Contents

Matrix Formula – Công Thức Ma Trận:

1. $(AB \dots Z)^* = Z^* \dots B^* A^*$
2. $(AB \dots Z)^{-1} = Z^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}$
3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $A(BC) = (AB)C$
7. $|AB| = |A||B|$
8. $|A^*| = \overline{|A|}$
9. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
10. $|kA| = k^n |A|, k \in R, A \in M_n[R]$

Square Matrix – Ma Trận Vuông:

1. Cấp Của Ma Trận Vuông?
⇨ Là số hàng/cột của nó
2. Đường Chéo Của Ma Trận?
⇨ Đường chéo chính (Main Diagonal) của 1 ma trận là tập hợp các phần tử nằm trên đường chéo kẻ từ góc trái trên của ma trận chếch xuống góc 45 độ
⇨ Đường chéo trên (Superdiagonal) của 1 ma trận là tập hợp các phần tử nằm trên đường chéo kẻ từ phần tử ở hàng 1 cột 2 chếch xuống góc 45 độ
⇨ Đường chéo dưới (Subdiagonal) của 1 ma trận là tập hợp các phần tử nằm trên đường chéo kẻ từ phần tử ở hàng 2 cột 1 chếch xuống góc 45 độ
⇨ Đường chéo trên Offset k của 1 ma trận là tập hợp các phần tử nằm trên đường chéo kẻ từ phần tử ở hàng 1 cột k + 1 chếch xuống góc 45 độ

⇨ Đường chéo dưới Offset k của 1 ma trận là tập hợp các phần tử nằm trên đường chéo kẻ từ phần tử ở hàng k + 1 cột 1 chếch xuống góc 45 độ

3. Vết (Trace)?

⇨ Cho ma trận vuông A, vết của A là tổng tất cả phần tử trên đường chéo chính của nó

⇨ Ví dụ

$$Tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$$

4. Định Thức Con (Minor) Và Bù Đại Số (Cofactor) Của Ma Trận Vuông?

⇨ Xét phần tử ở hàng i cột j, tính từ trên xuống, trái sang, bắt đầu từ 1 của ma trận vuông A

⇨ Phần tử này sẽ tương ứng với định thức con có giá trị bằng định thức của cái ma trận sau khi lấy A bỏ đi hàng i cột j, kí hiệu là M_{ij}

⇨ Nếu i + j chẵn, thì bù đại số của phần tử = định thức con của nó, nếu lẻ, thì = âm định thức con của nó, kí hiệu là A_{ij}

5. Cách Tính Định Thức Bằng Mở Rộng Laplace?

⇨ Cho ma trận vuông A, chọn 1 dòng hay cột bất kì, lấy mỗi phần tử trên đó nhân với bù đại số tương ứng rồi cộng tất cả lại được định thức của A

6. Ma Trận Bù Đại Số (Cofactor Matrix)?

⇨ Cho ma trận vuông A, ma trận bù đại số của A được tạo ra bằng cách thay mỗi phần tử của A bằng bù đại số của nó, kí hiệu cof(A)

⇨ Cho ma trận vuông A cấp n bất kì, ta có các định lý sau

$$|cof(A)| = |A|^{n-1}$$

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow cof(A) = \begin{pmatrix} 68 & -56 & 28 \\ -4 & 16 & -8 \\ -42 & 33 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 108, |cof(A)| = 108^2 = 11664$$

7. Ma Trận Phụ Hợp (Adjugate Matrix, Adjoint Matrix)?

⇨ Cho ma trận vuông A, ma trận phụ hợp của A là ma trận chuyển vị của ma trận bù đại số của A, kí hiệu P_A

⇨ Cho ma trận vuông A cấp n bất kì, I là ma trận Identity cấp n, ta có các định lý sau

$$AP_A = |A|I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}P_A$$

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} 68 & -4 & -42 \\ -56 & 16 & 33 \\ 28 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AP_A = 108\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 68 & -4 & -42 \\ -56 & 16 & 33 \\ 28 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

8. Lũy Thừa Của Ma Trận Vuông?

⇨ Cho A là ma trận vuông bất kì, khi này lũy thừa bậc n của A, kí hiệu A^n, nghĩa là lấy ma trận Identity nhân cho A n lần

⇨ Cho A là ma trận vuông bất kì cấp n, I là ma trận Identity cấp n, ta có các định lý sau

$A^0 = I$ Ta có thể tách A thành tổng của 2 ma trận đơn giản hơn rồi tính lũy thừa cho dễ, lưu ý khi khai triển phải giữ nguyên thứ tự của các ma trận, không được hoán vị

Animation Matrix – Ma Trận Hoạt Ảnh:

1. Ma Trận Biến Hình Thành Hình Đối Xứng Của Nó Qua Gốc Tọa Độ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Ma Trận Quay Quanh Trục Cao, Hướng Ngược Chiều Kim Đồng Hồ Khi Nhìn Từ Trên Xuống?

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ θ là góc quay

3. Ma Trận Scale, Quay Rồi Mới Tịnh Tiến Trong Không Gian 3D?

$$\begin{pmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Lưu ý phải đổi tọa độ điểm từ 3 chiều sang 4 chiều, 3 phần tử đầu giá trị giữ nguyên, phần tử thứ 4 giá trị luôn = 1

⇨ Trong đó, ma trận Scale rồi quay là

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

⇨ Vector tịnh tiến là

$$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

⇨ Ví dụ dạng 4 chiều của tọa độ điểm

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ o \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Ma Trận Shear?

⇨ Shear theo trục hoành

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Shear theo trục tung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Ma trận Identity cũng là ma trận Shear với a = 0

5. Ma Trận Chiếu Vuông Góc 1 Không Gian Vector Vào 1 Không Gian Con Của Nó?

- A là ma trận kích thước m x n, m > n, có không gian cột là không gian con đang nói đến, khi đó ma trận chiếu là

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

- Ví dụ
- Ta muốn tạo ra 1 ma trận P có tác dụng ánh xạ 1 điểm trong không gian 3D vào hình chiếu của nó trên 1 mặt phẳng qua gốc tọa độ, mặt phẳng này chính là 1 không gian con của không gian 3D, gọi A là ma trận có không gian cột là mặt phẳng này, giả sử

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

- Chứng minh công thức trên, đầu tiên P phải ánh xạ A vào chính nó

$$PA = A(A^T A)^{-1} A^T A = AI = A$$

- Tiếp theo, Null Space của P phải vuông góc không gian cột của P, vâng, vì các Vector đơn vị bị ánh xạ lên A, nên không gian cột của P cũng chính là A, có như vậy thì nó mới chiếu vuông góc, mà ta lại có

$$P^T = (A(A^T A)^{-1} A^T)^T = A((A^T A)^{-1})^T A^T = A((A^T A)^T)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P$$

- Như vậy P đối xứng, hay không gian hàng = không gian cột, mà Null Space vuông góc không gian hàng, nên nó cũng vuông khóc không gian cột

Linear Transformation – Biến Đổi Tuyến Tính:

1. Diện Tích Của 1 Hình Khi Bị Biến Đổi Bởi 1 Ma Trận?
- Diện tích của nó sẽ nhân k lần, k là định thức của ma trận
2. Định Thức Ma Trận Có Tỉ Lệ Với Độ Tăng Chiều Dài?
- Không, chiều dài của 1 đoạn thẳng bị biến đổi với ma trận không tỉ lệ với định thức của ma trận biến đổi nó
3. Biến Đổi Affine?
- Là biến đổi tuyến tính rồi tịnh tiến
4. Biến Đổi Cứng (Rigid Transformation, Euclidean Transformation)?
- Là 1 tổ hợp các phép quay, tịnh tiến, và Flip
5. Không Gian Hàng Và Không Gian Cột?
- Xét ma trận A có kích thước m x n
- Không gian hàng là Span của tất cả các hàng, kí hiệu $C(A^T)$
- Không gian cột là Span của tất cả các cột, kí hiệu C(A)
- Số chiều của không gian hàng và không gian cột luôn = nhau và = hạng của ma trận = r(A)
- Thêm 1 cột hoặc 1 hàng mới vào A, thì hạng của A chỉ có thể tăng 1 hoặc giữ nguyên
6. Range Space?
- Range Space là không gian ảnh của 1 không gian V nào đó bị biến đổi bởi 1 ánh xạ Homomorphism f, còn gọi là ảnh của ánh xạ f
- Số chiều của Range Space gọi là hạng của ánh xạ f
- Kí hiệu

$$im(f) = \{f(v)|v \in V\}$$

7. Null Space Và Left Null Space?

⇨ Cho ánh xạ tuyến tính f từ 1 không gian Vector V vào chính nó, khi này Null Space của f = tập hợp tất cả các Vector trong V bị f ánh xạ vào Vector 0, nói cách khác, Null Space của f = nhân của f, kí hiệu ker(f) hoặc $f^{-1}(0)$

⇨ Số chiều của Null Space gọi là số vô hiệu của ánh xạ f (Nullity)

⇨ Null Space của chuyển vị của ánh xạ tuyến tính f thì gọi là Left Null Space của f

⇨ Null Space của 1 ma trận luôn vuông góc với không gian hàng của ma trận đó, tương tự Left Null Space luôn vuông góc không gian cột

$$dim\big(ker(f)\big) + dim\big(im(f)\big) = dim(A)$$

8. Tính Số Chiều Của Null Space Và Left Null Space Của 1 Ma Trận?

⇨ Số chiều của Null Space là

$$D = n - r$$

⇨ r là hạng của ma trận

⇨ n là số cột của ma trận

⇨ Số chiều của Left Null Space là

$$D' = m - r$$

⇨ m là số hàng của ma trận

9. Eigen Value Và Eigen Vector?

⇨ Cho ma trận vuông A cấp n với các phần tử thuộc trường số phức, khi áp dụng ma trận này để biến đổi không gian Vector phức, thì để ý thấy, có những Vector khác Vector 0 chỉ bị Scale chứ không bị quay, đây gọi là những Eigen Vector của A, hệ số Scale gọi là Eigen Value

⇨ Mỗi Eigen Value phân biệt sẽ có 2 thuộc tính ứng với nó, là bội đại số (Algebraic Multiplicity) và bội hình học (Geometric Multiplicity)

⇨ Tổng bội đại số của tất cả Eigen Value phân biệt của A = n

⇨ Bội hình học của 1 Eigen Value luôn ≤ bội đại số của nó

⇨ Không gian con riêng (Eigen Space) của 1 Eigen Value của A là tập hợp tất cả Eigen Vector của A ứng với Eigen Value này, cùng với Vector 0

10. Tính Eigen Value Và Eigen Vector?

⇨ Cho A là 1 ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc trường số phức, I là ma trận Identity cấp n, đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = |A - xI|$$

⇨ λ là Eigen Value của A khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng sau

$$P_A(x) = 0$$

⇨ Nếu λ là nghiệm bội n thì n chính là bội đại số của nó, vì dụ λ là nghiệm kép thì bội đại số của nó = 2

⇨ Định lý Cayley Hamilton nói rằng A thỏa mãn chính phương trình đặc trưng của nó, nghĩa là ta luôn có

$$P_A(A) = 0$$

⇨ 0 kí hiệu cho ma trận không

⇨ Có thể dùng định lý này để tính lũy thừa của A

⇨ Ví dụ tính A mũ 6, bằng A và A mũ 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(x) = -x^3 + 15x^2 + 18x$$

⇨ Dùng mẹo tính phần dư, ta được

$$x^6 = q(x)P_A(x) + 63099x^2 + 70470x$$

⇨ Thế x thành A, ta được

$$A^6 = q(A)P_A(A) + 63099A^2 + 70470A = 63099A^2 + 70470A =$$
$$63099\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^2 + 70470\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1963440 & 2412504 & 2861568 \\ 4446414 & 5463369 & 6480324 \\ 6929388 & 8514234 & 10099080 \end{pmatrix}$$

⇨ 1 Vector v là 1 Eigen Vector ứng với λ khi và chỉ khi nó thỏa mãn phương trình sau

$$(A - \lambda I)v = 0$$

⇨ Nói cách khác, không gian con riêng của λ = Null Space của ma trận A – λI, số chiều của nó chính là bội hình học của λ

11. Eigen Vector Tổng Quát?

⇨ Cho A là 1 ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc trường số phức, I là ma trận Identity cấp n, λ là 1 Eigen Value của A, khi này 1 Vector v khác Vector 0 được gọi là Eigen Vector bậc k của A ứng với λ, k nguyên dương, nếu nó thỏa mãn 2 điều kiện sau

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$
$$(A - \lambda I)^{k-1} v \neq 0$$

⇨ Khi này, tập hợp tất cả các Eigen Vector bậc k của A ứng với λ kèm theo Vector 0 gọi là không gian con riêng bậc k của λ

⇨ Dễ thấy nếu k = 1, thì v chính là Eigen Vector bình thường

12. Tính Định Thức Bằng Eigen Value?

⇨ Cho 1 ma trận vuông A bất kì, lấy mỗi Eigen Value của nó mũ lên, với số mũ = bội đại số tương ứng, sau đó nhân tất cả Eigen Value đã mũ lại, ta được định thức của A

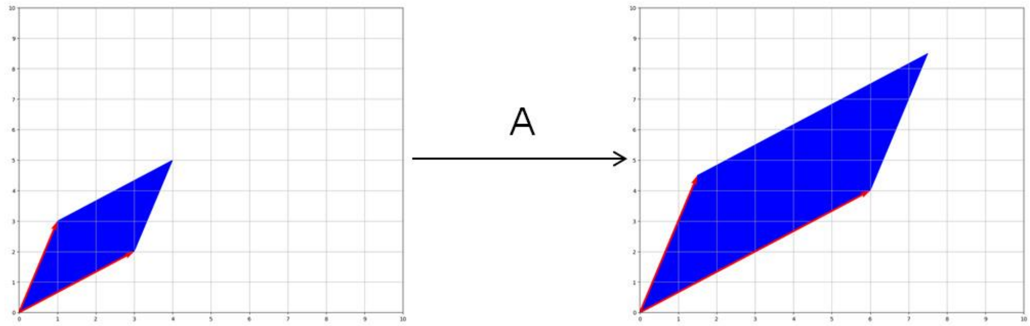
13. Eigen Value Decomposition?

