Contents

One Variable Derivative – Đạo Hàm 1 Biến:

1. Tính Đạo Hàm Bậc Cực Cao Của 1 Tích?

- Giả sử ta muốn tính đạo hàm bậc n theo x của tích uv, u và v là hàm của x
- Bước 1, khai triển biểu thức

$$A = (u+v)^n$$

- Bước 2, số hạng đầu thêm v^0, số hạng cuối thêm u^0
- Bước 3, thay số mũ thành các dấu phẩy, ví dụ mũ 3 thì 3 dấu phẩy
- Ví dụ
- Tính đạo hàm cấp 3 của tích uv

$$A = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v + 3uv^2 + u^0v^3 \rightarrow u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

2. Tính Đạo Hàm Bậc Cực Cao Của Hàm Hợp = Công Thức Faà Di Bruno?

⇨ Giả sử ta muốn tính đạo hàm bậc n của f(g(x))

⇨ Bước 1, tạo bảng dạng sau

n	n – 1	n – 2	…	2	1	<Tổng>	<Tích Giai Thừa>	<Tích Index Mũ>
					n	n	n!	1
				1	n – 2	n – 1	(n – 2)!	2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…

⇨ Hàng đầu là Index, ô trống nghĩa là = 0

⇨ Tích vô hướng của mỗi hàng với hàng Index phải = n, vi dụ hàng màu vàng, 1 * 2 + (n – 2) * 1 = n

⇨ Để làm được điều này, dùng phương pháp đếm số, tưởng tượng hàng trăm rồi đến chục rồi đến đơn vị

⇨ Cột tổng tính = tổng các ô trong hàng

⇨ Cột tích giai thừa = tích giai thừa các ô trong hàng

⇨ Cột tích Index mũ = lấy Index của từng ô, giai thừa nó, rồi mũ với số mũ = số trong ô, sau đó tích chúng lại

⇨ Gọi h(x) của mỗi hàng = đạo hàm bậc <Tổng> của f(x) nhưng sau đó thế x thành g(x)

⇨ Gọi p(x) của mỗi hàng = đi qua từng ô trong hàng, lấy đạo hàm bậc <Index Ô Hiện Tại> của g(x), sau đó mũ lên với số mũ = số trong ô, cuối cùng tích chúng lại

⇨ Số hạng mỗi hàng = h(x) * g(x) / <Tích Giai Thừa> / <Tích Index Mũ>

⇨ Cộng tất cả số hạng lại rồi nhân với n!

3. Tính Đạo Hàm Bậc Cực Cao = Máy Tính?

⇨ Muốn tính đạo hàm bậc n của hàm f(x) tại điểm x = a, chọn khoảng cách bước Δx sao cho giá trị hàm tăng giảm cỡ vừa phải, tính n + 1 giá trị tại các điểm a, a + Δx, a + 2Δx, …, a + nΔx gán vào các biến A, B, …, Z

⇨ Lặp qua từng biến, lấy biến sau trừ biến trước rồi chia cho Δx, rồi gán cho biến trước, ví dụ lấy (B – A) / Δx rồi gán lại cho A, sau đó lấy (C – B) / Δx rồi gán lại cho B, …, sau cùng thì bỏ biến cuối cùng

⇨ Thực hiện điều trên cho đến khi chỉ còn 1 biến, giá trị biến này chính là đạo hàm cấp n, độ chính xác tùy thuộc vào Δx

4. Tính Đạo Hàm Bậc Cực Cao = Chuỗi Taylor?

⇨ Cho hàm hợp f(g(x)), g(x) là đa thức, ta muốn tìm đạo hàm bậc n của hàm hợp này tại điểm x = 0

⇨ Khai triển Maclaurin của f(x) rồi thế x thành g(x), tìm rồi tính tổng hệ số các số hạng có mũ = n, lấy tổng hệ số nhân n! là ra

5. Điểm Uốn?

⇨ Là điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị cắt xuyên đồ thị, nghĩa là phần bên trái điểm uốn của tiếp tuyến nằm phía trên đồ thị thì phần bên phải nằm phía dưới và ngược lại

⇨ Hay điểm uốn là điểm mà đạo hàm cấp 2 đổi dấu

⇨ Hàm số lồi trên 1 khoảng nào đó khi đạo hàm cấp 2 không dương trên khoảng đó

⇨ Lõm thì không âm

6. Ý Nghĩa Kí Hiệu Đạo Hàm Cấp 2?

⇨ Cho y = f(x), trong d^2y / dx^2, d^2y = d(dy) =

(f(x + 2dx) – f(x + dx)) – (f(x + dx) – f(x)), $dx^2 = (dx)^2$

7. 1 Số Công Thức Đạo Hàm Khó?

⇨ Nên phân tích hàm thành tổng hiệu các hàm rồi sau đó đạo hàm cho dễ

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(g(x)ln\left(f(x)\right)\right)'f(x)^{g(x)}$$
$$\left(f(ax+b)\right)^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$
$$(x^a)^{(n)} = A_a^n x^{a-n}$$
$$y_x'' = \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)' / x_t'$$
$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f\left(h(x)\right)h'(x) - f\left(g(x)\right)g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}e^{mx}\left(Pcos(nx) + Qcos(nx)\right) =$$
$$e^{mx}\left((mP + P' + nQ)cos(nx) + (mQ + Q' - nP)sin(nx)\right)$$

One Variable Anti Derivative – Nguyên Hàm 1 Biến:

1. Nguyên Hàm Của Hàm Phân Thức?

⇨ Bước 1, gọi hàm phân thức chuẩn mực là hàm có tử là đa thức bậc < mẫu, phân tích hàm gốc thành tổng của 1 đa thức + 1 phân thức chuẩn mực

⇨ Ví dụ

$$\frac{x^4 + x^2 + 3x}{x^3 + 1} = x + \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 1}$$

⇨ Bước 2, phần đa thức lấy nguyên hàm dễ rồi, ta phân tích phần phân thức chuẩn mực thành tổng các phân thức chuẩn mực đơn giản, bất kỳ đa thức nào cũng có thể phân tích nhân tử của các đa thức bậc 1 và bậc 2

⇨ Ví dụ

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

⇨ Bước 3, đặt hệ số ẩn ở tử

⇨ Ví dụ

$$\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

⇨ Bước 4, giải hệ phương trình tìm hệ số

⇨ Ví dụ

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B + C = 2 \\ A + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 1} = \frac{-1}{3x+3} + \frac{4x+1}{3x^2 - 3x + 3}$$

⇨ Bước 5, những thằng có mẫu bậc 2 thì tiếp tục phân tích thành 1 phân thức có tử là 1 số nhân đạo hàm của mẫu + 1 phân thức có tử bậc 0

⇨ Ví dụ

$$\frac{4x+1}{3x^2 - 3x + 3} = \frac{4x - 2}{3x^2 - 3x + 3} + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

⇨ Bước 5, tiếp tục biến đổi những phân thức có tử bậc 0 và mẫu bậc 2, mẫu phân tích thành tổng của 1 bình phương và 1 số

⇨ Ví dụ

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

- ⇨ Bước 6, lấy nguyên hàm từng thằng rồi tổng lại
- ⇨ Ví dụ

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 3x}{x^3 + 1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}ln|3x + 3| + \frac{2}{3}ln|3x^2 - 3x + 3| + \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}ln|x + 1| + \frac{2}{3}ln|x^2 - x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

2. Một Số Nguyên Hàm?

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$
$$\int sec^3(x)dx = \frac{1}{2}\big(ln|sec(x) + tan(x)| + sec(x)tan(x)\big) + C$$
$$\int sec^2(x)dx = tan(x) + C$$
$$\int sec(x)dx = ln|sec(x) + tan(x)| + C$$
$$\int cosec^2(x)dx = -cot(x) + C$$
$$\int cosec(x)dx = ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$
$$\int tan(x)dx = -ln|cos(x)| + C$$
$$\int cot(x)dx = ln|sin(x)| + C$$
$$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin(2x) + C$$
$$\int sinh(x)dx = cosh(x) + C$$
$$\int cosh(x)dx = sinh(x) + C$$
$$\int \frac{1}{cosh(x)}dx = 2arctan(e^x) + C$$
$$\int \frac{1}{sinh(x)}dx = ln\left|tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$
$$\int \frac{1}{cosh^2(x)}dx = tanh(x) + C$$
$$\int \frac{1}{sinh^2(x)}dx = -coth(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, a \neq 0$$
$$\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{1}{2}\left(aln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + x\sqrt{x^2 + a}\right) + C, a \neq 0$$
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a^2arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C, a > 0$$
$$\int f(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\left(f(x) - \frac{1}{a}f'(x) + \frac{1}{a^2}f''(x) - \frac{1}{a^3}f'''(x) + \cdots\right) + C$$

Trigonometry – Lượng Giác:

1. $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a + b) + cos(a - b)]$
2. $sin(a)sin(b) = \frac{1}{2}[cos(a + b) + cos(a - b)]$
3. $cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$
4. $sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$

5. $cos^2(a) = \frac{1 + cos(2a)}{2}$
6. $cos(a) + \cos(2a) + \cos(3a) + \cdots \cos(na) = \frac{cos((n+1)a) - cos(na)}{2cos(a) - 2} - \frac{1}{2}$
7. $sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$
8. $cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$
9. $tanh(a) = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}$
10. $cosh^2(a) - sinh^2(a) = 1$
11. $arcsin(a) + arccos(a) = \frac{\pi}{2}$
12. $arcsinh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
13. $arccosh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
14. $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$
15. $cosec(x) = \frac{1}{sin(x)}$
16. $cos\left(\frac{1}{2}arctan(x)\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1\right)}$
17. $sin\left(\frac{1}{2}arctan(x)\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}, x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}, x < 0 \end{cases}$
18. $cos\left(arctan(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
19. $sin\left(arctan(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
20.

Transcendental Value – Giá Trị Siêu Việt:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$
2. $\int_0^{2\pi} sin^2(mx)dx = \int_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = \pi, \forall m, n \in Z/\{0\}$
3. $\int_0^{2\pi} sin(mx)cos(nx)dx = 0, \forall m, n \in Z/\{0\}, m \neq n$
4. $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
5. $\lim_{n \to \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{\pm n} = \lim_{n \to 0} (1 \pm n)^{\pm \frac{1}{n}} = e$
6. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$

Vector:

1. Tính Tích Có Hướng Trước Hay Tích Vô Hướng Trước Trong 1 Biểu Thức?

⇨ Tính tích có hướng trước

2. Hình Chiếu Của 1 Vector Lên Vector Kia?

⇨ Giả sử ta muốn tìm hình chiếu của Vector u lên Vector v, gọi hình chiếu là Vector h, ta có

$$h = (\hat{v} \cdot u)\hat{v}$$

3. Tính Độ Lớn Của Tích Có Hướng Nhưng Không Sử Dụng Tích Có Hướng?

⇨ Giả sử ta muốn tính độ lớn tích có hướng của u và v, tương đương việc tính diện tích hình bình hành tạo bởi u và v

$$|u \times v| = |v||u - h|, h = (\hat{v} \cdot u)\hat{v}$$

4. Đạo Hàm Của Chiều Dài Vector Theo Thời Gian?

$$\frac{d|v|}{dt} = \hat{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

5. Đạo Hàm Của Tích 1 Đại Lượng Vô Hướng Và Vector?

⇨ a là đại lượng vô hướng, v là Vector

$$\frac{d}{dt}(av) = v\frac{da}{dt} + a\frac{dv}{dt}$$

6. 1 Số Công Thức Quan Trọng?

$$A \times B = -B \times A$$
$$\nabla \times \nabla f = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$$
$$\frac{d}{dt}(\nabla \times F) = \nabla \times \frac{dF}{dt}$$
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}$$
$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$
$$\nabla \cdot (f + g) = \nabla \cdot f + \nabla \cdot g$$
$$\nabla \times (f + g) = \nabla \times f + \nabla \times g$$

Integral – Tích Phân:

1. Đưa Hàm Số Ra Khỏi Dấu Vi Phân?

$$df(x) = f'(x)dx$$

2. Chuyển Đổi Vi Phân Sang Tích Phân?

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt$$

⇨ x_0 là giá trị của x tương ứng với $t = t_0$

⇨ x_1 là giá trị của x tương ứng với $t = t_1$

3. Quy Tắc Lấy Tích Phân 2 Vế Bỏ Cận?

$$f(y)dy = g(x)dx \Rightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C$$

4. Thay đổi thứ tự của tích phân lồng nhau?

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)dx\, dy = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dy\, dx$$

5. Tách Tích Phân Lồng Nhau?

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x)g(y)dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)dy$$

6. Đưa Dấu Đạo Hàm Vào Trong Tích Phân?

$$\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{df(x,y)}{dx}dy$$

7. Tổng Riemann?

⇨ Là chia hàm thành nhiều hình chữ nhật rồi tính tổng diện tích các hình chữ nhật

⇨ Chiều rộng mỗi hình chữ nhật không nhất thiết = nhau

⇨ Chiều cao hình chữ nhật = giá trị hàm tại 1 điểm tùy chọn nằm trên cạnh đáy hình chữ nhật, nếu chọn điểm tận cùng bên trái cho tất cả hình chữ nhật, thì được tổng Riemann trái, tương tự phải, còn trung tâm thì chọn trung điểm cạnh đáy

8. Quy Tắc Lấy Tích Phân Lồng Nhau Trong Không Gian Oxyz?

⇨ Tích phân lồng bên trong có cận là biểu thức của biến tích phân lồng bên ngoài

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{f_0(x)}^{f_1(x)}\int_{g_0(x,y)}^{g_1(x,y)} h(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

9. Tính Diện Tích Của Bề Mặt?

⇨ Cho bề mặt có phương trình z = f(x, y) bị giới hạn bởi x = x0, x = x1, y = y0, y = y1, diện tích của nó là

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,dy\,dx$$

10. Chuyển Đổi Giữa Tích Phân Của Hệ Tọa Độ Descartes Và Hệ Tọa Độ Cầu?

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} g(r,\theta,\phi)r^2 sin(\theta)dr\,d\theta\,d\phi$$

⇨ g(r, θ, ϕ) và f(x, y, z) đều là hàm số cho biết mật độ tại 1 điểm trong không gian và chúng tương đương nhau

⇨ Các cận của tích phân bên phải giới hạn phần không gian = phần bên trái

⇨ Khi ta tăng r thêm dr, θ thêm dθ, ϕ thêm dϕ thì ta sẽ quét được 1 hình hộp chữ nhật có thể tích rất nhỏ và có thể tích trong không gian = r^2sin(θ)drdθdϕ

⇨ Để lấy tích phân trên bề mặt 1 mặt cầu S bán kính r, dS là diện tích rất nhỏ trên bề mặt cầu

$$\int_S dS = \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 sin(\theta)d\theta\,d\phi$$

11. Tính Thể Tích Dưới Bề Mặt 1 Hàm Số Sử Dụng Hệ Tọa Độ Phân Cực?

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} g(r,\theta)rdr\,d\theta$$

⇨ g(r, θ) và f(x, y) có đồ thị tương đương nhau

⇨ Các cận của tích phân bên phải giới hạn phần không gian = phần bên trái

⇨ Khi ta tăng r thêm dr, θ thêm dθ thì ta sẽ quét được 1 hình chữ nhật có diện tích rất nhỏ và diện tích của nó = rdrdθ

⇨ Để lấy tích phân trên đường viền hình tròn L bán kính r, dL là đoạn rất nhỏ trên viền

$$\int_L dL = \int_{\theta_0}^{\theta_1} rd\theta$$

12. Đổi Hệ Tọa Độ Để Tính Tích Phân?

$$\ldots\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z,\ldots)dx\,dy\,dz\ldots =$$
$$\ldots\int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} g(r,\theta,\phi,\ldots)J(r,\theta,\phi,\ldots)dr\,d\theta\,d\phi\ldots$$

⇨ 2 tích phân này đều giới hạn những phần không gian = nhau và hình dạng f(x, y, z, …) tương đương hình dạng g(r, θ, ϕ, …) trong không gian

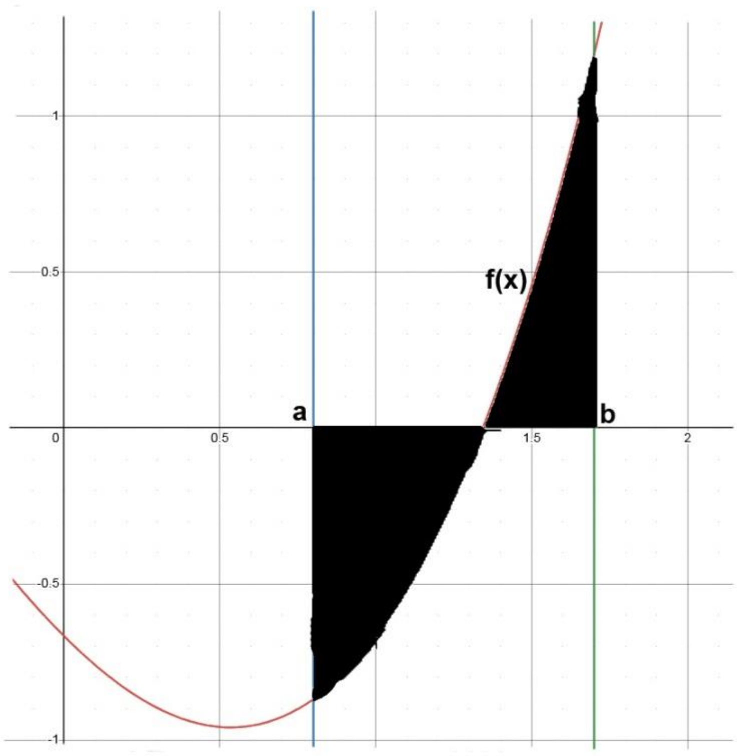
⇨ J(r, θ, ϕ, …) là định thức của ma trận Jacobian khi chuyển từ hệ tọa độ Descartes với trục r, θ, ϕ, … sang hệ tọa độ Descartes với trục x, y, z, …, có tác dụng Scale drdθdϕ… để nó có giá trị đúng trong hệ tọa độ Descartes với trục x, y, z, … thay vì là diện tích của hình dạng chữ nhật trong hệ tọa độ Descartes với trục r, θ, ϕ, …

