ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Thiết kế bộ lọc số

TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

Năm học 2020 - 2021

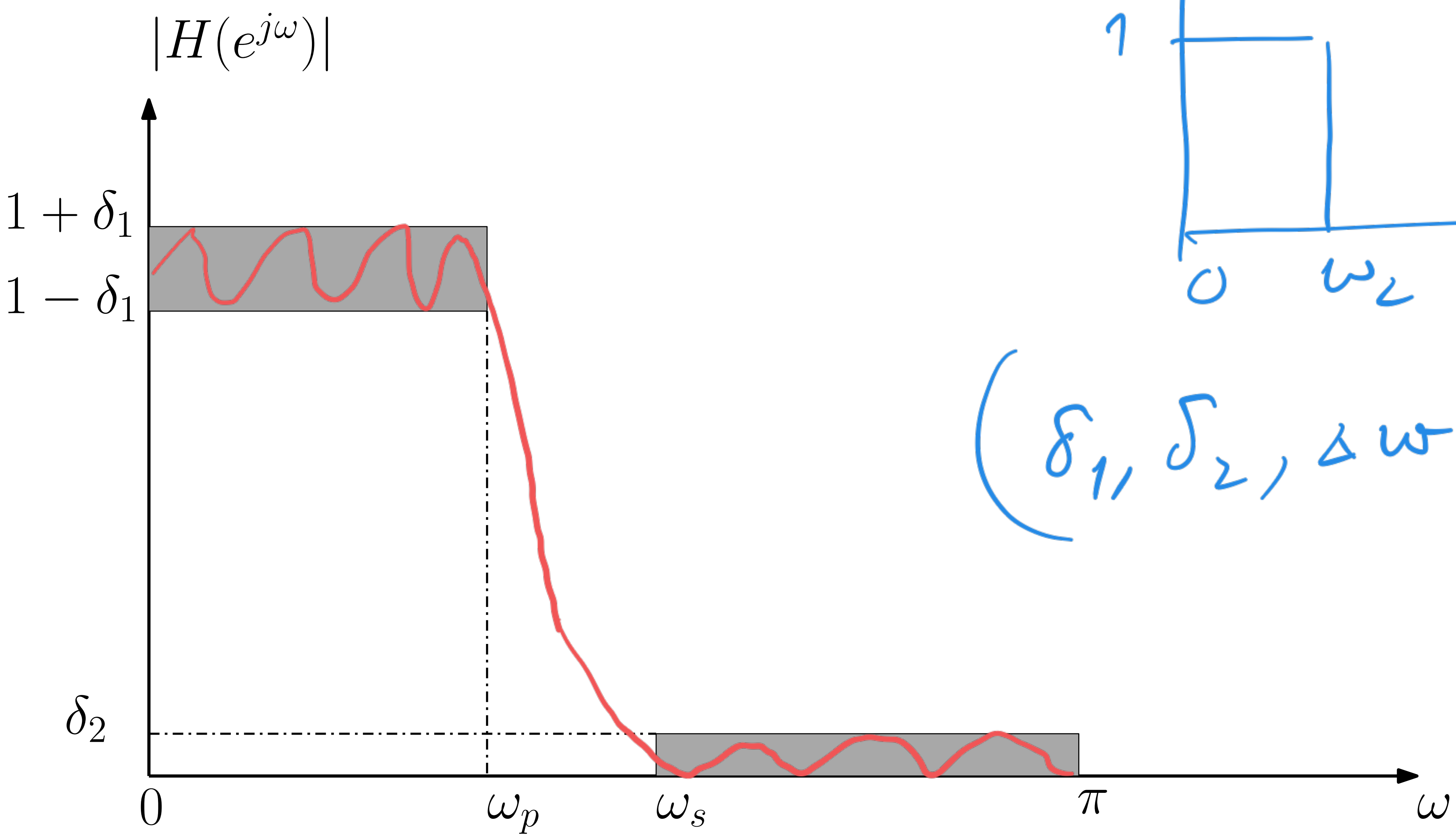
Outline

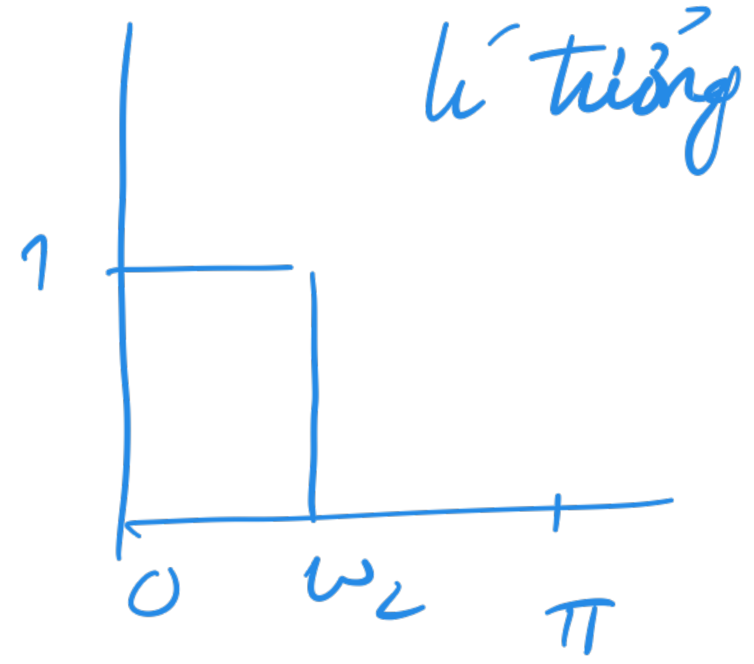
Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

Thiết kế bộ lọc chọn lọc tần số





$(\delta_1, \delta_2, \Delta\omega \downarrow\downarrow)$

Các chỉ tiêu kỹ thuật:

- Tần số cắt (ω_c), và dải chuyển tiếp (ω_p, ω_s)
- Độ gợn sóng dải thông δ_1
- Độ gợn sóng dải chắn δ_2

$$\begin{cases} \omega_c = \dfrac{\omega_p + \omega_s}{2} \\ \Delta\omega = |\omega_s - \omega_p| \end{cases}$$

Qui trình

(1) Specifications: Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật dựa trên ứng dụng thực tế.

(2) Approximation: Tổng hợp hệ thống LTI có chỉ tiêu xấp xỉ với yêu cầu đặt ra.

(3) Realization: Thực hiện hệ thống dựa trên các công cụ phần cứng / phần mềm hiện có.

Khóa học này chỉ nghiên cứu #2: Tìm các tham số a_k, b_r, M, N sao cho đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống LTI dưới đây có các thông số xấp xỉ với các chỉ tiêu kỹ thuật mong muốn $\omega_s, \omega_p, \delta_1, \delta_2$.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M-1} b_r x(n-r)$$

Phân loại bộ lọc số

Có thể thực hiện được trên thực tế:

- Hệ thống LTI
- Nhân quả
- Ổn định

Phân loại theo chiều dài đáp ứng xung:

- Bộ lọc FIR
- Bộ lọc IIR

Phân loại theo cách thiết kế:

- Sử dụng các công thức
- Mang tính giải thuật (vòng lặp)

Outline

Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

Bộ lọc có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR)

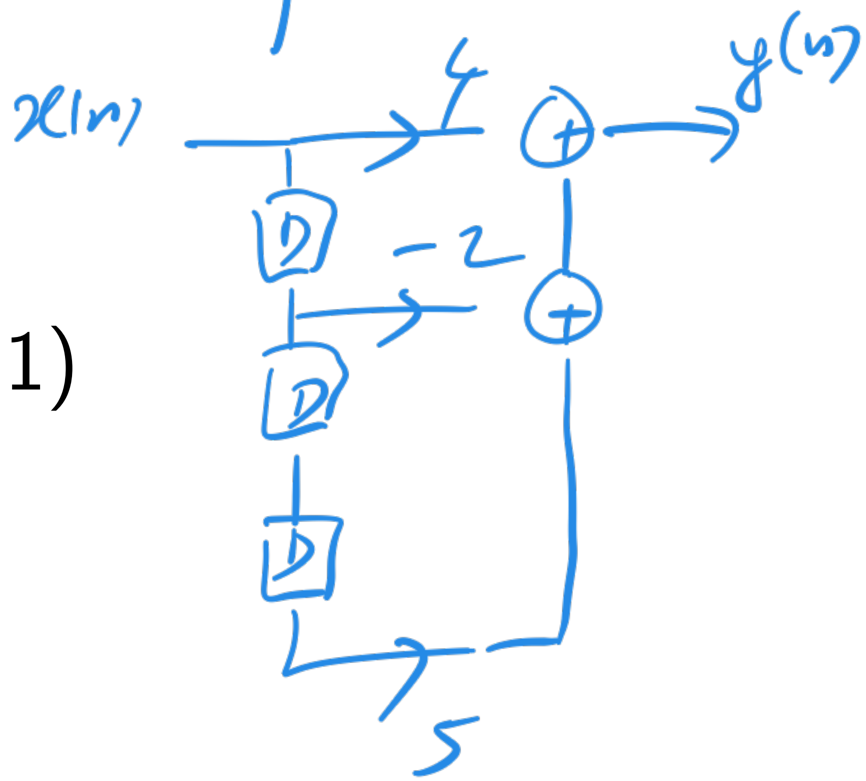
$$y(n) = 4x(n) - 2x(n-1) + 5x(n-3)$$

$$h(n) = 4\delta(n) - 2\delta(n-1) + 5\delta(n-3) = \{\underset{\uparrow}{4}, -2, 0, 5\}$$

$L\{h(n)\} = 4$

Bậc bộ lọc: $4 - 1 = 3$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$



$$\rightarrow h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq (M-1) \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ưu điểm của bộ lọc FIR:

- Luôn ổn định $\sum |h(n)| < \infty$
- Có thể thực hiện với hiệu năng cao (sử dụng FFT)
- Dễ tổng hợp bộ lọc pha tuyến tính

Khái niệm pha tuyến tính

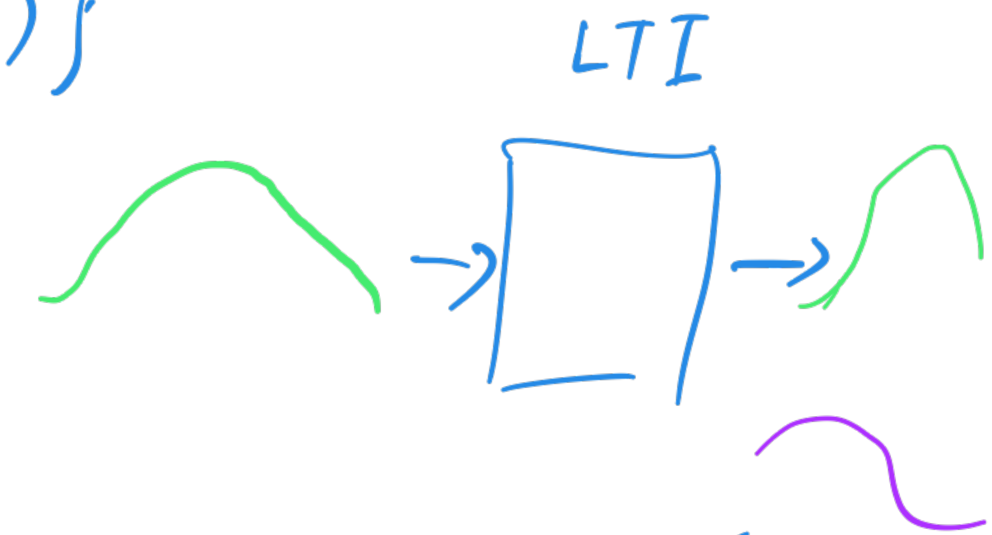
$\arg\{H(\omega)\}$ tuyến tính

$x(n-n_0) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$

Tại sao pha tuyến tính?

$-\frac{d}{d\omega} \arg\{H(\omega)\}$

- Trễ nhóm không đổi
- Độ phức tạp tính toán giảm



Khi nào pha tuyến tính?

méo dạng sóng do trễ nhóm thay đổi

(i) $h(n)$ đối xứng: $h(n) = h(M-1-n)$

(ii) $h(n)$ phản đối xứng: $h(n) = -h(M-1-n)$ và $h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$ với M lẻ.

$$h(n) = \{\underset{\uparrow}{5}, 3, -1, 0, -1, 3, 5\}$$

$$\arg\{H(\omega)\} \, ?$$

$$h_1(n) = \{5, 3, -1, \underset{\uparrow}{0}, -1, 3, 5\}$$

$$H_1(\omega) = 5\left(e^{+j\omega \cdot 3} + e^{-j\omega 3}\right) + 3\left(e^{j\omega 2} + e^{-j\omega 2}\right) - 1\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)$$

$$= 10\cos(3\omega) + 6\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)$$

$$h(n) = h_1(n-3) \rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega \cdot 3} \cdot H_1(\omega)$$