⇨ Cho 1 ma trận vuông A cấp n bất kì với các phần tử thuộc trường số phức, sao cho tất cả Eigen Value phân biệt của nó có bội đại số = bội hình học, thì khi này Jordan Decomposition trên A còn được gọi là Eigen Value Decomposition, nghĩa là, ta có thể tìm được 1 ma trận đường chéo Λ, còn gọi là ma trận quang phổ (Spectral Matrix) của A, chứa các phần tử là Eigen Value của A, và ma trận Q, được gọi là ma trận chuyển đổi Mod (Modal Matrix) của A, chứa các Eigen Vector độc lập tuyến tính của A, sao cho

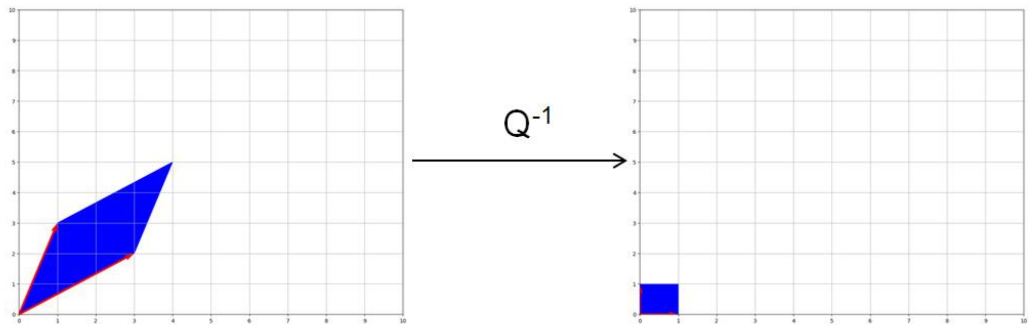
$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

⇨ Những ma trận mà có thể phân tích được kiểu này gọi là ma trận khả chéo hóa (Diagonalizable Matrix), nếu Q là ma trận trực giao thì gọi là ma trận khả chéo hóa trực giao

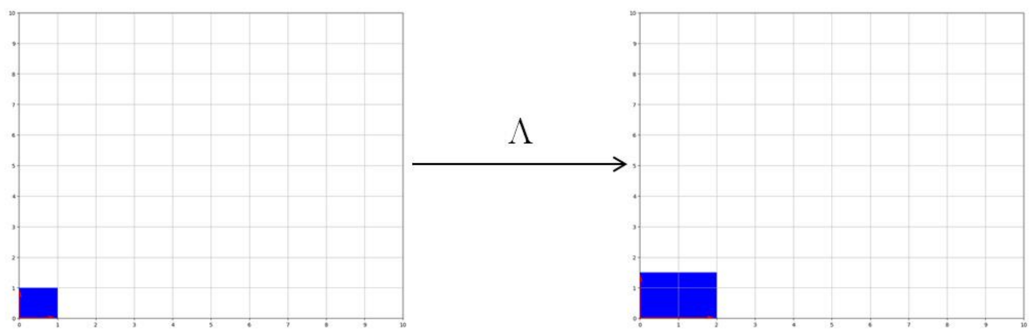
⇨ Để chứng minh công thức trên, ta tưởng tượng 1 phép biến đổi tuyến tính bởi ma trận A lên 1 hình bình hành như sau, xét trên trường số thực



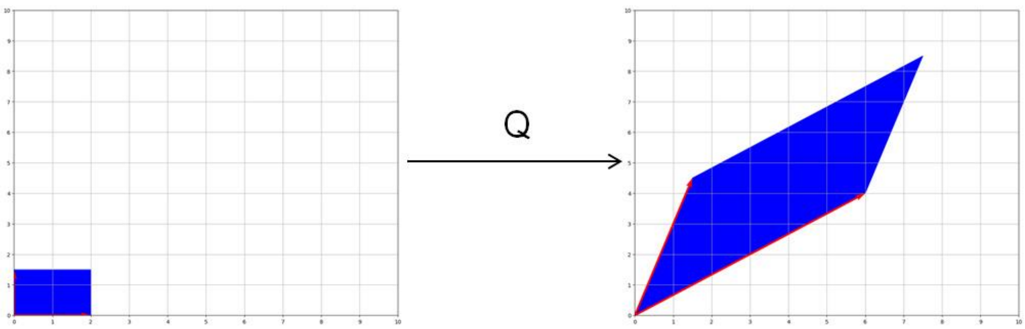
- Dễ thấy 2 mũi tên màu đỏ là 2 Eigen Vector độc lập tuyến tính nào đó của A, gọi ma trận có 2 cột là 2 Vector này là Q, cũng dễ thấy Eigen Value của mũi tên bên trái = 1.5, của mũi tên bên phải = 2
- Ta sẽ phân tích A thành nhiều phép biến đổi, ban đầu cho Q^{-1} tác dụng vào hình bình hành, do $Q^{-1}Q = I$, kết quả ta được hình vuông đơn vị



- Tiếp theo Scale hình vuông này theo chiều dọc 1.5 lần và chiều ngang 2 lần, dễ thấy đây chính là các Eigen Value



⇨ Cuối cùng dùng ma trận Q để đưa hình chữ nhật về hình dạng hình bình hành ban đầu nhưng 2 cạnh bị Scale bởi Eigen Value



⇨ Vậy, phép biến đổi A thực chất cũng chỉ là ta sử dụng phép đổi Q^{-1} rồi sau đó dùng Λ và cuối cùng dùng Q

14. Ma Trận Đồng Dạng (Matrix Similarity)?

⇨ 2 ma trận vuông A và B gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P sao cho

$$A = PBP^{-1}$$

⇨ Điều này nghĩa là A và B có Eigen Value giống nhau, hay nói cách khác, bản chất của A và B là một, chỉ là chúng tác dụng lên cơ sở khác nhau

15. SVD (Singular Value Decomposition)?

⇨ Mọi phép biến đổi tuyến tính đều có bản chất là quay và Scale, do đó, mọi ma trận đều có thể phân tích thành các ma trận quay và Scale, gọi ma trận cần phân tích là A, ta có

$$A = U\Sigma V^*$$

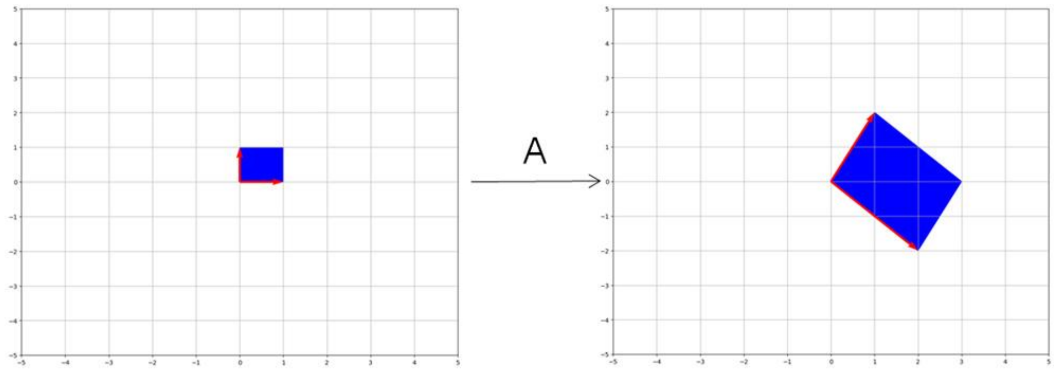
⇨ Σ là ma trận đường chéo chữ nhật, chứa Singular Value trên đường chéo chính, vừa là nhân tố Scale, vừa là nhân tố giảm chiều hoặc tăng chiều

⇨ U và V đều là ma trận trực giao, là nhân tố quay và Flip

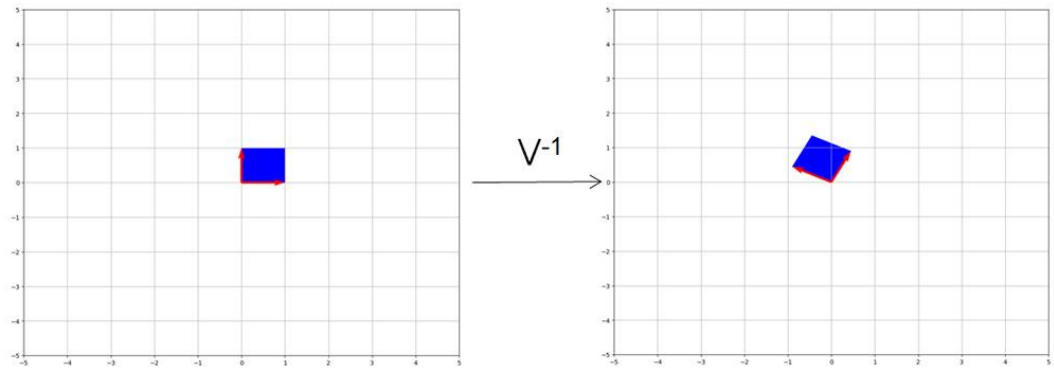
⇨ SVD giải quyết được bài toán là tìm hệ Vector vuông góc với nhau từng đôi một mà khi chịu tác dụng của A thì chúng vẫn vuông góc với nhau, vâng, hệ Vector đó là V, khi lấy A tác dụng lên V, được $U\Sigma$ cũng là hệ Vector vuông góc

⇨ Singular Value có thể được hiểu như sau, đó là phép biến đổi tuyến tính A thực chất là ta chọn 1 Basis là 1 ma trận vuông góc, và chỉ cần 1 lần Scale theo Basis đó là tương đương với A, khi đó hệ số Scale chính là Singular Value

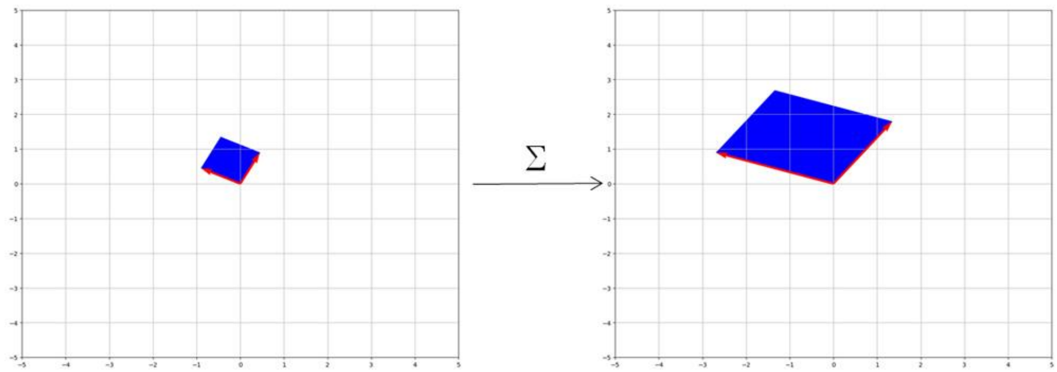
⇨ Tưởng tượng ta có phép biến đổi tuyến tính là ma trận A tác dụng lên hình vuông đơn vị



