



Bài tập chương 5

Quan hệ

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến lý thuyết tập hợp (bao gồm quan hệ, quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự). Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 5 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Exercise 1.

Cho quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ trên tập $X = \{1, 2, 3\}$. Hãy xác định nếu R là

- a) phản xạ
- b) đối xứng
- c) bắc cầu

Lời giải.

- a) Quan hệ R không có tính chất phản xạ vì $(2, 2) \notin R$;
- b) Quan hệ R có tính chất đối xứng đối xứng vì $R^{-1} = R$;
- c) Quan hệ R không có tính chất bắc cầu vì $(3, 2) \in R$ và $(2, 3) \in R$, nhưng $(3, 3) \notin R$.

□

Exercise 2.

Quan hệ R trên \mathbb{N} được định nghĩa bởi “ $n R m$ nếu và chỉ nếu $m = n + 1$ ” là

- a) đối xứng?
- b) phản xạ?
- c) bắc cầu?

Lời giải.

- a) Nếu R có tính chất đối xứng, ta sẽ có $m = n + 1 \iff n = m + 1$ (vô lý!).



b) Nếu R có tính chất phản xạ, thì $n = n + 1$ (vô lý!).

c) Nếu R có tính chất bắc cầu, thì ta sẽ có $m = n + 1$ và $p = m + 1 \implies p = n + 1$ (vô lý!)

□

3 Bài tập cần giải

Exercise 3.

Trong các quan hệ sau trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$, xác định xem nó có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu hay không

1. $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $\{(2, 4), (4, 2)\}$
4. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
5. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
6. $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Exercise 4.

Quan hệ R trên \mathbb{N} được định nghĩa bởi “ $n R m$ nếu và chỉ nếu m và n có cùng ước số chung lớn hơn 1” là

- a) đối xứng?
- b) phản xạ?
- c) bắc cầu?

Exercise 5.

Xác định quan hệ R trên tập tất cả mọi người là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng hay bắc cầu. Biết rằng $(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu

- a) a cao hơn b ;
- b) a và b sinh cùng ngày;
- c) a và b có cùng ông bà nội.



Exercise 6.

Liệt kê các cặp trong quan hệ tương đương được tạo bởi các phân hoạch sau của $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. $\{0\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}$
2. $\{0,1\}, \{2,3\}, \{4,5\}$
3. $\{0,1,2\}, \{3,4,5\}$
4. $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

Exercise 7.

Quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ nào sau đây là thứ tự bộ phận? Nếu không có thứ tự bộ phận, xác định các tính chất của một thứ tự bộ phận mà quan hệ đó còn thiếu.

1. $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$
2. $\{(0,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
3. $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$
4. $\{(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$
5. $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}$

Exercise 8.

Trả lời các câu hỏi sau đối với poset $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$.

1. Tìm phần tử cực đại.
2. Tìm phần tử cực tiểu.
3. Có phần tử lớn nhất hay không?
4. Có phần tử nhỏ nhất hay không?
5. Tìm tất cả cận trên của $\{2,9\}$.
6. Tìm cận trên nhỏ nhất của $\{2,9\}$, nếu có.
7. Tìm tất cả cận dưới của $\{60,72\}$.
8. Tìm cận dưới lớn nhất của $\{60,72\}$, nếu có.



Exercise 9.

Liệt kê các cặp có thứ tự trong quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ tương ứng với ma trận sau (trong đó hàng và cột tương ứng với số nguyên liệt kê theo thứ tự tăng dần)

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercise 10.

Xác định các quan hệ trong bài trên có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu hay không.

Exercise 11.

Vẽ đồ thị có hướng từ 3 ma trận ở Bài 3 và dựa vào đó, vẽ đồ thị có hướng của bao đóng phản xạ, và vẽ đồ thị có hướng của bao đóng đối xứng.

Exercise 12.

Cho R là quan hệ $\{(a, b) \mid a \neq b\}$ trên tập số nguyên. Bao đóng phản xạ của R là gì?

Exercise 13.

Quan hệ nào sau đây là poset?

- a) $(\mathbb{Z}, =)$
- b) (\mathbb{Z}, \neq)
- c) (\mathbb{Z}, \geq)
- d) (\mathbb{Z}, \dagger)



Exercise 14.

Các cặp phần tử nào trong đây là so sánh được trong poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

1. 5, 15
2. 6, 9
3. 8, 16
4. 7, 7

Exercise 15.

Tìm thứ tự của các chuỗi sau theo chữ cái tiếng Anh:

1. *quack, quick, quicksilver, quicksand, quacking*
2. *open, opener, opera, operand, opened*
3. *zoo, zero, zoom, zoology, zoological*

Exercise 16.

Xác định xem quan hệ R trên tập tất cả các trang Web là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, hay bắc cầu, trong đó $(a, b) \in R$ khi và chỉ khi

1. Tất cả những ai đã xem trang Web a cũng xem trang Web b .
2. Tại cả hai trang Web a và b không có liên kết nào giống nhau.
3. Có ít nhất một liên kết giống nhau trên trang Web a và trang Web b .
4. Có một trang Web có chứa liên kết đến cả trang Web a lẫn trang Web b .

Exercise 17.

Cho R là một quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ có chứa các cặp $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(4,5)$, $(5,1)$, $(5,2)$ và $(5,4)$. Tìm

- a) R^2 .
- b) R^3 .
- c) R^4 .
- d) R^5 .



Exercise 18.

Cho R là quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ có chứa các cặp $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$ và $(3,0)$.
Tìm

- a) bao đóng phản xạ của R .
- b) bao đóng đối xứng của R .
- c) bao đóng bắc cầu của R .

4 Bài tập nâng cao

Exercise 19.

Gọi R là một quan hệ phản xạ. Chứng minh rằng R^n cũng là một quan hệ phản xạ với mọi số nguyên dương n .

Exercise 20.

Làm thế nào để xác định trên ma trận quan hệ R trên tập A là phi phản xạ? Với định nghĩa một quan hệ R trên tập A là **phi phản xạ** nếu với mọi $a \in A$, $(a, a) \notin R$.

Exercise 21.

Làm thế nào để xác định trên ma trận quan hệ R trên tập A là phi đối xứng? Với định nghĩa một quan hệ R được gọi là **phi đối xứng** nếu $(a, b) \in R$ nghĩa là $(b, a) \notin R$.

Exercise 22.

Cho R là quan hệ $\{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$ trên tập số nguyên. Bao đóng đối xứng của R là gì?

Exercise 23.

Cho ma trận quan hệ trên tập $\{a, b, c, d\}$ như sau (trong đó hàng và cột tương ứng với chữ cái liệt kê theo thứ tự tăng dần)

$$1. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vẽ đồ thị có hướng từ 3 ma trận trên và dựa vào đó, vẽ đồ thị có hướng của bao đóng phản xạ, và vẽ đồ thị có hướng của bao đóng đối xứng.

Exercise 24.

Các quan hệ sau trên $\{0, 1, 2, 3\}$, quan hệ nào là tương đương. Nếu không phải, hãy chỉ ra tính chất còn thiếu để nó trở thành tương đương. Nếu là tương đương, hãy chỉ ra các lớp tương đương của nó.

- a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
- c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

Exercise 25.

Cho R là quan hệ trên tập gồm các cặp số nguyên dương sao cho $((a, b), (c, d)) \in R$ nếu và chỉ nếu $a + d = b + c$.

- a) Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương.
- b) Lớp tương đương của $(1, 2)$ với quan hệ tương đương R là gì?
- c) Hãy biểu diễn bằng lời các lớp tương đương của quan hệ tương đương R .

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với lý thuyết về quan hệ (bao gồm quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự) mà chi tiết về lý thuyết đã được trình bày trong slide chương 5.