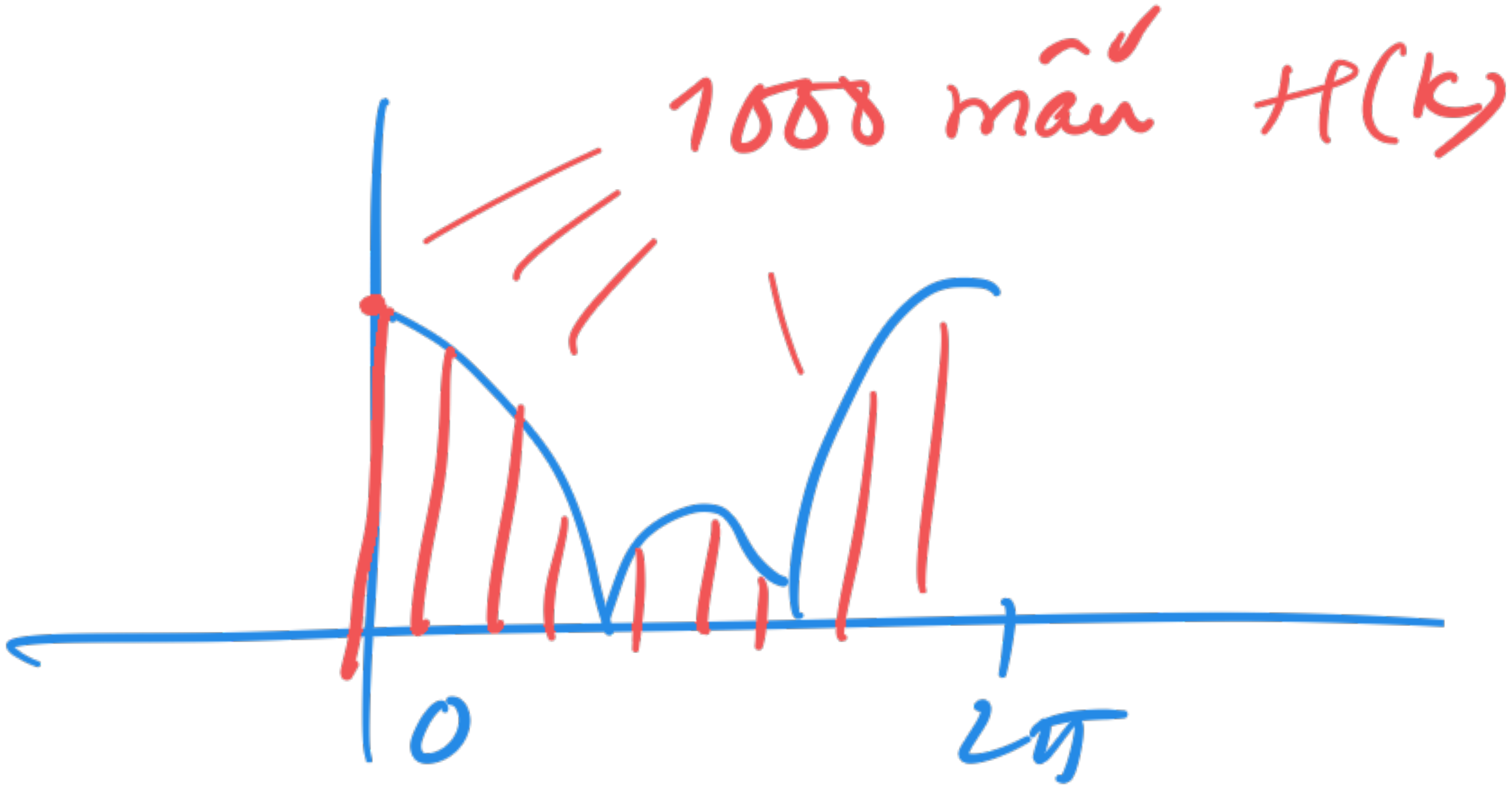
$$\arg = \begin{cases} -3\omega & \text{khi } H_1(\omega) \geq 0 \\ -3\omega + \pi & H_1(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \{-2, 3, 5, 5, 3, -2\}$$

$$h(n) = \{4, -1, 2, 0, -2, 1, -4\}$$

$$h(n) = \{7, 3, -2, 2, -3, -7\}$$

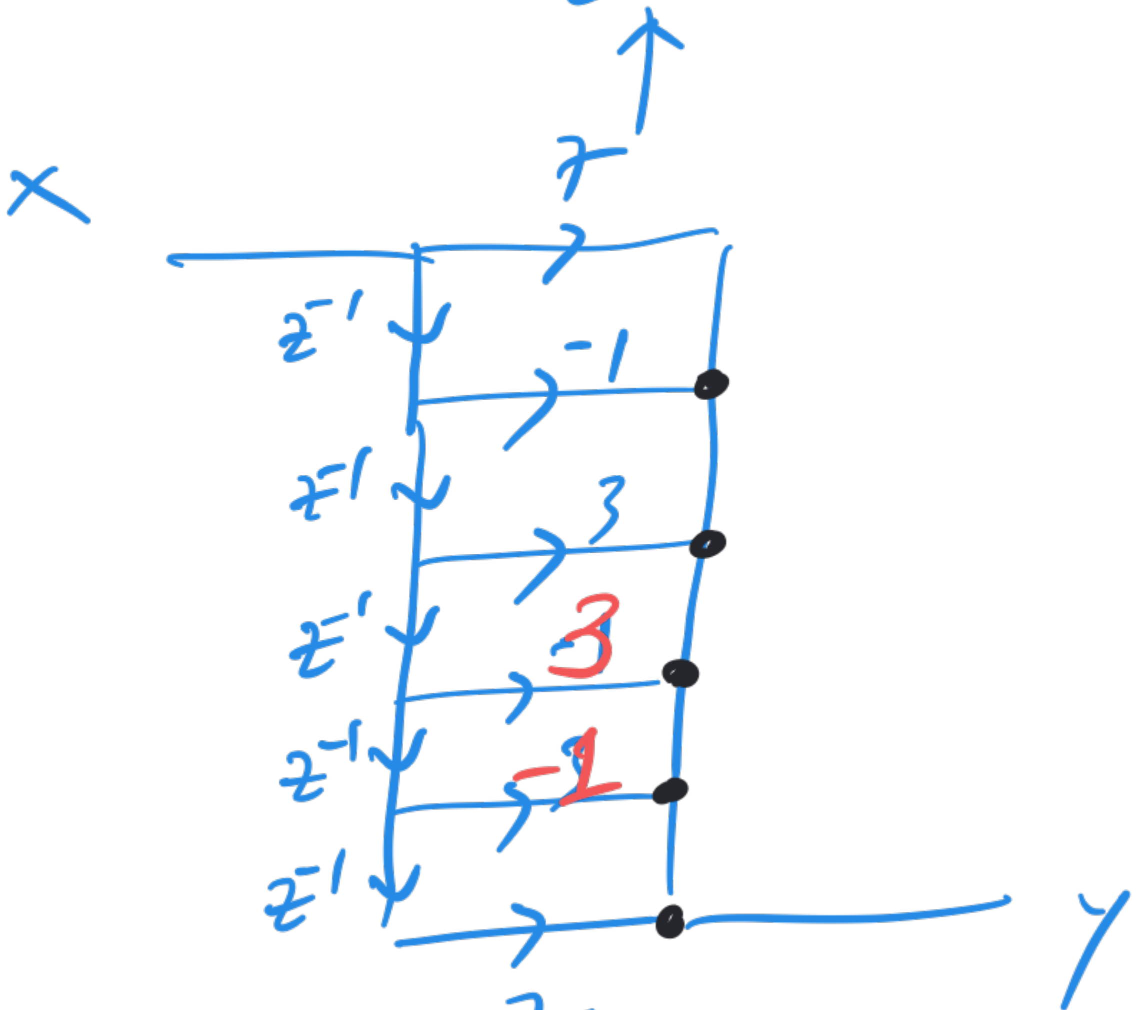
$$h(n) \xrightarrow{FT} H(\omega)$$

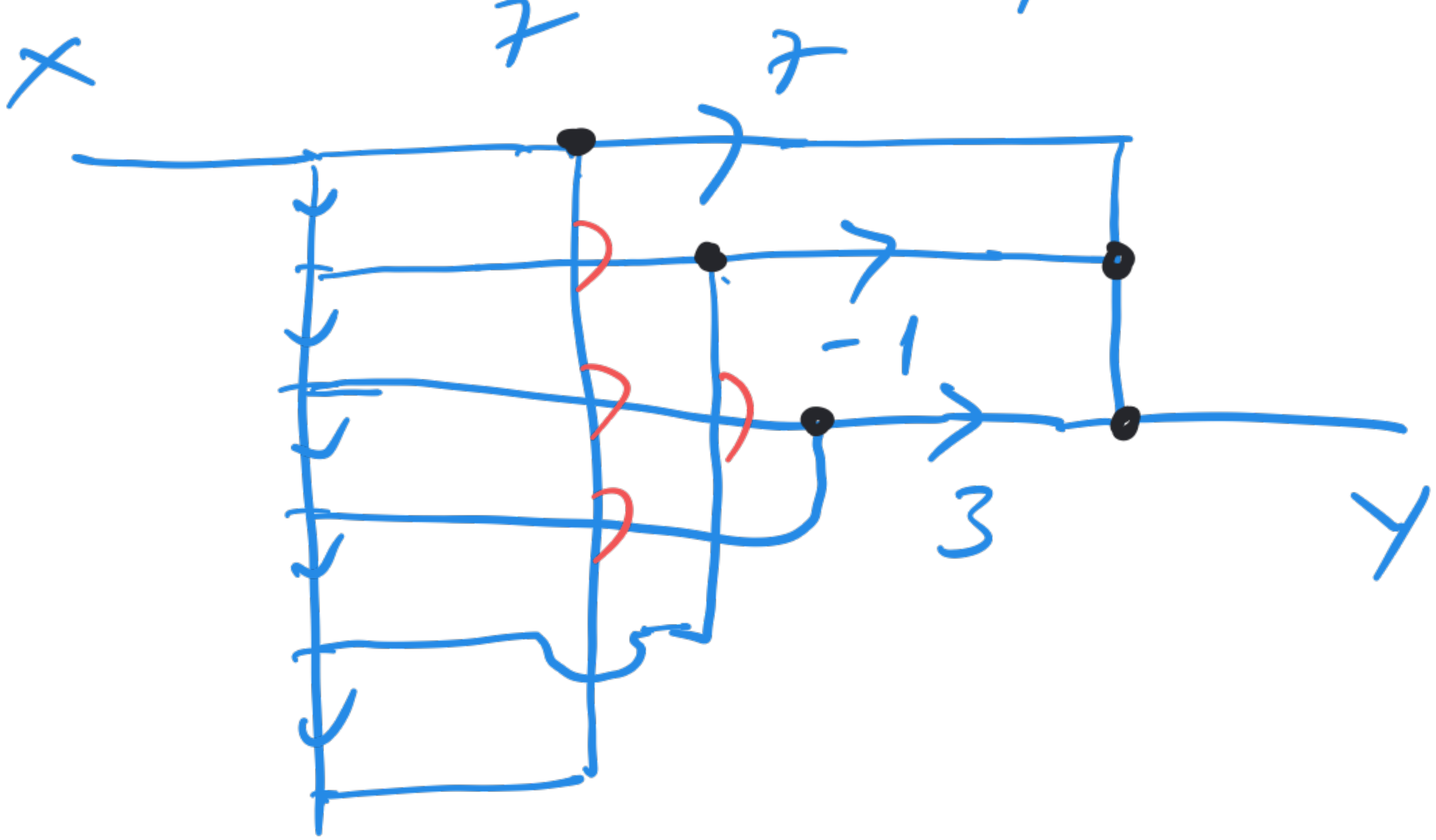


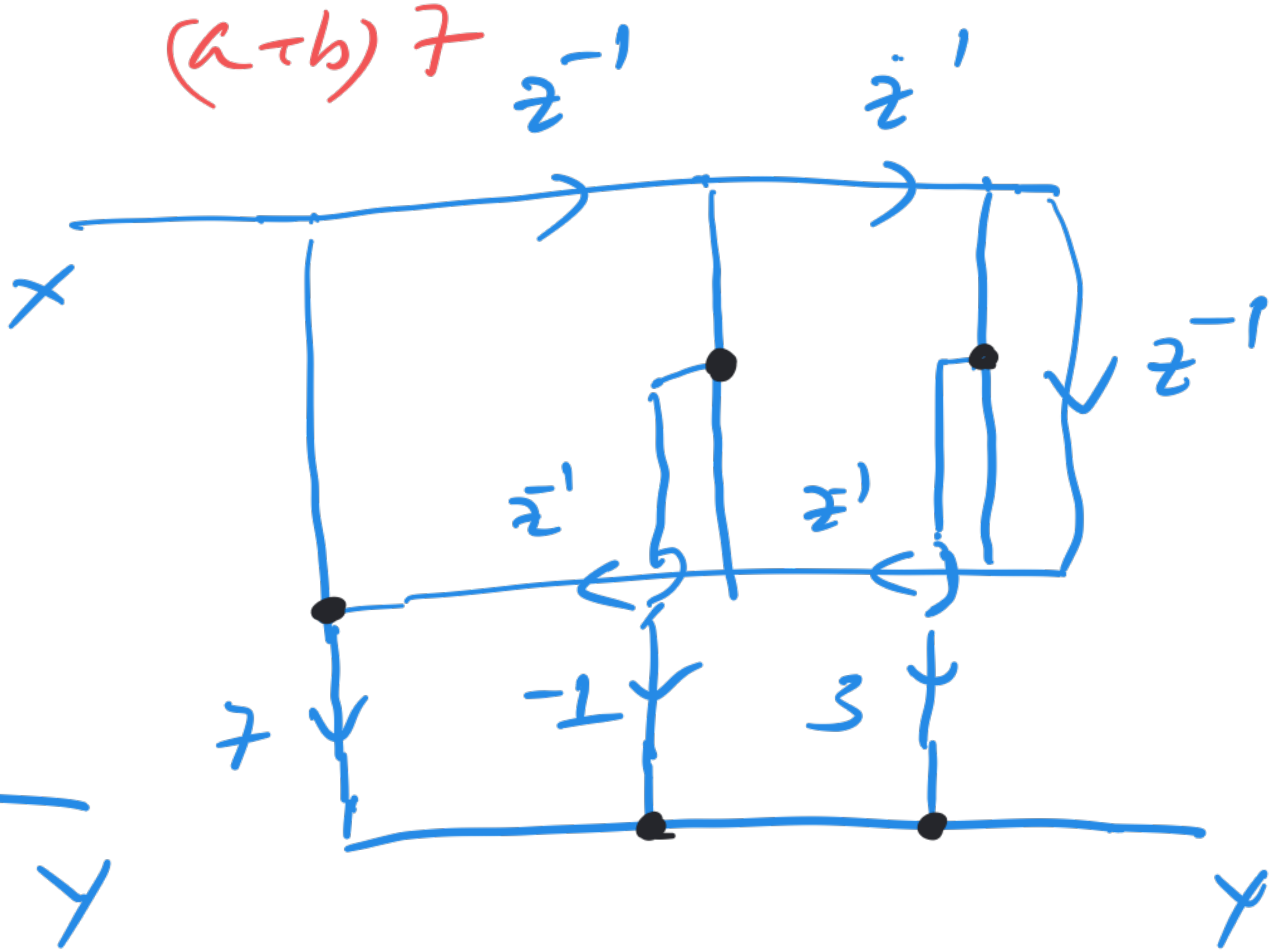
$$H(k) = FFT\{h(n), 1000 \text{đ}\}$$

$h(n) = \{7, -1, 3, +3, -1, 7\}$

$$\begin{array}{r} a \cdot 7 \\ + \quad b \cdot 7 \\ \hline (a+b)\,7 \end{array}$$