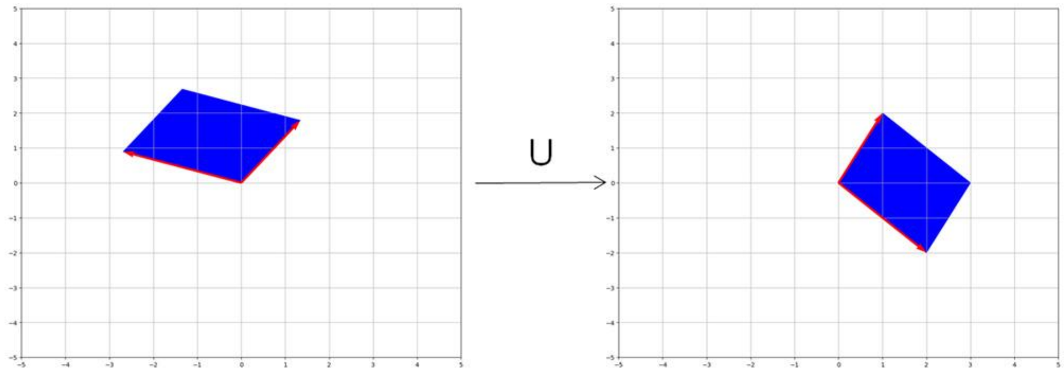
⇨ Bây giờ ta sẽ phân tích A thành nhiều phép biến đổi, ban đầu cho V^{-1} tác dụng vào hình vuông đơn vị, tương đương với việc quay và Flip hình vuông đó



⇨ Tiếp theo Scale hình vuông này theo chiều dọc 2 lần và chiều ngang 3 lần, dễ thấy đây chính là các Singular Value



⇨ Cuối cùng, dùng U để quay vào đúng vị trí



⇨ Vậy, phép biến đổi A thực chất cũng chỉ là quay với Scale

16. Tìm SVD Của 1 Ma Trận?

⇨ Để tìm V, trước tiên tìm Eigen Decomposition của A^TA, đây là ma trận đối xứng nên các Eigen Vector sẽ vuông góc với nhau, chọn các Vector có độ dài = 1 được V, đồng thời ta cũng tìm được ma trận đường chéo chứa Eigen Value của A^TA là $\Sigma^T\Sigma$, từ $\Sigma^T\Sigma$ tìm Σ, lưu ý chỉnh thứ tự các Eigen Value trong $\Sigma^T\Sigma$ sao cho mấy cái = 0 xuống hết phía dưới, đồng thời cũng chỉnh thứ tự các Eigen Vector trong V để cho đúng với Eigen Value

⇨ Chứng minh điều trên

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^{-1}$$

⇨ Để tính U, ta suy ra từ công thức SVD

$$U = AV\Sigma^{-1}$$

⇨ Ta cũng có thể tính U trước bằng cách tìm Eigen Decomposition của AA^T

$$AA^T = U\Sigma V^T(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^{-1}$$

⇨ Rồi tính V bằng công thức

$$V = A^{-1}U\Sigma$$

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} = V(\Sigma^T\Sigma)V^{-1} \Rightarrow$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$U = AV\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

⇨ Vậy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U\Sigma V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1}$$

17. Tìm Nghịch Đảo Của Ma Trận Chữ Nhật?

⇨ Cho ma trận chữ nhật A m x n, nếu m > n, nghịch đảo của A sẽ là ma trận A^{-1} n x m thỏa mãn

$$A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$$

⇨ Chứng minh điều trên, đầu tiên, tích $A^{-1}A$ phải là ma trận Identity

$$A^{-1}A = (A^T A)^{-1} A^T A = I$$

⇨ Ngược lại, tích AA^{-1} có thể không phải ma trận Identity, do đó, A^{-1} còn được gọi là nghịch đảo bên trái của A

⇨ Nếu m < n, nghịch đảo của A sẽ là ma trận A^{-1} n x m thỏa mãn

$$A^{-1} = A^T (AA^T)^{-1}$$

⇨ Chứng minh điều trên, đầu tiên, tích AB phải là ma trận Identity

$$AA^{-1} = AA^T (AA^T)^{-1} = I$$

⇨ Ngược lại, tích $A^{-1}A$ có thể không phải ma trận Identity, do đó, A^{-1} còn được gọi là nghịch đảo bên phải của A

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

⇨ Bất kì ma trận chữ nhật không vuông nào cũng chỉ có nhiều nhất 1 nghịch đảo 1 bên, ví dụ ma trận A 5 x 3 có hạng = 3, A^{-1} là nghịch đảo bên trái của A, khi đó ma trận AA^{-1} sẽ có kích thước 5 x 5, trong khi dễ thấy các cột của nó là tổ hợp tuyến tính của 3 cột trong A, do đó chỉ có hạng = 3, mà ma trận Identity 5 x 5 có hạng = 5, mâu thuẫn

18. Ma Trận Ánh Xạ Tuyến Tính Ứng Với 1 Cặp Cơ Sở?

⇨ Cho cơ sở chính tắc A, và 2 cơ sở khác là B và C, cho M là ma trận nào đó biến đổi A

⇨ Cho D là 1 Vector ứng với A, D_B là biểu diễn của D trong B, khi cho M tác dụng lên A, D sẽ ánh xạ tới điểm D' = MD, biểu diễn của D' trong C là D'_C

⇨ Bây giờ ta muốn tìm 1 ma trận, sao cho nó biến D_B thành D'_C, vâng, 1 ma trận N sao cho $ND_B = D'_C$, ma trận N gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính M ứng với cặp cơ sở B và C

⇨ Để tìm N

⇨ Bước 1, tính MB, ta tính được sau khi bị M tác dụng thì B sẽ thành cái gì

⇨ Bước 2, tìm biểu diễn của MB ứng với cơ sở C, được N

⇨ Công thức tổng quát

$CN = MB$

⇨

Special Matrix – Ma Trận Đặc Biệt:

1. Ma Trận Rỗng (Empty Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông cấp 0, nghĩa là không có hàng và không có cột, nên không chứa phần tử nào hết

⇨ Định thức của ma trận rỗng = 1

2. Ma Trận Không?

⇨ Là ma trận sao cho toàn bộ phần tử = 0

3. Ma Trận Đường Chéo (Diagonal Matrix)?

⇨ Là ma trận mà mọi phần tử không nằm trên đường chéo chính đều = 0

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Ma Trận Mở Rộng (Augmented Matrix)?

⇨ Là ma trận nhận được khi ghép 2 ma trận cùng số dòng lại với nhau theo chiều ngang

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

⇨ Ma trận mở rộng của A và B là

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right)$$

5. Ma Trận Suy Biến (Singular Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông có định thức = 0

⇨ Tính chất

Không khả nghịch
Hệ phương trình thuần nhất có các hệ số của ma trận suy biến thì sẽ có vô số nghiệm

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$|A| = 0$$

6. Ma Trận Không Suy Biến (Non Singular Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông có định thức khác 0

⇨ Tính chất

Khả nghịch

Hệ phương trình thuần nhất có các hệ số của ma trận không suy biến thì sẽ có nghiệm duy nhất là x = y = z = … = 0

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$
$$|A| = -3$$

7. Ma Trận Lũy Linh (Nilpotent Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông sao cho tồn tại số nguyên dương K nhỏ nhất để lũy thừa bậc K của ma trận này = 0, khi này ta nói ma trận này là ma trận lũy linh bậc K

⇨ Mọi ma trận lũy linh đều là ma trận suy biến, nhưng không phải ma trận suy biến nào cũng là ma trận lũy linh

⇨ Mọi ma trận tam giác chặt đều là ma trận lũy linh

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Như vậy A là ma trận lũy linh bậc 2

⇨ Các mệnh đề sau tương đương

M là ma trận lũy linh cấp n
Đa thức đặc trưng của M là x^n
M có Eigen Value duy nhất là 0
$M^k = 0$, k ≤ n

8. Ma Trận Khiếm Khuyết (Defective Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông sao cho tồn tại 1 Eigen Value có bội hình học < bội đại số

9. Ma Trận Tam Giác (Triangular Matrix)?

⇨ Ma trận tam giác trên (Upper Triangular Matrix) là ma trận vuông mà mọi phần tử ở phía dưới đường chéo chính đều = 0

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

⇨ Nếu mọi phần tử ở phía trên đường chéo chính đều = 0 thì gọi là ma trận tam giác dưới (Lower Triangular Matrix)

⇨ Tích 2 ma trận tam giác trên cũng là 1 ma trận tam giác trên, tương tự ma trận tam giác dưới

⇨ Tất cả phần tử phân biệt trên đường chéo chính của ma trận tam giác bất kì đều là Eigen Value của nó, số lần xuất hiện = bội đại số

⇨ Ma trận tam giác chặt là ma trận tam giác mà các phần tử trên đường chéo chính = 0

10. Ma Trận Sơ Cấp (Elementary Matrix)?

⇨ Là ma trận E đạt được = cách áp dụng 1 lần phép khử Gauss bất kì trên ma trận Identity

⇨ Ví dụ

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Thực hiện nhân hàng 2 với 3, ta được 1 ma trận sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⇨ Cho ma trận A kích thước m x n, khi này giả sử ta thực hiện 1 lần phép khử Gauss nào đó trên 1 hàng nào đó của A, thì kết quả tương đương với việc lấy 1 ma trận sơ cấp cấp m ứng với phép khử Gauss đó nhân với A

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 10 & 11 \\ 12 & 15 & 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

⇨ Sử dụng phép khử Gauss thay hàng 2 = hàng 3 + 0.5 * hàng 2, ta được

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 16.5 & 19 & 13.5 & 7 & 9.5 \\ 12 & 15 & 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

⇨ Cũng lấy ma trận I 3 x 3, và thực hiện phép khử Gauss tương tự, thay hàng 2 = hàng 3 + 0.5 * hàng 2, ta được ma trận sơ cấp tương ứng

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Lấy ma trận trên nhân với A

$$I'A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 16.5 & 19 & 13.5 & 7 & 9.5 \\ 12 & 15 & 11 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A'$$

⇨ Tương tự, nếu ta thực hiện 1 lần phép khử Gauss nào đó trên 1 cột nào đó của A, thì kết quả tương đương với việc lấy A nhân với 1 ma trận sơ cấp cấp n ứng với phép khử Gauss đó

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

⇨ Sử dụng phép khử Gauss thay cột 1 = cột 3 + cột 2 + cột 1, ta được

$$A' = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

⇨ Cũng lấy ma trận I 3 x 3, và thực hiện phép khử Gauss tương tự, thay cột 1 = cột 3 + cột 2 + cột 1, ta được ma trận sơ cấp tương ứng

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Lấy A nhân ma trận trên

$$AI' = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A'$$

11. Ma Trận Hermitian (Hermitian Matrix, Self Adjoint Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông A trong trường số phức bằng chính chuyển vị liên hợp phức của nó

$$A = A^*$$

⇨ Cho ma trận vuông A bất kì trong trường số phức, ta có các định lý

AA* luôn là ma trận Hermitian
A + A* luôn là ma trận Hermitian

⇨ Cho ma trận Hermitian A cấp n bất kì, ta có các định lý

Mọi Eigen Value của A đều là số thực
A không khiếm khuyết, do đó nó có đủ n Eigen Vector độc lập tuyến tính

Các phần tử trên đường chéo chính của A đều là số thực
Mọi cặp Eigen Vector độc lập tuyến tính và ứng 2 Eigen Value khác nhau của A đều vuông góc với nhau

⇨ Chứng minh
⇨ Gọi Eigen Value của A là λ, 1 Eigen Vector của λ là v, ta luôn có

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v^*Av = \lambda v^*v \Leftrightarrow (v^*Av)^* = (\lambda v^*v)^* \Leftrightarrow v^*A^*v = \overline{\lambda} v^*v \Leftrightarrow v^*Av = \overline{\lambda} v^*v \Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in R$$

