ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng – Toán ứng dụng

Đề chính thức

ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ 171 NĂM 2017-2018
Môn thi: Đại Số Tuyến Tính – Ca 1
Ngày thi: …quên mất rồi
Thời gian làm bài: 90 phút

(Đáp án do Ban chuyên môn CLB Chúng Ta Cùng Tiến thực hiện)

Câu 1: Tìm ma trận X sao cho $(X + 2B^T)A = 2A + 2X$, với:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có:

$$(X + 2B^T)A = 2A + 2X \Leftrightarrow X(A - 2I) = 2A - 2B^TA \Leftrightarrow X = 2(A - B^TA)(A - 2I)^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 20 & -8 & -2 \\ -42 & 2 & 8 \\ 24 & -28 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho $\det(A) = 2$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & m \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Giải. Bằng vài đường cơ bản :v , ta tính được:

$$\det(A) = 4m + 17 \Rightarrow 4\text{m} + 17 = 2 \Leftrightarrow \text{m} = -\frac{15}{4}$$

Câu 3: Trong R_3 với tích vô hướng

$$(x, y) = \big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big)$$

$$= 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3$$

, cho không gian con $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$

a) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian $F^\perp$

Giải. Ta tìm một cơ sở của F bằng cách giải hệ $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

Nghiệm của hệ có dạng $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Một cơ sở của không gian nghiệm là $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, e_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Giả sử có vector $x \in F^{\perp} \Rightarrow x \perp e_1, x \perp e_2 \Rightarrow (x, e_1) = (x, e_2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được cơ sở của $F^{\perp}$ là $\left\{e_3 = \begin{pmatrix}-11\\9\\7\end{pmatrix}\right\}$ và $\dim(F^{\perp}) = 1$

b) Tìm hình chiếu vuông góc của vector $v = (2, -1, 1)$ lên không gian con F

Giải. Ta tìm hình chiếu của v lên $F^{\perp}$ là:

$$\Pr_{F^{\perp}}(v) = \frac{(v, e_3)}{(e_3, e_3)} e_3 = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-11\\9\\7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pr_{F}(v) = v - \Pr_{F^{\perp}}(v) = \left(\frac{13}{12}, -\frac{1}{4}, \frac{19}{12}\right)$$

Câu 4: Cho AXTT $f: R_3 \to R_3$.

Giả sử $f(1; 1; -2) = (2; 1; -2), f(2; 3; -5) = (1; 2; -3), f(3; 4; -6) = (5; 4; -7)$

Tìm một cơ sở và số chiều của $\ker f$

Giải.

Dễ thấy $E = \left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}\right\}$ là một cơ sở của R_3

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là:

$$A_0 = f(E)E^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \alpha(-1; -1; 3)$. Một cơ sở của $\ker f$ là: $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ và $\dim(\ker f) = 1$

Câu 5: Cho AXTT $f: R_3 \to R_3$, biết $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ là ma trận của ánh xạ f trong cơ sở $E = \{(1,1,1), (2,1,1), (1,2,1)\}$

a) Tính $f(2,-1,3)$

Giải. Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là:

$$A_0 = EAE^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -26 & 23 \\ 12 & -30 & 27 \\ 8 & -20 & 18 \end{pmatrix}$$

$$f(2;-1;3) = \begin{pmatrix} 11 & -26 & 23 \\ 12 & -30 & 27 \\ 8 & -20 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (117; 135; 90)$$

b) Tìm một cơ sở và số chiều của $Im\, f$

Giải.

$$f(x_1; x_2; x_3) = (11x_1 - 26x_2 + 23x_3; 12x_1 - 30x_2 + 27x_3; 8x_1 - 20x_2 + 18x_3)$$

$$= x_1(11; 12; 8) - x_2(26; 30; 20) + x_3(23; 27; 18)$$

$$\Rightarrow Im\, f = <(11; 12; 8), (26; 30; 20), (23; 27; 18)>$$

Lập ma trận:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 8 \\ 26 & 30 & 20 \\ 23 & 27 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 11 & 12 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy một cơ sở của $Im\, f$ là $\{(11; 12; 8), (0; 3; 2)\}$ và $\dim(Im\, f) = 2$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ánh xạ tuyến tính f là phép quay quanh trục Oz một góc $\theta = \pi$ ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz. Gọi A làma trận của ánh xạ tuyến tính này trong cơ sở $E = \{(1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 1)\}$. Chéo hóa (nếu được) ma trận A.

Giải. Do f là phép quay quanh trục Oz một góc $\theta = \pi$ ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz nên ta có:

$$f(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = E^{-1}A_0E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ta để ý rằng A_0 là ma trận chéo, như vậy A chéo hóa được: $A = PDP^{-1}$, với:

$$P = E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Câu 7: Đưa dạng toàn phương $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ về dạng chính tắc và nêu rõ phép đổi biến (thí sinh có thể dùng biến đổi trực giao hoặc biến đổi Lagrange)

Giải.

Cách 1: Biến đổi Lagrange

$$Q(x) = 6\left(x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}(5x_2 - x_3)^2 + \frac{11}{2}x_3^2$$

Đặt $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 = y_1 \\ 5x_2 - x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{15}y_2 + \frac{1}{10}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

Dạng chính tắc là: $Q(x) = P(y) = 6y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{11}{2}y_3^2$

Cách 2: Biến đổi trực giao

Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 135\lambda + 275 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5\ (\text{BĐS} = 2) \\ \lambda_2 = 11 (\text{BĐS} = 1) \end{cases}$

Với $\lambda_1 = 5$ ta có: $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Với $\lambda_2 = 11$ ta có: $P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Ma trận trực giao $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Rightarrow$ phép biến đổi $x = Py$

Dạng chính tắc là: $Q(x) = R(y) = 5y_1^2 + 5y_2^2 + 11y_3^2$

- Hết -