13. Tính Thể Tích Và Diện Tích Khối Tròn Xoay Khi Quay Đồ Thị Quanh Trục Hoành Và Trục Tung?

⇨ Thể tích khi quay quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

⇨ Lưu ý, phần tô đen là phần quay, mọi hàm với a < b



⇨ Nếu phần xoay là giữa 2 đường mà chẳng may có Overlap thì phần nhỏ hơn không tính

⇨ Cũng dùng phần tô đen này, quay quanh trục tung, mọi hàm với 0 < a < b

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$$

⇨ Giả sử ta có phương trình tham số của x và y theo thời gian t, t có giá trị từ a tới b, a < b, khi đó ta tính được diện tích bề mặt xung quanh của mặt tròn xoay với đường sinh là đồ thị hàm số, quay quanh trục hoành, áp dụng mọi quỹ đạo

$$S = 2\pi \int_a^b |y(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

⇨ Quay quanh trục tung thì coi x là y, y là x

Graph – Đồ Thị:

1. 1 Hàm Chẵn Nhân 1 Hàm Lẻ Ra?
- ⇨ Hàm lẻ
2. Diện Tích Của Hàm Lẻ?
- ⇨ Tích phân từ –∞ đến ∞ của hàm lẻ = 0
3. Diện Tích Hàm Điều Hòa Có Vị Trí Cân Bằng = 0?
- ⇨ Coi tích phân từ –∞ đến ∞ của hàm này = 0
4. Muốn Dùng 1 Ma Trận Biến Đổi 1 Đồ Thị?
- ⇨ Giả sử ta muốn dùng ma trận M biến mỗi điểm A trên đồ thị thành điểm MA, cho phương trình đồ thị là f(x, y, z, …) = 0, khi đó thay x = x', y = y', z = z' sao cho
- ⇨ $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \dots \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{pmatrix}$$

Multi Variable Calculus – Giải Tích Đa Biến:

1. Gradient?
- ⇨ Hướng đi làm cho hàm số tăng giá trị nhanh nhất
2. Tính Gradient?

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \dots \end{pmatrix} f$$

- ⇨ f là hàm số muốn tính Gradient
3. Đạo Hàm Có Hướng?
- ⇨ Đạo hàm có hướng của hàm số nào đó là tốc độ thay đổi giá trị của nó khi đi theo 1 hướng nào đó
4. Vi Phân Nhiều Biến?
- ⇨ Cho f là 1 hàm của các biến x, y, …, khi này vi phân cấp n của f là

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \cdots\right)^n f$$

- ⇨ Ví dụ vi phân cấp 2 của hàm 2 biến x, y

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

- ⇨ Để tính nhanh vi phân cấp 2 của hàm f(x, y) tại điểm (x_0, y_0), thực hiện các bước sau
- ⇨ Bước 1, tính đạo hàm của f theo x, được g
- ⇨ Bước 2, thế y trong g thành y_0, dùng CASIO tính đạo hàm của nó tại x = x_0, được hệ số dx^2
- ⇨ Bước 3, thế x trong g thành x_0, dùng CASIO tính đạo hàm của nó tại y = y_0, nhân thêm 2 được hệ số dxdy

- ⇨ Bước 4, thế x trong f thành x_0, rồi tính đạo hàm của nó, được h, dùng CASIO tính đạo hàm của h tại y = y_0, được hệ số dy^2
- ⇨ Giả sử có phương trình f(x, y, …, w, z) = 0, trong đó z là biến phụ thuộc các biến còn lại, ta có vi phân của z là

$$dz = -\frac{f_x' dx + f_y' dy + \dots + f_w' dw}{f_z'}$$

- ⇨ Giả sử dz = fdx + gdy + … + hdw, f, g, …, h là các hàm theo x, y, …, w, z, khi này f tương đương dz / dx, g tương đương dz / dy, …, h tương đương dz / dw, do đó để từ biểu thức này ra được $d^n z$, ta chỉ cần áp dụng công thức vi phân tổng quát, và từ f, g, …, h, ta đạo hàm chúng nhiều lần để ra hệ số tương ứng

5. Tính Đạo Hàm Có Hướng?

$$\nabla_v f = \frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \ \cdot \hat{v}$$

- ⇨ f là hàm số muốn tính đạo hàm
- ⇨ v là Vector chỉ hướng tính đạo hàm, khi đi theo hướng của Vector này với quãng đường đi = 1 đơn vị, thì hàm sẽ tăng thêm 1 lượng xấp xỉ đạo hàm có hướng tương ứng
- ⇨ Dễ thấy, nếu bạn đi theo hướng vuông góc với Gradient thì giá trị hàm số sẽ không tăng, vì tích vô hướng của 2 Vector vuông góc = 0
- ⇨ Đạo hàm có hướng theo hướng của Gradient = chiều dài của Gradient
- ⇨ Cho u và v là 2 Vector mà ta đã biết đạo hàm theo hướng của chúng, khi này đạo hàm theo hướng của Vector w = au + bv, a và b là số thực, là

$$\nabla_w f = \frac{1}{|w|}(a|u|\nabla_u f + b|v|\nabla_v f)$$

6. Tính Đạo Hàm Khi Không Chỉ Rõ Hàm?

- ⇨ Cho phương trình F(x, y, z, …, m) = 0, trong đó m là biến phụ thuộc vào các biến còn lại, ta cần tìm đạo của m theo 1 biến nào đó, giả sử biến này là x

$$m_x' = -\frac{F_x'}{F_m'}$$

- ⇨ Được phép biểu diễn đạo hàm của m theo cả x, y, z, … và m
- ⇨ Ví dụ xét phương trình sau

$$x^2 + y^3 + e^z - xy + 2z + 1 = 0$$

- ⇨ Trong đó z là biến phụ thuộc vào x và y, tìm đạo hàm của z theo y

$$z_y' = -\frac{3y^2 - x}{e^z + 2}$$

- ⇨ Từ đạo hàm cấp 1 này, ta có thể lấy đạo hàm 2 vế 1 lần nữa để ra đạo hàm cấp 2, 3, …

7. Divergence Là Gì?

- ⇨ Trong 1 trường Vector mà coi nó như 1 dòng chảy, Divergence tại 1 điểm là mức độ dòng chạy tỏa ra mọi hướng tại điểm đó

8. Tính Divergence?

$$\nabla \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \dots \end{pmatrix} \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \cdots$$

- ⇨ A là trường Vector

9. Curl Là Gì?

- ⇨ Trong 1 trường Vector mà coi nó như 1 dòng chảy, Curl tại 1 điểm là mức độ xoáy của dòng chảy tại điểm đó

10. Tính Curl?

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \dots \end{pmatrix} \times A$$

- ⇨ Trong không gian 2D

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

- ⇨ Trong không gian 3D

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

11. Toán Tử Laplacian?

- ⇨ Trường hợp áp dụng lên trường vô hướng, là Divergence của Gradient của trường vô hướng đó, giả sử trường vô hướng đó là f, f là hàm của các biến x, y, z, …

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \cdots$$

- ⇨ Trường hợp áp dụng lên trường Vector 3D, thì lấy toán tử Laplace áp dụng lên từng phần tử

$$\nabla^2 A = \begin{pmatrix} \nabla^2 A_x \\ \nabla^2 A_y \\ \nabla^2 A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

12. Đạo Hàm Cấp 1 Của Hàm Ánh Xạ Vector Tới Vector Là Ma Trận Jacobian?

- ⇨ Bản chất đạo hàm của hàm vô hướng f(x) chỉ là 1 dạng đặc biệt của ma trận Jacobian, nếu 1 hàm f có m biến, trả về n giá trị, thì khi đó đạo hàm của hàm này là ma trận Jacobian n x m
- ⇨ Bản chất của Gradient cũng chỉ là ma trận Jacobian 1 x m được Transpose
- ⇨ Giả sử hàm f như sau

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

- ⇨ Ma trận Jacobian của hàm f

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

⇨ Ví dụ

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 z + 3 \end{pmatrix}$$
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 2xz & 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

⇨ Tại điểm có tọa độ (1, 4, 3)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ 1 ví dụ khác, 1 Vector ánh xạ vào chính nó sẽ có ma trận Jacobian là Identity

13. Đạo Hàm Cấp 2 Của Hàm Ánh Xạ Vector Tới Đại Lượng Vô Hướng Là Ma Trận Hessian?

⇨ Tương tự như ma trận Jacobian, ma trận Hessian mới là đạo hàm cấp 2 tổng quát cho hàm đa biến có giá trị vô hướng

⇨ Giả sử có hàm f(x_1, x_2, x_3, …, x_m), ma trận Hessian của hàm này là

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_m} \end{pmatrix}$$

⇨ Ví dụ

$$f(x,y,z) = 3xz^3 + y^4 + yz + 5$$
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9z^2 \\ 0 & 12y^2 & 1 \\ 9z^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Tại điểm có tọa độ (1, 2, 3)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 81 \\ 0 & 48 & 1 \\ 81 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Đạo Hàm Cấp Cao Hơn?

⇨ Những đạo hàm này là những Tensor 3 chiều, 4 chiều, … rất phức tạp nên không dùng tới

15. Thông Lượng (Flux)?

⇨ Cho 1 bề mặt S trong không gian 3D, và 1 trường Vector F, khi đó thông lượng của F đi qua S được tính như sau

$$\Phi = \iint_S F \cdot dS$$

⇨ Công thức trên nghĩa là tại mỗi vùng rất nhỏ trên S ta lấy tích vô hướng của F với Vector pháp tuyến tại đó với chiều dài = diện tích của vùng đó, rồi cộng tất cả lại

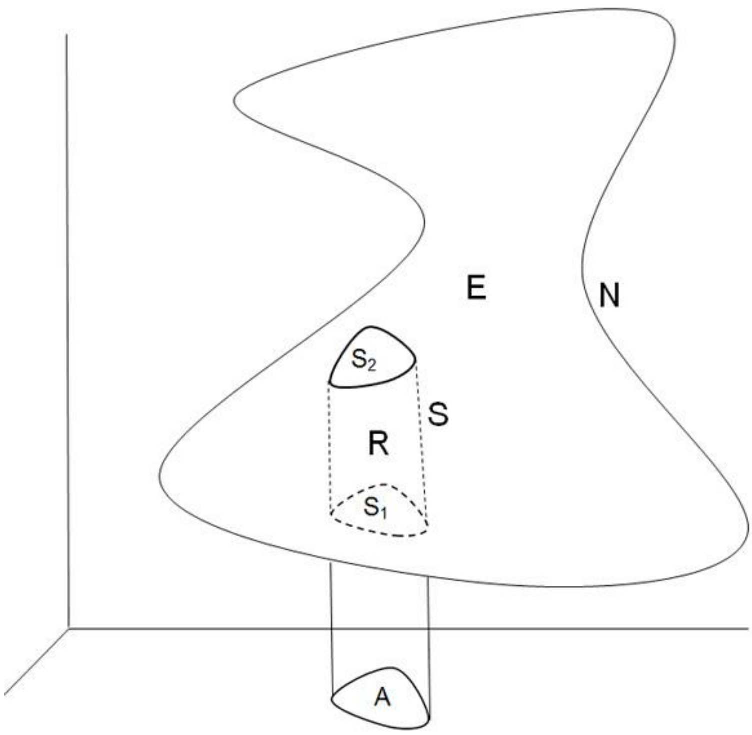
16. Định Lí Divergence?

⇨ Cho 1 vật thể kín, đặt trong không gian với trường Vector F, khi đó thông lượng của F qua bề mặt S của vật thể = tổng Divergence của F trong miền không gian R được bao bởi vật thể

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_R \nabla \cdot F dV$$

⇨ Chứng minh

⇨ Cho vật thể sau



⇨

⇨ Dễ thấy chỉ cần ta chứng minh được định lí Divergence đúng với miền không gian R được bao bởi bề mặt S thì chắc chắn định lí Divergence cũng đúng với miền không gian E được bao bởi bề mặt N, vì E có thể được chia thành tổng của nhiều miền không gian con và những chỗ tiếp xúc của các miền không gian con, thông lượng sẽ triệt tiêu nhau

⇨ Trường Vector F được phân tích thành tổng của 3 trường Vector là P // Ox, Q // Oy, M // Oz, ta tính theo Oz trước, độ lớn của M tại 1 điểm được cho bởi hàm h(x, y, z), bề mặt S_1 được cho bởi hàm $g_1(x, y)$, S_2 là $g_2(x, y)$

$$\iint_S M \cdot dS = \iint_{S_1} M \cdot dS_1 + \iint_{S_2} M \cdot dS_2 =$$
$$-\iint_A h(x, y, g_1(x, y))dA + \iint_A h(x, y, g_2(x, y))dA =$$
$$\iint_A \Big(h(x, y, g_2(x, y)) - h(x, y, g_1(x, y))\Big)\, dA = \iint_A h(x, y, z)|_{z = g_1(x,y)}^{z = g_2(x,y)} dA =$$
$$\iiint_R \frac{\partial h}{\partial z} dV = \iiint_R \frac{\partial F_z}{\partial z} dV$$

⇨ Áp dụng cho toàn bộ vật thể

$$\iint_N M \cdot dN = \iiint_E \frac{\partial F_z}{\partial z} dV$$

⇨ Đối với P và Q cũng tương tự, chỉ cần thay đổi vai trò của x, y, z, rồi lấy tổng

$$\iint_N F \cdot dN = \iint_N P \cdot dN + \iint_N Q \cdot dN + \iint_N M \cdot dN =$$
$$\iiint_E \frac{\partial F_x}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial F_y}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial F_z}{\partial z} dV = \iiint_E \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV = \iiint_E \nabla \cdot F dV$$

17. Tiếp Tuyến?

⇨ Cho phương trình $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, khi này tiếp tuyến bậc n – 1 tại 1 điểm $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thỏa mãn phương trình trên trong không gian R^n là

$$(x_1 - a_1)f'_{x_1} + (x_2 - a_2)f'_{x_2} + \cdots + (x_n - a_n)f'_{x_n} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n}(x_i - a_i)f'_{x_i} = 0$$

⇨ Còn đường thẳng pháp tuyến tại điểm này là

$$\frac{x_1 - a_1}{f'_{x_1}} = \frac{x_2 - a_2}{f'_{x_2}} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{f'_{x_n}}$$

- ⇨ Cho mặt cong z = f(x, y), khi này phương trình của mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm (x_0, y_0, z_0) là

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x + (y - y_0)f'_y$$

- ⇨ Vector pháp tuyến của mặt này

$$n = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

- ⇨

Line Integral – Tích Phân Đường:

1. Trường Vector Bảo Toàn (Conservative Vector Field)?
   - ⇨ Là trường Vector mà bản thân nó là Gradient của 1 hàm nào đó
2. Định Lí Cơ Bản Của Tích Phân Đường?
   - ⇨ Cho 1 chất điểm chuyển động trong không gian theo đường cong C từ A đến B, dưới tác dụng của 1 trường Vector F bảo toàn, hay F là Gradient của f, thì công mà F tác dụng không phụ thuộc vào hình dạng của C mà chỉ phụ thuộc vào vị trí A và B

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

   - ⇨ dr là 1 hướng đi rất nhỏ tiếp tuyến với đường đi
   - ⇨ Chứng minh
   - ⇨ Gọi thời điểm xuất phát từ A là a, dừng chân tại B là b

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b \nabla f \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b \nabla_v f dt, v = \frac{dr}{dt}$$

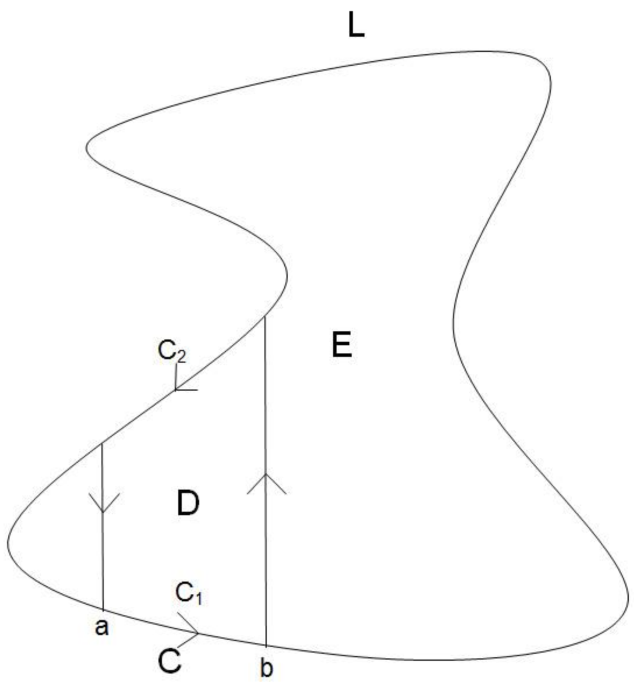
   - ⇨ Dễ thấy đây là đạo hàm có hướng, nên

$$\int_a^b \nabla_v f dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(r(t)\big) dt = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big) = f(B) - f(A)$$