Phân loại bộ lọc pha tuyến tính

	M lẻ	M chẵn
$h(n)$ đối xứng	loại 1	loại 2
$h(n)$ phản đối xứng	loại 3	loại 4

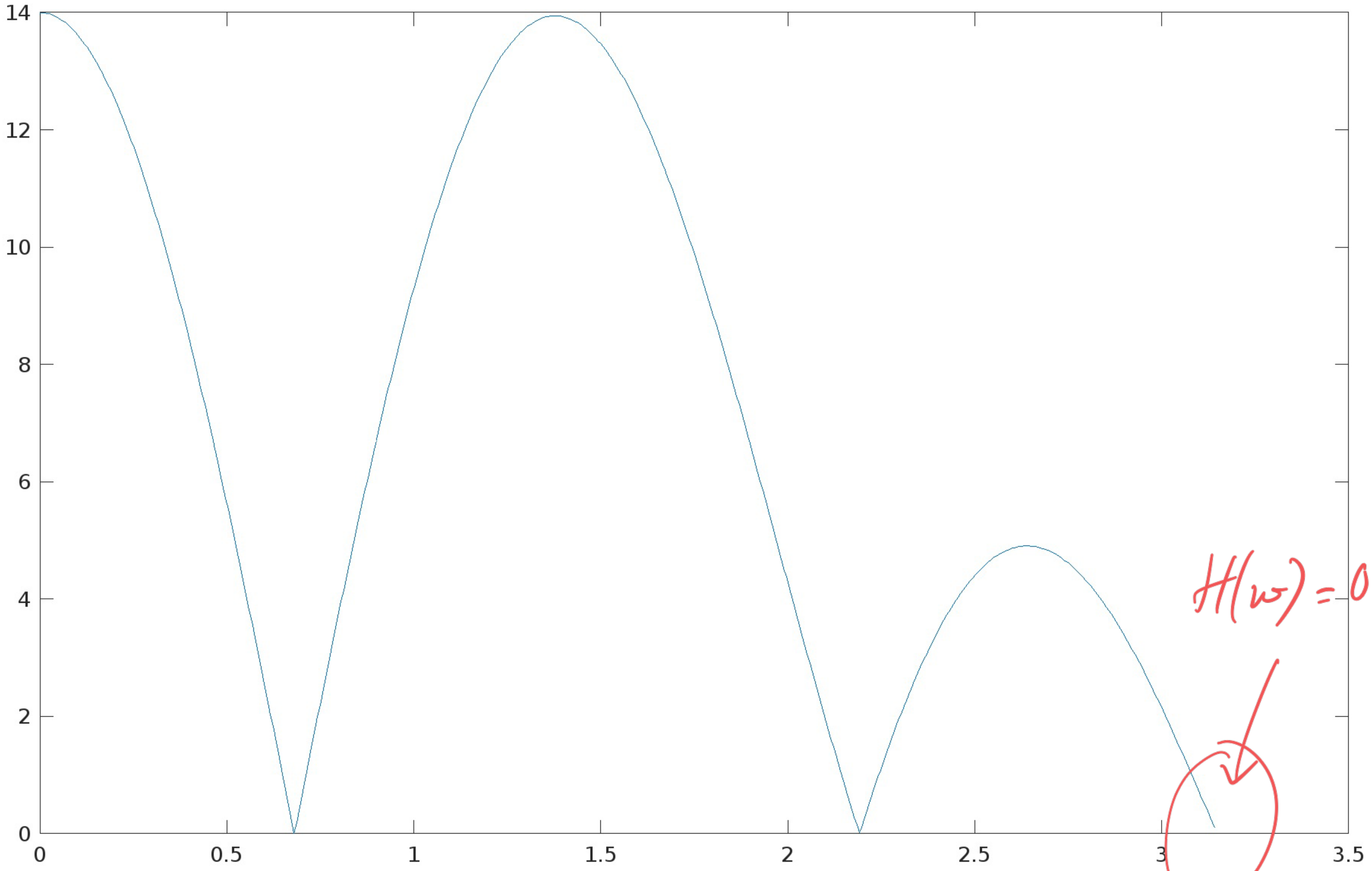
$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}\left[h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \cdot 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

$$H_3(e^{j\omega}) = e^{-j[\omega\frac{M-1}{2}+\frac{\pi}{2}]} \cdot 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

$$H_4(e^{j\omega}) = e^{-j[\omega\frac{M-1}{2}+\frac{\pi}{2}]} \cdot 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

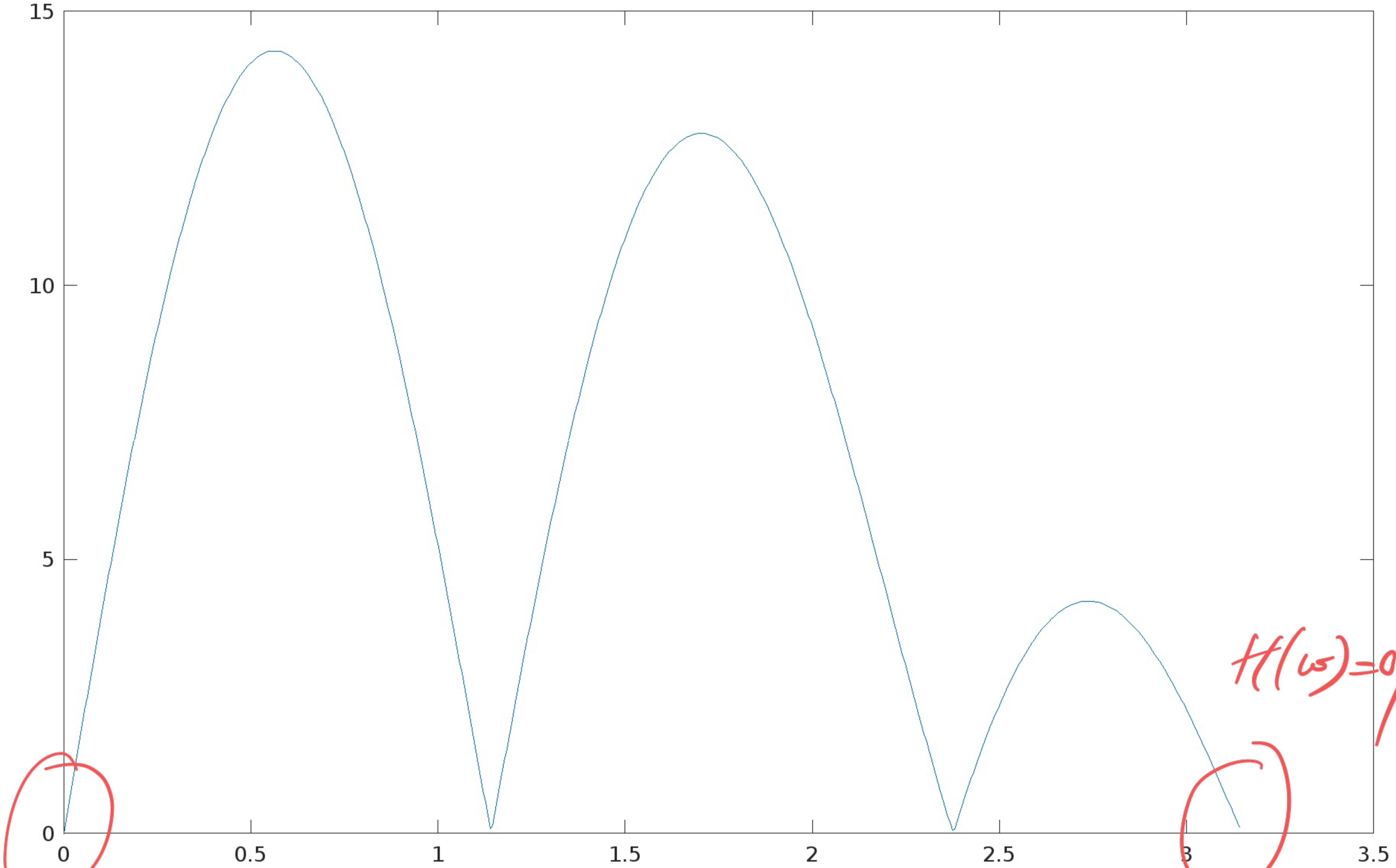
Loại 2 (h(n) đx, M chẵn)



$H(\omega) = 0 \Big|_{\omega=\pi}$

K° dùng làm / HP BS

Loại 3 ($h(n)$ pđx, M lẻ)

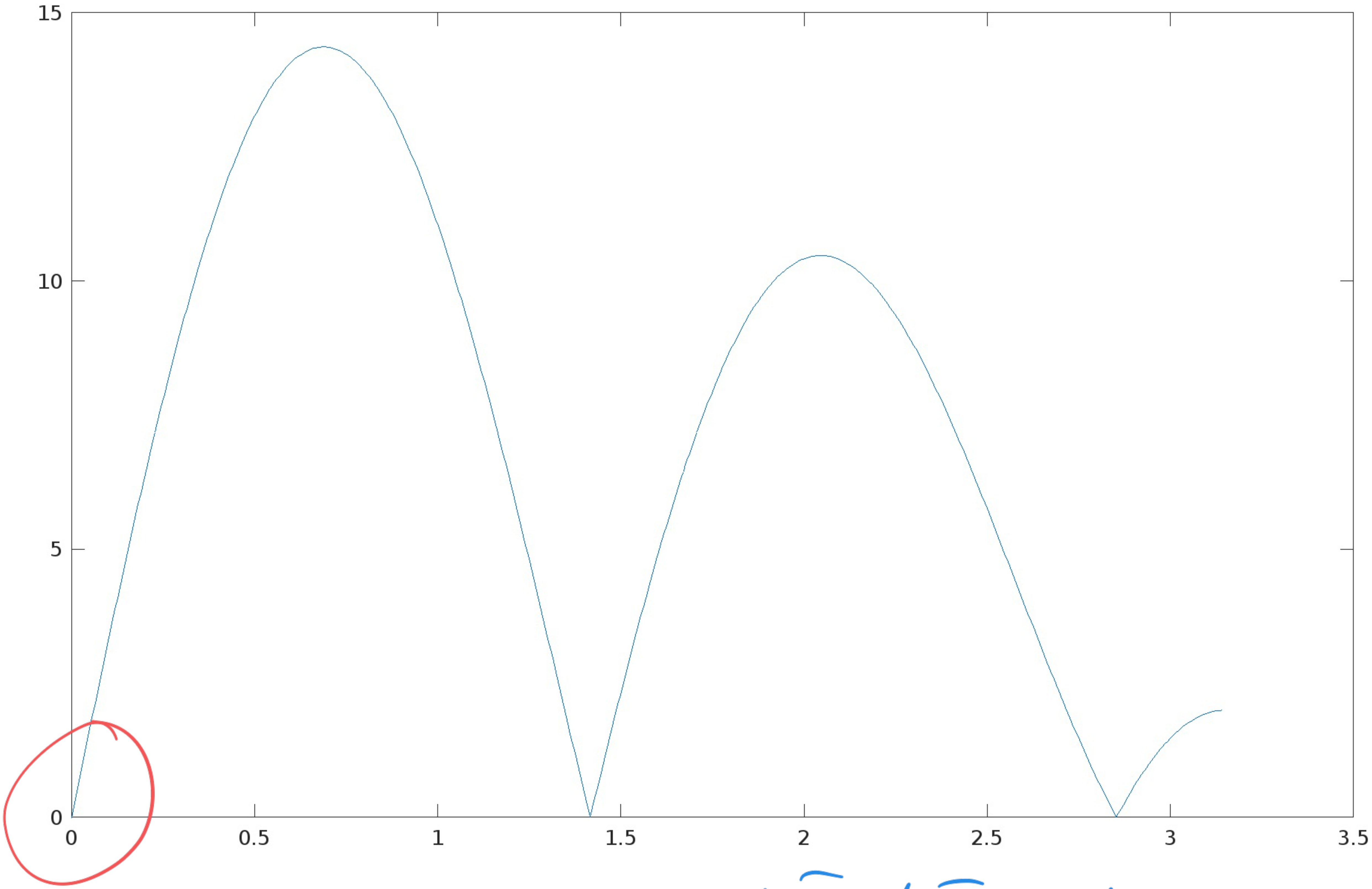


$H(\omega) = 0 \Big|_{\omega = \pi}$

$H(\omega) = 0 \Big|_{\omega = 0}$

k° dùng làm / LP HP BS

Loại 4 (h(n) pđx, M chẵn)



$H(\omega) = 0 \Big|_{\omega = 0}$

K° dùng làm LP

Vị trí các điểm không

$h(n) = \{5, 3, -1, -1, 3, 5\}$

$H(z) = 5 + 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} + 3z^{-4} + 5z^{-5}$

$= z^{-5}(5 + 3z - z^2 - z^3 + 3z^4 + 5z^5)$

$= z^{-5} \cdot H(z^{-1})$

- Khi $h(n)$ đối xứng / phản đối xứng, dễ dàng chứng minh được:

$$H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

- Nếu $H(z)$ có nghiệm z_1 thì cũng có các nghiệm sau: $z_1^*, 1/z_1, 1/z_1^*$
- Biểu diễn vị trí các điểm không trên mặt phẳng phức?

Phương pháp cửa sổ - Khái niệm

h(n) | chiều dài hữu hạn
nhân quả?
pha tt (loại 1) → h(n) đx
→ M lẻ?