⇨ Cho x và y là 2 Eigen Vector độc lập tuyến tính bất kì của A, a và b là Eigen Value tương ứng của x và y, a khác b, ta có

$$(ax)\cdot y = (Ax)\cdot y = y^*(Ax) = x\cdot(A^*y) = x\cdot(Ay) = x\cdot(by) \Leftrightarrow (a-b)x\cdot y = 0 \Leftrightarrow x\cdot y = 0$$

12. Ma Trận Đối Xứng (Symmetric Matrix)?
⇨ Là ma trận vuông A trong trường số thực, bằng chính chuyển vị của nó
⇨ Cho A là ma trận đối xứng bất kì, ta có các định lý sau

A là 1 ma trận Hermitian, nên có đầy đủ tính chất của nó

13. Ma Trận Đơn Nhất (Unitary Matrix)?
⇨ Là ma trận vuông A trong trường số phức thỏa mãn

$$A^{-1} = A^*$$

⇨ Cho A là ma trận đơn nhất cấp n bất kì, ta có các định lý

A không khiếm khuyết, nghĩa là nó có đủ n Eigen Vector độc lập tuyến tính trên trường số phức
Các Eigen Value của A, kể cả phức, luôn có Module = 1
Mọi cặp không gian con riêng của A ứng với 2 Eigen Value khác nhau đều vuông góc với nhau
Các cột của A đều là Vector có độ dài = 1 và vuông góc với nhau từng đôi một
Các hàng của A đều là Vector có độ dài = 1 và vuông góc với nhau từng đôi một

14. Ma Trận Trực Giao (Orthogonal Matrix)?
⇨ Là ma trận vuông A trong trường số thực thỏa mãn

$$A^{-1} = A^T$$

⇨ Cho A là ma trận trực giao bất kì, ta có các định lý

A là ma trận đơn nhất, nên có đầy đủ tính chất của nó
Bản chất của A là ma trận quay có Flip

15. Ma Trận Xác Định (Definite Matrix)
⇨ Một ma trận A xác định thì chắc chắn nó là ma trận Hermitian, kích thước n x n, tuy nhiên không phải ma trận Hermitian nào cũng xác định
⇨ Được gọi là bán xác định dương (Positive Semi Definite), nếu thỏa mãn

$$x^*Ax \geq 0, \forall x \in C^n$$

⇨ Được gọi là toàn phương xác định dương (Positive Definite), nếu thỏa mãn

$$x^*Ax > 0, \forall x \in C^n/\{0\}$$

⇨ Một ma trận toàn phương xác định dương thì cũng là bán xác định dương
⇨ Được gọi là bán xác định âm (Negative Semi Definite), nếu thỏa mãn

$$x^*Ax \leq 0, \forall x \in C^n$$

⇨ Được gọi là toàn phương xác định âm (Negative Definite), nếu thỏa mãn

$$x^*Ax < 0, \forall x \in C^n/\{0\}$$

⇨ Một ma trận toàn phương xác định âm thì cũng là bán xác định âm

⇨ Dễ thấy ma trận không, vừa là bán xác định dương, vừa là bán xác định âm
⇨ Hàm f(x) = x*Ax được gọi là 1 dạng bậc 2 (Quadratic Form), là 1 ánh xạ từ tọa độ x tới 1 số thực
⇨ Ta có các định lý sau
⇨ A là ma trận toàn phương xác định dương khi và chỉ khi nó là ma trận Hermitian và mọi Eigen Value của nó đều là số thực và > 0
⇨ A là ma trận bán xác định dương khi và chỉ khi nó là ma trận Hermitian và mọi Eigen Value của nó đều là số thực không âm
⇨ A là ma trận toàn phương xác định âm khi và chỉ khi nó là ma trận Hermitian và mọi Eigen Value của nó đều là số thực và < 0
⇨ A là ma trận bán xác định âm khi và chỉ khi nó là ma trận Hermitian và mọi Eigen Value của nó đều là số thực không dương
⇨ A là ma trận Hermitian không xác định (Indefinite) khi và chỉ khi nó có 1 số Eigen Value âm và 1 số Eigen Value dương
⇨ Chứng minh
⇨ Giả sử A là 1 ma trận bán xác định dương, v là 1 Eigen Vector bất kì có Eigen Value là λ, ta có

$$v^*Av \geq 0 \Leftrightarrow v^*\lambda v \geq 0 \Leftrightarrow \lambda v^*v \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

⇨ Mặt khác, nếu A là ma trận Hermitian n x n, và tất cả Eigen Value của nó không âm, gọi Eigen Value nhỏ nhất là λ_{min}, theo tính chất của thương số Rayleigh, ta có

$$0 \leq \lambda_{min} \leq R_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x} \Leftrightarrow x^*Ax \geq 0, \forall x \in C^n$$

⇨ Vậy ta đã chứng minh được cả 2 chiều
⇨ Cho ma trận vuông A n x n bất kì, ta luôn có AA* là bán xác định dương
⇨ Chứng minh

$$x^*(AA^*)x = (x^*A)(A^*x) = (A^*x)^*(A^*x) = (A^*x)\cdot(A^*x) \geq 0, \forall x \in C^n$$

⇨ Vậy AA* là bán xác định dương

16. Ma Trận Chuẩn (Normal Matrix)?

⇨ Là ma trận vuông A trong trường số thực, nó được gọi là ma trận chuẩn khi và chỉ khi

$$AA^* = A^*A$$

⇨ Ta có các định lý

Mọi ma trận Hermitian đều là ma trận chuẩn
Mọi ma trận đơn nhất đều là ma trận chuẩn

17. Ma Trận Hoán Vị (Permutation Matrix)?

⇨ Là ma trận A nhận được khi hoán vị hàng hoặc cột của 1 ma trận Identity
⇨ Dùng để hoán vị tọa độ của 1 điểm
⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Vì ma trận hoán vị cũng là ma trận trực giao nên ta có

$$A^{-1} = A^T$$

⇨ Để xây dựng 1 ma trận hoán vị từ 1 phép hoán vị, thực hiện các bước sau
⇨ Bước 1, biểu diễn phép hoán vị dưới dạng 1 hoán vị của dãy số 1, 2, 3, …, gọi hoán vị này là P

- Ví dụ, phép hoán vị tọa độ (a, b, c, d) thành (d, a, c, b) tương đương phép hoán vị 1234 thành P = 4132
- Bước 2, tạo ma trận không A cấp n, n là phần tử hoán vị
- Bước 3, lặp qua các phần tử của P từ trái sang, đồng thời lặp qua các hàng của A từ trên xuống, phần tử tương ứng của P có giá trị nào thì ô thứ đó trong hàng sẽ được đánh = 1
- Ví dụ P = 4132, thì trong hàng đầu tiên của A, phần tử thứ 4 sẽ được đánh 1, trong hàng thứ 2, phần tử thứ nhất được đánh 1, …

18. Ma Trận Tự Nghịch Đảo (Involutary Matrix)?

- Là ma trận vuông bằng chính nghịch đảo của nó
- Cho A là ma trận tự nghịch đảo bất kì cấp n, ta có các định lý

A không khiếm khuyết, nghĩa là nó có đủ n Eigen Vector
A chỉ có Eigen Value là 1 hoặc –1
Định thức của A chỉ có thể là 1 hoặc –1
A^n = A nếu n là số nguyên dương lẻ, hoặc = ma trận Identity nếu n là số nguyên dương chẵn

Matrix Form – Dạng Của Ma Trận:

1. Dạng (Form) Của Ma Trậnì?

- Cho ma trận A, dùng các phép biến đổi Gauss để tạo ra ma trận B, khi đó B là 1 dạng của A, nói cách hàng A và B tương đương hàng (Row Equivalent)

2. Tương Đương Hàng (Row Equivalent)?

- 2 ma trận gọi là tương đương hàng nếu có thể dùng các phép biến đổi Gauss để chuyển đổi qua lại giữa 2 ma trận
- Tập hợp tất cả các ma trận tương đương hàng tạo thành 1 lớp

3. Dạng Hàng Bậc Thang (Row Echelon Form) Và Dạng Hàng Bậc Thang Rút Gọn (Row Reduced Echelon Form, Row Canonical Form)?

- Xét dạng hàng bậc thang
- Từ trên xuống, xét mỗi hàng, phần tử đầu tiên của hàng khác 0 gọi là phần tử cơ sở, vị trí của số này gọi là vị trí cơ sở (Pivot Position), biến ứng với nó gọi là biến cơ sở (Leading Variable), và cột chứa nó là cột cơ sở (Pivot Column)
- Cột sơ sở ở hàng tiếp theo phải ở bên phải cột cơ sở của hàng hiện tại
- Các biến không phải là biến cơ sở của bất kì dòng nào gọi là biến tự do (Free Variable)
- Nếu tất cả cột cơ sở đều là One Hot Vector thì là dạng hàng bậc thang rút gọn
- Mỗi ma trận sẽ có nhiều dạng hàng bậc thang nhưng chỉ có duy nhất 1 dạng hàng bậc thang rút gọn
- Ma trận hàng bậc thang rút gọn còn được gọi là ma trận chính tắc của tất cả ma trận tương đương hàng với nó
- Ví dụ

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 10 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Dạng hàng bậc thang rút gọn của M là

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Để ý thấy, nếu sắp xếp lại các cột của dạng hàng bậc thang rút gọn, ta luôn có dạng

$$R' = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ I là ma trận Identity
- ⇨ F là ma trận có cùng số hàng với I
- ⇨ 0 là ma trận 0
- ⇨ Từ công thức trên, ta dễ dàng suy ra được ma trận Null Space, nói cách khác là ma trận mà các cột của nó đều là các nghiệm đặc biệt của hệ thuần nhất ứng với ma trận đang xét đã được sắp xếp cột

$$N' = \begin{pmatrix} -F \\ I' \end{pmatrix}$$

- ⇨ I’ cũng là ma trận Identity, khác I
- ⇨ Ví dụ

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Complex Matrix – Ma Trận Phức:

1. Ma Trận Liên Hợp Phức (Conjugate Matrix)?

- ⇨ Cho ma trận A bất kì trong trường số phức, lấy liên hợp các phần tử của A được ma trận liên hợp phức của A
- ⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 4+3i & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 4-3i & 5 \end{pmatrix}$$

2. Chuyển Vị Liên Hợp Phức (Conjugate Transpose, Hermitian Transpose)?

- ⇨ Cho ma trận A bất kì trong trường số phức, lấy ma trận liên hợp phức của A rồi chuyển vị nó ta được ma trận chuyển vị liên hợp phức của A, kí hiệu A*
- ⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & 7+2i \\ -2i & 3+4i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2-i & 2i \\ 1+i & 3-4i \\ 7-2i & 4 \end{pmatrix}$$

3. Thương Số Rayleigh?

- ⇨ Cho ma trận Hermitian A cấp n và Vector x, khi đó, thương số Rayleigh của A và x là

$$R_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, x \in C^n/\{0\}$$

- ⇨ Bản chất của thương số Rayleigh chính là trung bình có trọng số của tất cả Eigen Value
- ⇨ Chứng minh

- ⇨ Vì A là ma trận Hermitian nên có các Eigen Vector độc lập tuyến tính vuông góc với nhau từng đôi một, chọn tất cả các Eigen Vector độc lập tuyến tính với độ dài = 1 làm thành cột của ma trận chuyển đổi Mod của A, gọi là Q, rõ ràng Q là 1 ma trận trực giao, ta có

$$Q^*AQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$$

- ⇨ Λ là ma trận đường chéo vuông chứa λ là Eigen Value của A

$$R_A\big((Qx)\big) = \frac{(Qx)^*A(Qx)}{(Qx)^*(Qx)} = \frac{x^*Q^*AQx}{x^*Q^*Qx} = \frac{x^*\Lambda x}{x^*Ix} = \frac{x^*\Lambda x}{x^*x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \Leftrightarrow$$
$$R_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(Q^{-1}x\right)_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Q^{-1}x)_i^2}$$

- ⇨ Rõ ràng đây chính là trung bình có trọng số của tất cả Eigen Value, trọng số là bình phương tọa độ x ứng với Basis là Q
- ⇨ Dễ thấy nếu x là Eigen Vector thì thương số Rayleigh sẽ là Eigen Value tương ứng
- ⇨ Đồng thời, do trọng số là bình phương nên chắc chắn dương, do đó Min và Max của thương số Rayleigh lần lượt là Eigen Value nhỏ nhất và Eigen Value lớn nhất

Vector Space – Không Gian Vector:

1. Không Gian Vector?

- ⇨ Là 1 tập hợp không rỗng V kết hợp với 2 toán tử là phép cộng giữa 2 phần tử trong V, kí hiệu là “+” và phép nhân giữa 1 phần tử trong F với 1 phần tử trong V để cho ra 1 phần tử trong V, kí hiệu là av, a thuộc F, v thuộc V, đồng thời thỏa mãn các tính chất sau, giả sử Identity của F ứng với toán tử cộng là e_1, ứng với toán tử nhân là e_2, của (V, +) là e_3, phần tử đối xứng với e_2 trong phép cộng kí hiệu là $-e_2$, phần tử đối xứng với phần tử v nào đó trong V kí hiệu là –v

(V, +) phải là nhóm giao hoán
$$a(bv) = (ab)v, \forall a, b \in F, \forall v \in V$$
$$e_2 v = v, \forall v \in V$$
$$a(u + v) = au + av, \forall a \in F, \forall u, v \in V$$
$$(a + b)v = av + bv, \forall a, b \in F, \forall v \in V$$

- ⇨ Hệ quả

$$e_1 v = e_3, \forall v \in V$$
$$ae_3 = e_3, \forall a \in F$$
$$(-e_2)v = -v, \forall v \in V$$
$$av = e_3, a \in F, v \in V \rightarrow a = e_1 \vee v = e_3$$

- ⇨ Phần tử trong V gọi là Vector

2. Không Gian Tích Trong (Inner Product Space)?

- ⇨ Là 1 không gian Vector V trên trường F là trường số thực R hoặc số phức C kèm theo 1 toán tử tích trong, toán tử này áp dụng lên 2 Vector trong V để cho ra 1 phần tử trong F, kí hiệu là ⟨u,v⟩, u và v là 2 Vector trong V, đồng thời với mọi Vector u, v, w trong V và với mọi phần tử a, b trong F, chúng phải thỏa mãn toàn bộ các tính chất sau, lưu ý 1 dấu gạch trên đầu là liên hợp phức, 2 dấu gạch trên đầu là lấy phần thực, Identity của của (V, +) là e

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$
$$\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$
$$u \neq e \Rightarrow \langle u, u\rangle > 0$$

⇨ Hệ quả

$$\langle e, u\rangle = \langle u, e\rangle = 0$$
$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = e$$
$$\langle u, av + bw\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, w\rangle$$
$$\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\overline{\overline{\langle u, v\rangle}}$$

⇨ Chiều dài (Norm) của Vector v trong gian tích trong V được định nghĩa bằng biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

⇨ Khoảng cách giữa 2 Vector u và v trong không gian tích trong V được định nghĩa bằng biểu thức sau, phần tử đối xứng v trong V kí hiệu là –v

$$d(u, v) = \|u + (-v)\|$$

⇨ 2 Vector u và v trong không gian tích trong V được gọi là vuông góc khi tích trong của chúng = 0

⇨ Vector u vuông góc với tập hợp Vector A trong V chỉ khi u vuông góc với từng phần tử của A

⇨ Tập hợp Vector M gọi là 1 họ trực giao của V khi mỗi cặp Vector trong M đều vuông góc với nhau

⇨ M gọi là họ trực chuẩn khi tất cả Vector trong M đều có chiều dài = 1

⇨ Tích vô hướng như ta đã biết ở cấp 2 gọi là tích trong chính tắc hay tích vô hướng chính tắc

3. Không Gian Vector Euclidean (Euclidean Vector Space)?

⇨ Là không gian tích trong trên trường số thực R với số chiều hữu hạn

⇨ Góc giữa 2 Vector u và v trong 1 không gian Vector Euclidean được định nghĩa bằng biểu thức sau

$$\alpha = arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)$$

4. Tổ Hợp Tuyến Tính (Linear Combination)?

⇨ Cho không gian Vector V trên trường F, cho A = [v_1, v_2, …, v_n] là 1 dãy các Vector nào đó trong V, các Vector có thể trùng nhau, cho B = [a_1, a_2, …, a_n] là 1 dãy các phần tử nào đó trong F, các phần tử có thể trùng nhau, khi này tổ hợp tuyến tính v của A với B là

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

⇨ Nếu tất cả phần tử trong B đều = Identity của F ứng với phép cộng, thì tổ hợp tuyến tính trên gọi là tổ hợp tuyến tính tầm thường (Trivial Linear Combination)

⇨ Còn nếu chỉ cần chứa 1 phần tử khác Identity, thì gọi là tổ hợp tuyến tính không tầm thường (Non Trivial Linear Combination)

⇨ Nếu tồn tại B sao cho tổ hợp trên là không tầm thường và cho ra v = Identity của (V, +) thì ta nói A phụ thuộc tuyến tính (Linear Dependent)

⇨ Ngược lại, ta nói A độc lập tuyến tính (Linear Independent)

⇨ Nếu A là 1 tập hợp, tức là chứa các phần tử khác nhau, thì tất cả tổ hợp tuyến của A với B bất kì gọi là họ Vector A hay Span của A, kí hiệu là Span(A) hoặc L(A), nếu A rỗng thì Span(A) chỉ chứa phần tử Identity của (V, +), kí hiệu {0}

⇨ Hạng của Span(A) = số tối đại các Vector độc lập tuyến tính của A, nghĩa là số chiều không gian nó Span
⇨ A được gọi là tập sinh (Spanning Set) của V nếu mọi phần tử trong V = tổ hợp tuyến tính nào đó của A
5. Không Gian Con (Subspace)?
⇨ Là tập con của 1 không gian Vector V nào đó và đồng thời cũng là 1 không gian Vector
⇨ Không gian con này được gọi là bình thường (Proper) nếu nó không phải là V và được gọi là tầm thường (Trivial) nếu nó = {0}
⇨ Cho 2 không gian con nào đó là A và B
⇨ Giao của 2 không gian con A ∩ B = không gian con khác bé hơn hoặc bằng 2 không gian con đầu
⇨ Lấy tổng 2 phần tử bất kì tương ứng trong 2 không gian con, ta sẽ Span 1 không gian con khác lớn hơn hoặc bằng 2 không gian con đầu = A + B
⇨ Số chiều Span bởi A + B = số chiều Span bởi A + số chiều Span bởi B – số chiều Span bởi A ∩ B
⇨ Tập hợp tất cả Vector vuông góc với không gian con A trong V gọi là bù vuông góc của A trong V, ví dụ đường thẳng vuông góc mặt phẳng

$$\boxed{A^{\perp} = \{\forall v \in V | v \perp A\}}$$

⇨ Số chiều của A + số chiều của bù vuông góc của A = số chiều của V
⇨ Bù vuông góc cũng là 1 không gian con trong V
⇨ Cho 1 Vector v bất kì trong V, cho không gian con A và bù vuông góc của A là B, khi này tồn tại duy nhất cặp Vector f, g, f thuộc A, g thuộc B, sao cho f + g = v, khi này f được gọi là hình chiếu vuông góc của v xuống A, kí hiệu f = $pr_A(v)$, và g được gọi là hình chiếu vuông góc của v xuống B, kí hiệu $pr_B(v)$
⇨ Khoảng cách từ giữa v và A = chiều dài của g, tương tự, khoảng cách giữa v và B = chiều dài của f
⇨ Ví dụ, A là 1 đường thẳng qua gốc tọa độ trong không gian 3D, B là mặt phẳng vuông góc A, cũng qua gốc tọa độ, cho 1 điểm M đâu đó, khi này dễ thấy M = Vector hình chiếu của M lên A + Vector hình chiếu của M lên B
6. Không Gian Con Bất Biến (Invariant Subspace)?
⇨ Cho ánh xạ f từ không gian Vector V tới chính nó, khi này 1 không gian con bất biến của V ứng với f là 1 không gian con S của V, sao cho mọi phần tử trong nó sau khi bị f áp dụng, trở thành 1 phần tử cũng trong S
⇨ V và không gian con tầm thường của V đều gọi là không gian con bất biến tầm thường của V ứng với f
7. Cơ Sở (Basis)?
⇨ B được gọi là 1 cơ sở của không gian Vector V nếu nó là tập sinh của V và độc lập tuyến tính
⇨ 1 không gian Vector có thể có nhiều Basis, và tất cả các Basis này đều có cùng số phần tử, gọi là số chiều của không gian Vector (Dimension) = dim(V)
⇨ Những cơ sở có cùng phần tử nhưng khác thứ tự thì khác nhau
⇨ B gọi là hữu hạn nếu số chiều nó Span là hữu hạn
8. Cơ Sở Chính Tắc (Standard Basis)?
⇨ Còn gọi là cơ sở sắp thứ tự, là cơ sở chứa toàn One Hot Vector
⇨ Ví dụ
⇨ Cơ sở chính tắc của không gian tọa độ thực

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

9. Biểu Diễn Của 1 Vector Ứng Với 1 Cơ Sở?

⇨ Cho Vector v, cơ sở B, biểu diễn của v ứng với B là 1 Vector mà các phần tử của nó là tọa độ của v ứng với B

⇨ Kí hiệu

$$[v]_B$$

10. Cách Chuyển Hệ Tọa Độ?

⇨ Cho Vector v trong không gian tọa độ thực, v đang có tọa độ ứng với cơ sở chính tắc, ta muốn biểu diễn tọa độ của v theo cơ sở khác thì dùng công thức

$$[v]_B = B^{-1}v$$

⇨ B là ma trận có các cột là cơ sở ta muốn biểu diễn tọa độ theo, gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc tới cơ sở B

⇨ Ví dụ

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$v = i + j = \frac{1}{3}B_1 + \frac{1}{3}B_2, B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

⇨ Cho cơ sở E và cơ sở F, ma trận chuyển cơ sở từ E tới F là

$$E^{-1}F$$

11. Cách Tạo Cơ Sở Vuông Góc Bằng Quá Trình Gram Schmidt?

⇨ Ban đầu ta có hệ Vector v_1, v_2, …, v_n, và ta muốn tạo ra hệ Vector khác sao cho mỗi Vector trong đó vuông góc với nhau từng đôi một, hệ này là u_1, u_2, …, u_n

⇨ Đầu tiên $u_1 = v_1$, tiếp theo, u_2 sẽ là cái Vector đồng phẳng với u_1 và v_2, đồng thời vuông góc u_1, u_2 đạt được = cách trừ v_2 đi 1 lượng u_1 sao cho nó vừa đủ vuông góc với u_1

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot \widehat{u_1})\widehat{u_1}$$

⇨ Tiếp tục u_3 sẽ đạt được = cách trừ v_3 đi 1 lượng u_2 và u_1 sao cho nó vừa đủ vuông góc với cả u_2 và u_1

$$u_3 = v_3 - (v_3 \cdot \widehat{u_2})\widehat{u_2} - (v_3 \cdot \widehat{u_1})\widehat{u_1},$$

⇨ Tổng quát hóa, u_n sẽ được tính như sau

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n \cdot \widehat{u_i})\widehat{u_i}$$

⇨ Hệ Vector u tạo thành 1 hệ vuông góc, đồng thời có Span = Span của hệ Vector cũ v, trong quá trình này, nếu u_n tính được = 0, thì u_n phụ thuộc tuyến tính vào những Vector trước đó, nên quá trình Gram Schmidt còn được dùng để Check xem hệ Vector có độc lập tuyến tính không

⇨ Sau khi có được hệ Vector u, ta sẽ chuẩn hóa nó để độ dài mỗi Vector = 1, gọi ma trận Q có các cột là Vector u đã được chuẩn hóa, khi đó, do Span của Q = Span của hệ Vector v, nên ma trận chiếu vuông góc vào Q cũng chính là ma trận chiếu vuông góc vào Span của hệ Vector v, dùng công thức ma trận chiếu vuông góc, ta có ma trận chiếu là

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QI^{-1}Q^T = QQ^T$$

⇨ Như vậy, quá trình Gram Schmidt còn được dùng để thiết lập ma trận chiếu vuông góc vào hệ Vector ban đầu

12. Một Số Không Gian Vector?

⇨ Không gian Vector tọa độ thực n chiều, mọi không gian Vector đều có thể quy về không gian này bằng cách chuyển cơ sở

R_n
$dim(R_n) = n$

⇨ Không gian Vector với Vector là các đa thức bậc n theo biến x trên trường số thực

$P_n[x]$
$dim(P_n[x]) = n + 1$

⇨ Không gian Vector với Vector là các ma trận m x n với m khác n trên trường F

$M_{m\times n}[F]$
$dim(M_{m\times n}[F]) = mn$

⇨ Ví dụ các ma trận có kích thước 3 x 2 trên trường số thực

$M_{3\times 2}[R]$

⇨ Trường hợp ma trận vuông cấp n kí hiệu như sau

$M_n[F]$

⇨

Block Matrix – Ma Trận Khối:

1. Ma Trận Khối?

⇨ Là 1 ma trận A mà mỗi phần tử của nó là 1 ma trận, gọi là khối, sao cho tất cả khối trong cùng 1 hàng của A thì có cùng số hàng, và tất cả khối trong cùng 1 cột của A thì có cùng số cột

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

⇨ Trong đó

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} q & r & s \\ t & w & u \\ v & x & y \end{pmatrix}$$

⇨ Khai triển A

$$A = \begin{pmatrix} a & b & e & f & g \\ c & d & h & i & j \\ k & l & q & r & s \\ m & n & t & w & u \\ o & p & v & x & y \end{pmatrix}$$

2. Nhân 2 Ma Trận Khối?

⇨ Tương đương nhân ma trận thông thường, với phần tử là các khối, lưu ý thứ tự nhân các khối và các khối phải tương thích

⇨ Nhân ma trận khối A cho ma trận khối B rồi khai triển, tương đương nhân A khai triển cho B khai triển

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}, B_{13} = \begin{pmatrix} 29 & 31 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 16 & 24 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}, B_{23} = \begin{pmatrix} 27 & 33 \\ 26 & 34 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (32) + (158) & (55 \quad 65) + (215 \quad 290) & (85 \quad 95) + (335 \quad 410) \\ \begin{pmatrix} 137 \\ 102 \\ 54 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 269 \\ 197 \\ 218 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 240 & 280 \\ 188 & 212 \\ 91 & 109 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 360 & 500 \\ 273 & 362 \\ 305 & 405 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 370 & 410 \\ 288 & 312 \\ 141 & 159 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 570 & 710 \\ 423 & 512 \\ 475 & 575 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 190 & 270 & 355 & 420 & 505 \\ 406 & 600 & 780 & 940 & 1120 \\ 299 & 461 & 574 & 711 & 824 \\ 272 & 396 & 514 & 616 & 734 \end{pmatrix}$$

3. Ma Trận Khối Đường Chéo (Block Diagonal Matrix)?

⇨ Là ma trận khối sao cho thỏa mãn các điều kiện sau

Là ma trận vuông
Các phần tử trên đường chéo chính là ma trận vuông, các phần tử còn lại đều là ma trận không

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

⇨ Với

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_2 = (e), A_3 = \begin{pmatrix} f & g & h \\ i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

⇨ Khai triển A

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & i & j & k \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{pmatrix}$$

4. Ma Trận Jordan?

⇨ Là ma trận khối đường chéo sao cho các phần tử ma trận trên đường chéo chính, còn gọi là các khối Jordan, thỏa mãn các điều kiện sau

Toàn bộ phần tử trên đường chéo chính của nó có giá trị bằng nhau, giá trị này gọi là Eigen Value của khối Jordan
Toàn bộ phần tử trên đường chéo trên của nó có giá trị = 1

⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

⇨ Với

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = (4), A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⇨ Khai triển A

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Tính Mũ Của Ma Trận Jordan?

⇨ Cho ma trận Jordan J, khi này, J^n tương đương với việc ta lấy từng khối Jordan trong J mũ lên, với số mũ là n

⇨ Mũ n của 1 khối Jordan cấp m được tính như sau, λ là Eigen Value của khối này

⇨ Bước 1, Reset khối Jordan về ma trận không

⇨ Bước 2, thay các phần tử trên đường chéo trên Offset k thành biểu thức sau, k chạy từ 0 tới m – 1 hoặc chạy từ 0 tới n nếu m – 1 > n

$C_n^k \lambda^{n-k}$

⇨ Ví dụ 1

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} C_6^0 3^6 & C_6^1 3^5 & C_6^2 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & C_6^0 3^6 & C_6^1 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_6^0 3^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_6^0 5^6 & C_6^1 5^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6^0 5^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 729 & 1458 & 1215 & 0 & 0 \\ 0 & 729 & 1458 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 729 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15625 & 18750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15625 \end{pmatrix}$

⇨ Ví dụ 2

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} C_3^0 4^3 & C_3^1 4^2 & C_3^2 4^1 & C_3^3 4^0 & 0 \\ 0 & C_3^0 4^3 & C_3^1 4^2 & C_3^2 4^1 & C_3^3 4^0 \\ 0 & 0 & C_3^0 4^3 & C_3^1 4^2 & C_3^2 4^1 \\ 0 & 0 & 0 & C_3^0 4^3 & C_3^1 4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3^0 4^3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 64 & 48 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 64 & 48 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 64 & 48 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

6. Jordan Decomposition?

⇨ Cho 1 ma trận vuông A cấp n bất kì với các phần tử thuộc trường số phức, khi này ta luôn có thể tìm ra ma trận P và ma trận J, J còn được gọi là dạng Jordan bình thường (Jordan Normal Form, Jordan Canonical Form) của A, sao cho

$A = PJP^{-1}$

⇨ Bước 1, tìm các tất cả Eigen Value phân biệt của A, kí hiệu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, cùng với các bội đại số tương ứng, kí hiệu $a_1, a_2, \dots, a_m$

⇨ Bước 2, kẻ bảng sau

	λ_1	λ_2	λ_3	…	λ_m

…					
Bậc 3					
Bậc 2					
Bậc 1					

- ⇨ Ở ô thuộc bậc k, cột λ_i, ta điền D dấu chấm, căn lề trái, với D là số chiều của không gian con riêng bậc k của λ
- ⇨ Điền các ô từ bậc 1 lên trên, dừng lại khi số chấm trong cột $\lambda_i = a_i$
- ⇨ Bước 3, lặp qua tất cả các dấu chấm ở hàng bậc 1, ứng với mỗi dấu chấm, tạo 1 khối Jordan cấp w, với w là số chấm trên đường thẳng đứng đi qua chấm hiện tại, Eigen Value của nó = cột λ_i chứa dấu chấm, từ các khối Jordan này, tạo một ma trận Jordan tương ứng, khai triển nó được J
- ⇨ Bước 4, tạo tập S rỗng, lặp qua tất cả các dấu chấm ở hàng bậc 1, với mỗi dấu chấm, ta kẻ 1 đường thẳng đứng đi qua dấu chấm đó, sau đó tạo tập R rỗng, rồi lặp qua tất cả dấu chấm trên đường thẳng này từ trên xuống, với dấu chấm đầu tiên, giả sử nó bậc k, cột λ_i, chèn 1 Vector khác 0 thuộc không gian con riêng bậc k của λ_i vào R, sao cho Vector này tạo với các Vector ứng với các dấu chấm bên trái trong cùng ô 1 họ Vector độc lập tuyến tính, gọi là Vector v, với các dấu chấm tiếp theo trên đường hiện tại, lấy ma trận $A - \lambda_i I$ nhân với Vector được chèn vào R trước đó, rồi chèn Vector kết quả vào bên trái R, sau khi lặp qua hết dấu chấm trên đường, chèn R vào bên phải S
- ⇨ Bước 5, các Vector trong S tạo thành ma trận P
- ⇨ Ví dụ 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

- ⇨ Bước 1
- ⇨ Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = (1-x)(1-x)\big((-x)(2-x)(1-x) + (1-x)\big) = (1-x)^5$$

- ⇨ Dễ thấy phương trình đặc trưng của A chỉ có duy nhất 1 nghiệm $\lambda_1 = 1$, với bội đại số $a_1 = 5$
- ⇨ Bước 2
- ⇨ Tìm số chiều của của không gian con riêng bậc 1 của λ_1

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Elimination]{Gaussian} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_1 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Null Space của A_1 có số chiều = 2, điền 2 chấm vào ô bậc 1 cột λ_1
- ⇨ Tìm số chiều của không gian con riêng bậc 2 của λ_1

$$(A-\lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{Elimination}{\overset{Gaussian}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

$$A_2 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Null Space của A_2 có số chiều = 4, điền 2 chấm vào ô bậc 2 cột λ_1, để tổng số chấm = 4

⇨ Tìm số chiều của không gian con riêng bậc 3 của λ_1

$$(A-\lambda_1 I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3$$

$$A_3 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Null Space của A_3 có số chiều = 5, điền 1 chấm vào ô bậc 3 cột λ_1, để tổng số chấm = 5, ta dừng lại ở đây

	λ_1
Bậc 3	•
Bậc 2	• •
Bậc 1	• •

⇨ Bước 3, ma trận J tạo ra từ bảng trên là

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Bước 4

⇨ Với chấm trên cùng ở đường màu đỏ bên trái, Vector v_3 phải thuộc Null Space của $(A-\lambda_1 I)^3$ nhưng không thuộc Null Space của $(A-\lambda_1 I)^2$, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta dễ dàng chọn

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Với chấm tiếp theo ngay bên dưới ở bậc 2, Vector v_2 của nó là

$$v_2 = (A - \lambda_1 I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Với chấm tiếp theo ngay bên dưới ở bậc 1, Vector v_1 của nó là

$$v_1 = (A - \lambda_1 I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Với chấm trên cùng ở đường màu đỏ bên phải, Vector u_2 của nó phải thuộc Null Space của $(A - \lambda_1 I)^2$ nhưng không thuộc Null Space của $A - \lambda_1 I$, đồng thời phải độc lập tuyến tính với v_2, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta dễ dàng chọn

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Với chấm tiếp theo ngay bên dưới ở bậc 1, Vector u_1 của nó là

$$u_1 = (A - \lambda_1 I)u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Như vậy ta có ma trận P là

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad u_1 \quad u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Ví dụ 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - xI = \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 2-x & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2-x & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

- ⇨ Bước 1
- ⇨ Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = (2-x)^3(1-x)^2$$

- ⇨ Dễ thấy phương trình đặc trưng của A chỉ có duy nhất 2 nghiệm $\lambda_1 = 2$, với bội đại số $a_1 = 3$, và $\lambda_2 = 1$, với bội đại số $a_2 = 2$
- ⇨ Bước 2
- ⇨ Tìm số chiều của của không gian con riêng bậc 1 của λ_1

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Elimination]{Gaussian} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_1 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- ⇨ Null Space của A_1 có số chiều = 2, điền 2 chấm vào ô bậc 1 cột λ_1
- ⇨ Tìm số chiều của không gian con riêng bậc 2 của λ_1

$$(A - \lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -8 & 3\\0 & 0 & 0 & -7 & -5\\0 & 0 & 0 & -7 & -5\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[Elimination]{Gaussian} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = A_2$$

$$A_2 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- ⇨ Null Space của A_2 có số chiều = 3, điền 1 chấm vào ô bậc 2 cột λ_1, để tổng số chấm = 3, dừng lại ở ở đây, chuyển sang λ_2
- ⇨ Tìm số chiều của của không gian con riêng bậc 1 của λ_2

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 8 & -3\\0 & 1 & 0 & 7 & 5\\0 & 0 & 1 & 7 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[Elimination]{Gaussian} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 8 & -3\\0 & 1 & 0 & 7 & 5\\0 & 0 & 1 & 7 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = A_3$$

$$A_3 v = 0 \Leftrightarrow v = a\begin{pmatrix}8\\7\\7\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-5\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$$

- ⇨ Null Space của A_3 có số chiều = 2, điền 2 chấm vào ô bậc 1 cột λ_2, dừng lại ở đây

	λ_1	λ_2
Bậc 2	•	
Bậc 1	• •	• •

- ⇨ Bước 3, ma trận J tạo ra từ bảng trên là

$$J = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- ⇨ Bước 4
- ⇨ Với chấm trên cùng ở đường màu đỏ thứ nhất từ trái sang, Vector v_2 phải thuộc Null Space của $(A - \lambda_1 I)^2$ nhưng không thuộc Null Space của $A - \lambda_1 I$, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta dễ dàng chọn

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Với chấm tiếp theo ngay bên dưới ở bậc 1, Vector v_1 của nó là

$$v_1 = (A - \lambda_1 I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Với chấm ở đường màu đỏ thứ 2, Vector u_1 của nó phải thuộc Null Space của $A - \lambda_1 I$, đồng thời phải độc lập tuyến tính với v_1, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta dễ dàng chọn

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Với chấm ở đường màu đỏ thứ 3, Vector w_1 của nó phải thuộc Null Space của $A - \lambda_2 I$, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta có thể chọn

$$w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Với chấm ở đường màu đỏ thứ 4, Vector t_1 của nó phải thuộc Null Space của $A - \lambda_2 I$, đồng thời phải độc lập tuyến tính với w_1, từ cơ sở đã tính của các Null Space này, ta có thể chọn

$$t_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Như vậy ta có ma trận P là

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad u_1 \quad w_1 \quad t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Product – Tích:

1. Tích Hadamard (Hadamard Product)?

⇨ Là phép nhân từng phần tử của ma trận này với phần tử tương ứng của ma trận kia

⇨ Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ -2 & 20 \\ 27 & 42 \end{pmatrix}$$

2. Tích Kronecker (Kronecker Product)?

⇨ Tích Kronecker giữa Tensor A và Tensor B là phép thay thế mỗi phần tử C của A bằng 1 Tensor có giá trị = CB

⇨ Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} & -3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \\ 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -12 & -9 \\ 2 & 10 & -3 & -15 \\ 18 & 14 & -27 & -21 \\ 16 & 12 & 4 & 3 \\ 4 & 20 & 1 & 5 \\ 36 & 28 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Tích Ngoài (Outer Product) Của 2 Tensor?

⇨ Giả sử Tensor A có Shape là (7, 8, 9), Tensor B có Shape là (10, 11, 12, 13, 15), gọi C là tích ngoài của A với B, ta có

$$C[a, b, c, e, f, g, h, i] = A[a, b, c] * B[e, f, g, h, i]$$

⇨ a, b, c, e, f, g, h, i là các Index

⇨ Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

4. Tích Boolean (Boolean Product)?

⇨ Cho A là ma trận chỉ có giá trị 0 hoặc 1, B cũng là ma trận chỉ có giá trị 0 hoặc 1, khi này tích Boolean của A với B = tích ma trận của A với B bị giới hạn trên, nghĩa là nếu có giá trị nào > 1 thì nó sẽ trở thành 1

⇨ Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Tensor Nén (Tensor Contraction)?

⇨ Ví dụ Tensor A có Shape là (7, 8, 9), Tensor B có Shape là (10, 11, 12, 8, 15), gọi C là Tensor Nén của A với B, chiều nén tương ứng là chiều thứ 2 của A và thứ 4 của B, ta có

$$C[a, c, e, f, g, i] = \sum_{N=1}^{8} A[a, N, c] * B[e, f, g, N, i]$$

⇨ a, c, e, f, g, i là các Index

6. Tích Nêm (Wedge Product) Bản Chất Là Gì?

⇨ Tích nêm của 2 Vector u và v sẽ tạo 1 Vector ở chiều không gian khác gọi là không gian ngoài bình phương (Exterior Square) mà khi lấy Module của nó sẽ cho ra diện tích hình bình hành tạo bởi 2 Vector ấy, kí hiệu $u \wedge v$

⇨ Vì diện tích của hình bình hành tạo bởi 2 Vector trùng nhau = 0 nên

$$u \wedge u = 0$$

⇨ Hơn nữa, kéo dài 1 Vector bao nhiêu lần thì diện tích cũng tăng bấy nhiêu lần

$$u \wedge (kv) = k(u \wedge v)$$

⇨ Tưởng tượng u, v, w tạo thành hình hộp chữ nhật để chứng minh tính chất phân phối của tích nêm với trường hợp hình hộp chữ nhật, rồi dùng ma trận biến đổi thành hình hộp bình hành bất kì để áp dụng cho u, v, w bất kì, ta được tính chất phân phối tổng quát

$$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$$

⇨ Từ 2 tính chất trên, ta có

$$(u + v) \wedge (u + v) = 0 \Rightarrow u \wedge u + u \wedge v + v \wedge u + v \wedge v = u \wedge v + v \wedge u = 0 \Rightarrow u \wedge v = -v \wedge u$$

⇨ Tính chất kết hợp của tích nêm

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$$

⇨ Tích nêm của n Vector trong không gian m chiều sẽ có số phần tử là tổ hợp chập n của m, và Basis có dạng tích nêm của n Vector đơn vị

7. Tích Có Hướng Có Phải Tích Nêm?

⇨ Không, mặc dù giá trị các phần tử giống nhau, nhưng tích có hướng tạo Vector có Basis là i, j, k, …, còn tích nêm tạo Vector có Basis là $i \wedge j$, $i \wedge k$, $j \wedge k$, …

8. Ví Dụ Tính Tích Nêm?

⇨ Tìm diện tích hình bình hành tạo ra từ 2 Vector trong không gian 4 chiều sau, gọi các Vector đơn vị của không gian này là i, j, k, l

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

⇨ Vector trong chiều không gian ngoài bình phương có Module là diện tích của hình bình hành này là

$$u = a \wedge b = (i + 2j + 3k + 4l) \wedge (7i + 8j + 9k + 10l) = -6i \wedge j - 12i \wedge k - 18i \wedge l - 6j \wedge k - 12j \wedge l - 6k \wedge l$$

⇨ Diện tích của hình bình hành này là

$$|u| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 18^2 + 6^2 + 12^2 + 6^2} = 12\sqrt{5}$$

9. Mẹo Tính Tích Nêm?

⇨ Giả sử ta muốn tính $A = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_n$, đây đều là những Vector trong không gian m chiều, n không vượt quá m, xếp các Vector này thành ma trận sau

$$\begin{pmatrix} x_1[0] & x_1[1] & \ldots & x_1[m] \\ x_2[0] & x_2[1] & \ldots & x_2[m] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n[0] & x_n[1] & \ldots & x_n[m] \end{pmatrix}$$

⇨ Để tính hệ số của 1 Basis bất kì của A, ta xác định Basis đó là tích nêm của những Vector đơn vị nào, lưu ý các Vector đơn vị này sắp xếp theo thứ tự tăng dần, sau đó giữ lại các cột tương ứng với những Vector đơn vị này, loại bỏ các cột còn lại, rồi tính định thức của ma trận nhận được, ta được hệ số

Gaussian Elimination – Phép Khử Gauss:

1. Phép Khử Gauss Trên 1 Ma Trận?

⇨ Là 1 trong 2 thao tác sau

⇨ Thế 1 hàng/cột = tổ hợp tuyến tính của tất cả các hàng/cột, trong đó hệ số của hàng/cột được thế phải khác 0

⇨ Tráo các hàng/cột

2. Phép Khử Gauss Làm Biến Đổi Và Không Làm Biến Đổi Những Tính Chất Nào Của Ma Trận?

⇨ Xét trường hợp chỉ khử hàng

- ⇨ Trong suốt quá trình khử, không gian hàng và Null Space của ma trận không thay đổi, nhưng không gian cột và Left Null Space có thể thay đổi
- ⇨ Đồng thời, các cột trong ma trận ban đầu có vị trí là vị trí các cột cơ sở ở dạng hàng bậc thang rút gọn cuối cùng sẽ tạo thành cơ sở của không gian cột của ma trận ban đầu
- ⇨ Xét trường hợp chỉ khử cột
- ⇨ Y chang khử hàng, đổi chữ "hàng" thành "cột", "Null Space" thành "Left Null Space" và ngược lại
- ⇨ Nếu sử dụng cả khử hàng và khử cột cùng lúc thì có thể làm biến đổi mọi tính chất của ma trận

3. Dùng Phép Khử Gauss Để Tìm Nghịch Đảo Của Ma Trận?

- ⇨ Giả sử A là ma trận vuông cấp m, I là ma trận Identity cấp m, để tìm nghịch đảo của A, ta thực hiện phép khử Gauss theo hàng trên ma trận mở rộng (A | I) để được dạng hàng bậc thang rút gọn F, nhìn vào F, nếu nó có hạng < m, thì kết luận A suy biến, nếu có hạng bằng m, thì F có dạng (I | B), khi đó B chính là nghịch đảo của A
- ⇨ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Elimination]{Gaussian}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{43} & -\frac{5}{43} & -\frac{4}{43} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{129} & -\frac{8}{129} & \frac{28}{129} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{129} & \frac{25}{129} & -\frac{23}{129} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{43} & -\frac{5}{43} & -\frac{4}{43} \\ -\frac{19}{129} & -\frac{8}{129} & \frac{28}{129} \\ \frac{11}{129} & \frac{25}{129} & -\frac{23}{129} \end{pmatrix}$$

- ⇨ Chứng minh
- ⇨ Vì khi dùng phép khử Gauss theo hàng, Null Space của (A | I) không thay đổi, hay ma trận Null Space của (A | I) y chang của (I | B), dễ thấy ma trận này là

$$\begin{pmatrix} -B \\ I \end{pmatrix}$$

- ⇨ Như đã nói ở trên, vì đây cũng là ma trận Null Space của (A | I), nên

$$(A|I)\begin{pmatrix} -B \\ I \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -AB + I = 0 \Leftrightarrow AB = I \Leftrightarrow B = A^{-1}$$

- ⇨ Vậy B chính là nghịch đảo của A
- ⇨ Trong toàn bộ quá trình biến đổi để tìm nghịch đảo

Số phép nhân, chia được thực hiện = m^3
Số phép cộng, trừ được thực hiện = $m^3 - 2m^2 + m$

4. Dùng Phép Khử Gauss Để Tính Định Thức?

- ⇨ Cho ma trận vuông A, cho a là 1 số bất kì, lấy 1 hàng trong A + a lần 1 hàng khác, định thức của A sẽ không thay đổi, đồng thời tất cả Eigen Value của A cũng không thay đổi, giống như hình hộp bình hành tạo ra từ 3 Vector, bạn tịnh tiến đầu của 1 Vector nào đó theo 1 Vector khác thì rõ ràng thể tích của hình hộp bình hành không đổi
- ⇨ Sử dụng phép biến đổi trên, chỉ cần ta đưa A về dạng ma trận tam giác trên, rồi lấy tích tất cả phần tử trên đường chéo chính của ma trận đó thì được định thức của A

Nếu nhân 1 hàng/cột với k thì định thức sẽ tăng k lần
Nếu hoán vị 2 hàng/cột, định thức đổi dấu

5. Trình Bày Phép Khử Gauss Theo Hàng Để Giải Hệ Phương Trình?

⇨ Ví dụ

⇨ Nhân hàng 1 với 4

$$\begin{matrix} \frac{1}{4}x + y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 12 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} d_1 \coloneqq 4d_1 \\ \longrightarrow \\ . \end{matrix} \quad \begin{matrix} x + 4y - 4z = 0 \\ x + 4y + 2z = 12 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{matrix}$$

⇨ Cộng –1 lần hàng 1 vào hàng 2 và –2 lần hàng 1 vào hàng 3

$$\begin{matrix} x + 4y - 4z = 0 \\ x + 4y + 2z = 12 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} d_2 \coloneqq d_2 - d_1 \\ \longrightarrow \\ d_3 \coloneqq d_3 - 2d_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x + 4y - 4z = 0 \\ 6z = 12 \\ -11y + 7z = 3 \end{matrix}$$

⇨ Tráo hàng 2 với hàng 3

$$\begin{matrix} x + 4y - 4z = 0 \\ 6z = 12 \\ -11y + 7z = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} d_2 \leftrightarrow d_3 \\ \longrightarrow \\ . \end{matrix} \quad \begin{matrix} x + 4y - 4z = 0 \\ -11y + 7z = 3 \\ 6z = 12 \end{matrix}$$

⇨ Giải từ dưới lên

$$\begin{matrix} z = 2 \\ y = 1 \\ x = 4 \end{matrix}$$

6. Biểu Diễn Nghiệm Của Hệ Phương Trình Vô Số Nghiệm?

⇨ Ví dụ

$$\begin{matrix} 2x + y + z - w = 5 \\ -y + z + 4w = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -z - \frac{3}{2}w + \frac{11}{2} \\ y = z + 4w - 6 \end{matrix}$$

7. Giải Hệ Phương Trình Dưới Dạng Ma Trận?

⇨ Dùng ma trận mở rộng rồi thực hiện phép khử Gauss theo hàng để đưa ma trận về dạng hàng bậc thang

⇨ Ví dụ

⇨ Hệ phương trình ban đầu

$$\begin{matrix} x + 4y - 4z = 1 \\ x + 4y + 2z = 12 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{matrix}$$

⇨ Biến đổi hệ phương trình dưới dạng ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 12 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} d_2 \coloneqq d_2 - d_1 \\ \longrightarrow \\ d_3 \coloneqq d_3 - 2d_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

8. Biểu Diễn Tập Nghiệm Vô Hạn Dưới Dạng Ma Trận Và Vector?

⇨ Ví dụ

$$\begin{matrix} x = -z - \frac{3}{2}w + \frac{11}{2} \\ y = z + 4w - 6 \end{matrix}$$

⇨ Dạng ma trận của tập nghiệm

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \middle| z, w \in R \right\}$$

⇨ Dạng Vector của tập nghiệm

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \middle| z, w \in R \right\}$$

- ⇨ Dễ thấy tập nghiệm này Span 1 mặt phẳng trong không gian 4 chiều

9. Hệ Thuần Nhất?

- ⇨ Là hệ phương trình mà tất cả hệ số tự do trong tất cả phương trình đều = 0
- ⇨ Ví dụ

$$x + 4y - 4z = 0$$
$$x + 4y + 2z = 0$$
$$2x - 3y - z = 0$$

- ⇨ Xét hệ thuần nhất dạng tổng quát

$$Ax = 0$$

- ⇨ A là 1 ma trận hình chữ nhật
- ⇨ x là 1 Vector dọc, là ẩn cần tìm
- ⇨ Giả sử có vô số nghiệm, khi đó tập hợp tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình trên sao cho chỉ có duy nhất 1 biến tự do có giá trị = 1, còn các biến tự do còn lại có giá trị = 0, gọi là các nghiệm đặc biệt (Special Solution)
- ⇨ Tổ hợp tuyến tính của tất cả các nghiệm đặc biệt tạo thành Null Space hay tập nghiệm của phương trình này
- ⇨ Hệ thuần nhất luôn có nghiệm = tất cả ẩn = 0, nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường (Trivial Solution)

10. Mặt Phẳng Đa Chiều?

- ⇨ Trong không gian n chiều, cho k Vector không đồng phẳng, k <= n, chọn 1 điểm cố định rồi từ điểm này Span k Vector kia, được mặt phẳng k chiều
- ⇨ Ví dụ
- ⇨ Đường thẳng là mặt phẳng 1 chiều

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t \middle| t \in R \right\}$$

- ⇨ Mặt phẳng 2 chiều trong không gian 4 chiều

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} v \middle| u, v \in R \right\}$$

11. Giải Pháp Bình Phương Tối Thiểu (Least Squares Solution) Cho Phương Trình Tuyến Tính Vô Nghiệm?

- ⇨ Cho A là 1 ma trận chữ nhật bất kì, B là 1 Vector nào đó, tìm Vector X để

$$AX = B$$

- ⇨ Giả sử phương trình này vô nghiệm, vậy thì làm sao ta tìm ra X để AX gần với B nhất, để ý thấy, khi X chịu tác dụng của A, nó sẽ bị ánh xạ tới 1 điểm đâu đó trong không gian cột của A, gọi điểm này là X', như vậy bài toán đưa về tìm X để khoảng cách X'B ngắn nhất, vâng X' chính là hình chiếu của B lên không gian cột của A, kết hợp công thức ma trận chiếu vuông góc P, ta được phương trình

$$AX = PB \Leftrightarrow AX = A(A^TA)^{-1}A^TB \Leftrightarrow X = (A^TA)^{-1}A^TB = A^{-1}\mathrm{B}$$

- ⇨ A^{-1} là chính là nghịch đảo bên trái của A
- ⇨ Phương pháp này áp dụng cho cả trường hợp B và X là ma trận

12. Hệ Không Tương Thích (Inconsistent System) Và Hệ Tương Thích (Consistent System)?

- ⇨ Hệ không tương thích là hệ phương trình vô nghiệm
- ⇨ Hệ tương thích thì có 1 nghiệm hoặc vô số nghiệm

13. Xác Định Nhanh Số Nghiệm Của Hệ Phương Trình Sử Dụng Định Lý Kronecker Capelli (Rouche Capelli)?

- ⇨ Cho A là ma trận hệ số của hệ phương trình, B là ma trận cột hệ số tự do, nếu có m phương trình với n ẩn thì A có kích thước m x n, B có kích thước m x 1
- ⇨ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi hạng của A là r(A) = hạng của ma trận bổ sung là r(A|B), khi này hệ có nghiệm duy nhất khi r(A) = n, và có vô số nghiệm khi r(A) < n
- ⇨ Hệ vo nghiệm khi và chỉ khi r(A) < r(A|B)

14. Quy Tắc Cramer?

- ⇨ Cho A là ma trận vuông cấp n không suy biến, X và B là 2 ma trận n x m bất kì sao cho thỏa mãn AX = B
- ⇨ Khi này, gọi C là ma trận con được tạo thành từ các hàng thứ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ và các cột thứ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ của X
- ⇨ Ví dụ

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$$

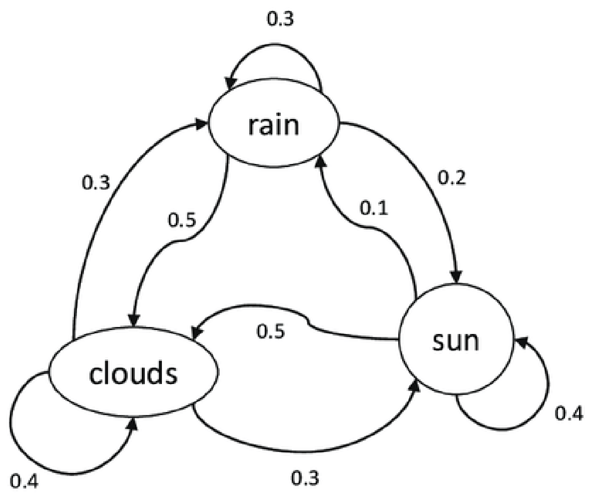
- ⇨ Dễ thấy C được tạo thành từ các hàng 2, 4, 6 và các cột 2, 4, 5 của X
- ⇨ Gọi D là ma trận nhận được bằng cách lấy A rồi thay các cột thứ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ trong nó thành các cột thứ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ tương ứng trong B, tiếp tục ở ví dụ trên, ta sẽ thay cột 2, 4, 6 của A bằng các cột 2, 4, 5 của B
- ⇨ Khi này, ta có đẳng thức

$$|C| = \frac{|D|}{|A|}$$

Model – Mô Hình:

1. Chuỗi Markov (Markov Chain)?

- ⇨ Là 1 mô hình mô tả 1 chuỗi các sự kiện, mà tỉ lệ sự kiện tiếp theo xảy ra chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại, số trạng thái là hữu hạn
- ⇨ Ví dụ



- ➯ Như trong hình, giả sử ta đang đứng ở clouds, thì đéo cần biết quá khứ ta đã làm gì, ta luôn có 30% tỉ lệ chuyển thành sun, 30% chuyển thành rain và 40% đéo biến đổi, hay khi đứng tại sun, đéo cần biết trước đó ta đứng ở đâu, ta luôn có 10% tỉ lệ chuyển thành rain ở bước tiếp theo, 50% tỉ lệ chuyển thành clouds và 40% tỉ lệ đéo biến đổi
- ➯ Mỗi bước chuyển trạng thái sẽ cách nhau 1 khoảng thời gian cố định

2. Ma Trận Ngẫu Nhiên (Stochastic Matrix)?

- ➯ Còn gọi là ma trận Markov
- ➯ Giả sử ta gieo vào vị trí các trạng thái trong chuỗi Markov một số lượng vật thể nhất định, thì bài toán đặt ra là khi thời gian chạy đến 1 lúc nào đó, số lượng vật thể ứng với mỗi trạng thái là bao nhiêu
- ➯ Cho X là Vector, mỗi phần tử của nó tương ứng là số lượng vật thể của trạng thái 1, 2, 3, …, lúc mới gieo vào, M là ma trận Markov ứng với chuỗi Markov này, S_i là trạng thái thứ i
- ➯ Hàng đầu tiên của M có các giá trị lần lượt là tỉ lệ số vật thể ở S_1 giữ nguyên trạng thái, tỉ lệ số vật thể ở S_2 chuyển sang S_1, tỉ lệ số vật thể ở S_3 chuyển sang S_1, …
- ➯ Hàng thứ 2 tương tự có các giá trị lần lượt là tỉ lệ số vật thể ở S_1 chuyển sang S_2, tỉ lệ số vật thể ở S_2 giữ nguyên trạng thái, tỉ lệ số vật thể ở S_3 chuyển sang S_2, …
- ➯ …
- ➯ Cứ như vậy, 1 cột của M sẽ có tổng luôn = 1, do chứa các giá trị là tỉ lệ vật thể từ cột đó tới toàn bộ các cột
- ➯ Sau n bước, số vật thể ở mỗi trạng thái là

$$M^n X$$

- ➯ Khi n dần tới vô tận, thì M^n dần hội tụ, và ta được trạng thái cân bằng

3. Mô Hình Leslie?

- ➯ Là mô hình cho cơ cấu dân số của 1 quần thể theo độ tuổi
- ➯ Giả sử quần thể được chia làm các lớp tuổi bằng nhau lần lượt là lớp tuổi 1, lớp tuổi 2, …, ví dụ từ 0 đến 5 tuổi là lớp tuổi 1, từ 5 đến 10 tuổi là lớp tuổi 2, …
- ➯ Gọi s_i và f_i lần lượt là tỉ lệ sống sót và tỉ lệ sinh của các cá thể thuộc lớp tuổi i, khi sinh con thì con sẽ thuộc lớp tuổi 1, giả sử có n lớp tuổi, khoảng cách giữa các lớp là k năm, lớp tuổi cuối sau k nữa năm sẽ chết

- ⇨ Ma trận Leslie ứng với quần thể này sẽ có kích thước n x n, hàng đầu tiên sẽ chứa các phần tử lần lượt là $f_1, f_2, \ldots, f_n$, khu vực (n – 1) x (n – 1) ở dưới hàng 1, tay trái, có dạng 1 ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo là $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, phần còn lại chứa toàn 0, ví dụ

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⇨ Cho Vector X chứa các phần tử lần lượt là số cá thể ở lớp tuổi 1, 2, …, n thời điểm hiện tại, thì sau m * k năm nữa, số cá thể của từng lớp tuổi là

$$L^m X$$

- ⇨ Nếu lớp tuổi cuối vẫn đéo chết và có tỉ lệ sống tiếp là s_n, thì trong L, phần tử cuối cùng sẽ chuyển từ 0 thành s_n

4. Mô hình Input Output?

- ⇨ Giả sử ta có các sản phẩm $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mỗi sản phẩm này có công thức chế tạo như sau

$x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{n1}x_n$ (1)
$x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots + a_{n2}x_n$ (2)
…
$x_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n$ (n)

- ⇨ Trong đó a_{ij} = số nguyên liệu x_i cần thiết để tạo ra 1 sản phẩm x_j
- ⇨ Giả sử chúng ta muốn sản xuất ra b_1 sản phẩm x_1, b_2 sản phẩm x_2, …, b_n sản phẩm x_n, khi này số nguyên liệu cần thiết sẽ = b_1 * (1) + b_2 * (2) + … + b_n * (n), ta sẽ sử dụng ma trận sau để tính toán dễ hơn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ⇨ Dễ thấy cột 1 của A ứng với công thức cho x_1, cột 2 cho x_2, …
- ⇨ Cho Vector B là Vector chỉ số lượng sản phẩm muốn tạo ra

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- ⇨ Khi này Vector chỉ số lượng nguyên liệu cần để sản xuất ra lượng sản phẩm B là

$$AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- ⇨ Nghĩa là để sản xuất ra b_1 sản phẩm x_1, b_2 sản phẩm x_2, …, b_n sản phẩm x_n, thì cần c_1 sản phẩm x_1, c_2 sản phẩm x_2, …, c_n sản phẩm x_n
- ⇨ Lưu ý ở đây ta phải trừ lượng sản phẩm sản xuất được cho lượng nguyên liệu thì mới được lượng sản phẩm lời, ví dụ dùng 3 cục cứt để tạo ra 7 cục cứt, khi này ta đã tạo ra thêm được 4 cục cứt, đây gọi là nhu cầu cuối cùng, là thứ có thể bán kiếm tiền, thay vì bán hết
- ⇨ Nhu cầu cuối cùng do đó được tính bằng

$$C = B - AB$$

- ⇨ Đảo ngược lại bài toán, cho trước nhu cầu cuối cùng và công thức tạo ra sản phