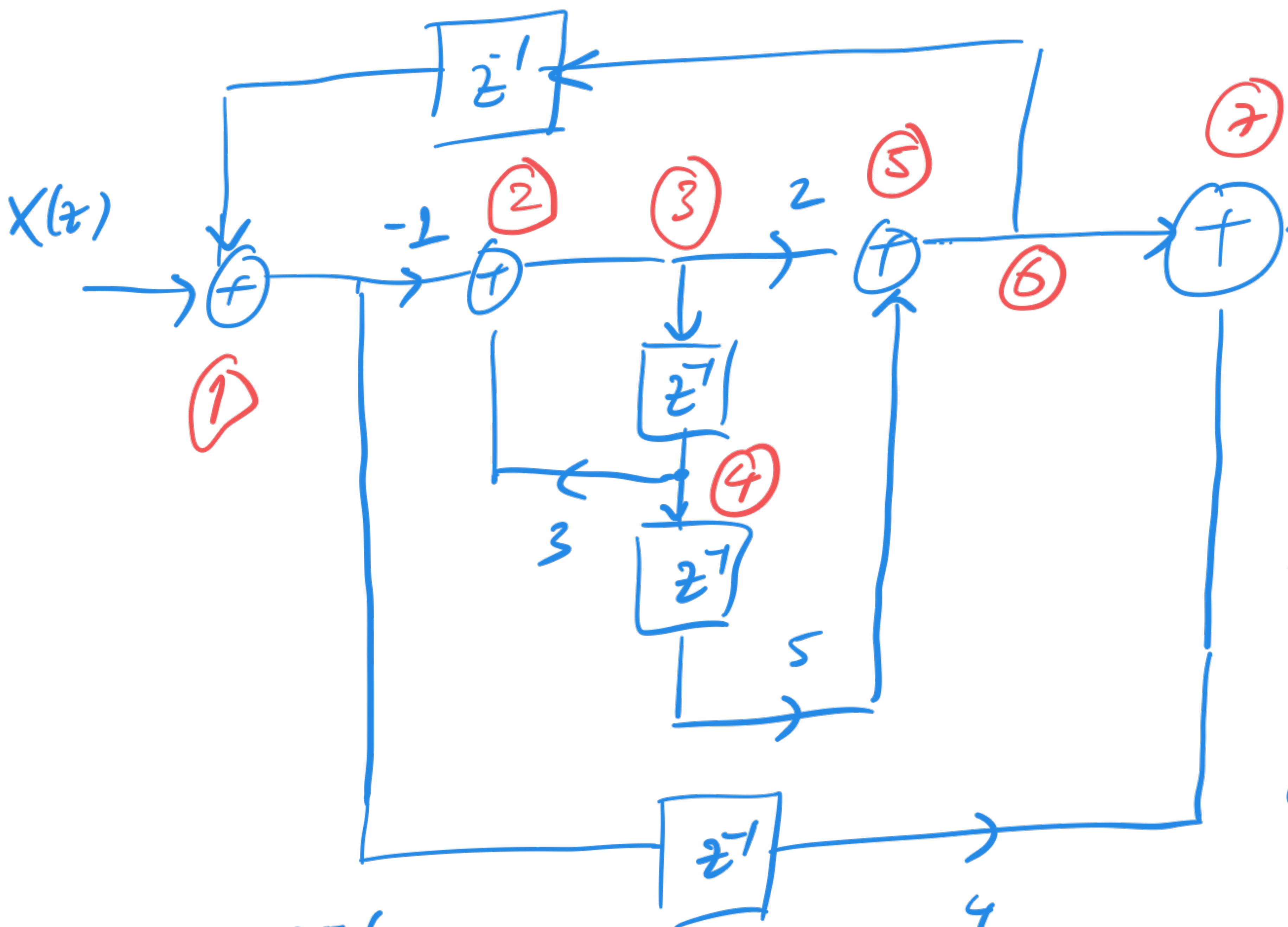
H(z) Mason?