   - ⇨ Tích phân đường còn gọi là lưu số
3. Định Lí Green Về Tích Phân Đường Của 1 Đường Cong Kín?
   - ⇨ Trong hệ tọa độ Oxy với trường Vector F, cho đường cong kín C, D là miền được bao bởi C, khi đó

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \nabla \times F dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dA$$

   - ⇨ Chứng minh
   - ⇨ Cho đường cong sau



⇨

⇨ Dễ thấy chỉ cần ta chứng minh được định lí Green đúng với đường cong con C thì chắc chắn định lí Green cũng đúng với đường cong L, vì L có thể được chia thành tổng của nhiều đường cong con và những chỗ tiếp xúc của các đường cong con, tích phân đường sẽ triệt tiêu nhau

⇨ Trường Vector F được phân tích thành tổng của 2 trường Vector là P có phương ngang và Q có phương dọc, ta tính theo phương ngang trước, giả sử phần đường cong C_1 có hàm $h_1(x)$, phần đường cong C_2 có hàm $h_2(x)$, ta có

$$\oint_C P\cdot dr = \oint_{C_1} P\cdot dr + \oint_{C_2} P\cdot dr = \oint_a^b P\big(x,h_1(x)\big)\cdot dx - \oint_a^b P\big(x,h_2(x)\big)\cdot dx =$$
$$\oint_a^b \Big(P\big(x,h_1(x)\big) - P\big(x,h_2(x)\big)\Big)\cdot dx = \oint_a^b P(x,y)\Big|_{y=h_2(x)}^{y=h_1(x)}\cdot dx =$$
$$\int_a^b\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\cdot dx = \int_a^b\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} \frac{\partial F_x}{\partial y}dydx = -\int_a^b\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial F_x}{\partial y}dydx = -\iint_D \frac{\partial F_x}{\partial y}dA$$

⇨ Áp dụng cho L

$$\oint_L P\cdot dr = -\iint_E \frac{\partial F_x}{\partial y}dA$$

⇨ Tương tự với phương dọc, ta chỉ cần hoán đổi vai trò của x và y là xong, tuy nhiên, khi làm vậy thì để ý, chiều di chuyển của chất điểm trên đường cong bị đổi chiều thành cùng chiều kim đồng hồ, do đó ta phải đổi dấu

$$\oint_L Q\cdot dr = \iint_E \frac{\partial F_y}{\partial x}dA$$

⇨ Do đó

$$\oint_L F\cdot dr = \oint_L P\cdot dr + \oint_L Q\cdot dr = -\iint_E \frac{\partial F_x}{\partial y}dA + \iint_E \frac{\partial F_y}{\partial x}dA = \iint_E \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dA$$

4. Định Lí Stoke Về Tích Phân Đường Của 1 Đường Cong Kín?

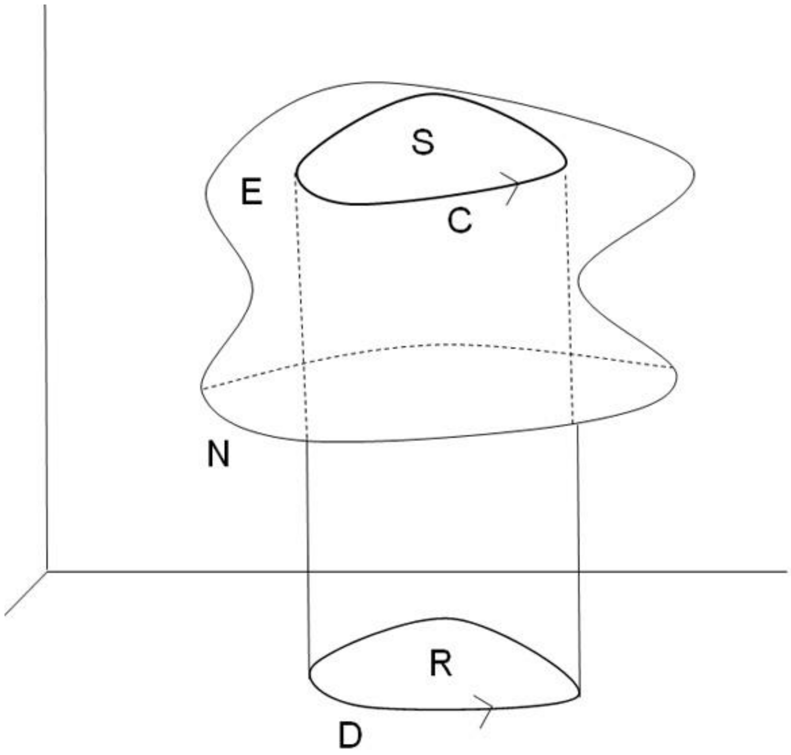
⇨ Định lí Stoke là mở rộng của định lí Green ra không gian 3D

⇨ Cho đường cong kín C trong không gian 3D với trường Vector F, S là bề mặt bất kì có biên là C, khi đó

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S (\nabla\times F)\cdot dS$$

⇨ Nghĩa là công của F tác dụng lên chất điểm khi nó đi theo C đúng 1 vòng ngược chiều kim đồng hồ = tổng Curl của F trên S, tổng này tính được = cách lấy tích vô hướng của Curl tại mỗi khu vực rất nhỏ trên S với dS là Vector pháp tuyến tại khu vực đó, Vector này có độ dài = diện tích khu vực đó, rồi cộng hết vào

- ⇨ Dễ thấy F là 1 trường Vector bảo toàn trên S chỉ khi tổng Curl của F trên S = 0
- ⇨ Chứng minh
- ⇨ Cho bề mặt sau



- ⇨
- ⇨ Dễ thấy chỉ cần ta chứng minh được định lí Stoke đúng với bề mặt con S thì chắc chắn định lí Stoke cũng đúng với bề mặt E, vì E có thể được chia thành tổng của nhiều bề mặt con và những chỗ tiếp xúc của các bề mặt con, tích phân đường sẽ triệt tiêu nhau
- ⇨ Trường Vector F có 3 thành phần là P, Q, M tương ứng với hoành, tung, cao, bề mặt S được cho bởi hàm z(x, y), giả sử chất điểm di chuyển trên C đúng 1 vòng ngược chiều kim đồng hồ, thời gian xuất phát là t = a, dừng lại là t = b, ta có

$$\oint_C F \cdot dr = \int_a^b F \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b \begin{pmatrix} P \\ Q \\ M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz(x(t), y(t))}{dt} \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + M \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right) dt =$$

$$\int_a^b \left(\left(P + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + M \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right) dt =$$

$$\oint_D \left(\left(P + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + M \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right), (*)$$

- ⇨ Như vậy, ta đã chuyển từ tích phân đường trên C thành trên D, vì D là đường cong 2D, nên ta có thể áp dụng định lí Green

$$(*) = \iint_R^{\cdot} \left(\frac{\partial\left(Q + M\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + M\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} \right) dA =$$

$$\iint_R^{\cdot} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + M\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + M\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \end{pmatrix} dA =$$

$$\iint_R^{\cdot} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) \right) dA =$$

$$\iint_R^{\cdot} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) \right) dA =$$

$$\iint_R^{\cdot} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA =$$

$$\iint_R^{\cdot} \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_R^{\cdot} (\nabla \times F) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \right) dA = \iint_S^{\cdot} (\nabla \times F) \cdot dS$$

⇨ Mở rộng ra bề mặt E

$$\oint_N^{\cdot} F \cdot dr = \iint_E^{\cdot} (\nabla \times F) \cdot dE$$

Lagrange Multiplier – Nhân Tử Lagrange:

1. Phương Pháp Nhân Tử Lagrange Dùng Để Làm Gì?

⇨ Dùng để tìm cực trị của 1 hàm với điều kiện phải thỏa mãn 1 phương trình nào đó

⇨ Hàm cần tìm cực trị gọi là hàm mục tiêu, phương trình cần thỏa mãn gọi là điều kiện ràng buộc

2. Cơ Chế Hoạt Động?

⇨ Gọi hàm mục tiêu là f(x), x là Vector, phương trình mà x cần phải thỏa mãn là g(x) = 0, gọi đồ thị g(x) = 0 là C, giả sử ta đang đứng ở điểm A trên C, nếu bạn đi theo tiếp tuyến nào đó với C tại điểm này, giá trị của g(x) không đổi, nghĩa là đạo hàm có hướng của g(x) với hướng là tiếp tuyến, sẽ có giá trị = 0, mà đạo hàm có hướng là tích vô hướng giữa Gradient và hướng đi, nên trong trường hợp này Gradient của g(x) tại A phải vuông góc với mọi tiếp tuyến tại A

⇨ Ví dụ, C là hình cầu, Gradient của g(x) tại 1 điểm nào đó trên C sẽ vuông góc với mặt phẳng tiếp tuyến với C tại điểm này

⇨ Giả sử A là điểm làm f(x) đạt cực đại, khi đó, ta có đi theo tiếp tuyến nào với C tại A thì f(x) cũng không tăng, nói cách khác, Gradient của f(x) tại A vuông góc với mọi tiếp tuyến với C tại A, mà Gradient của g(x) tại A cũng vuông góc với chúng, dễ thấy Gradient của g(x) bắt buộc phải cùng hướng với Gradient của f(x) tại A

⇨ Điều trên cho thấy, chỉ cần ta tìm được điểm nào đó trên C sao cho Gradient của g(x) cùng hướng với Gradient của f(x) thì đó là điểm cực trị

⇨ Mở rộng ra nhiều điều kiện cần phải thỏa mãn thì ta chỉ cần giới hạn lại C

3. Công Thức Nhân Tử Lagrange?

⇨ Giả sử f(x) là hàm mục tiêu, x là Vector n chiều, x phải thỏa mãn phương trình g(x) = 0, g(x) là hàm trả về Vector m chiều, nói cách khác là ta đang sử dụng nhiều điều kiện, x_m là điểm tối ưu nhất, khi đó tồn tại duy nhất 1 nhân tử Lagrange λ là Vector m chiều sao cho

$$J_f(x_m) = \lambda^T J_g(x_m)$$

⇨ $J_f(x_m)$ là ma trận Jacobian của f(x) tại x_m

⇨ $J_g(x_m)$ là ma trận Jacobian của g(x) tại x_m

4. Trường Hợp 1 Điều Kiện?

⇨ Cho hàm f(x, y, …, z) là hàm mục tiêu, g(x, y, …, z) = 0 là điều kiện ràng buộc

⇨ Bước 1, lập hàm Lagrange L

$$L(x, y, \dots, z, \lambda) = f(x, y, \dots, z) + \lambda g(x, y, \dots, z)$$

⇨ Bước 2, lập phương trình Gradient của L = 0

$$\nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ \dots \\ f'_z + \lambda g'_z = 0 \\ g(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f = -\lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

⇨ Bước 3, giải hệ này, ta được các điểm dừng của L

⇨ Bước 4, kiểm tra từng điểm dừng một xem nó là cực đại, cực tiểu, hay điểm yên ngựa bằng ma trận H là Hessian của L tại điểm đó, nếu H bán xác định dương thì cực tiểu, bán xác định âm thì cực đại, không xác định thì điểm yên ngựa, nếu cực đại thì điểm tương ứng của f cũng cực đại, ví dụ điểm (2, 5, 3) là cực đại của L thì (2, 5) là cực đại của f với điều kiện g = 0, tương tự cực tiểu và điểm yên ngựa

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y & \dots & g'_z \\ g'_x & f''_{xx} + \lambda g''_{xx} & f''_{xy} + \lambda g''_{xy} & \dots & f''_{xz} + \lambda g''_{xz} \\ g'_y & f''_{xy} + \lambda g''_{xy} & f''_{yy} + \lambda g''_{yy} & \dots & f''_{yz} + \lambda g''_{yz} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g'_z & g'_z & g'_z & \dots & f''_{zz} + \lambda g''_{zz} \end{pmatrix}$$

⇨ Cách khác là sử dụng vi phân

⇨ Giả sử ta đang xét điểm dừng (x_0, y_0, …, z_0, λ_0)

⇨ Nếu $d^2L(x_0, y_0, \dots, z_0) > 0$ trong lân cận điểm dừng này thì cực tiểu, < 0 thì cực đại, = 0 thì chưa kết luận được điều gì

⇨ Ví dụ

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2, g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

⇨ Hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

⇨ Hệ phương trình Gradient

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda = 0 \\ 4y + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = \pm 1, \lambda = -2 \\ x = \pm 1, y = 0, \lambda = -1 \end{array}\right.$$

⇨ Xét điểm (x, y, λ) = (0, 1, –2)

$$d^2L = (2x + 2x\lambda)'_x dx^2 + 2(2x + 2x\lambda)'_y dxdy + (4y + 2y\lambda)'_y dy^2 =$$
$$(2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2 = -2dx^2$$

⇨ Tiếp theo ta cần xác định hướng đi hợp lệ, là hướng đi thỏa mãn g vẫn = 0, nghĩa là không làm thay đổi giá trị của g

$$dg(0,1,-2) = 0 \Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \Leftrightarrow 2dy = 0 \Leftrightarrow dy = 0$$

- ⇨ Như vậy, khi di chuyển dọc theo g = 0, thì y không thay đổi, do đó x phải thay đổi, nên $dx^2 > 0$, nên $d^2L = -2dx^2 < 0$, do đó (0, 1) là điểm cực đại
- ⇨ Tương tự với các điểm còn lại

Curve – Đường Cong:

1. Kí Hiệu?

- ⇨ Cho 1 chất điểm đứng yên, bỗng dưng chuyển động theo 1 quỹ đạo cong keo trong không gian, xét tại 1 thời điểm điểm
- ⇨ Vector vị trí là r
- ⇨ Vector vận tốc là v
- ⇨ Vector gia tốc a
- ⇨ Vector gia tốc tiếp tuyến la a_T
- ⇨ Vector gia tốc pháp tuyến la a_N
- ⇨ Bán kính đường tròn tiếp xúc là R
- ⇨ Độ cong là K
- ⇨ Độ lớn quãng đường đi được cho đến hiện tại là s
- ⇨ Thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động đến bây giờ là t
- ⇨ Vector vận tốc góc là ω
- ⇨ Vector gia tốc góc là β
- ⇨ Các công thức sơ khai sau mặc định đúng

$$\frac{dT}{dt} = |\omega|N$$
$$\frac{ds}{dt} = |v|$$
$$v = R(N \times \omega)$$
$$a_T = R(N \times \beta) = \frac{d|v|}{dt}T$$
$$a_N = \omega \times v = R|\omega|^2 N = \frac{|v|^2}{R}N$$

- ⇨ Vận tốc góc có tính chất cộng Vector, nghĩa là theo điểm nhìn của B, vật A đang quay quanh B với vận tốc góc ω_1, theo điểm nhìn của C, vật B đang quay quanh C với vận tốc góc ω_2, thì vận tốc góc của A theo điểm nhìn của C = $\omega_1 + \omega_2$

2. Thành Phần Tiếp Tuyến (Tangential) Và Thành Phần Pháp Tuyến (Normal) Của Gia Tốc Tại 1 Điểm?

- ⇨ Gia tốc tại 1 điểm được chia thành 2 thành phần là tiếp tuyến và pháp tuyến
- ⇨ Thành phần tiếp tuyến của gia tốc, hay gia tốc tiếp tuyến, có chiều dài chính là tốc độ thay đổi chiều dài của Vector vận tốc, Vector gia tốc tiếp tuyến cùng phương Vector vận tốc
- ⇨ Thành phần pháp tuyến của gia tốc, hay gia tốc pháp tuyến, có chiều dài chính là tốc độ thay đổi hướng của Vector vận tốc, Vector gia tốc pháp tuyến vuông góc Vector vận tốc

3. Vector Tiếp Tuyến Đơn Vị (Unit Tangent Vector), Vector Pháp Tuyến Đơn Vị (Unit Normal Vector), Vector Phó Pháp Tuyến (Binormal Vector)?

- ⇨ Vector tiếp tuyến đơn vị = gia tốc tiếp tuyến chuẩn hóa
- ⇨ Vector pháp tuyến đơn vị = gia tốc pháp tuyến chuẩn hóa
- ⇨ Vector phó pháp tuyến = tích có hướng của Vector tiếp tuyến đơn vị với Vector pháp tuyến đơn vị

- Dễ thấy Vector phó pháp tuyến vuông góc với cả T và N, đặc trưng cho chiều chuyển động của chất điểm là ngược hay cùng chiều kim

4. Đường Tròn Tiếp Xúc?