Giả sử cần thiết kế bộ lọc có đáp ứng tần số mong muốn $H_d(e^{j\omega})$ thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật. Khi đó:

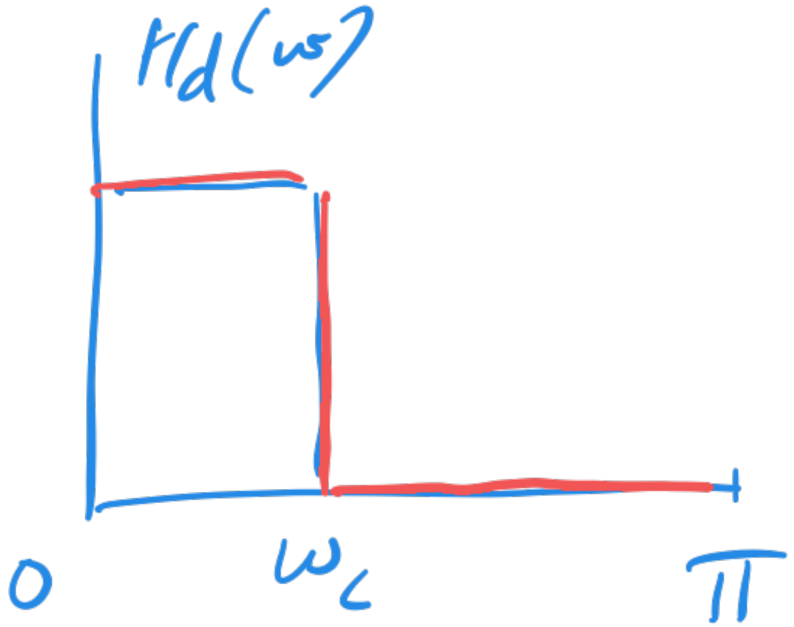
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Tuy nhiên, trong trường hợp lý tưởng, $h_d(n)$ có chiều dài vô hạn và không nhân quả $\rightarrow$ dịch đi $(M-1)/2$ mẫu và nhân với hàm cửa sổ $w(n)$

$$h(n) = h_d(n - \frac{M-1}{2}) \cdot w(n)$$

trong đó

$$w(n) = 0, \forall n < 0, \forall n > (M-1)$$

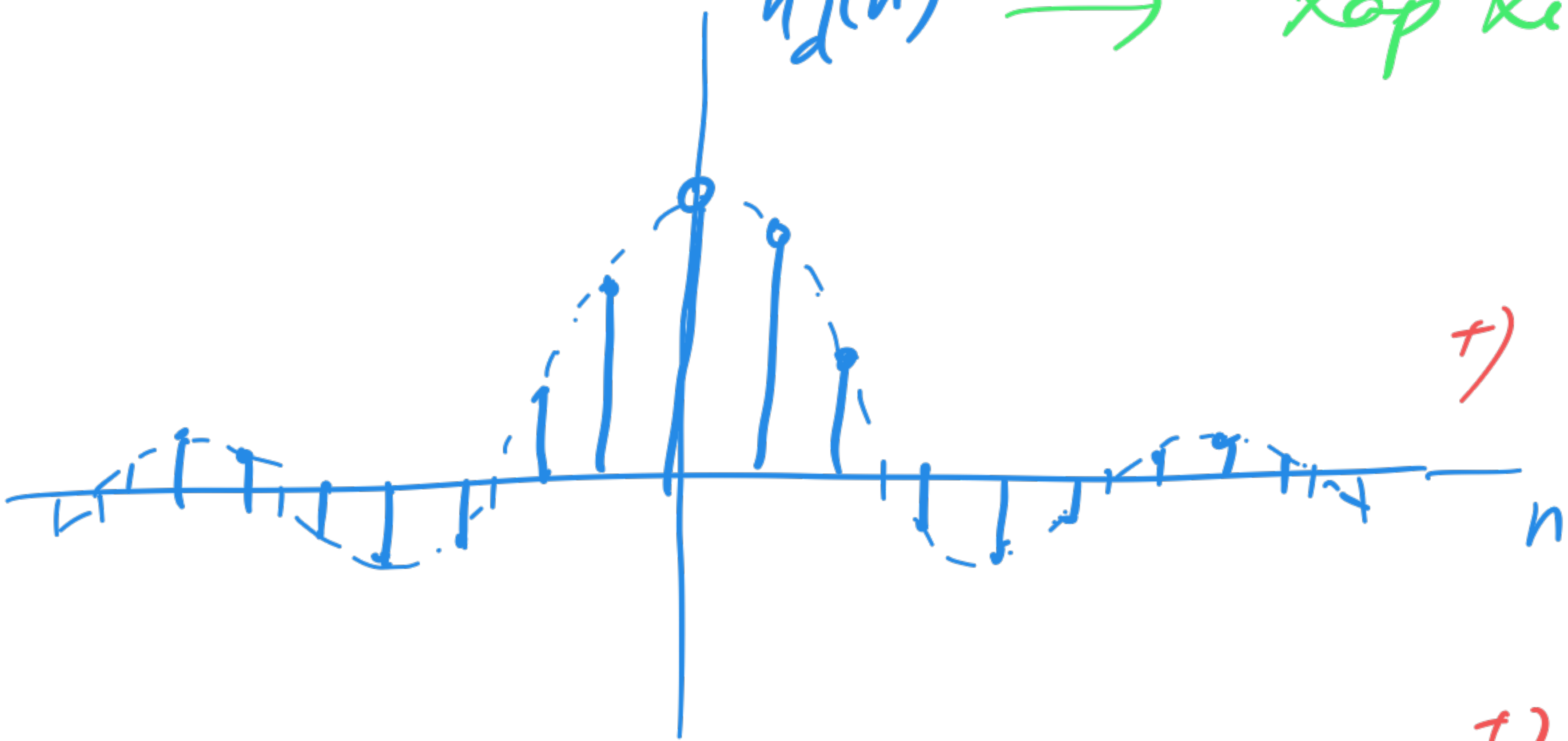


→ $h_d(n) = \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

có hữu hạn

$h_d(n)$ → xấp xỉ $h(n)$ ← nhân quả

đx

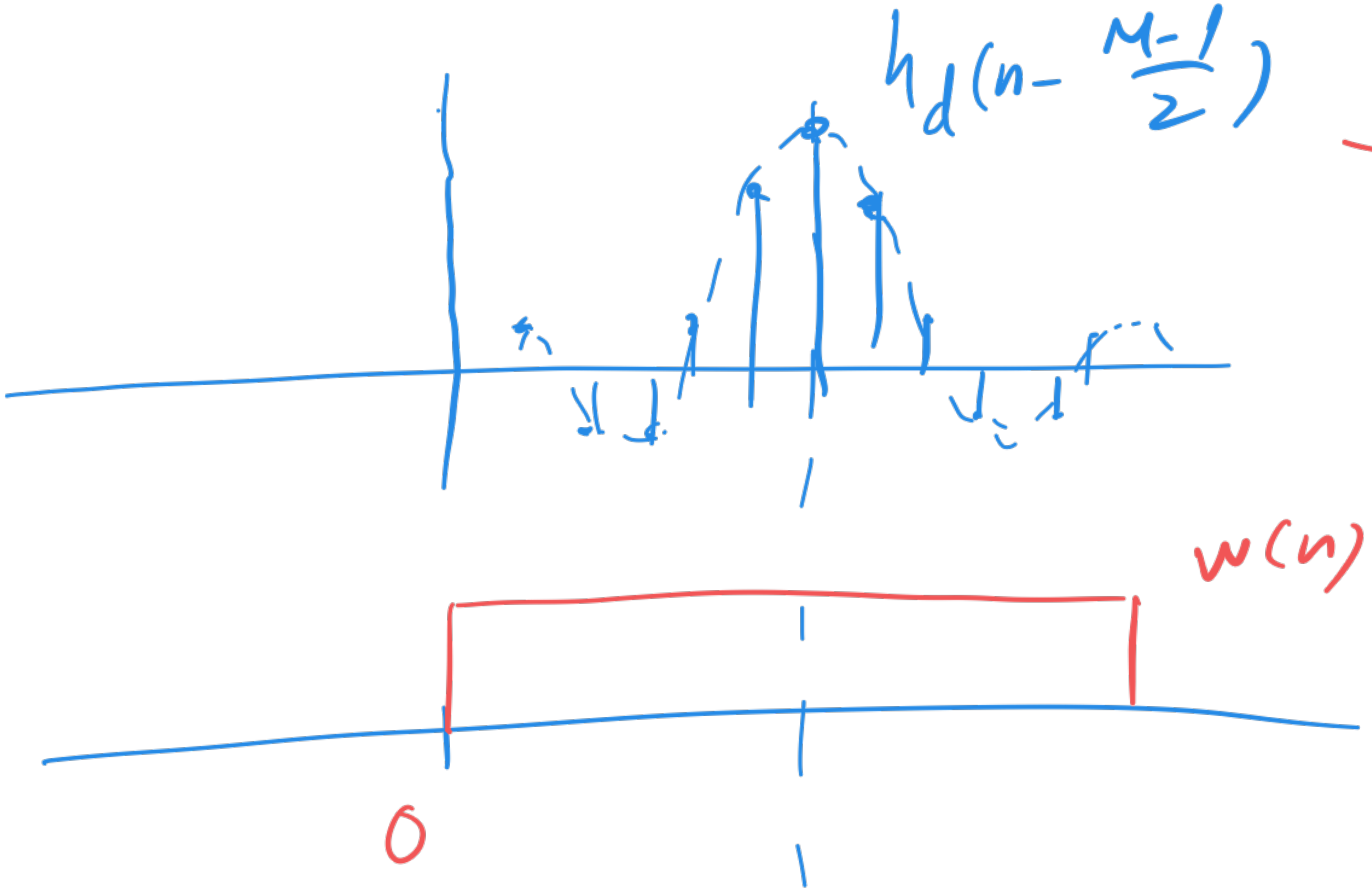


+) vô hạn → hữu hạn
nhân hàm cửa sổ
$w(n)$

+) nhân quả: $h(n) = 0 \ \forall n < 0$

$w(n) = 0 \ \forall n < 0$

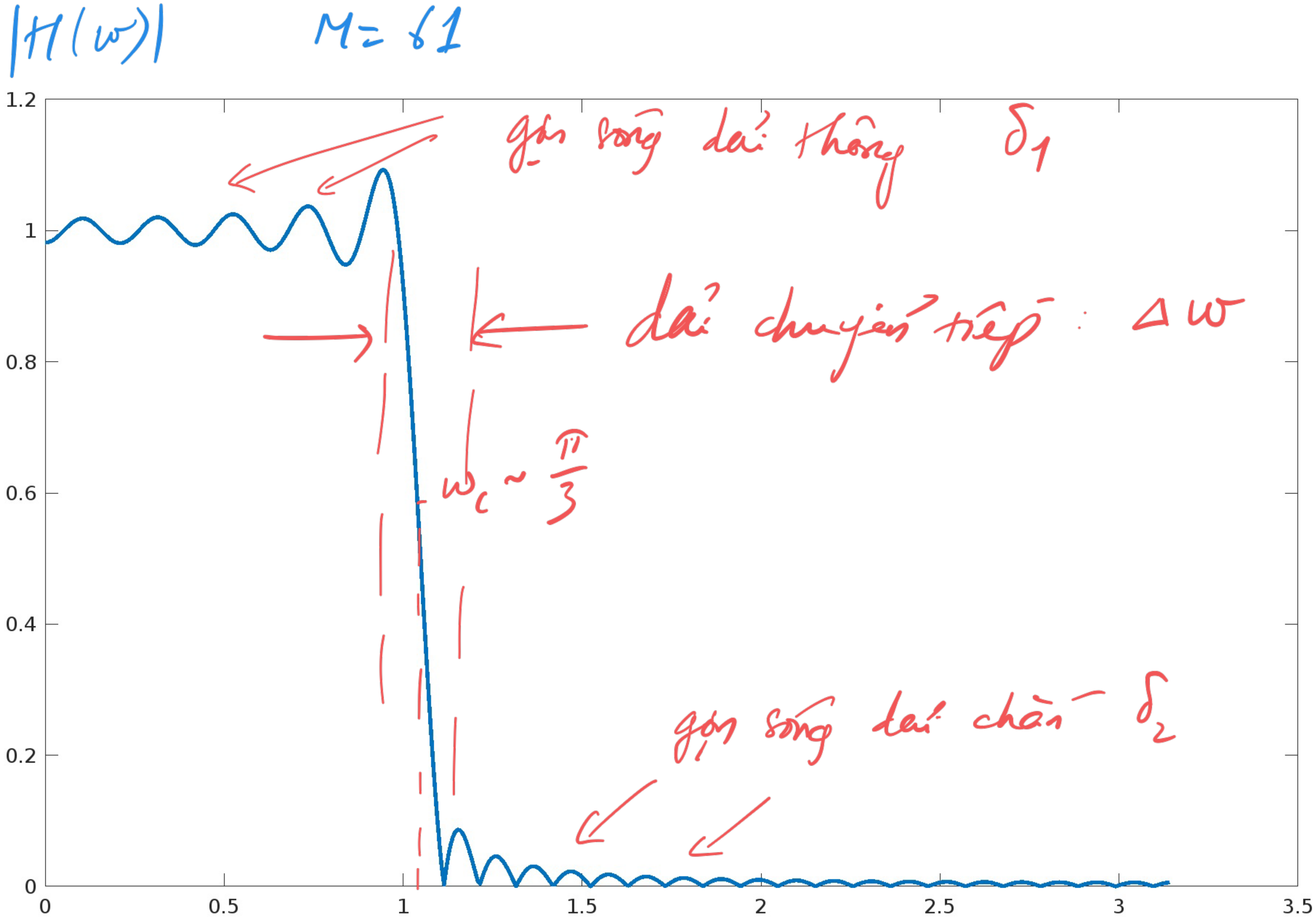
+) đx



$\xrightarrow{FT} e^{-j\omega(\frac{M-1}{2})} \cdot H(\omega)$

phổ bđ const

phổ pha vẫn t^2



|H(ω)|
M = 61
gợn sóng dải thông δ1
dải chuyển tiếp : Δω
ω_c ~ π/3
gợn sóng dải chắn δ2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Phương pháp cửa sổ - Các bước thiết kế