Khi chuyển vị

các loops & forward paths

không đổi!

$$H(z) \stackrel{?}{=} \frac{\sum G_k \Delta_k}{\Delta}$$



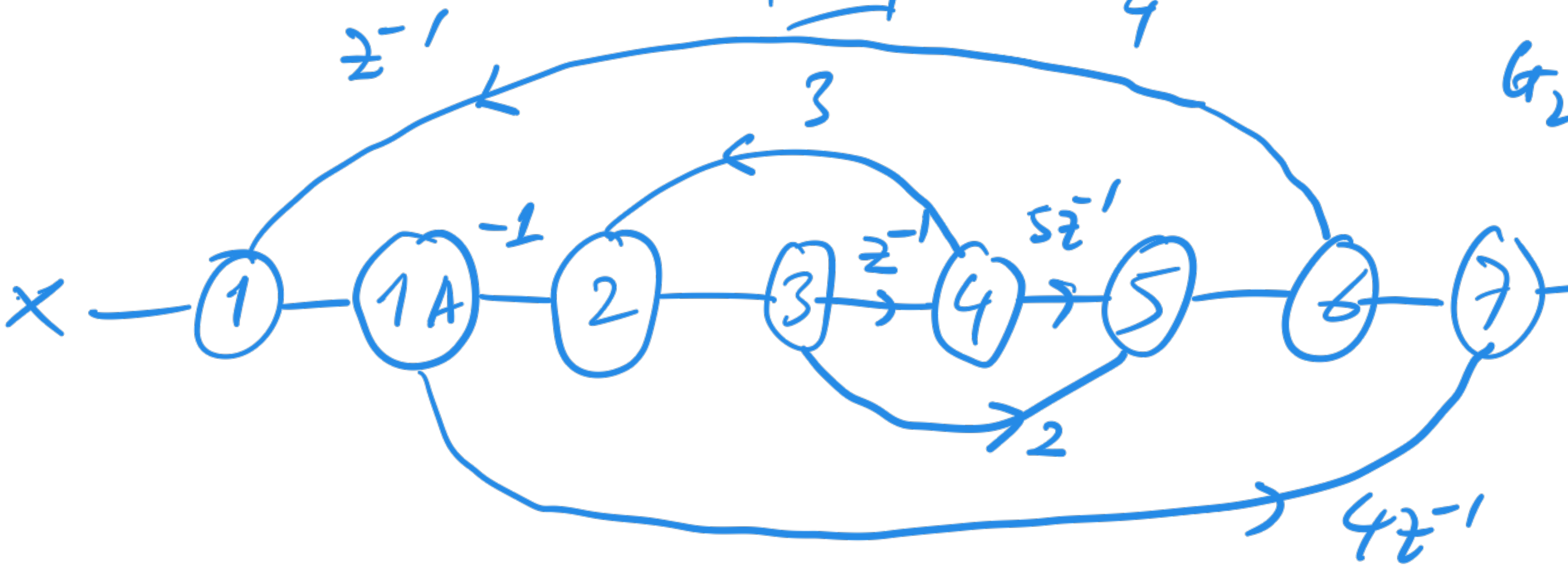
L_1: 1 1A 2 3 4 5 6 1
$-5z^{-3}$

L_2: 2 3 4 2 : $3z^{-1}$

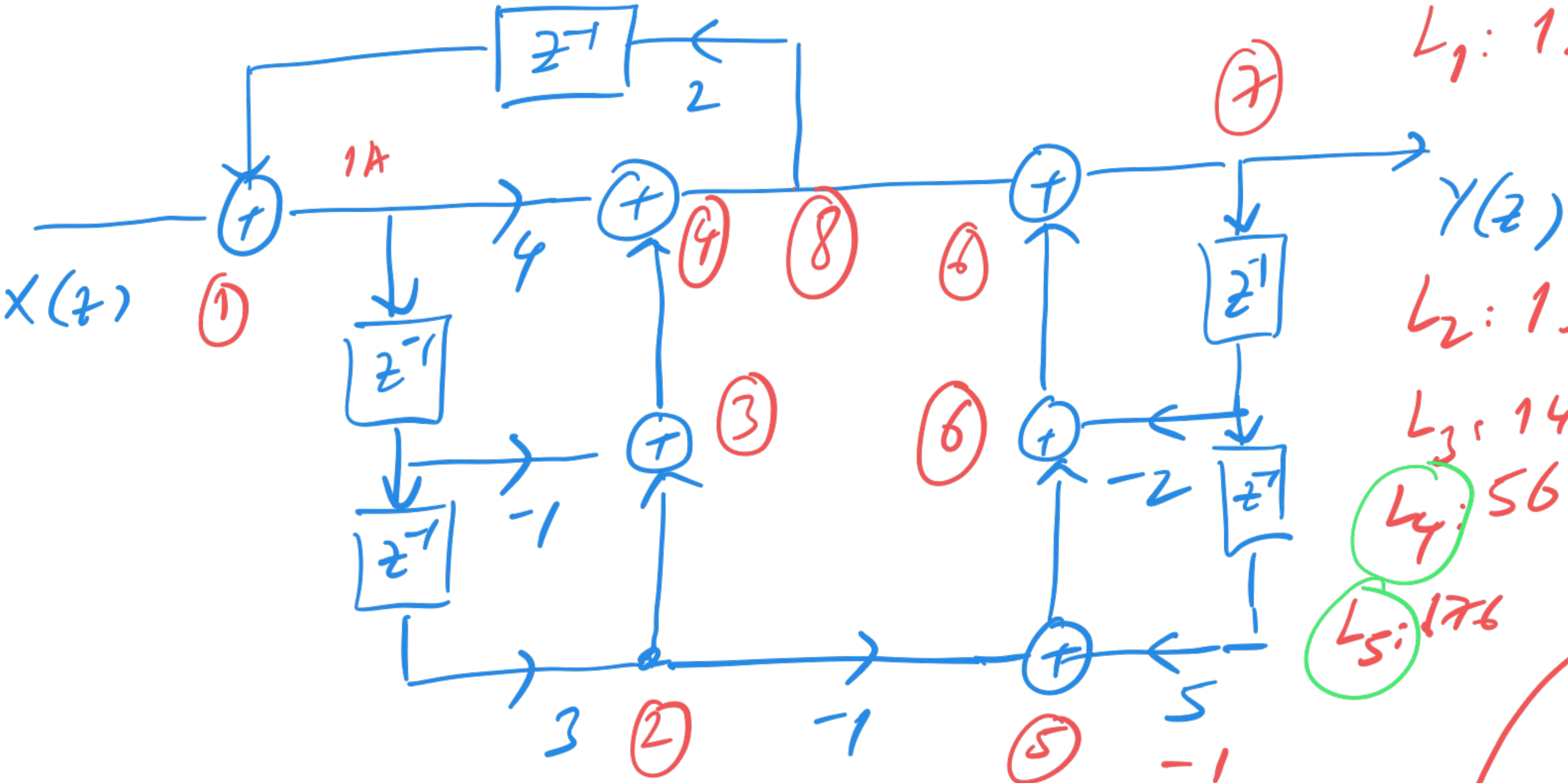
L_3 : 1 1A 2 3 5 6 1 : $-2z^{-1}$

G_1 : X 1 1A 2 3 4 5 6 7 Y
$-5z^{-2}$, $\Delta_1 = 1$

G_2 : X 1 1A 7 Y : $4z^{-1}$
$\Delta_2 = 1 - 3z^{-1}$



G_3 : X 1 1A 2 3 5 6 7 : −2
$\Delta_3 = 1$



$L_1 : 123481 : 6z^{-3}$

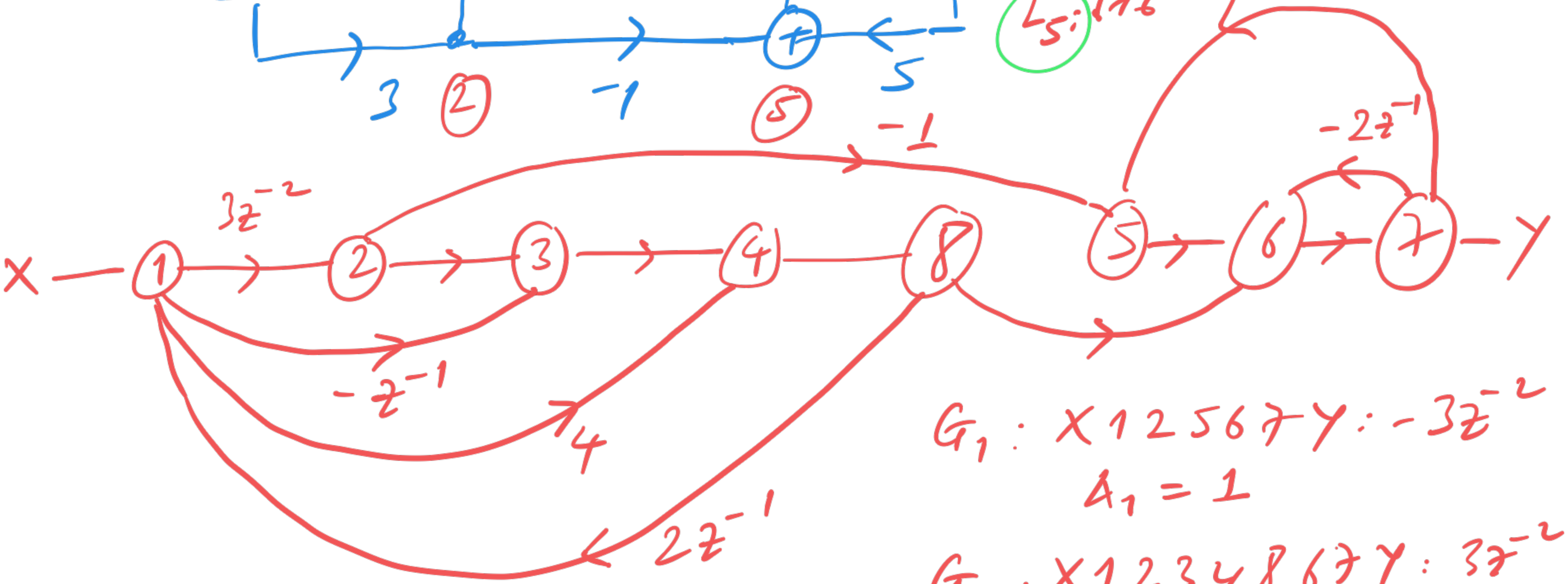
$L_2 : 13481 : -2z^{-2}$

$L_3 : 1481 : 8z^{-1}$

$L_4 : 5675 : 5z^{-2}$

$5z^{-2}$

$L_5 : 676 : -2z^{-1}$



$G_1 : X12567Y : -3z^{-2}$

$\Delta_1 = 1$

$G_2 : X1234867Y : 3z^{-2}$

$G_3 : X134867Y : -z^{-1}$

$G_4 : X14867Y : 4$

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$

$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j$

Homework

1. Sử dụng Matlab để biểu diễn tín hiệu rời rạc và thực hiện các phép toán trên tín hiệu rời rạc.
2. Làm các bài tập tính toán phép chập, biến đổi z và vẽ sơ đồ hệ thống.
3. Tìm hiểu kỹ hơn và làm các bài tập sử dụng công thức Mason.