- Xét 1 điểm trên đường cong, tìm 1 đường tròn đi qua điểm đó sao cho nó khít nhất với đường cong, đường tròn này là đường tròn tiếp xúc
- Tính bán kính đường tròn tiếp xúc

$$R = \frac{|v|^2}{|a_N|}$$

- Giả sử người ta cho phương trình y = f(x), để tìm R tại 1 điểm, sử dụng công thức

$$R = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}$$

- Tính độ cong tại điểm này

$$K = \frac{1}{R}$$

- Dễ thấy nếu gia tốc pháp tuyến càng thay đổi nhanh, nghĩa là vật di chuyển càng lắc léo, độ cong càng lớn, bán kính đường tròn tiếp xúc càng nhỏ
- Chuyển động tròn là chuyển động mà bán kính đường tròn tiếp xúc như nhau tại mọi thời điểm

5. Chuyển Động Của Con Lắc Đơn?

- Giả sử dây không co dãn, thì do chuyển động này tròn, nên phải có lực hướng tâm, do đó lực căng dây hướng vào tâm phải > thành phần trọng lực theo phương dây
- Công thức lực căng đây tại thời điểm hiện tại, với θ là góc hợp giữa dây và phương thẳng đứng tại thời điểm hiện tại, chiều dương từ phải qua trái, góc ban đầu là θ_0, s_C là chu vi cung tính từ vị trí thả đến vị trí hiện tại, g là Vector gia tốc trọng trường, r là độ dài dây, a_C là Vector gia tốc ứng với lực căng dây, lưu ý ở đây |v| có dấu, ban đầu = 0, C là 1 hằng số nào đó

$$|F_C| = m|a_C| = m|g|\big(3cos(\theta) - 2cos(\theta_0)\big)$$

- Chứng minh
- Dễ thấy vật chỉ chịu tác dụng của 2 lực là trọng lực và lực căng dây, phân tích gia tốc trọng trường thành 2 thành phần, theo phương dây và theo phương chuyển động
- Thành phần theo phương dây

$$|g_N| = |g|cos(\theta)$$

- Thành phần theo phương chuyển động

$$|g_T| = |g|sin(\theta) = |a_T|$$

- Ta có

$$\theta = \theta_0 + \frac{s_C}{r} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds_C}{dt} = -\frac{|v|}{r}$$

$$\frac{d|v|}{d\theta} = \frac{\frac{d|v|}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{|g_T|}{-\frac{|v|}{r}} \Rightarrow |v|\frac{d|v|}{d\theta} = -|g|rsin(\theta) \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{|v|^2}{2}\right) = -|g|rsin(\theta) \Rightarrow$$

$$|v|^2 = 2|g|rcos(\theta) + C$$

- Theo như điều kiện ban đầu, ta tính được

$$C = -2|g|rcos(\theta_0)$$

- Vậy

$$|v|^2 = 2|g|r\big(cos(\theta) - cos(\theta_0)\big)$$

⇨ Ta có

$r = \frac{\lvert v\rvert^2}{\lvert a_N\rvert} = \frac{\lvert v\rvert^2}{\lvert a_C\rvert - \lvert g_N\rvert} = \frac{2\lvert g\rvert r\left(cos(\theta) - cos(\theta_0)\right)}{\lvert a_C\rvert - \lvert g\rvert cos(\theta)} \Rightarrow \lvert a_C\rvert = \lvert g\rvert\left(3cos(\theta) - 2cos(\theta_0)\right)$

⇨ Giả sử 1 con lắc đơn đang đứng yên trong trọng trường không có không khí, ta truyền cho nó 1 vận tốc v_0 vuông góc dây treo sang bên phải, để vật có thể quay được 1 vòng mà không bị lỏng dây, thì khi vật ở điểm cao nhất, gia tốc hướng tâm phải > gia tốc trọng trường, để làm được điều này

$\lvert v_0\rvert \geq \sqrt{5\lvert g\rvert r}$

⇨ Cũng tình huống trên, chiều dương tính góc θ ngược chiều kim đồng hồ, mốc tính góc là vị trí vật thả lỏng, thì công thức tính tốc độ của vật tại góc bất kì y chang bên trên, chỉ cần thay "cos(θ_0))" thành "1) + $|v_0|^2$", còn lực căng dây thì thành "1) + m$|v_0|^2$ / r"

⇨ Cũng tình huống trên, 1 cách tổng quát, ta truyền cho con lắc tốc độ $(kgr)^{0.5}$, k là 1 số dương

⇨ Trường hợp 1, k từ 0 đến 2, con lắc quay đến độ cao kr / 2 so với vị trí ban đầu thì đổi chiều

⇨ Trường hợp 2, k từ 2 đến 5, con lắc quay đến vị trí mà dây hợp với phương ngang góc arcsin((k – 2) / 3) thì bị lỏng và con lắc tiếp tục di chuyển với tốc độ đầu = $((k – 2)gr / 3)^{0.5}$ theo hướng hiện tại, trọng trường sẽ kéo nó xuống

⇨ Trường hợp 3, k từ 5 trở lên, con lắc quay 1 vòng không sao

6. Độ Lớn Quãng Đường Đi Được?

⇨ a và b là thời gian bắt đầu chạy và kết thúc chạy, a < b

$s = \int_a^b \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$

7. Cực Trị, Điểm Uốn Của Đường Cong?

⇨ Cho đường cong với phương trình tham số nào đó trong mặt phẳng 2D

⇨ Cực trị mượt là điểm mà Vector vận tốc nằm ngang

⇨ Điểm uốn mượt là điểm mà Vector vận tốc cùng phương Vector gia tốc

8. Cycloid?

⇨ Cho 1 bánh xe bán kính r lăn không trượt, khi đó quỹ đạo của 1 điểm trên vành bánh tạo thành hình Cycloid

⇨ Quãng đường 1 điểm trên vành bánh đi được trong 1 chu kì = 8r

9. Đường Cong Bậc 2?

⇨ Là đường cong trong mặt phẳng 2D có phương trình tổng quát

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

⇨ A, B, C, D, E, F là các số thực

⇨ A, B, C không được = 0 hết

⇨ Biểu diễn bằng ma trận

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$

⇨ Dễ thấy ma trận 2 x 2 ở công thức trên là ma trận Hessian của vế trái phương trình tổng quát

⇨ Sau khi sử dụng các phép biến đổi cứng như quay, tịnh tiến, Flip, mọi phương trình trên đều có thể đưa về 3 dạng chính tắc

⇨ Bước 1, khử xy bằng cách quay đồ thị sang trái θ độ, chiều quay trái = từ Ox đến Oy, sao cho trục của nó song song Oy, khi này phương trình của đồ thị mới là

$x^2\left(Acos^2(\theta) - Bsin(\theta)cos(\theta) + Csin^2(\theta)\right) +$

$$y^2\left(Asin^2(\theta) + Bsin(\theta)cos(\theta) + Ccos^2(\theta)\right) + x\left(Dcos(\theta) - Esin(\theta)\right) + y\left(Dsin(\theta) + Ecos(\theta)\right) + F = 0$$

⇨ Với

$$\theta = \frac{1}{2}arctan\left(\frac{B}{C - A}\right)$$

⇨ Bước 2, tịnh tiến để tâm của đồ thị = gốc tọa độ, ta sẽ được 3 dạng sau

⇨ Dạng 1, Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

⇨ a là bán kích theo trục Ox

⇨ b là bán kính theo trục Oy

⇨ Dạng 2, Parabol

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

⇨ a là bán kính theo trục Ox, tức là càng lớn thì càng dãn theo Ox

⇨ Dạng 3, Hyperbol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

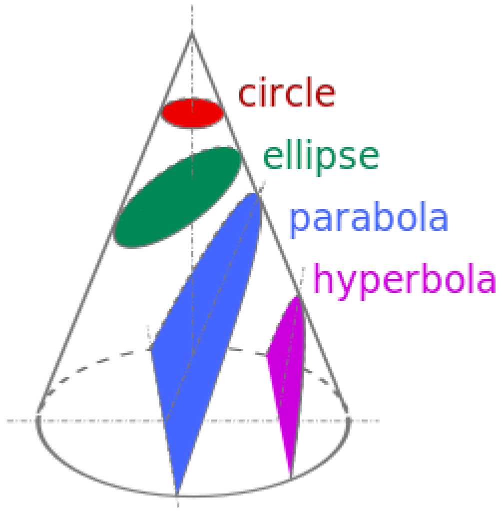
⇨ Hình 2 cái núi đối đỉnh nhau theo trục Ox

⇨ a là bán kính theo trục Ox, tức là hoành độ tại điểm y = 0

⇨ b là bán kính theo trục Oy, tức là càng cao đồ thị càng dãn theo Oy, độ dốc dy / dx tại vô cùng = b / a

⇨ 3 đường Parabol, Hyperbol và Ellipse, còn gọi là 3 đường Conic

⇨ 3 đường Conic còn được tạo ra = giao tuyến của 1 mặt phẳng với 1 hình nón



18. Mặt Cong Bậc 2 (Quadric Surface)?

⇨ Là bề mặt trong không gian 3D có phương trình tổng quát

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

⇨ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J là các số thực

⇨ A, B, C không được = 0 hết

⇨ Biểu diễn bằng ma trận

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2A & D & F \\ D & 2B & E \\ F & E & 2C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$

⇨ Dễ thấy ma trận 3 x 3 ở công thức trên là ma trận Hessian của vế trái phương trình tổng quát

- ⇨ Sau khi sử dụng các phép biến đổi cứng như quay, tịnh tiến, Flip, mọi phương trình trên đều có thể đưa về 17 dạng chính tắc bao gồm cả phức, sau đây là vài dạng thường gặp
- ⇨ Dạng 1, Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- ⇨ a là bán kích theo trục Ox
- ⇨ b là bán kính theo trục Oy
- ⇨ c là bán kính theo trục Oz
- ⇨ Dạng 2, Hyperboloid 1 tầng (One Sheet Hyperboloid Elliptic)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- ⇨ Hình đồng hồ cát, chiều cao dọc theo Oz
- ⇨ a là bán kích theo trục Ox vòng eo
- ⇨ b là bán kính theo trục Oy vòng eo
- ⇨ c là bán kính theo trục Oz, tức là càng lớn thì càng dãn theo Oz
- ⇨ Dạng 3, Hyperboloid 2 tầng (Two Sheets Hyperboloid Elliptic)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- ⇨ Hình 2 cái độn vú đỉnh đầu ti đối nhau theo trục Oz, na ná Hyperbol
- ⇨ c là bán kính theo trục Oz, tức là cao độ của đầu ti
- ⇨ a là bán kính theo trục Ox, tức là càng lớn thì càng dãn theo Ox
- ⇨ b là bán kính theo trục Oy, tức là càng lớn thì càng dãn theo Oy
- ⇨ Dạng 4, nón

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- ⇨ = Hyperboloid 1 tầng nhưng bán kính theo trục Oz = 0
- ⇨ Tại cao độ c, mặt cắt song song Oxy sẽ có dạng Ellipse bán kính theo Ox là a và theo Oy là b
- ⇨ Dạng 5, Paraboloid Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$

- ⇨ Hình cái tô, na ná Parabol
- ⇨ Tại cao độ z = 1, giao tuyến song song Oxy là 1 Ellipse bán kính theo Ox là a và theo Oy là b
- ⇨ Dạng 6, Paraboloid Hyperbolic

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$

- ⇨ Mặt yên ngựa, người ngồi lên thì mặt hướng theo Ox
- ⇨ a là bán kính theo Ox, tức là càng lớn thì càng dãn theo Ox
- ⇨ b là bán kính theo Oy, tức là càng lớn thì càng dãn theo Oy
- ⇨ Dạng 7, mặt trụ Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- ⇨ = Ellipse mở rộng cao vô tận theo Oz
- ⇨ Dạng 8, mặt trụ Hyperbolic

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- ⇨ = Hyperbol mở rộng cao vô tận theo Oz
- ⇨ Dạng 9, mặt trụ Parabolic

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

⇨ = Parabol mở rộng cao vô tận theo Oz

Dirac Delta Function – Hàm Dirac Delta:

1. Hàm Dirac Delta Là Gì?

⇨ Giả sử ban đầu hàm ban đầu có dạng kích xung, tất cả giá trị ngoài khoảng (a, b) đều = 0, và tất cả giá trị trên khoảng (a, b) đều = nhau sao cho diện tích của hàm = 1, thu hẹp khoảng cách giữa a và b, giữ nguyên diện tích, đến khi a trùng b, thì được hàm Dirac Delta

⇨ Hàm Dirac Delta cũng được xem như là 1 hàm phân phối

2. Công Thức Hàm Dirac Delta?

⇨ $\delta_a(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-a)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(a-t)} d\omega$

⇨ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\, dt = 1$

⇨ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\, f(t) dt = f(a)$

3. Chứng Minh Công Thức Của Hàm Dirac Delta?

⇨ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \int_{0}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega =$

⇨ $\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{0}^{\infty} e^{i\omega(t+i\varepsilon)} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega(t-i\varepsilon)} d\omega\right) =$

⇨ $\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\left(\frac{-i}{t+i\varepsilon}\frac{e^{i\omega x}}{e^{\omega\varepsilon}} + \frac{i}{t-i\varepsilon}\frac{e^{-i\omega x}}{e^{\omega\varepsilon}}\right)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{i}{t+i\varepsilon} - \frac{i}{t-i\varepsilon}\right) =$

⇨ $\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{2\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\right)$ (1)

⇨ Dễ thấy đồ thị của (1) giống hàm Direct Delta, lại có

⇨ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} dt = 2arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = 2\pi$

⇨ Vậy

⇨ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta_0(t) \Rightarrow \delta_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \Rightarrow \delta_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-a)} d\omega$

4. Tại Sao Hàm Dirac Delta Là Đạo Hàm Của Hàm Bước?

⇨ Tại vị trí kích xung của Dirac Delta, dễ thấy tích phân ở vị trí đó = 1 = hiệu 1 – 0 là 2 cận của hàm bước, giả sử 2 cận đó tiến sát đến vô cùng tại vị trí kích xung

Fourier Transform – Biến Đổi Fourier:

1. Biến đổi Fourier dùng để làm gì?

⇨ Xử lí tín hiệu theo thời gian thành tín hiệu theo tần số

2. Công Thức Biến Đổi Fourier?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

3. Biến Đổi Fourier Có Độc Nhất Không?

⇨ Có, đây là phép song ánh

4. Nghịch Đảo Của Biến Đổi Fourier?

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

5. Chứng Minh Nghịch Đảo Của Biến Đổi Fourier?

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t\prime}f(t')dt'd\omega =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - t\prime)}f(t')dt'd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - t\prime)}d\omega dt' =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta_t(t')dt' = f\,(t)$$

6. Giải Nghĩa Biến Đổi Fourier?

⇨ f(t) là hàm số theo thời gian, là tín hiệu mà ta muốn phân tích tần số

⇨ F(ω) là hàm số theo tần số góc

⇨ Xét F(ω) trước, do hàm này trả về số phức nên ta có thể coi F(ω) = g(ω) + h(ω)i, thế vào công thức nghịch đảo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (g(\omega) + h(\omega)i)(cos(\omega t) + sin(\omega t)i)d\omega =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big(g(\omega)cos(\omega t) - h(\omega)sin(\omega t)\big)d\omega +$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\big(g(\omega)sin(\omega t) + h(\omega)cos(\omega t)\big)d\omega$$

Do f(t) là hàm có giá trị thực nên tích phân ảo = 0

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big(g(\omega)cos(\omega t) - h(\omega)sin(\omega t)\big)d\omega$$

⇨ Tại đây, ta dễ dàng nhận ra được bản chất của F(ω) thực sự là gì, vâng, phần thực của nó, g(ω), nhân với dω và chia 2π chính bằng hệ số của phần tử cos(ωt) tạo nên f(t), nói cách khác, g(ω) đại diện cho mức độ đóng góp của phần tử cos(ωt), tương tự với h(ω), giá trị âm của nó đại diện cho mức độ đóng góp của phần tử sin(ωt)

⇨ Hơn nữa, đẳng thức trên còn chứng minh rằng, mọi hàm f(t) đều có thể phân tích thành tổng của hàng tỉ hàm Sin và Cos có tần số góc và hệ số khác nhau, miễn là tính được biến đổi Fourier từ f(t) sang F(ω)

7. Hàm Có Tích Phân Tuyệt Đối (Absolutely Integrable Function) Là Gì?

⇨ Cho hàm f(x), khi đó f(x) được gọi là hàm có tích phân tuyệt đối chỉ khi |f(x)| có tích phân hữu hạn trên toàn miền xác định của nó

8. Hàm Nào Có Biến Đổi Fourier?

⇨ Chỉ những hàm có tích phân tuyệt đối mới có biến đổi Fourier, những hàm như hàm Sin, Cos có dãy Fourier nhưng không có biến đổi Fourier vì tích phân của chúng không hội tụ, nói cách khác, nếu hàm số mà áp vào công thức biến đổi Fourier và tính được thì có biến đổi Fourier, ngược lại thì không

9. Thử Tính Biến Đổi Fourier Của Hàm Cos?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(at)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}e^{-i\omega t}dt =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a - \omega)}dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(-a - \omega)}dt\right) = \frac{1}{2}\big(\delta_a(\omega) + \delta_{-a}(\omega)\big)$$

10. Thử Tính Biến Đổi Fourier Của Hàm Sin?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sin(at)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-i\omega t} dt =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a-\omega)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(-a-\omega)} dt\right) = \frac{1}{2i}\left(\delta_a(\omega) - \delta_{-a}(\omega)\right)$$

11. Nếu Cận Của Biến Đổi Fourier Không Phải Vô Cực Thì Sao?

⇨ Giả sử 2 cận của biến đổi Fourier là a và b, khi đó biến đổi Fourier sẽ chỉ phân tích hàm số trên đoạn [a, b], nghĩa là tương đương với biến đổi Fourier với cận vô cực nhưng tất cả các giá trị của hàm số ngoài đoạn [a, b] đều = 0

12. Chứng Minh Chuỗi Fourier Cũng Sản Phẩm Của Biến Đổi Fourier?

⇨ Muốn biểu diễn hàm số dưới tổng các hàm hình Sin thì cách dễ nhất là tính nghịch đảo của biến đổi Fourier

⇨ Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ T, thì ta không thể sử dụng biến đổi Fourier trực tiếp, vì 2 cận không xác định giá trị, thay vào đó, ta sẽ tính từng chu kỳ một

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt =$$
$$\ldots + \int_{-T}^{0} f(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{T}^{2T} f(t)e^{-i\omega t}\,dt + \cdots =$$
$$\ldots + \int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega(t-T)}\,dt + \int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega(t+T)}\,dt + \cdots =$$
$$\left(\ldots + e^{i\omega T} + 1 + e^{-i\omega T} + \cdots\right)\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t} dt =$$
$$(1 + 2cos(\omega T) + 2cos(2\omega T) + \cdots)(g(\omega) + h(\omega)i) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{cos\big((n+1)\omega T\big) - cos(n\omega T)}{cos(\omega T) - 1}(g(\omega) + h(\omega)i)\right), n \in N$$

⇨ Ở dòng thứ 5, dễ thấy khi ωT là bội của 2π thì F(ω) đạt giá trị vô cực, ở dòng thứ 6, dễ thấy đây là những giá trị duy nhất làm được điều này, mà F(ω) đạt vô cực thì nó sẽ lấn át những tần số góc có mức độ đóng góp hữu hạn còn lại, điều này cho thấy, trong f(t) chỉ còn tồn tại những tần số góc này, là những tần số góc ω sao cho ω là bội của T / 2π, và chuỗi các hàm hình Sin với tần số góc là bội của T / 2π sao cho tổng của chúng với Offset = f(t) chính là chuỗi Fourier của f(t)

13. Cách Tìm Chuỗi Fourier?

⇨ Với hàm số có chu kỳ T, chuỗi Fourier có dạng như sau

$$f(t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

⇨ C là Offset

⇨ A_n là hệ số của phần tử Sin

⇨ B_n là hệ số của phần tử Cos

⇨ Để tìm C, tích phân cả 2 vế từ 0 đến T, dễ thấy các hàm Sin và Cos sẽ có tích phân = 0, còn lại C

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T Cdt \Rightarrow C = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

⇨ Để tìm hệ số A_n, ta nhân cả 2 vế với phần tử Sin thứ n rồi lấy tích phân từ 0 đến T, dễ thấy Offset cùng với các hàm Sin và Cos còn lại sẽ có tích phân = 0, còn lại phần tử Sin thứ n

$$\int_0^T f(t)sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt = \int_0^T A_n sin^2\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt = \pi A_n \Rightarrow$$
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

- ⇨ Tương tự với B_n, nhân cả 2 vế với phần tử Cos thứ n rồi lấy tích phân từ 0 đến T

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

Laplace Transform – Biến Đổi Laplace:

1. Biến Đổi Laplace Dùng Để Làm Gì?
- ⇨ Phân tích hàm số theo thời gian thành những hàm hình Sin nhân Exp
2. Tại Sao Dùng Biến Đổi Laplace Thay Cho Biến Đổi Fourier?
- ⇨ Vì có những hàm mà nó không có tích phân tuyệt đối ví dụ như hàm bước, khi đó nếu áp những hàm này vào công thức của biến đổi Fourier thì không ra kết quả, còn với biến đổi Laplace thì được, vì nó nhân những hàm này với 1 hàm mũ giảm, làm cho hàm sinh ra có tích phân tuyệt đối
3. Công Thức Biến Đổi Laplace?

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- ⇨ s là 1 số phức có phần thực là hệ số mũ và phần ảo là tần số góc
- ⇨ f(t) là hàm theo thời gian
4. Tại Sao Cận Của Biến Đổi Laplace Không Phải Là Vô Cực 2 Bên?
- ⇨ Vì khi đó không có tích phân tuyệt đối, vì trong công thức có thành phần mũ giảm, mà hàm mũ giảm thì phần bên trái 0 tiến đến vô cực nên không thể tính tích phân, coi đồ thị hàm số phần bên trái = 0
5. Cách Hình Dung Tích Phân Của Biến Đổi Laplace?
- ⇨ Biến đổi Laplace có đầu vào s là 1 số phức, và cứ mỗi số phức thì biến đổi Laplace sẽ trả về giá trị là 1 số phức khác, trong không gian 3 chiều, đặt trục hoành và trục tung biểu diễn số phức s, trục hoành thực, trục tung ảo, còn trục cao biểu diễn Module của giá trị trả về, khi đó nếu giá trị trục cao càng lớn thì mức độ đóng góp của thành phần mũ và thành phần hình Sin ứng với hệ số mũ và tần số góc tương ứng càng lớn, nếu lấy 1 mặt phẳng có hoành độ cố định = a cắt qua đồ thị, thì giao tuyến chính là độ thị tần số góc – độ lớn của biến đổi Fourier của hàm $f(t)e^{-at}$
- ⇨ Lưu ý, miền xác định của đồ thị có giới hạn, nếu s làm cho hàm số không có tích phân tuyệt đối thì biến đổi Laplace không tồn tại tại điểm s đó
6. Có Phải Biến Đổi Laplace Là Độc Nhất Với Mỗi Hàm?
- ⇨ Đúng
7. Biến Đổi Laplace Tuyến Tính?
- ⇨ Đúng

$$\mathcal{L}(a+b) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b)$$
$$\mathcal{L}(ka) = k\mathcal{L}(a)$$

8. Nghịch Đảo Của Biến Đổi Laplace?
- ⇨ Không có công thức tổng quát, dò bảng nghịch đảo
9. Bảng Biến Đổi Laplace?

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$
$$\mathcal{L}(t^a) = \frac{a!}{s^{a+1}}$$
$$\mathcal{L}\big(cos(at)\big) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Series:

1. Hàm Số Mượt Là Gì?

⇨ Hàm số được gọi là mượt trên 1 khoảng nào đó nếu nó có đạo hàm cấp 1, cấp 2, cấp 3, … cấp vô tận trên khoảng đó

2. Ví Dụ Về Hàm Số Mượt Trên Từng Khoảng Xác Định Của Nó?

⇨ Hàm đa thức

⇨ Hàm phân thức

⇨ Hàm Logarithm

⇨ Hàm mũ

⇨ …

3. Chuỗi Lũy Thừa (Power Series)?

⇨ Là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

⇨ a_n là hệ số của số hạng thứ n

⇨ c gọi là điểm trung tâm

4. Chuỗi Bội (Geometric Series)?

⇨ Là chuỗi lũy thừa mà tất cả hệ số đều = nhau và điểm trung tâm = 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

⇨ |x| < 1 thì chuỗi hội tụ, từ 1 trở lên thì phân kì

5. Chuỗi Taylor?

⇨ Chuỗi Taylor của 1 hàm số tại 1 điểm là 1 chuỗi lũy thừa khít nhất với hàm số tại điểm đó, điểm này chính là điểm trung tâm

⇨ Chuỗi Taylor có đạo hàm tại điểm điểm trung tâm = đạo hàm của hàm số ở mọi bậc

⇨ Theo lý thuyết, mọi chuỗi lũy thừa đều là chuỗi Taylor của 1 hàm số mượt nào đó

6. Công Thức Chuỗi Taylor?

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

⇨ x_0 là điểm trung tâm

⇨ Đặt $x = x_0 + \Delta x$, ta có

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!}\Delta x^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\Delta x^3 f'''(x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Delta x^n f^{(n)}(x_0)$$

⇨ Khai triển Taylor cấp n nghĩa là số hạng cuối cùng có số mũ là n

7. Hàm Số Nào Có Thể Biểu Diễn = Chuỗi Taylor?

⇨ Hàm số biểu diễn được = chuỗi Taylor trên 1 khoảng nào đó thì nó phải mượt trên khoảng đó

8. Ước Lệ Tuyến Tính Là Gì?

⇨ Là biểu diễn hàm số = chuỗi Taylor chỉ mở rộng đến đạo hàm thứ 1

9. Chuỗi Taylor Cho Hàm Đa Biến?

$$f(x) \approx f(x_0) + J(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H(x - x_0) =$$
$$f(x_0) + \nabla f^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H(x - x_0)$$

⇨ J là ma trận Jacobian của hàm f tại x_0

⇨ H là ma trận Hessian của hàm f tại x_0

⇨ Lưu ý rất khó để mở rộng thêm chuỗi vì những số hạng đằng sau toàn là Tensor quái vật 3D, 4D, …, thay vào đó sử dụng vi phân

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(x_0)$$

⇨ Sau khi lập công thức trên, cần thế mỗi dx thành $x - x_0$

⇨ Ví dụ, giả sử f(x, y) khai triển Taylor, ta muốn tìm số hạng thứ 3

$$\frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dx\right)^2 f = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right) f =$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

10. Chuỗi Maclaurin?

⇨ Là chuỗi Taylor với điểm trung tâm = 0

⇨ Trong trường hợp hàm đa biến, để khai triển Taylor cho nó, thay vì dùng vi phân làm rất lâu, ta làm các bước sau

⇨ Bước 1, tịnh tiến sao cho điểm trung tâm = gốc tọa độ

⇨ Bước 2, thế biểu thức đa biến thành 1 biến, khai triển Maclaurin theo biến này rồi thế lại thành đa biến, hoặc khai triển từng nhân tử đơn biến một, rồi tích lại với nhau, bỏ các số hạng bậc cao

⇨ Ví dụ

⇨ Khai triển hàm sau tại điểm (2, 1), đến bậc 2

$$f(x, y) = e^x cos(y)$$

⇨ Thế x = X + 2, y = Y + 1, ta được

$$e^{X+2} cos(Y + 1)$$

⇨ Bài toán trở thành khai triển Maclaurin

$$e^{X+2}cos(Y + 1) = e^2\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\right)\left(cos(1) - sin(1)Y - \frac{1}{2}cos(1)Y^2 + \cdots\right)$$
$$\approx e^2 cos(1)\left(1 - tan(1)Y - \frac{1}{2}Y^2 + X - tan(1)XY + \frac{1}{2}X^2\right) =$$
$$e^2 cos(1)\left(x - 1 - tan(1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 2)^2 - tan(1)(x - 2)(y - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)^2\right)$$
$$= e^2 cos(1)\left(\frac{1}{2} - tan(1) + (tan(1) - 1)x + (tan(1) + 1)y + \frac{x^2}{2} - tan(1)xy - \frac{y^2}{2}\right)$$

⇨ Như vậy ta đã có được khai triển Taylor

11. Chuỗi Maclaurin Của 1 Số Hàm Số Mượt Trên Tập Xác Định?

$$\frac{1}{x+a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a^3}x^2 - \frac{1}{a^4}x^3 + \cdots$$
$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots$$
$$ln(x + 1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$
$$arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$
$$sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1}{7}x^7 + \cdots$
$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$
$tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 +$

- ⇨ Nếu muốn tìm khai triển Maclaurin của 1 thương thì có thể dùng phương pháp chia đa thức

12. Chuỗi Đan Xen (Alternating Series)?

- ⇨ Là chuỗi đan xen giữa cộng và trừ, có dạng

$A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, a_n > 0, \forall n \text{ or } a_n < 0, \forall n$

13. Chuỗi P (P Series)?

- ⇨ Là dạng tổng quát của hàm Riemann Zeta

$A = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^p}, k \in N^*$

- ⇨ Nếu k = 1, thì A tương đương hàm Riemann Zeta
- ⇨ Nếu p > 1, thì A hội tụ

14. Tính Tổng Chuỗi Bằng Tích Phân?

- ⇨ Giả sử dx rất nhỏ, ta có

$f(dx)dx + f(2dx)dx + \cdots + f(ndx)dx = \int_0^{ndx} f(x)dx$

15. Cách Tính Giá Trị Hội Tụ Của 1 Dãy Đệ Quy?

- ⇨ Giả sử dãy đệ quy có công thức truy hồi (Recurrence Relation) như sau

$\theta_{n+1} = f(\theta_n)$

- ⇨ Khi đó, giá trị hội tụ sẽ là nghiệm của phương trình

$\theta = f(\theta)$

16. Khai Triển Lũy Thừa?

- ⇨ Để khai triển $(a + b + c + \ldots)^n$
- ⇨ Bước 1, xác định số hạng cần tìm hệ số, ví dụ $a^8c^4e^2f$, tổng mũ phải = n, ở đây 8 + 4 + 2 + 1 = 15 = n
- ⇨ Bước 2, hệ số của toán hạng này là

$C_{15}^8 C_7^4 C_3^2 = 675675$

- ⇨ Như vậy khi khai triển ta sẽ thấy sự xuất hiện của 675675 $a^8c^4e^2f$
- ⇨ Quy tắc là viết k – 1 tổ hợp, với k là số kí tự khác nhau trong số hạng, ở đây a, c, e, f là 4 kí tự nên viết 3 tổ hợp
- ⇨ Số ở dưới của tổ hợp đầu tiên = n, số ở trên = mũ của kí tự đầu tiên, ở đây n = 15 và a là kí tự đầu tiên với mũ 8, do đó ta viết tổ hợp chập 8 của 15
- ⇨ Số ở dưới của tổ hợp thứ 2 trở đi = số ở dưới của tổ hợp trước đó – số ở trên của tổ hợp trước đó, đồng thời số ở trên của tổ hợp này = mũ của kí tự tương ứng

Series Test:

1. Kiểm Tra Chuỗi Là Kiểm Tra Cái Gì?

- ⇨ Là kiểm tra xem chuỗi hội tụ hay phân kì

2. Kiểm Tra = Chuỗi Bội (Geometric Series Test)?

- ⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

⇨ Dễ thấy A hội tụ vì 2 / 5 < 1

3. Kiểm Tra = Tích Phân (Integral Test)?

⇨ Cho chuỗi A là 1 chuỗi có các số hạng giảm dần

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

⇨ Chọn hàm f(x) nghịch biến trên khoảng (1, ∞) sao cho a_x = f(x), khi đó, nếu tích phân từ 1 đến ∞ của f(x) hội tụ thì A hội tụ

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \Rightarrow f(x) = \int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2e}$$

⇨ f(x) hội tụ, nên A hội tụ

⇨ Tổng n số hạng đầu tiên của A kí hiệu là S_n, gọi là phần tổng thứ n (Partial Sum), tổng các số hạng còn lại kí hiệu là R_n, gọi là sai số cắt xén (Truncation Error)

⇨ Ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$$

⇨ Giá trị tích phân bên phải gọi là cận trên, bên trái gọi là cận dưới của R_n

4. Kiểm Tra = Chuỗi Đan Xen (Alternating Series Test)?

⇨ Cho A là 1 chuỗi đan xen, A hội tụ chỉ khi độ lớn các số hạng có xu hướng giảm và độ lớn của số hạng tại vô cực = 0

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

⇨ Dễ thấy khi n tăng thì a_n giảm, đồng thời a_∞ = 0, vậy A hội tụ

5. Kiểm Tra Phân Kì (Divergence Test)?

⇨ Cho A là chuỗi nào đó, nếu số hạng tại vô cực khác 0 thì A phân kì

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ln(n)$$

⇨ Dễ thấy a_∞ là 1 số nào đó rất lớn và nó khác 0, vậy A phân kì

6. Kiểm Tra So Sánh Trực Tiếp (Direct Comparison Test)?

⇨ Cho B là 1 chuỗi nào đó hội tụ, A là 1 chuỗi nào đó, N là 1 số tương đối lớn, a_n và b_n lần lượt là số hạng thứ n của A và B, xét bất đẳng thức sau

$$0 \leq a_n \leq b_n, \forall n > N$$

⇨ Nếu bất đẳng thức trên đúng thì A hội tụ

⇨ Trường hợp B phân kì, xét bất đẳng thức sau

$$0 \leq b_n \leq a_n, \forall n > N$$

⇨ Nếu bất đẳng thức trên đúng thì A phân kì

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}, B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

⇨ Dễ thấy mọi số hạng thứ n của A đều > 0 và < số hạng thứ n của B, mà B hội tụ, do đó A hội tụ

7. Kiểm Tra So Sánh Giới Hạn (Limit Comparision Test)?

⇨ Cho A và B là 2 chuỗi nào đó, a_n và b_n lần lượt là số hạng thứ n của A và B, khi đó nếu a_n / b_n là 1 số hữu hạn khác 0 tại n = vô cực thì chỉ có 2 trường hợp, A và B cùng hội tụ, hoặc A và B cùng phân kì

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+n}}{n^4-n^2}, B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.5}}$$

⇨ Ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+n}}{n^4-n^2}}{\frac{1}{n^{2.5}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1-\frac{1}{n^2}} = 1$$

⇨ 1 là số hữu hạn khác 0 do đó A và B cùng hội tụ hoặc cùng phân kì, mà dễ thấy B hội tụ nên A cũng hội tụ

8. Kiểm Tra Căn (Root Test)?

⇨ Cho A là 1 chuỗi nào đó, a_n là số hạng thứ n của A, gọi c là căn bậc n của a_n khi n ở vô cực, nếu c < 1 thì A hội tụ, nếu c > 1 thì A phân kì

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n}\right)^n$$

⇨ Ta có

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n+1}{2n} = 1.5$$

⇨ Vì 1.5 > 1 nên A phân kì

9. Kiểm Tra Tỉ Lệ (Ratio Test)?

⇨ Cho A là 1 chuỗi nào đó, khi đó nếu tỉ lệ giữa 2 số hạng liên tiếp ở vô tận, lấy số sau chia số trước, < 1 thì A hội tụ, > 1 thì A phân kì

⇨ Ví dụ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

⇨ Ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

⇨ Vì 0 < 1 nên A hội tụ

Special Series:

1. Chuỗi Điều Hòa?

⇨ Là tên dành riêng cho chuỗi sau

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}$$

⇨ Dễ thấy

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} > \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = ln(|x|)|_1^{\infty} = \infty$$

⇨ Do đó chuỗi điều hòa phân kì

2. Số Điều Hòa?

⇨ Là số được tạo ra bởi chuỗi điều hòa, thay vì cận là vô cực thì bây giờ là 1 số tự nhiên

⇨ Ví dụ

⇨ 11 / 6 là số điều hòa vì nó được tạo ra bởi 3 số hạng đầu của chuỗi điều hòa

3. Hàm Gamma?

⇨ Là hàm mở rộng giai thừa sang số thực rồi dịch sang phải 1 đơn vị

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- ⇨ Chứng minh hàm Gamma đúng
- ⇨ Hàm Gamma phải thỏa mãn 2 điều kiện, 1 là phải đúng với x là số nguyên, 2 là đồ thị phải thẳng khi x mở rộng đến ∞
- ⇨ Để tiện chứng minh, thì ta sẽ chứng minh hàm gốc, chưa bị dịch chuyển sang phải 1 đơn vị

$$\Pi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt$$

- ⇨ Dễ thấy $\Pi(0) = 1$, thỏa mãn, nên bây giờ cần chứng minh $\Pi(1) = \Pi(0) * 1$, $\Pi(2) = \Pi(1) * 2$, …, ta có

$$\Pi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x |_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} x t^{x-1} dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Pi(x-1)$$

- ⇨ Dễ thấy hàm này đúng với mọi số nguyên và cả số thực
- ⇨ Bây giờ chỉ cần chứng minh đạo hàm của $\Pi(x)$ tại x = ∞ bằng ∞, khi đó thì đạo hàm tại mọi nơi gần ∞ đều có giá trị như nhau và = ∞, nói cách khác là đường thẳng đứng, ta có

$$\frac{d}{dx}\Pi(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt^x}{dx} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^x ln(t) dt = \int_0^\infty g(t) dt$$

- ⇨ Xét tích phân g(t) từ 0 đến 1, ta thấy x = ∞ nên $t^x = 0$, nên tích phân trong đoạn này = 0, xét trên đoạn từ 1 đến ∞, dễ thấy đoạn này dương, với lại tại t = ∞, rõ ràng $e^{-\infty}$ không thể nào địch lại ∞^∞ nên ở đó g(t) = ∞, nên toàn bộ tích phân này = ∞, điều phải chứng minh

4. Hàm Beta?

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

5. Hàm Riemann Zeta?

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

6. Hàm Dirichlet Eta?

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

7. Mở Rộng Tổ Hợp Sang Tập Số Thực?

$$C_n^k = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}$$

8. Chuỗi Viễn Vọng (Telescoping Series)?

- ⇨ Là chuỗi khi khai triển các số hạng ra thì có dạng $a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n$, và do đó = $a_0 - a_n$

Function – Hàm:

1. Bản Chất?

- ⇨ Là 1 quan hệ f từ tập X tới tập Y, sao cho mỗi phần tử của X đều là phần tử thứ nhất của duy nhất 1 cặp 2 – Tuple trong quan hệ, ví dụ (2, 3) và (2, 4) không được phép tồn tại cùng lúc trong quan hệ này, khi này X được gọi là miền xác định (Domain) còn Y được gọi là đối miền (Codomain), tập hợp các phần tử thứ 2 trong tất cả 2 – Tuple của f được gọi là khoảng giá trị (Range)
- ⇨ Kí hiệu

$$f: X \mapsto Y$$

- ⇨ Xét 1 cặp 2 – Tuple (a, b) trong f, khi này ta nói b là ảnh của a còn a thuộc nghịch ảnh của b
- ⇨ Giả sử X có m phần tử, Y có n phần tử, thì số ánh xạ từ X vào Y là

$$n^m$$

2. Hạn Chế (Restriction)?

- ⇨ Cho hàm f ánh xạ từ tập X tới Y, cho A là tập con của X, khi này hạn chế của f với A là hàm

$$f|_A: A \mapsto Y$$

3. Đơn Ánh (Injective Function, One To One Function)?

- ⇨ 2 phần tử khác nhau được ánh xạ tới 2 phần tử khác nhau
- ⇨ Cho tập A gồm m phần tử, tập B gồm n phần tử, số đơn ánh đi từ A tới B mà ta có thể tạo ra là

$$A_n^m$$

- ⇨ Ví dụ
- ⇨ Cho tập A gồm 3 phần tử, tập B gồm 5 phần tử, số đơn ánh đi từ A tới B có thể tạo ra là

$$A_5^3 = 60$$

4. Toàn Ánh (Surjective Function, Onto Function)?

- ⇨ Ánh xạ mà đối miền = khoảng giá trị
- ⇨ Cho tập A gồm m phần tử, tập B gồm n phần tử, số toàn ánh đi từ A tới B mà ta có thể tạo ra = số cách để đặt m quả khác nhau vào n hộp khác nhau, sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 quả

$$n!\left\{ {m \atop n} \right\} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} C_n^i i^m$$

- ⇨ Ví dụ 1
- ⇨ Cho tập A gồm 4 phần tử, tập B gồm 3 phần tử, số toàn ánh đi từ A tới B có thể tạo ra là

$$3!\left\{ {4 \atop 3} \right\} = -C_3^0 0^4 + C_3^1 1^4 - C_3^2 2^4 + C_3^3 3^4 = 36$$

- ⇨ Ví dụ 2
- ⇨ Cho tập A gồm 7 phần tử, tập B gồm 4 phần tử, số toàn ánh đi từ A tới B có thể tạo ra là

$$4!\left\{ {7 \atop 4} \right\} = C_4^0 0^7 - C_4^1 1^7 + C_4^2 2^7 - C_4^3 3^7 + C_4^4 4^7 = 8400$$

5. Song Ánh (Bijective Function, One To One And Onto Function)?

- ⇨ Vừa đơn ánh vừa toàn ánh
- ⇨ Cho tập A và B đều có số phần tử = m, số song ánh đi từ A tới B mà ta có thể tạo ra = m!

6. Hàm Hợp (Function Composition)?

- ⇨ Cho

$$\begin{cases} g: X \mapsto Y \\ f: Y \mapsto W \end{cases}$$

- ⇨ Khi đó ta có hàm hợp

$$f \circ g: X \mapsto W$$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

- ⇨ Vì hàm hợp bản chất là quan hệ hợp, nên nó có tính kết hợp

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- Ví dụ xét $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = e^x$, $h(x) = x^2 + 2$
- Ta có

$$(f \circ g) \circ h = \big(f(g)\big)(h) = 2e^{x^2+2} + 1$$
$$f \circ (g \circ h) = f\big(g(h)\big) = 2e^{x^2+2} + 1$$

- Bảng tính chất, kí hiệu G là không đơn ánh lẫn toàn ánh, D là đơn ánh nhưng không toàn ánh, T là toàn ánh nhưng không đơn ánh, S là song ánh

	G	D	T	S
G	G	G	G hoặc T	G
D	G hoặc D	D	G hoặc D hoặc T hoặc S	D
T	G	G	T	T
S	G	D	T	S

- Hàng a cột b nghĩa là tính chất của hàm b ∘ a, ví dụ a là toàn ánh nhưng không đơn ánh, b là đơn ánh nhưng không toàn ánh, thì b ∘ a không đơn ánh lẫn toàn ánh

7. Hàm Ngược (Inverse Function)?

- 1 hàm số f được gọi là khả nghịch khi và chỉ khi nó là song ánh, hàm ngược của nó kí hiệu là f^{-1}
- $f(x)$ và $f^{-1}(x)$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x)_{x=a} = 1/\frac{d}{dx} f(x)_{x=f^{-1}(a)}$$

- Bảng tính chất 1, $f^{-1}(A)$ ở đây sẽ trả về tập hợp gồm toàn bộ nghịch ảnh của tất cả phần tử trong tập A, tương tự f(A) sẽ trả về ảnh của tập A, lưu ý các tập A và B ở đây không rỗng, kí hiệu G là không đơn ánh lẫn toàn ánh, D là đơn ánh nhưng không toàn ánh, T là toàn ánh nhưng không đơn ánh, S là song ánh

	$f(f^{-1}(A))$	$f^{-1}(f(A))$	Nếu A là tập con thực sự của B trên miền xác định?	Nếu A là tập con thực sự của B trên đối miền?
G	A hoặc tập con thực sự của A	A hoặc tập cha thực sự của A hoặc	f(A) = f(B) hoặc f(A) là tập con thực sự của f(B)	$f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$ hoặc $f^{-1}(A)$ là tập con thực sự của $f^{-1}(B)$
D	A hoặc tập con thực sự của A	A	f(A) là tập con thực sự của f(B)	$f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$ hoặc $f^{-1}(A)$ là tập con thực sự của $f^{-1}(B)$
T	A	A hoặc tập cha thực sự của A	f(A) = f(B) hoặc f(A) là tập con thực sự của f(B)	$f^{-1}(A)$ là tập con thực sự của $f^{-1}(B)$
S	A	A	f(A) là tập con thực sự của f(B)	$f^{-1}(A)$ là tập con thực sự của $f^{-1}(B)$

- Ví dụ nếu f là toàn ánh, thì với A bất kì, $f(f^{-1}(A)) = A$
- Bảng tính chất 2

	Nếu f(A) = f(B)?	Nếu f(A) là tập con thực sự của f(B)?	Nếu $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$?	Nếu $f^{-1}(A)$ là tập con thực sự của $f^{-1}(B)$?
G	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra, trừ việc A = B và A là tập cha thực sự của B	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra, trừ việc A = B và A là tập cha thực sự của B

D	A = B	A là tập con thực sự của B	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra, trừ việc A = B và A là tập cha thực sự của B
T	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra	Mọi mối quan hệ giữa A và B đều có khả năng xảy ra, trừ việc A = B và A là tập cha thực sự của B	A = B	A là tập con thực sự của B
S	A = B	A là tập con thực sự của B	A = B	A là tập con thực sự của B

8. Hàm Số Tự Nghịch Đảo (Involution)?

⇨ Là hàm số = hàm ngược của chính nó

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

⇨ Nghĩa là áp dụng hàm này 2 lần = không áp dụng gì cả

9. Hàm Lambert?

$$W(x) = f^{-1}(x), f(x) = xe^{x}$$

⇨ Có miền xác định là [– 1 / e, ∞)

⇨ Có dạng góc trái trên của hình vuông bo góc bị lõm cạnh trái

⇨ Đồng biến trên (0, ∞)

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

10. Hàm Sàn (Floor Function) Và Hàm Trần (Ceiling Function)?

⇨ Hàm sàn trả về giá trị nguyên lớn nhất không vượt quá số Pass vào, ví dụ

$$\lfloor -1.3 \rfloor = -2$$

⇨ Đồ thị hàm sàn = từ gốc O, vẽ sang phải 1 gạch rồi lên trên 1 gạch, tiếp tục vẽ tạo cầu thang

⇨ Khác biệt giữa x và sàn của x là

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

⇨ Ví dụ

$$\{3.7\} = 3.7 - 3 = 0.7$$
$$\{-3.7\} = -3.7 - (-4) = 0.3$$
$$\{3\} = 3 - 3 = 0$$

⇨ Hàm trần trả về giá trị nguyên nhỏ nhất không thấp hơn số Pass vào, ví dụ

$$\lceil 2.6 \rceil = 3$$

⇨ Đồ thị hàm trần = từ gốc O, vẽ lên trên 1 gạch rồi sang phải 1 gạch, tiếp tục vẽ tạo cầu thang

⇨ Ta có các công thức

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$
$$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$$
$$\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - \lceil x + y \rceil = \begin{cases} 1, \{x\} > 0, \{y\} > 0, \{x\} + \{y\} \le 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$
$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = \begin{cases} 1, \{x\} > 0, \{y\} > 0, \{x\} + \{y\} \ge 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

11. Hàm Điều Hòa (Harmonic Function)?

⇨ Là hàm f(x_1, x_2, x_3, …, x_n) thỏa mãn phương trình vi phân sau, được gọi là phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 f = 0$$

⇨ Được gọi là điều hòa thì nó được cấu tạo nên từ rất nhiều các hàm Sin và Cos

⇨ Ví dụ một số hàm điều hòa, hay hàm thỏa mãn phương trình trên

$$f(x, y) = e^x sin(y)$$

12. Hàm Có Thể Tính (Computable Function)?

⇨ Là hàm có thể được thực hiện bằng 1 thuật toán nào đấy với số bước hữu hạn

13. Hàm 1 Phần (Partial Function)?

⇨ Là hàm chỉ nhận 1 số đối số nhất định, nếu nhận đối số khác, nó không thể trả về kết quả

14. Hàm Toàn Phần (Total Function)?

⇨ Làm hàm nhận mọi loại đối số và cam kết trả về giá trị nào đó sau một số hữu hạn bước

15. Hàm Đệ Quy Nguyên Thủy (Primitive Recursive Function)?

⇨ 1 hàm nhận vào các đối số là số tự nhiên và trả về 1 số tự nhiên được gọi là hàm đệ quy nguyên thủy căn bản (Basic Primitive Recursive Function) khi nó là 1 trong các dạng sau

Hàm hằng (Constant Function) Hàm kế thừa (Successor Function), là hàm nhận vào 1 đối số và trả về giá trị của số đó + 1 Hàm chiếu (Projection Function), là hàm nhận vào 1 đống đối số và trả về 1 trong số chúng

⇨ Ta có thể tạo ra các hàm đệ quy nguyên thủy phức tạp (Complex Primitive Recursive Function) bằng cách áp dụng các toán tử sau lên các hàm đệ quy nguyên thủy căn bản và cả phức tạp khác

⇨ Toán tử hàm hợp (Composition Operator), kết hợp hàm h là hàm nhận k đối số với k hàm g, mỗi hàm nhận m đối số, ở đây x là Vector chứa m đối số, h và g và f đều là hàm đệ quy nguyên thủy

$$f(x) = \left(h \circ (g_1, g_2, \dots, g_k)\right)(x) = h\left(g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)\right)$$

⇨ Toán tử đệ quy nguyên thủy (Primitive Recursion Operator), cả g, h, f đều là hàm đệ quy nguyên thủy

$$f(y, x) = \left(\rho(g, h)\right)(y, x) = \begin{cases} h(y-1, f(y-1, x), x), y > 0 \\ g(x), y = 0 \end{cases}$$

⇨ Bản chất hàm f là 1 vòng lặp For trong C++, nghĩa là nó nhận vào đối số đầu tiên là y = số lần lặp, và các đối số tượng trưng cho điều kiện khởi đầu trong Vector x, sau đó lặp y lần, biến đếm ban đầu = 0, sau đó tăng dần tới y, ban đầu khi đệ quy tới 0, thì nó sẽ thực hiện hàm g(x), đây được xem là hàm khởi đầu, sau đó dần thoát khỏi đệ quy, khi đang thoát, nó sẽ thực hiện các thứ trong thân vòng lặp, đó là hàm h, nhận vào đối số đầu tiên là lần lặp hiện tại, thứ 2 là giá trị của lần lặp trước đó, cuối cùng là các điều kiện khởi đầu x

16. Hàm Ackermann?

⇨ Là hàm đệ quy đơn giản nhất không phải đệ quy nguyên thủy, nghĩa là không thể thực hiện nó chỉ = vòng lặp For trong C++, 2 đối số m và n là số tự nhiên

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, m=0 \\ A(m-1,1), m>0, n=0 \\ A\big(m-1, A(m,n-1)\big), m>0, n>0 \end{cases}$$

- ⇨ Lưu ý ta có thể thêm 1 số điều kiện khác, thay đổi biểu thức, … để tạo ra 1 biến thể của hàm Ackermann với tính chất tương tự
- ⇨ Thời gian tính toán hàm Ackermann tăng cực nhanh khi m và n tăng
- ⇨ Ví dụ

$$A(3,2) = A\big(2, A(3,1)\big) = A\Big(2, A\big(2, A(3,0)\big)\Big) = A\Big(2, A\big(2, A(2,1)\big)\Big) =$$
$$A\Big(2, A\Big(2, A\big(1, A(2,0)\big)\Big)\Big) = A\Big(2, A\Big(2, A\big(1, A(1,1)\big)\Big)\Big) =$$
$$A\bigg(2, A\Big(2, A\Big(1, A\big(0, A(1,0)\big)\Big)\Big)\bigg) = A\bigg(2, A\Big(2, A\Big(1, A\big(0, A(0,1)\big)\Big)\Big)\bigg) =$$
$$A\Big(2, A\Big(2, A\big(1, A(0,2)\big)\Big)\Big) = A\Big(2, A\big(2, A(1,3)\big)\Big) = A\Big(2, A\Big(2, A\big(0, A(1,2)\big)\Big)\Big) = \cdots =$$
$$29$$

- ⇨ Có thể thấy số bước tính là quá lớn
- ⇨ Ta có công thức tổng quát

$$A(0,n) = n+1$$
$$A(1,n) = n+2$$
$$A(2,n) = 2n+3$$
$$A(3,n) = 2^{n+3} - 3$$
$$A(m,n) = 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3$$

- ⇨ Code Python

```
def ack(m, n):
    if m == 0: return n + 1
    elif n == 0: return ack(m - 1, 1)
    else: return ack(m - 1, ack(m, n - 1))
```

17. Giải Công Thức Truy Hồi?

- ⇨ Dạng 1

$$f(n) = f(n-1) + g(n) \Rightarrow f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{i=n} g(i)$$

- ⇨ Ví dụ

$$f(n) = f(n-1) + n^2 + 1, f(0) = 4$$
$$\Rightarrow f(n) = 4 + \sum_{i=1}^{i=n} (i^2+1) = 4 + n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n + 4$$
$$\Rightarrow 4, 6, 11, 21, 38, \ldots$$

- ⇨ Dạng 2

$$a_0 f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k) = 0$$

- ⇨ Bước 1, giải phương trình đặc trưng sau

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_{k-1} x + a_k = 0$$

- ⇨ Ta được 1 tập nghiệm x_1, x_2, …, x_m, tổng bội đại số của các nghiệm này = k, có thể phức, ta có

$$f(n) = P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + \cdots + P_{m-1} x_{m-1}^n + P_m x_m^n$$

- ⇨ P_i là đa thức có bậc = bội đại số của x_i – 1, các hệ số của nó là cái ta cần tìm, dựa vào f(0), f(1), …, f(k – 1)
- ⇨ Ví dụ 1

$$2f(n) - 16f(n-1) + 30f(n-2) = 0, f(0) = 4, f(1) = 7$$

⇨ Ta có phương trình đặc trưng

$$2x^2 - 16x + 30x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

⇨ Do đó

$$f(n) = C_1 3^n + C_2 5^n$$
$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 3C_1 + 5C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 6.5 \\ C_2 = -2.5 \end{cases} \Rightarrow f(n) = 6.5 \times 3^n - 2.5 \times 5^n$$
$$\Rightarrow 4, 7, -4, -137, -1036, \ldots$$

⇨ Ví dụ 2

$$2f(n) - 8f(n-1) + 8f(n-2) = 0, f(0) = 4, f(1) = 7$$

⇨ Ta có phương trình đặc trưng

$$2x^2 - 8x + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

⇨ Do đó

$$f(n) = (C_1 + C_2 n)2^n$$
$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ 2C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -0.5 \end{cases} \Rightarrow f(n) = (4 - 0.5n)2^n$$
$$\Rightarrow 4, 7, 12, 20, 32, \ldots$$

⇨ Ví dụ 3

$$f(n) - 10f(n-1) + 34f(n-2) = 0, f(0) = 4, f(1) = 7$$

⇨ Ta có phương trình đặc trưng

$$x^2 - 10x + 34x = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm 3i$$

⇨ Do đó

$$f(n) = C_1(5+3i)^n + C_2(5-3i)^n$$
$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ (5+3i)C_1 + (5-3i)C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 + \frac{13}{6}i \\ C_2 = 2 - \frac{13}{6}i \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(n) = \left(2 + \frac{13}{6}i\right)(5+3i)^n + \left(2 - \frac{13}{6}i\right)(5-3i)^n$$
$$\Rightarrow 4, 7, -66, -898, -6736, \ldots$$

⇨

Logistic:

1. Hàm Logistic?

$$f(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$$

⇨ Hàm này đối xứng qua tâm x_0

⇨ Có giá trị trong khoảng (0, L), luôn tăng

⇨ k là tốc độ tăng, càng lớn thì đồ thị càng dốc

⇨ Nếu L = k = 1, x_0 = 0, thì hàm này trở thành hàm Sigmoid

2. Phương Trình Vi Phân Logistic?

$$\frac{dy}{dx} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \Rightarrow y = \frac{L}{1+e^{-k(x-C)}}$$

⇨ Ở đây, tùy vào điểm khởi đầu mà C sẽ khác nhau

Limit – Giới Hạn:

1. Quy Tắc L'Hôspital's?

⇨ Quy tắc dùng đạo hàm tính giới hạn có dạng vô định

⇨ Các dạng vô định như

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, 0\infty, \infty^0, \infty - \infty$$

2. Hệ Thức L'Hôspital's?

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

⇨ f(a) và g(a) có độ lớn cùng = 0 hoặc cùng = ∞ khi x dần tới a

3. Vô Cùng Bé, Vô Cùng Lớn?

⇨ Vô cùng bé bậc càng cao thì nó càng bé

⇨ o(g(x)) = vô cùng bé bậc cao hơn g(x)

⇨ Vô cùng lớn bậc càng cao thì nó càng lớn

⇨ Các vô cùng bé tương đương khi x dần tới 0

$$x \sim sin(x) \sim sinh(x) \sim arcsin(x) \sim tan(x) \sim arctan(x) \sim ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim 2 - 2\sqrt{1-x}$$

$$\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - cos(x) \sim cosh(x) - 1 \sim 1 - \sqrt{1-x^2}$$

$$(x+1)^a - 1 \sim ax$$

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f\big(h(x)\big) \sim g\big(h(x)\big)$$

4. Điểm Gián Đoạn?

⇨ Là điểm mà tại đó hàm số không liên tục

5. Gián Đoạn Khử Được?

⇨ Là điểm gián đoạn mà giới hạn trái = giới hạn phải, ngược lại là gián đoạn không khử được

6. Liên Tục Phải?

⇨ 1 hàm liên tục phải tại 1 điểm thì xác định tại điểm đó và giới hạn phải = giá trị tại điểm đó

⇨ Tương tự với liên tục trái

7. Đạo Hàm 1 Phía?

⇨ Giả sử 1 hàm gián đoạn tại điểm x = a, liên tục trái tại điểm này, thì rõ ràng nó có đạo hàm bên trái tại điểm này

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

⇨ Tương tự đạo hàm bên phải

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

8. Đạo Hàm Không Xác Định Khi Nào?

⇨ Cho dù là hàm mượt, thì nếu tiếp tuyến tại 1 điểm là đường thẳng đứng thì tại đó đạo hàm không xác định

⇨ Đường gấp khúc, gián đoạn

9. Điểm Tới Hạn (Critical Point)?

⇨ Là điểm mà tại đó tất cả đạo hàm từng phần một là = 0, hai là không xác định

⇨ Điểm dừng là điểm tất cả đạo hàm từng phần = 0

10. Cách Tìm Tiệm Cận Dựa Vào Phương Trình Tham Số?

⇨ Giả sử đồ thị hàm số được cho bởi phương trình tham số x = f(t), y = g(t)

⇨ Bước 1, xác định tiệm cận ngang

- ⇨ Có tiệm cận ngang khi tồn tại t sao cho x vô tận và y hữu hạn
- ⇨ Bước 2, xác định tiệm cận đứng
- ⇨ Có tiệm cận đứng khi tồn tại t sao cho x hữu hạn và y vô tận
- ⇨ Bước 3, xác định tiệm cận xiên
- ⇨ Có tiệm cận xiên khi tồn tại t sao cho x vô tận và y vô tận và y / x hữu hạn khác 0

11. Điểm Cực Trị?

- ⇨ Điểm cực đại chặt trên 1 khoảng nào đó là điểm mà tại đó lân cận trái phải của nó < nó, tương tự cực tiểu chặt
- ⇨ Điểm cực đại không chặt thì lân cận ≤ nó, tương tự cực tiểu không chặt

12. Nguyên Hàm?

- ⇨ Cứ A đạo hàm ra B thì A là nguyên hàm của B

13. Đâu Là Sự Khác Biệt Giữa Đạo Hàm Toàn Phần Và Đạo Hàm Từng Phần?

- ⇨ Nếu dùng dấu đạo hàm từng phần ∂z / ∂x thì có nghĩa ta coi những biến khác là hằng số, còn nếu dùng dấu đạo hàm toàn phần dz / dx thì ta coi những biến khác có thể phụ thuộc x, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

- ⇨ Dễ thấy nếu đã biết dy / dx = 0 rồi tức là y không phụ thuộc x thì xài ∂z / ∂x cho đỡ phải ghi ra

14. Cực Đại Cục Bộ (Local Maximum)?

- ⇨ Là điểm mà lân cận của nó không có thằng nào lớn hơn

15. Cực Tiểu Cục Bộ (Local Minimum)?

- ⇨ Là điểm mà lân cận của nó không có thằng nào nhỏ hơn

16. Điểm Yên Ngựa (Saddle Point)?

- ⇨ Là điểm tới hạn M, nhưng không phải cực đại cục bộ hay cực tiểu cục bộ, nghĩa là tồn tại giá trị lân cận trái của M < M < giá trị lân cận khác của M

17. Định Lí Clairaut?

- ⇨ Khi lấy đạo hàm từng phần không quan tâm thứ tự

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- ⇨ Chứng minh
- ⇨ Giả sử F là 1 trường Vector bảo toàn, bản thân nó là Gradient của hàm f, chọn 1 đường cong kín bất kì C bao 1 khu vực D, theo định lí Green, ta có

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dA = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- ⇨ Mở rộng ra đạo hàm cấp 3, 4, …, không quan tâm thứ tự lấy đạo hàm

18. Cách Kiểm Tra 1 Điểm Có Phải Cực Trị?

- ⇨ Cho 1 hàm f đa biến, và 1 miền liên tục D, cho 1 điểm A trong vùng này, nếu các điều kiện sau đều xảy ra, thì chắc chắn A là cực trị
- ⇨ Đạo hàm cấp 1, hay ma trận Jacobian của f tại A = 0
- ⇨ Đạo hàm cấp 2, hay ma trận Hessian của f tại A phải là toàn phương xác định dương, khi này A sẽ là cực tiểu, hoặc phải là toàn phương xác định âm, khi này A sẽ là cực đại
- ⇨ Ta sẽ xét trường hợp hàm f(x, y), ma trận Hessian của hàm này là

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, f_{ab} = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}$$

- ⇨ Vì f_{xx} có dấu của 1 Eigen Value nên nếu $f_{xx} > 0$ và |H| > 0 thì chắc chắn Eigen Value còn lại > 0, nên H toàn phương xác định dương, và đây là cực tiểu

- ⇨ Tương tự nếu $f_{xx} < 0$ và |H| > 0 thì chắc chắn Eigen Value còn lại < 0, nên toàn phương xác định âm, và đây là cực đại
- ⇨ Nếu |H| < 0 thì chắc chắn 2 Eigen Value trái dấu, và đây là điểm yên ngựa
- ⇨ Nếu |H| = 0 thì không kết luận được điều gì

19. Tích Phân Suy Rộng (Improper Integral)?

- ⇨ Cận suy rộng là vô cùng hoặc là cận mà tại đó hàm đạt vô cùng, viết tắt là csr
- ⇨ Loại 1, ít nhất 1 cận vô cùng, giá trị hàm hữu hạn giữa 2 cận
- ⇨ Loại 2, 2 cận hữu hạn, ít nhất 1 điểm giữa 2 cận có giá trị vô cùng
- ⇨ Loại 3, ít nhất 1 cận vô cùng và ít nhất 1 điểm giữa 2 cận đạt vô cùng
- ⇨ Cho 1 tích phân suy rộng = tổng các tích phân, nếu 1 trong các tích phân này phân kỳ thì nguyên tích phân suy rộng phân kỳ, không cần biết là nó có trả về giá trị hữu hạn hay không, ngược lại thì hội tụ
- ⇨ Để bấm máy tích phân suy rộng, thì dùng cách đổi biến, sao cho cận từ vô cùng sang hữu hạn
- ⇨ Dạng thường gặp

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a} = diverge, a \in R$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} = \left[\begin{array}{l} diverge, a \geq 1 \\ converge, a < 1 \end{array}\right.$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a} = \left[\begin{array}{l} diverge, a \leq 1 \\ converge, a > 1 \end{array}\right.$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a+1} = \left[\begin{array}{l} diverge, a \leq 1 \\ converge, a > 1 \end{array}\right.$$

- ⇨ Chứng minh
- ⇨ Xét a > 1

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^a+1} + \int_1^\infty \frac{1}{x^a+1} = A + B$$

- ⇨ Do A xác định trên [0; 1] nên nó hội tụ

$$B < \int_1^\infty \frac{1}{x^a} = converge \Rightarrow B = converge$$

- ⇨ Do cả A và B hội tụ nên tổng của chúng hội tụ
- ⇨ Xét a = 1

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1} = diverge$$

- ⇨ Xét a < 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a+1} > \int_1^\infty \frac{1}{x+1} = diverge \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^a+1} = diverge \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x^a+1} = diverge$$

- ⇨ Các tiêu chuẩn để chứng tỏ hội tụ hoặc phân kỳ
- ⇨ Tiêu chuẩn so sánh

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) = converge \\ f(x) \geq g(x), \forall x \in [a;b] \\ f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b g(x) = converge$$
$$\begin{cases} \int_a^b f(x) = diverge \\ f(x) \leq g(x), \forall x \in [a;b] \\ f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b g(x) = diverge$$
$$\begin{cases} \int_a^{csr} f(x) = converge \\ \lim\limits_{x \to csr} \frac{g(x)}{f(x)} \in [0;\infty) \\ f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in (a;b) \end{cases} \Rightarrow \int_a^{csr} g(x) = converge$$

$$\begin{cases} \int_a^{csr} f(x) = diverge \\ \lim_{x \to csr} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0; \infty] \\ f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in (a; b) \end{cases} \Rightarrow \int_a^{csr} g(x) = diverge$$

- ⇨ Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

$$\int_a^b |f(x)| = converge \Rightarrow \int_a^b f(x) = converge$$

- ⇨ Tiêu chuẩn Abel

$$\begin{cases} \int_a^{csr} f(x) = converge \\ g(x) = monotone\ on\ (a; csr) \\ g(x) \in (-\infty; \infty), \forall x \in (a; csr) \end{cases} \Rightarrow \int_a^{csr} f(x)g(x) = converge$$

- ⇨ Tiêu chuẩn Dirichlet

$$\begin{cases} \left|\int_a^b f(x)\right| < \infty, \forall b \in [a; csr] \\ g(x) = monotone\ on\ (a; csr) \\ \lim_{x \to csr} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^{csr} f(x)g(x) = converge$$

- ⇨ Nếu tích phân suy rộng chứa tham số và bảo khảo sát sự hội tụ thì vẽ miền bất đẳng thức rồi xét từng miền, đường ngăn cách là đường dễ lấy tích phân

Newton’s Method – Phương Pháp Newton:

1. Phương Pháp Newton Dùng Để Làm Gì?

- ⇨ Tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình phi tuyến

2. Ý Tưởng?

- ⇨ Để cho đơn giản, giả sử ta có hệ 2 phương trình phi tuyến 2 ẩn x, y, đã được biến đổi sao cho vế phải = 0 hết, thì coi vế trái như 1 phép biến đổi mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy thành 1 điểm nào đó cũng trên Oxy, và việc ta cần làm là tìm điểm mà khi nó bị biến đổi sẽ trở thành vế phải của phương trình là gốc tọa độ, dưới tác dụng của phép biến đổi này, dễ thấy lưới tọa độ ban đầu sẽ bị bẻ cong uốn lượn, và giả sử ta chọn điểm khởi đầu là M, thì nó sẽ bị dịch chuyển tới đâu đó và trở thành N, bây giờ ta ước lệ một cách gần đúng phép biến đổi này = 1 phép biến đổi tuyến tính, để cho lưới tọa độ được thẳng tắp và song song, đồng thời phép biến đổi tuyến tính này cũng phải biến M thành N, dễ thấy phép biến đổi này chính là ma trận Jacobian của phép biến đổi phi tuyến ban đầu tại điểm M và có thêm Offset, gọi nó là J, giải phương trình tuyến tính JM + Offset = 0 ta sẽ có được vị trí mới của M, cứ lặp đi lặp lại như vậy thì sớm hay muộn cũng sẽ hội tụ tại điểm nghiệm

3. Tính Toán Cụ Thể?

- ⇨ Chọn vị trí bất kì x_0, tìm vị trí mới x_1
- ⇨ Tìm Offset, biết ma trận Jacobian biến đổi x_0 rồi + Offset = phép biến đổi phi tuyến ban đầu lên x_0

$$J\overrightarrow{x_0} + \vec{v} = K(\overrightarrow{x_0}) \Leftrightarrow \vec{v} = K(\overrightarrow{x_0}) - J\overrightarrow{x_0}$$

- ⇨ J là ma trận Jacobian của phép biến đổi K tại x_0
- ⇨ K là phép biến đổi phi tuyến ban đầu
- ⇨ v là Offset
- ⇨ Có được Offset, ta giải phương trình tuyến tính được x_1

$$J\overrightarrow{x_1} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow J\overrightarrow{x_1} + K(\overrightarrow{x_0}) - J\overrightarrow{x_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0} - J^{-1}K(\overrightarrow{x_0})$$

- ⇨ Lặp đi lặp lại như trên tìm vị trí mới
- ⇨ Ví dụ
- ⇨ Giải hệ phương trình sau

$$x^2 + 3xy - 10 = 0$$
$$y^3 - 2x^2 - 5 = 0$$

- ⇨ Ma trận Jacobian tổng quát là

$$J = \begin{pmatrix} 2x + 3y & 3x \\ -4x & 3y^2 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Phép biến đổi phi tuyến là

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3xy - 10 \\ y^3 - 2x^2 - 5 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Chọn điểm ban đầu có tọa độ (1, 2), tính tọa độ điểm mới = thế số

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.36 \\ 2.04 \end{pmatrix}$$

Differential Equation – Phương Trình Vi Phân:

1. Tại Sao Laplace Transform Có Thể Giúp Giải Phương Trình Vi Phân?
- ⇨ Giả sử ta phương trình a = 0, a là biểu thức chứa các hàm số và đạo hàm các cấp theo thời gian t, khi đó biến đổi Laplace cả 2 vế thực chất là nhân cả 2 vế với e^{-st} rồi lấy tích phân cả 2 vế từ 0 đến ∞
2. Công Thức Biến Đổi Laplace Của Đạo Hàm Các Cấp?

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

3. Phương Pháp Euler?
- ⇨ Phương pháp vẽ đồ thị hàm số từ phương trình vi phân chỉ cần biết điều kiện ban đầu mà không cần giải, tuy nhiên sẽ có sai số tùy vào độ phân giải
- ⇨ Giả sử bạn đang ở điểm ban đầu, dựa vào điều kiện ban đầu để xác định tiếp tuyến tại điểm này, đi theo tiếp tuyến, cập nhập tọa độ, rồi tính tiếp tuyến tại điểm mới, rồi lại đi theo tiếp tuyến, cứ lặp đi lặp lại như vậy, càng đi xa thì sai số càng lớn

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x)$$

4. Phương Pháp Runge Kutta?
- ⇨ Giống phương pháp Euler, nhưng hướng đi mỗi bước sẽ có sự thay đổi để khít với hàm thật hơn
- ⇨ Tưởng tượng phương trình vi phân của ta là 1 trường Vector, khi đó nếu ta bắt đầu từ 1 điểm nào đó, ta sẽ trôi theo dòng Vector tạo thành 1 quỹ đạo độc nhất, khi này, các Vector gần quỹ đạo sẽ gần giống Vector trên quỹ đạo
- ⇨ Giả sử ta bắt đầu từ điểm A trên đồ thị, ta muốn đi tới điểm B trên đồ thị, nếu dùng phương pháp Euler, thì rất khó để đi chính xác đến B, giả sử đồ thị cong keo vãi, thay vào đó, ta ước lượng Vector AB để đi 1 phát từ A tới B, và như ta đã biết, Vector AB có hệ số góc = đạo hàm trung bình từ A tới B, nhưng ta không có cách nào để tính được giá trị trung bình này, thay vào đó, ta ước lượng nó

⇨ Có vô số cách ước lượng khác nhau, nhưng cách thông dụng nhất là Runge Kutta bậc 4, lưu ý đạo hàm sắp nói tới đã nhân với độ dài bước đi, đầu tiên, tính đạo hàm tại A, gọi là k_1, lấy trọng số 1 / 6, đi theo k_1 1 nửa chặng đường, tính đạo hàm tại điểm mới, gọi là k_2, trọng số 1 / 3, đi từ A theo k_2 1 nửa chặng đường, tính đạo hàm tại điểm mới , gọi là k_3, trọng số 1 / 3, đi từ A theo k_3 hết chặng đường, tính đạo hàm tại điểm mới, được k_4, trọng số 1 / 6, sau khi tính trung bình các đạo hàm này, tiến hành bước

5. Bậc Của Phương Trình Vi Phân?

⇨ Là bậc của đạo hàm cao nhất trong nó

6. Phương Trình Vi Phân Thường (ODE)?

⇨ Là phương trình vi phân mà trong đó chỉ có 1 ẩn là hàm 1 biến

⇨ Nếu nghiệm viết theo kiểu y = f(x) không tìm được thì có thể viết theo kiểu f(x, y) = 0

7. Phương Trình Vi Phân Tuyến Tính Thường (Linear ODE)?

⇨ Là ODE có dạng

$$f(x) + f_0(x)y + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots = 0$$

8. Phương Trình Vi Phân Tuyến Tính Thường Thuần Nhất (Homogeneous Linear ODE)?

⇨ Là Linear ODE mà f(x) = 0

⇨ Nếu a và b đều là nghiệm của phương trình vi phân loại này thì tổ hợp tuyến tính của chúng cũng là nghiệm

9. Nghiệm Của 1 Số Phương Trình Vi Phân Cơ Bản?

⇨ ODE bậc k sẽ luôn chỉ có 1 nghiệm tổng quát là y = f(x, C_1, C_2, …, C_k), do có k điều kiện ban đầu, như vị trí đầu, vận tốc đầu, gia tốc đầu, …, nên ta lập được hệ k phương trình, đòi hỏi phải cần k hằng số C

$$y' + ay = b \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$
$$y' + P(x)y = Q(x) \Leftrightarrow y = e^{-H}\int e^H Q\,, H = \int P$$

⇨ Xét phương trình vi phân sau

$$ay'' + by' + cy = 0$$

⇨ Xét phương trình sau

$$ak^2 + bk + c = 0$$

⇨ Nếu phương trình này có 2 nghiệm phân biệt số thực k_1, k_2, thì 2 nghiệm Span hết miền nghiệm của phương trình vi phân trên là

$$y = e^{k_1x}$$
$$y = e^{k_2x}$$

⇨ Nếu k là nghiệm kép

$$y = e^{kx}$$
$$y = xe^{kx}$$

⇨ Nếu có 2 nghiệm phân biệt ảo m + ni và m – ni

$$y = cos(nx)e^{mx}$$
$$y = sin(nx)e^{mx}$$

10. Các Dạng Phương Trình Vi Phân Thường Gặp?

⇨ Dạng thế

$$y' = f\big(g(x, y)\big)$$

- ⇨ Ta đặt z = g(x, y), rồi sau đó biểu diễn y theo z và x, sau đó lấy lấy đạo hàm để biểu diễn y' theo z, z' và x
- ⇨ Trường hợp 1

$$g(x, y) = ax + by + c$$

- ⇨ Bước 1, tìm nghiệm của phương trình sau, tạm gọi là S

$$\int \frac{1}{bf(z) + a} dz = x + C$$

- ⇨ Thế z = ax + by + c vào S được nghiệm cần tìm
- ⇨ Trường hợp 2, còn gọi là dạng đẳng cấp

$$g(x, y) = \frac{y}{x}$$

- ⇨ Bước 1, tìm nghiệm của phương trình sau, tạm gọi là S

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = ln(x) + C$$

- ⇨ Thế u = y / x vào S được nghiệm cần tìm
- ⇨ Trường hợp 3, dạng phân thức

$$g(x) = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

- ⇨ Check định thức

$$M = \left|\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$

- ⇨ Nếu M khác 0, thực hiện các sau
- ⇨ Bước 1, tìm nghiệm của phương trình đẳng cấp sau, tạm gọi nghiệm này là S

$$Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right)$$

- ⇨ Bước 2, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

- ⇨ Được nghiệm x_0 và y_0, thế X = x – x_0 và Y = y – y_0 vào S được nghiệm cần tìm
- ⇨ Nếu M = 0, thực hiện các bước sau
- ⇨ Bước 1, tìm nghiệm của phương trình sau, tạm gọi là S

$$\int du/\left(a_2 + b_2f\left(\frac{Ku + c_1}{u + c_2}\right)\right) = x + C, K = \frac{a_1}{a_2}$$

- ⇨ Bước 2, thế u = a_2x + b_2y vào S được nghiệm cần tìm
- ⇨ Còn với dạng toàn phần

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- ⇨ Nghiệm tổng quát là

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt = C$$

- ⇨ Hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt = C$$

- ⇨ x_0, y_0 là điểm tùy ý mà P và Q xác định
- ⇨ Nếu cũng có dạng trên nhưng đạo hàm từng phần không bằng nhau thì nhân cả 2 vế phương trình cho 1 hàm sao cho biến nó thành dạng toàn phần, các dạng đặc biệt của dạng toàn phần là
- ⇨ Dạng tách biến

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

⇨ Nghiệm của phương trình này tính = cách lấy tích phân từng thằng

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

⇨ Dạng độc lập

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0$$

⇨ Còn với dạng Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^a$$

⇨ Bước 1, tìm nghiệm của phương trình sau, tạm gọi là S

$$z' + (1-a)P(x)z = (1-a)Q(x)$$

⇨ Bước 2, thế z = y^{1-a} vào S được nghiệm cần tìm

11. Phương Pháp Mò?

⇨ Giả sử ta có phương trình (1) sau

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

⇨ Bước 1, tìm nghiệm tổng quán của phương trình sau, tạm gọi là S

$$ay'' + by' + cy = 0$$

⇨ Bước 2, Check dạng G(x)

⇨ Nếu G(x) có dạng Ae^{mx}, A là đa thức bậc k, làm theo các bước sau

⇨ Nếu m không là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (2) thì nghiệm riêng, tạm gọi là R, sẽ có dạng Be^{mx}, B là đa thức chưa biết hệ số cùng bậc với A, thế R vào (1) để tìm hệ số cho nó, sau đó S + R chính là nghiệm cần tìm

⇨ Nếu m là 1 nghiệm của (2), (2) có 2 nghiệm, thì R có dạng xBe^{mx}, các bước còn lại giống trường hợp 1

⇨ Nếu m là nghiệm kép của (2), thì R có dạng x^2Be^{mx}, các bước còn lại giống trường hợp 1

⇨ Nếu G(x) có dạng $A\cos(wx)e^{mx} + B\sin(wx)e^{mx}$, A, B là đa thức bậc bất kì, bậc lớn nhất trong 2 là k, làm theo các bước sau

⇨ Nếu m + wi không là nghiệm của (2) thì R có dạng $C\cos(wx)e^{mx} + D\sin(wx)e^{mx}$, C, D là các đa thức bậc k chưa biết hệ số, lắp vào (1) để tìm hệ số

⇨ Nếu m + wi là nghiệm của (2) thì R có dạng $xC\cos(wx)e^{mx} + xD\sin(wx)e^{mx}$

⇨ Nếu G(x) bằng tổng các hàm thì R = tổng các nghiệm riêng tương ứng

⇨ Phương pháp khác

⇨ Bước 1, gọi biểu thức ứng với hằng số tự do trong S lần lượt là y_1 và y_2

⇨ Bước 2, giải hệ phương trình sau tìm g và h

$$\begin{cases} y_1g' + y_2h' = 0 \\ y_1'g' + y_2'h' = \frac{G}{a} \end{cases}$$

⇨ Bước 3, nghiệm cần tìm chính = $gy_1 + hy_2$

⇨ Nghiệm riêng là 1 nghiệm cụ thể không có hằng số C, nghiệm tổng quát là nghiệm có Full hằng số C

12. Cách Giải 1 Số Hệ Phương Trình Vi Phân?

⇨ Xét hệ thuần nhất, X là Vector ẩn, A là ma trận vuông kích thước n x n với phần tử hằng

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

⇨ Trường hợp 1, A có n Eigen Vector độc lập tuyến tính phức $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ứng với các giá trị phức Eigen Value là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thì nghiệm của phương trình là

$$X = \sum_{i=1}^{n} C_iP_ie^{\lambda_i t}$$

- ⇨ Trường hợp 2, A có số Eigen Vector < n, khi đó 1 giá trị Eigen Value λ sẽ có thể ứng với nhiều Eigen Vector độc lập hoặc trùng nhau, giả sử nó ứng với m Eigen Vector, thì sẽ có m nghiệm riêng có dạng sau, P(t) là Vector đa thức bậc < m

$$X_i = C_i P_i(t) e^{\lambda_i t}$$

- ⇨ Xét hệ sau, D là toán tử lấy đạo hàm

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - ax - by = f(t) \\ -cx + y' - dy = g(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (D-a)x - by = f(t) \\ -cx + (D-d)y = g(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c(D-a)x - bcy = cf(t) \\ -c(D-a)x + (D-a)(D-d)y = (D-a)g(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(D-a)(D-d)y - bcy = cf(t) + (D-a)g(t) \Leftrightarrow$$

$$D^2 y - (a+d)Dy + (ad-bc)y = cf(t) + (D-a)g(t) \Leftrightarrow$$

$$y'' - (a+d)y' + (ad-bc)y = cf(t) - ag(t) + g'(t)$$

- ⇨ Giải phương trình này = phương pháp mò, sau khi đã có y thì thế vào phương trình thứ 2 để tìm x

Convolution – Tích Chập:

1. Khi Thế X Bằng 1 Biểu Thức Tuyến Tính, Đồ Thị Thay Đổi Thế Nào?

- ⇨ Đồ thị của f(ax + b) tương đương đồ thị f(x) dịch sang trái b đơn vị rồi co lại theo chiều ngang a lần, với tâm co là gốc tọa độ

2. Tích Chập Của 2 Hàm Số?

- ⇨ Gọi 2 hàm là f(x) và g(x), tích chập của f(x) và g(x) là 1 hàm số h(t) khác thỏa mãn tính chất đó là giá trị của h(t) tại điểm t = a được tính bằng cách Flip đồ thị g(x) qua trục tung, rồi tịnh tiến sang phải a đơn vị được g'(x), rồi lấy tích phân từ –∞ đên ∞ của f(x)g'(x)
- ⇨ Hình dung kiểu g(x) Flip rồi trượt từ đầu này sang đầu kia f(x), cùng lúc tạo ra h(t)

3. Công Thức Tích Chập?

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$$

4. Ý Nghĩa Tích Chập?

- ⇨ Giả sử f(x) và g(x) đều là 2 PDF của 2 biến ngẫu nhiên là F và G, bài toán đặt ra là hãy vẽ ra 1 PDF mới của biến ngẫu nhiên F + G, vậy thì ta phải biết Likelihood của PDF này tại 1 điểm bất kì, ví dụ điểm đó là t = 5, dễ thấy Likelihood tại điểm này là

$$h(5) = \frac{h(5)dt}{dt} = \frac{f(0)dxg(5)dx \ + \ f(0+dx)dxg(5-dx)dx + \cdots}{dx} =$$

$$f(0)g(5)dx + f(0+dx)g(5-dx)dx + \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(5-x)dx$$

- ⇨ Dễ thấy đây là giá trị tích chập của f(x) và g(x) tại điểm t = 5
- ⇨ Giải thích tại sao dx = dt
- ⇨ Dễ thấy mỗi giá trị F + G cách nhau 1 số nguyên lần dx, như trong ví dụ trên, F + G chỉ có thể là 5, 5 + dx, 5 – 2dx, 10 + 3x, … do đó 2 giá trị F + G kế tiếp nhau sẽ cách nhau 1 đoạn dt = dx

⇨ Vậy ý nghĩa tích chập là để xác định PDF của tổng 2 biến ngẫu nhiên

5. Tích Chập 2D?

⇨ Tương tự tích chập 1D, gọi 2 hàm là f(x, y) và g(x, y), tích chập của f(x, y) và g(x, y) là 1 hàm số h(t, w) khác thỏa mãn tính chất đó là giá trị của h(t, w) tại điểm t = a, w = b được tính bằng cách Flip đồ thị g(x, y) qua trục hoành và trục tung, tương đương quay đồ thị g(x, y) 180 độ quanh trục cao, rồi tịnh tiến theo Vector (a, b) được g'(x, y), rồi lấy tích phân trên toàn miền không gian 2D của f(x, y)g'(x, y)

⇨ Hình dung kiểu g(x, y) quay 180 độ rồi trượt trên f(x, y), cùng lúc tạo ra h(t, w)

6. Công Thức Tích Chập 2D?

$$(f * g)(t, w) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) g(t - x, w - y) dx\, dy$$

7. Ý Nghĩa Tích Chập 2D?

⇨ Cũng giống tích chập 1D, giả sử f(x, y) và g(x, y) đều là 2 PDF của 2 biến ngẫu nhiên là F và G, F và G đều là tọa độ 2D, bài toán đặt ra là hãy vẽ ra 1 PDF mới của biến ngẫu nhiên F + G, và tích chập 2D của f(x, y) và g(x, y) chính là PDF cần tìm

8. Tích Chập Đa Chiều?

⇨ Tất cả các ý tưởng đều tương tự tích chập 1D

9. Công Dụng Của Tích Chập?

⇨ Xử lí làm mờ, sắc nét ảnh

10. Tính chất đặc biệt của tích chập?

⇨ Tích chập của 1 phân phối chuẩn với 1 phân phối chuẩn tạo 1 phân phối chuẩn khác

⇨ Tích chập của nhiều phân phối là PDF của tổng các biến ngẫu nhiên được tạo ra từ những phân phối đó

⇨ Tích chập của 1 phân phối bất kì với vô hạn lần 1 phân phối chuẩn nào đó được 1 phân phối chuẩn, do đó theo định luật giới hạn trung tâm, tích chập của 1 phân phối bất kì với vô hạn lần 1 phân phối bất kì được 1 phân phối chuẩn

⇨ Tích chập có đầy đủ tích chất của phép nhân, giao hoán, kết hợp, không quan tâm thứ tự

⇨ Offset của các đồ thị không ảnh hưởng hình dạng tích chập của chúng, độ thị bất kì Offset như thế nào thì tích chập của chúng cũng Offset thêm 1 lượng tương tự

11. Tương Quan Chéo (Cross Correlation)?

⇨ Y chang tích chập nhưng Flip đồ thị và hàm dùng để trượt là f(x) không phải g(x)

12. Công Thức Tương Quan Chéo?

$$(f \star g)(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(x) dx$$