(1) Cho các chỉ tiêu kỹ thuật : $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$

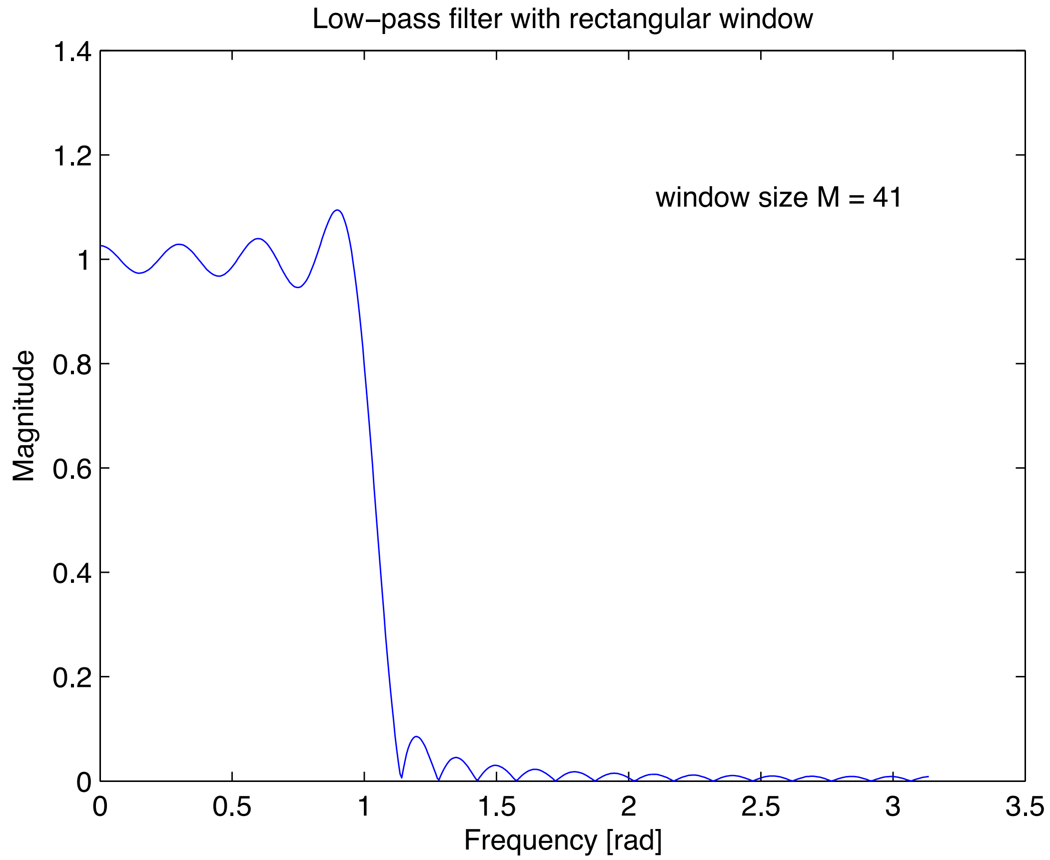
(2) Chọn loại cửa sổ và tính $w(n)$ với chiều dài M, tâm đối xứng tại $(M-1)/2$.

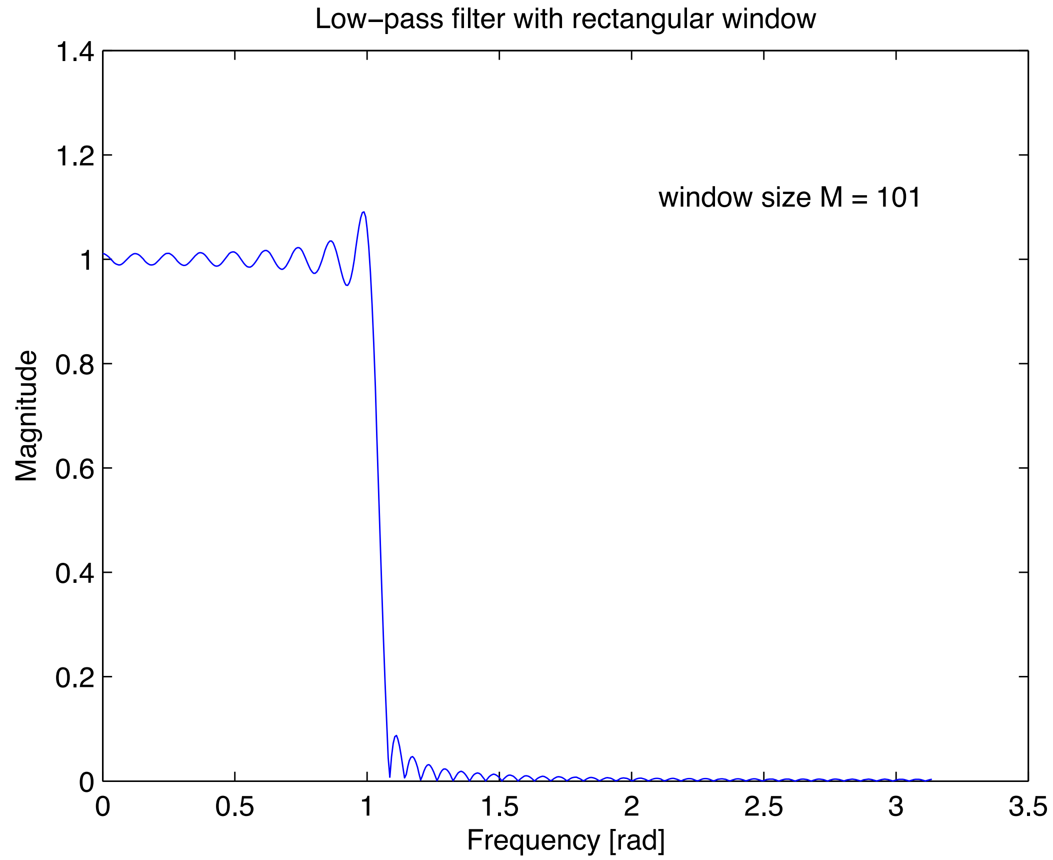
(3) Tính các hệ số $h_d(n)$ của bộ lọc lý tưởng, sau đó tính các hệ số $h(n)$ nhờ trễ và nhân với hàm cửa sổ $w(n)$.

(4) So sánh $H(e^{j\omega})$ với các chỉ tiêu kỹ thuật. Nếu không thỏa mãn thì tăng M và quay lại bước (2).

Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ chữ nhật (1)

Xét một bộ lọc thông thấp lí tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{3}$.



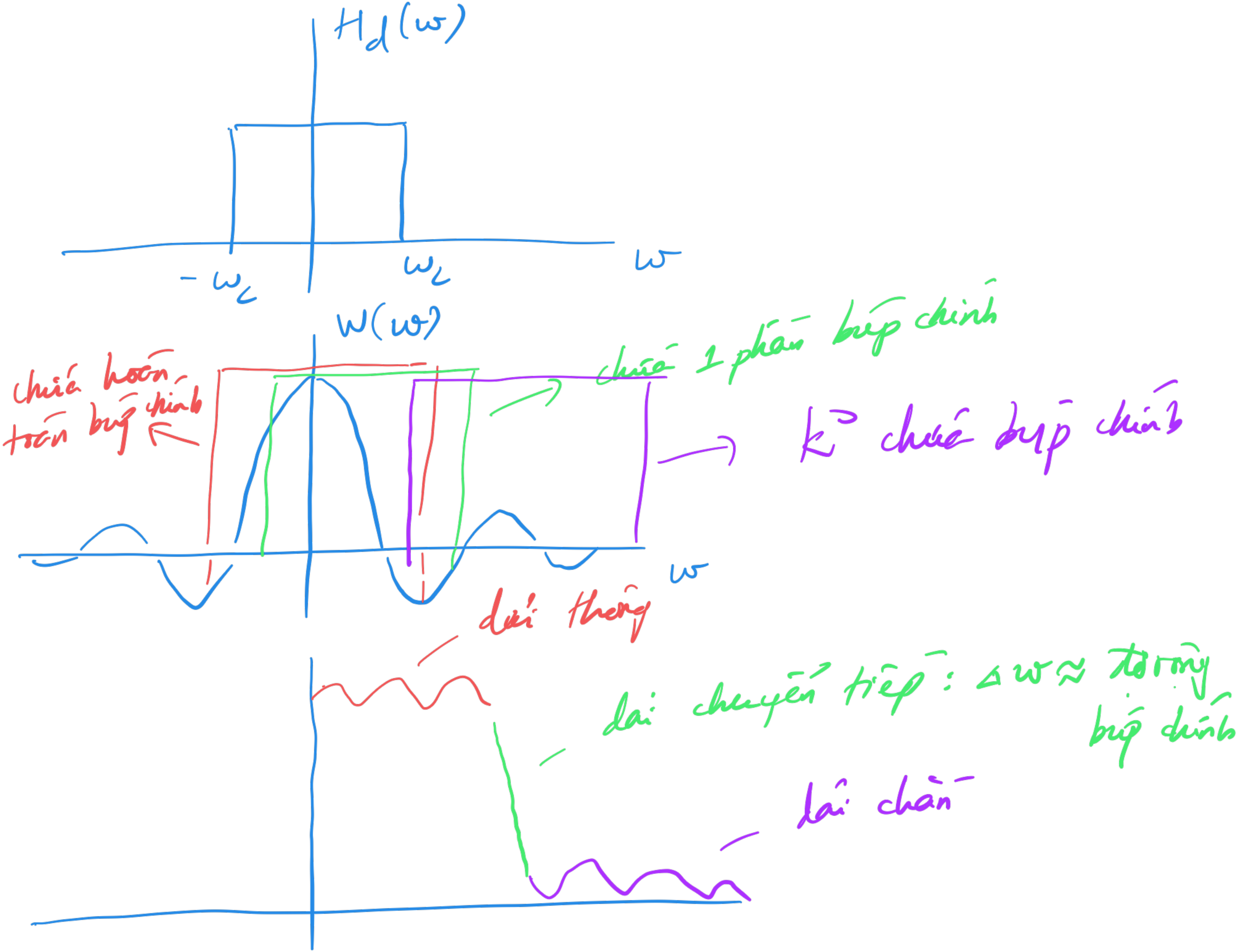


$M \nearrow$: δ_1, δ_2 const

$\Delta\omega \downarrow$

Hiện tượng Gibbs:

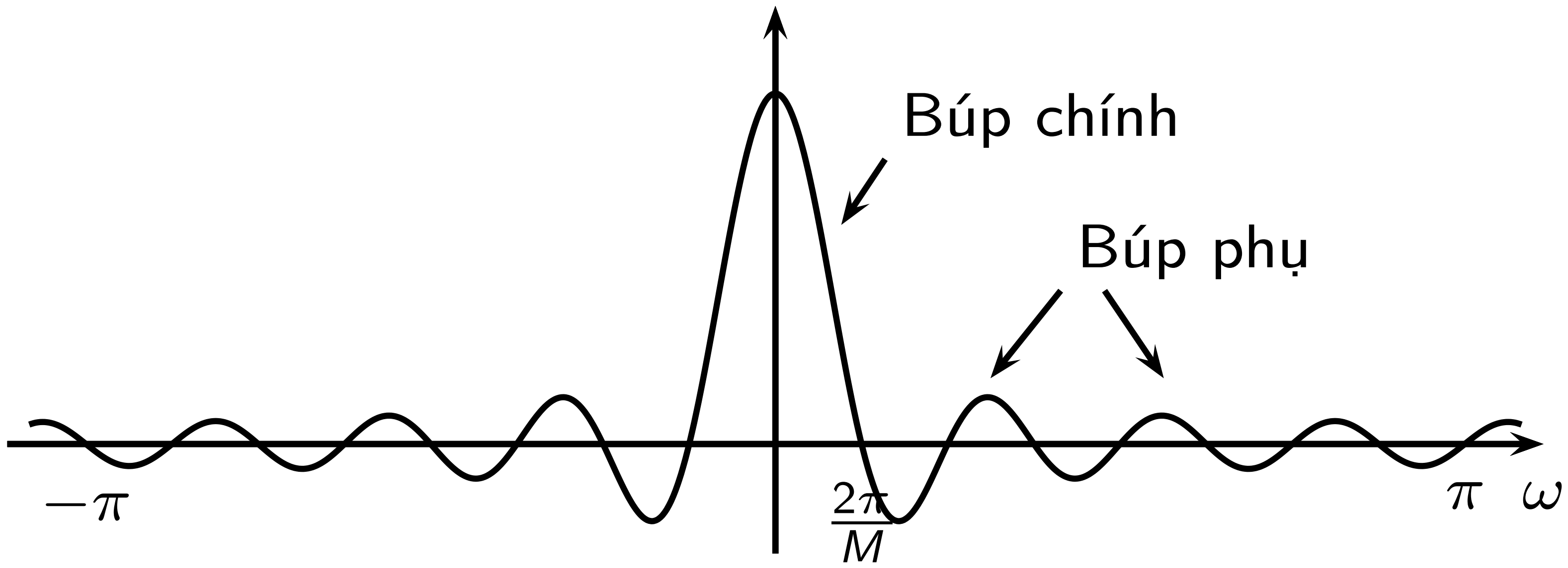
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\lambda})W(e^{j(\omega-\lambda)})d\lambda$$



Hd(w)
-wc
wc
w
W(w)
chứa hoàn toàn búp chính
chứa 1 phần búp chính
k chứa búp chính
dải thông
dải chuyển tiếp : Δw ≈ độ rộng búp chính
dải chắn

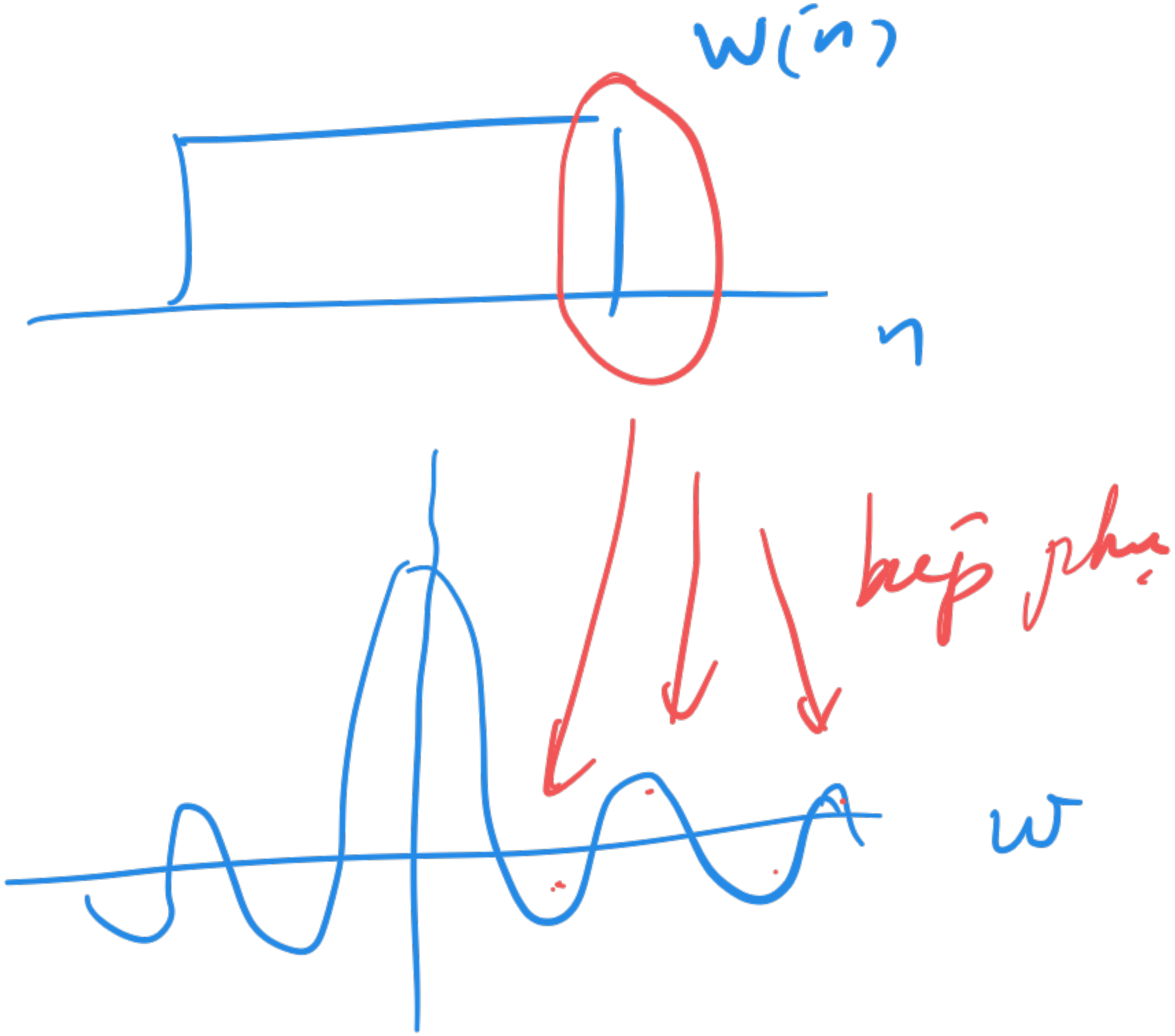
Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ chữ nhật (2)

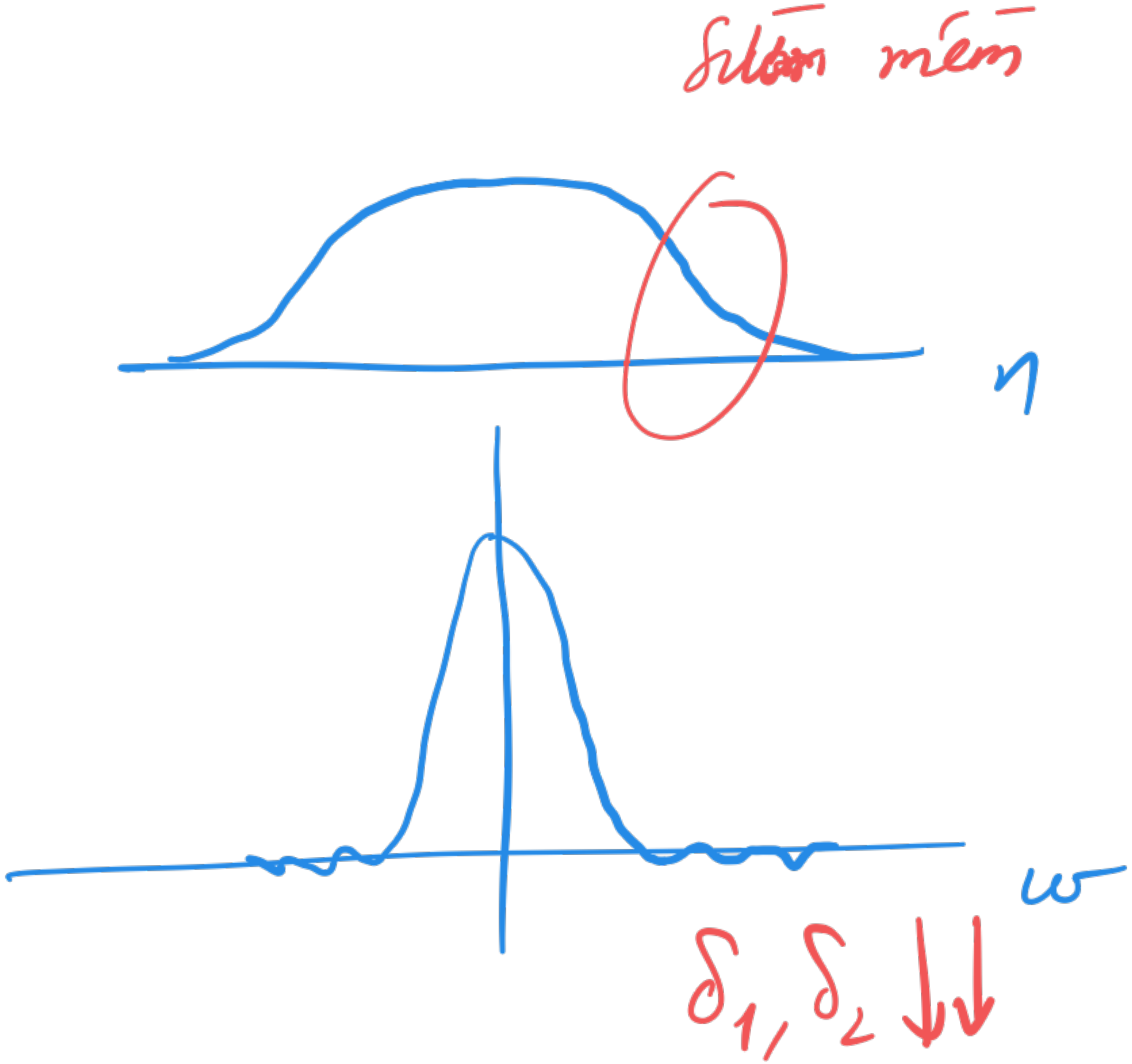
$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$$



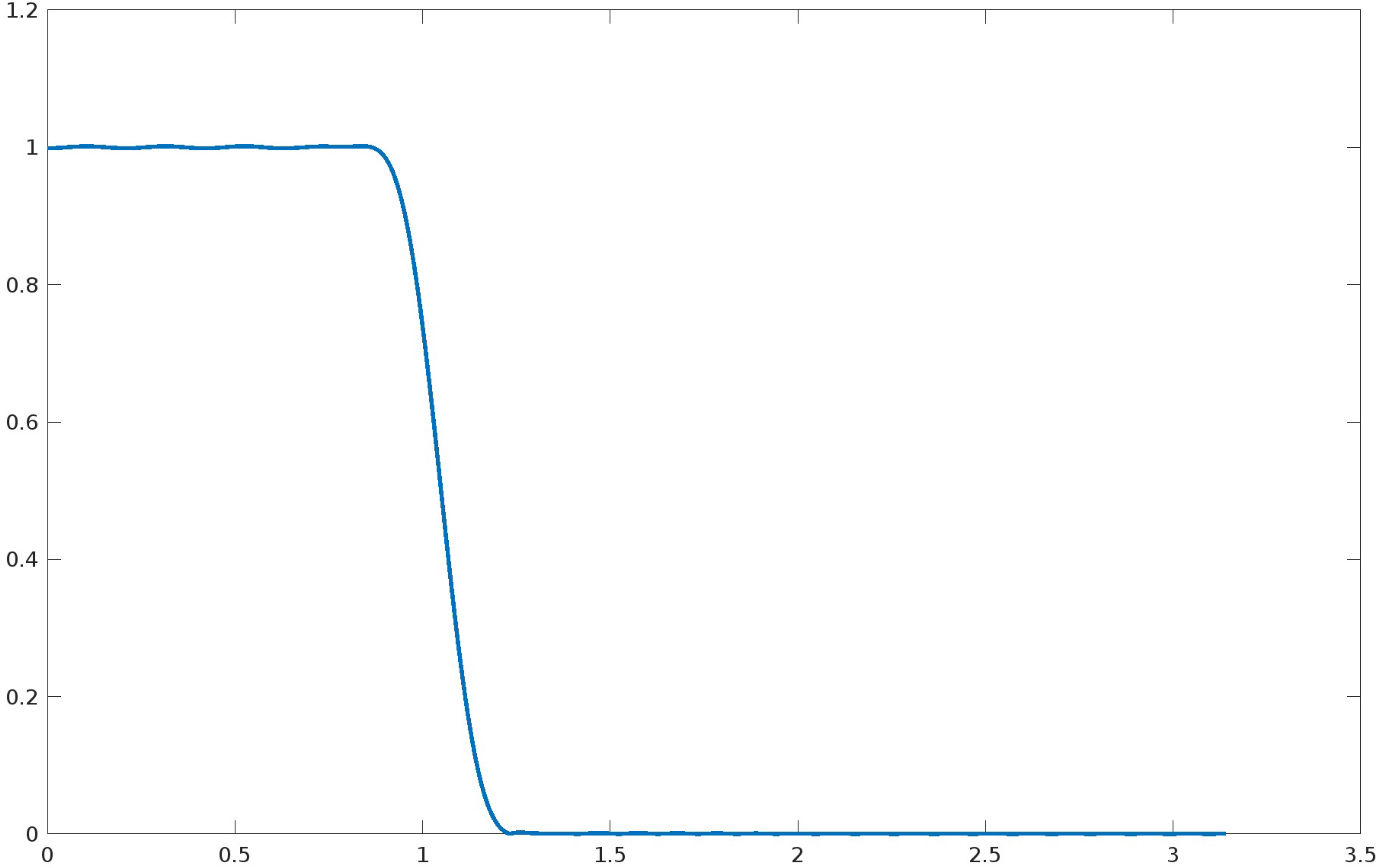
Điều gì xảy ra khi M tăng?

- Độ rộng búp chính giảm $\rightarrow$ độ rộng dải chuyển tiếp giảm
- Phần diện tích dưới các búp phụ ko thay đổi $\rightarrow$ độ gợn sóng không thay đổi.
- Bậc bộ lọc tăng $\rightarrow$ độ phức tạp tính toán tăng


w(n)
n
búp phụ
ω


sườn mềm
n
ω
δ1, δ2 ↓↓

Cửa sổ Hamming , $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, $M = 61$

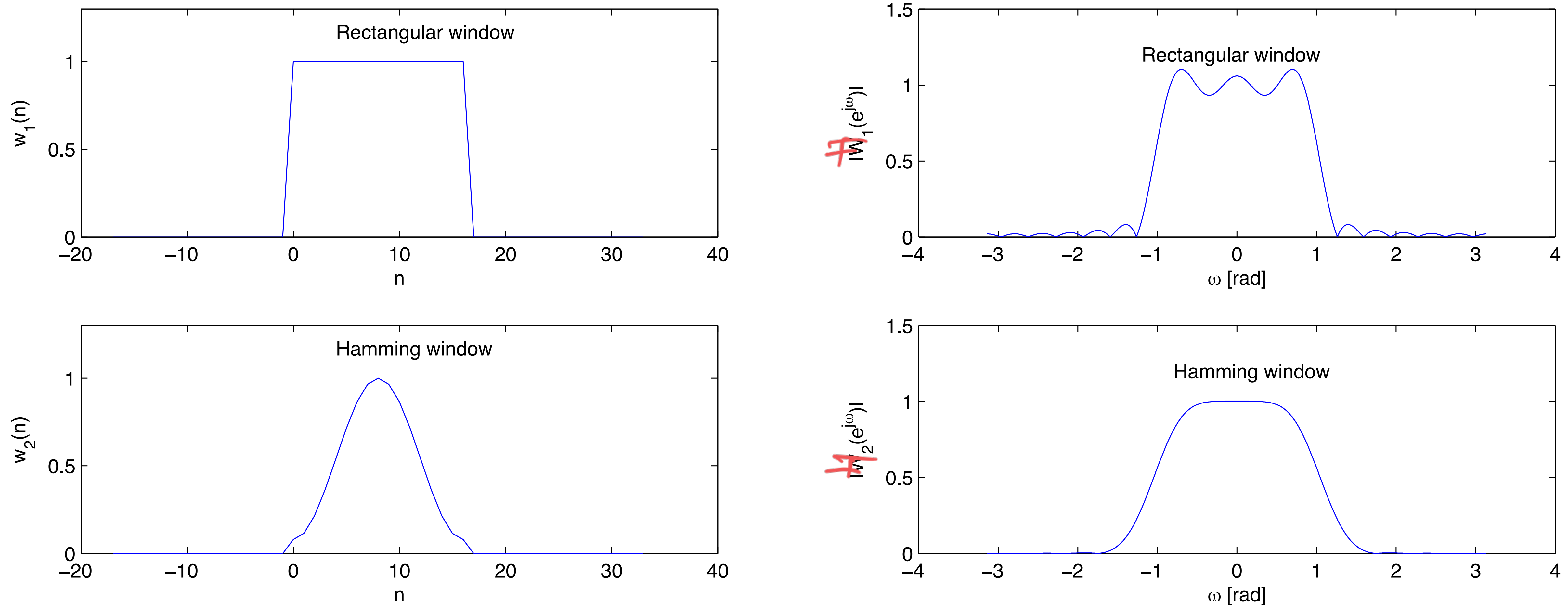


Phương pháp cửa sổ - Giải pháp

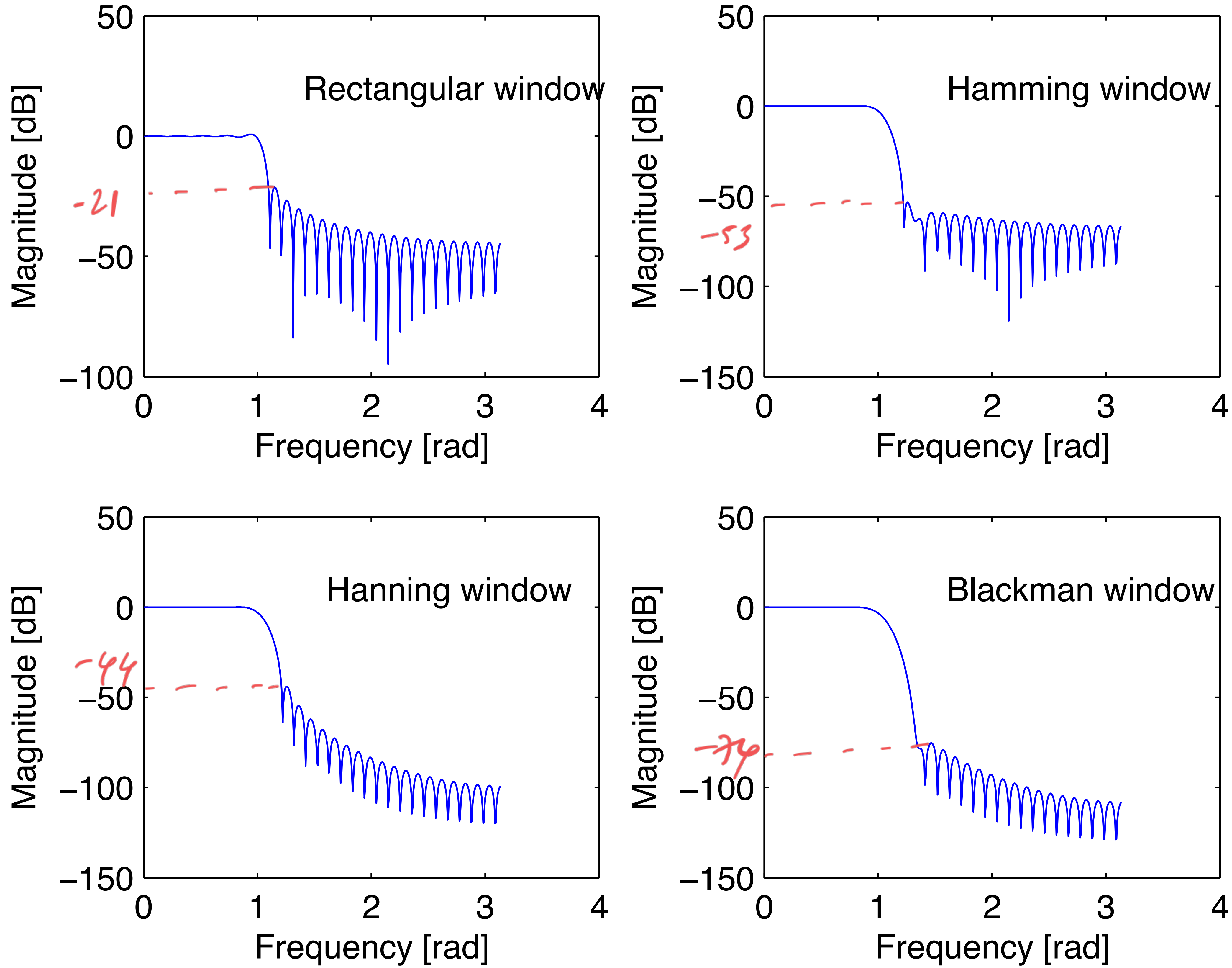
- Chọn loại cửa sổ thay đổi mềm hơn trên miền thời gian $\rightarrow$ các búp phụ thấp hơn.
- Khi đó, dải chuyển tiếp rộng hơn.
- Tăng bậc của bộ lọc nhằm giảm độ rộng dải chuyển tiếp.

Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/(M-1))$$



Phương pháp cửa sổ - Các loại cửa sổ (1)



Phương pháp cửa sổ - Các loại cửa sổ (2)

Loại cửa sổ	Búp chính	Búp chính / búp phụ	$20 \log_{10} \delta$ tại đỉnh
Chữ nhật	$4\pi/M$	-13 dB	-21 dB
Hanning	$8\pi/M$	-32 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/M$	-43 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/M$	-58 dB	-74 dB

4ω

$\delta_1 = \delta_2$

$\omega_p = 0.4\pi, \quad \omega_s = 0.43\pi \rightarrow \omega_c = \dfrac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.415\pi$

$\delta_1 = \delta_2 = -49\,dB \qquad \Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.03\pi$

→ chọn cửa sổ Hamming

$$\Delta\omega_{(Hamming)} = \frac{8\pi}{M} = 0.03\pi \rightarrow M = \frac{8\pi}{0.03\pi} = 266.67$$

M lẻ → chọn $M = 267$

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.415\pi \cdot n)}{\pi n}$$

Matlab: fir1

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{266}\right)$$

$$h(n) = h_d(n-133) \cdot w(n)$$

Phương pháp cửa sổ - Thiết kế

Một số điểm cần lưu ý khi thiết kế

- Tần số cắt nằm giữa dải chuyển tiếp
- Độ gợn sóng dải thông và dải chắn xấp xỉ bằng nhau. Thường được tính đơn vị dB ($20\log_{10}(\delta)$).
- Độ rộng dải chuyển tiếp nhỏ hơn độ rộng búp chính.
- Khoảng cách giữa 2 đỉnh ở hai đầu dải chuyển tiếp xấp xỉ bằng độ rộng búp chính.

Phương pháp lấy mẫu tần số (1)

Thực hiện lấy mẫu trên miền tần số đối với $H(e^{j\omega})$ - đáp ứng tần số mong muốn của bộ lọc cần thiết kế.

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots, (M-1), \quad \alpha \in \{0, 1/2\}$$

Từ các mẫu $H(k+\alpha) := H(e^{j\omega_k})$,

$$H(k+\alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad k = 0, 1, \ldots, (M-1)$$

ta có thể tìm được đáp ứng xung của bộ lọc

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \ldots, (M-1)$$

Phương pháp lấy mẫu tần số (2)

Khi $h(n)$ nhận các giá trị thực thì $H(k+\alpha)$ có tính chất đối xứng

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha)$$

Mặt khác, $h(n)$ đối xứng (bộ lọc pha tuyến tính). Do vậy, quá trình tính toán được rút gọn theo công thức sau (khi $\alpha = 0$)

$$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \ldots, (M-1)$$

$$G(k) = (-1)^k H_r(2\pi k/M), \quad G(k) = -G(M-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left(G(0) + 2\sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k)\cos[\frac{2\pi k}{M}(n+1/2)]\right)$$

trong đó $H_r(2\pi k/M)$ là các mẫu đáp ứng biên độ của bộ lọc cần thiết kế.

Phương pháp lấy mẫu tần số: Ví dụ

Hãy thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính với chiều dài $M = 15$ có đáp ứng xung đối xứng, và có đáp ứng tần số thoả mãn điều kiện sau

$$H_r(2\pi k/15) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.4, & k = 4 \\ 0, & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

Bài về nhà

(1) Vẽ phổ bộ lọc pha tuyến các loại (1,2,3,4) và nhận xét?

(2) Vẽ dạng cửa sổ (trên miền thời gian), và phổ bộ lọc thông thấp lý tưởng sử dụng các loại cửa sổ trên? So sánh?

(3) Vẽ phổ bộ lọc được thiết kế sử dụng phương pháp lấy mẫu tần số cho các loại?

(4) Viết chương trình thiết kế bộ lọc bằng phương pháp lặp?

Outline

Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

Bộ lọc IIR

hồi tiếp

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

So sánh với bộ lọc FIR:

- Khi không cần có pha tuyến tính, bộ lọc IIR có độ phức tạp tính toán thấp hơn (với cùng chỉ tiêu kỹ thuật).
- Khó thiết kế
- Phải đảm bảo tính ổn định của hệ thống

Tổng hợp bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

- Khó tính trực tiếp các hệ số của bộ lọc từ các chỉ tiêu kỹ thuật
- Kỹ thuật thiết kế bộ lọc tương tự đã được phát triển từ rất lâu, có nhiều thành quả để tận dụng.
- Nhiều bộ lọc IIR tương tự có công thức đơn giản, do vậy, bộ lọc số tương ứng dễ thực hiện.

Tổng hợp bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự: Nguyên lý

$\boxed{h(t)}$ — $H(s), H(\Omega)$ $\qquad$ $\boxed{h(n)}$ — $H(z), H(\omega)$

- Xấp xỉ hàm truyền đạt hoặc đáp ứng xung:
  $H_a(s), h_a(t) \rightarrow H(z), h(n)$.
- Bảo toàn một số đặc tính cơ bản trên miền tần số:
  (i) Ánh xạ trục ảo trên mặt phẳng s lên vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng z.
  (ii) Tính ổn định: hệ tương tự có các điểm cực ở nửa bên trái mặt phẳng s $\rightarrow$ hệ số có các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị ở mặt phẳng z.

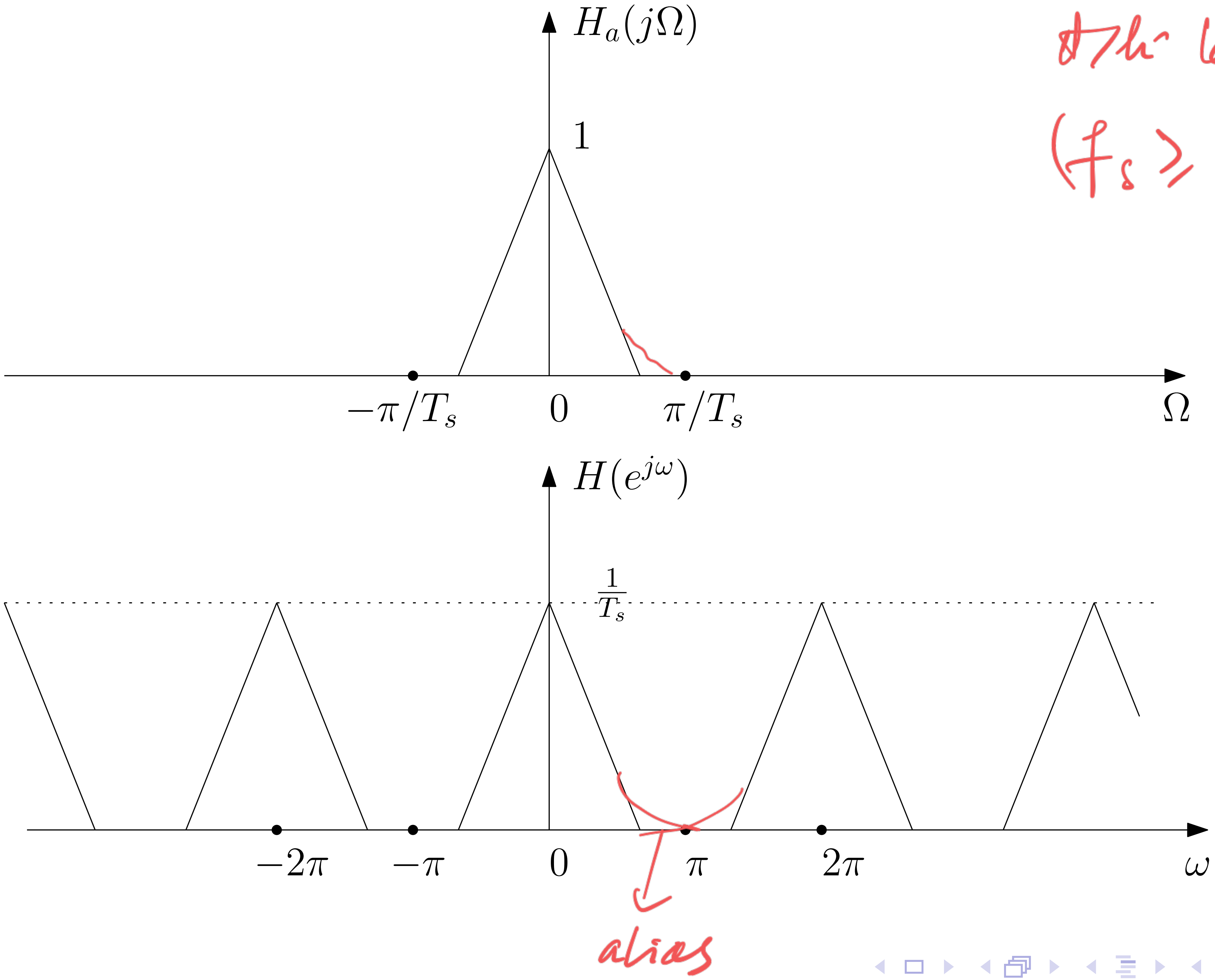
$H(\Omega) = H(s)\Big|_{\underbrace{s=j\Omega}_{\text{trục ảo}}}$ $\qquad$ $H(\omega) = H(z)\Big|_{\underbrace{z=e^{j\omega}}_{\text{vtđv}}}$

$Re\{s_{pk}\} < 0 \ \forall k$ $\qquad$ $|z_{pk}| < 1 \ \forall k$

Phương pháp bất biến xung

Lấy mẫu đáp ứng xung $h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT_s)$. Tương tự như định lý lấy mẫu, $H(e^{j\omega})$ có dạng như hình vẽ (khi $|\Omega_{max}| \leq \frac{\pi}{T_s}$).

Đ/lí lấy mẫu
($f_s \geq 2f_{max}$)



Phương pháp bất biến xung - Hàm truyền đạt

Hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự:

$$H_a(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Biến đổi Laplace ngược, lấy mẫu chu kỳ T_s, có thể tính được hàm truyền đạt của bộ lọc số:

$$H(z) = \sum_k \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} T_s} z^{-1}}$$

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt ($T_s = 1$ [s])

$$H_a(s) = \frac{4}{(s+3)(s+5)}$$

(a) Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số bằng phương pháp bất biến xung

(b) Vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số

$$H_a(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{pk}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t) = \sum_k A_k e^{s_{pk} t} u(t)$$

$\downarrow$ lấy mẫu

$$h(n) = \sum_n A_k . e^{s_{pk} . n T_s} u(nT_s)$$

$$= \sum A_k \left(e^{s_{pk} T_s}\right)^n u(n)$$

$\downarrow$ ZT

$$H(z) = \sum_k A_k . \frac{1}{1 - e^{s_{pk} T_s} . z^{-1}}$$

Phương pháp bất biến xung - Tính ổn định

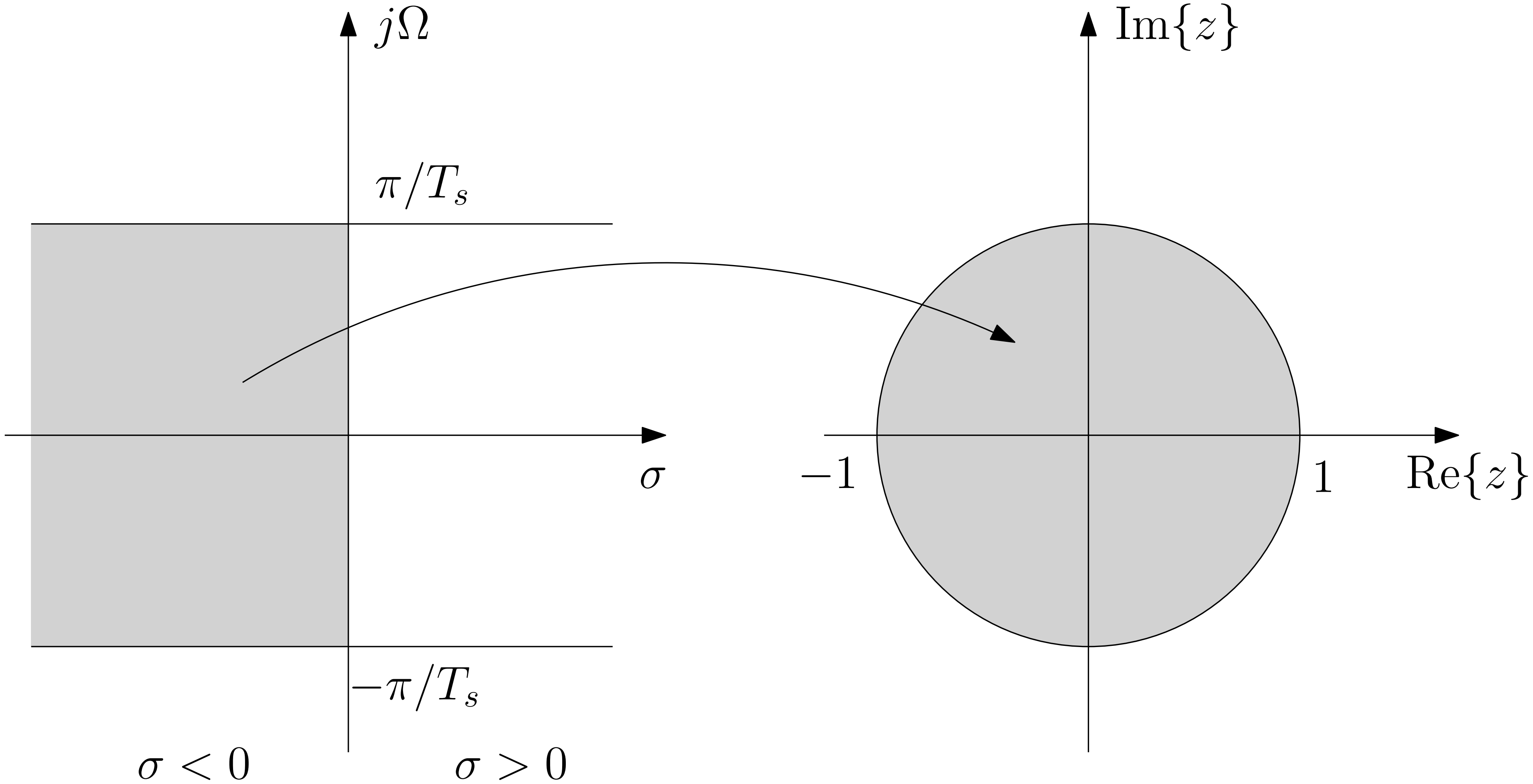
Nếu điểm cực của bộ lọc tương tự nằm bên trái mặt phẳng phức:

$$s_{pk} = \sigma + j\Omega, \quad \sigma < 0$$

thì điểm cực của bộ lọc số nằm trong vòng tròn đơn vị:

$$z_{pk} = e^{s_{pk}T_s} \rightarrow |z_{pk}| = e^{\sigma T_s} < 1$$

$$= e^{(\sigma + j\Omega)T_s} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}$$



Phương pháp bất biến xung - Tính chất

- Duy trì được bậc và tính ổn định của bộ lọc tương tự
- Không áp dụng được cho tất cả các loại bộ lọc (thông cao, chắn dải)
- Có thể xảy ra méo dạng đáp ứng tần số do chồng phổ

Phương pháp biến đổi song tuyến

(bilinear transformation)

Tránh hiện tượng chồng phổ, ánh xạ toàn bộ trục ảo $j\Omega$ trên mặt phẳng s thành vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng z.

$$H_a(s) \to H(z), \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

với T bất kỳ.

- Trục ảo $\sigma = 0 \leftrightarrow$ vòng tròn đơn vị $|z| = 1$.
- Nửa trái mặt phẳng phức $\sigma < 0 \leftrightarrow$ phần mặt phẳng nằm trong vòng tròn đơn vị $|z| < 1$.

So với bộ lọc tương tự:

- Đáp ứng tần số giống nhau
- Đáp ứng xung có thể rất khác nhau

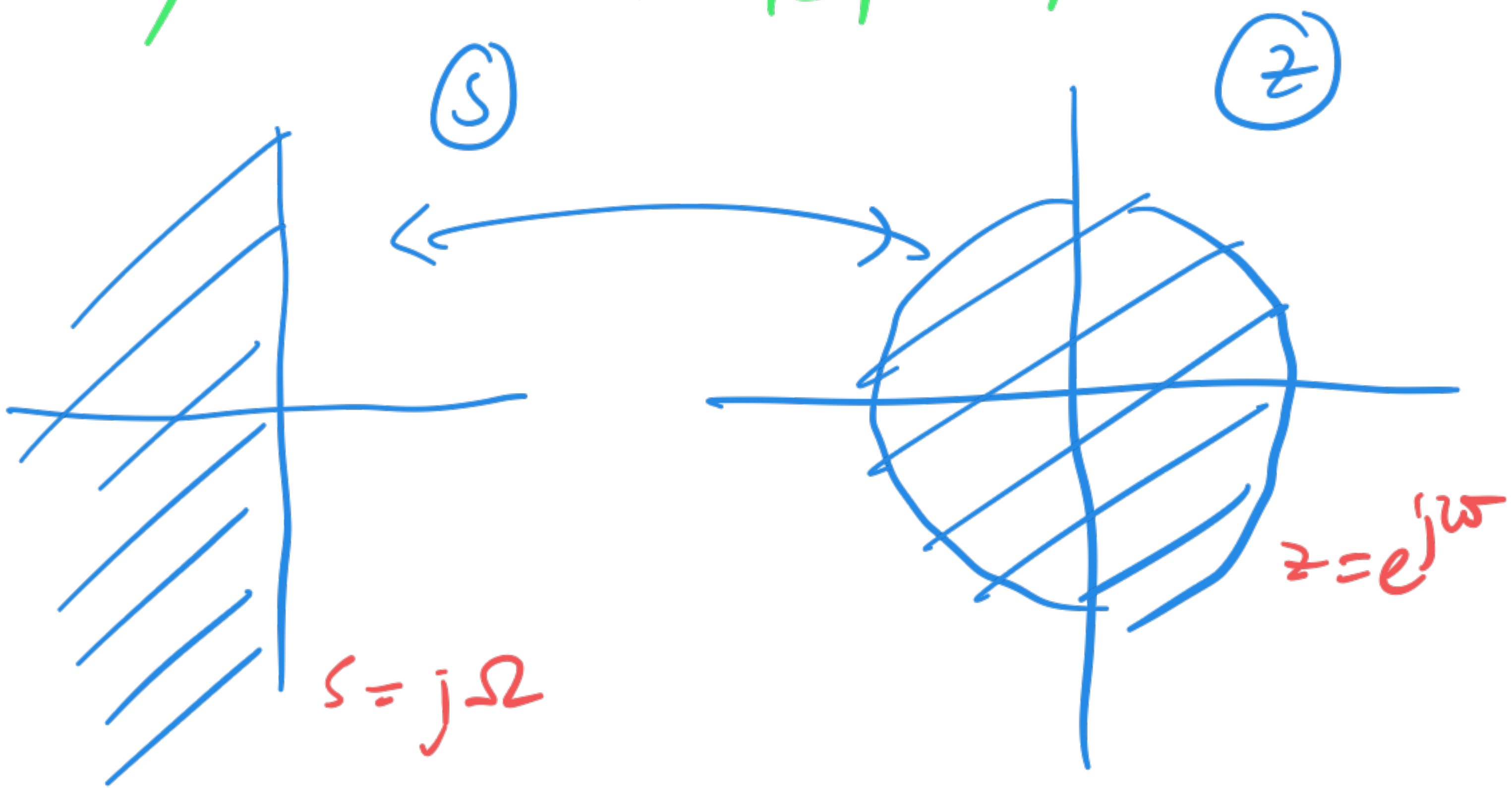
$$s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$2(1-z^{-1}) = sT(1+z^{-1})$$

$$2 - sT = (sT+2)z^{-1}$$

$$z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

+) $\sigma < 0 \leftrightarrow |z| < 1$



+) $\boxed{s = j\Omega}$

$$z = \frac{2+j\Omega T}{2-j\Omega T}$$

$$|z| = 1$$

+) $z = e^{j\omega}$

$$s = \frac{2\cdot(1-e^{-j\omega})}{T\cdot(1+e^{-j\omega})}$$

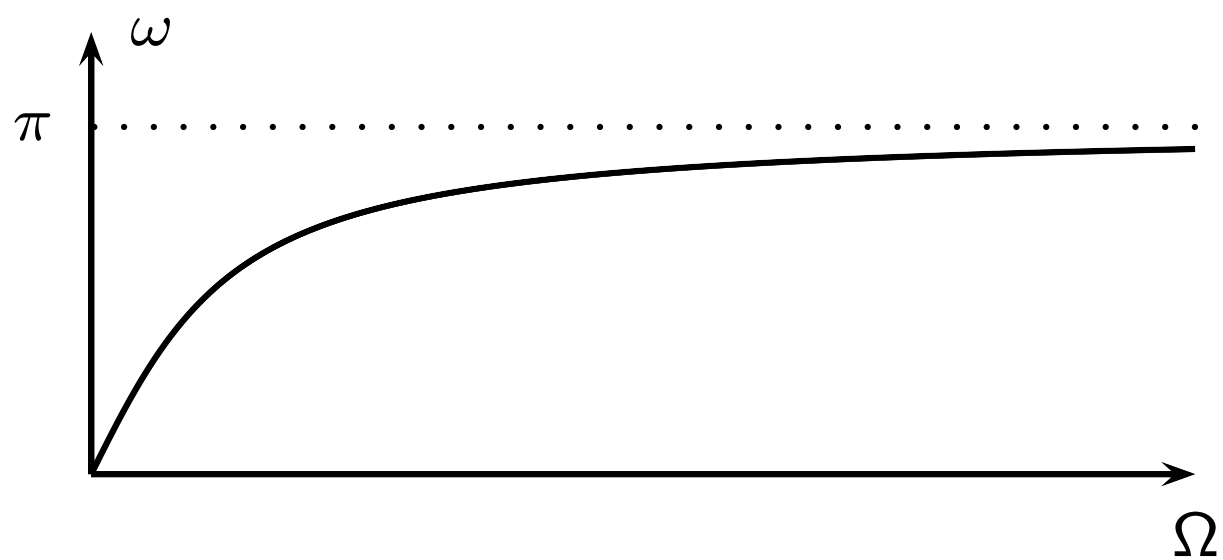
$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \rightarrow Re\{s\} = 0$$

Phương pháp biến đổi song tuyến: Tính chất

Nếu $s = \sigma + j\Omega$ và $z = re^{j\omega}$, dễ dàng tính được

$$\omega = 2\arctan(\frac{T}{2}\Omega), \quad \Omega = \frac{2}{T}\tan(\omega/2)$$



Các bước thiết kế: $(\omega_s, \omega_p, \delta_1, \delta_2) \to (\Omega_s, \Omega_p, \delta_1, \delta_2)$

1. Xấp xỉ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số sang bộ lọc tương tự
2. Thiết kế bộ lọc tương tự $H_a(s)$
3. Áp dụng biến đổi song tuyến

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \to H(z)$$

Phương pháp tương đương vi phân

Xấp xỉ: phương trình vi phân $\rightarrow$ phương trình sai phân, ví dụ:

$$\frac{d}{dt}y_a(t) \rightarrow \frac{1}{T_s}[y(n) - y(n-1)]$$

Hàm truyền đạt:

$$H_a(s) \rightarrow H(z), \quad s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

Phương pháp biến đổi z thích ứng

Ánh xạ các điểm cực và điểm không:

$$H_a(s) = \frac{\prod_{r=1}^{M}(s - s_{0r})}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_{pk})}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{\prod_{r=1}^{M}(1 - e^{s_{0r}T_s}z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - e^{s_{pk}T_s}z^{-1})}$$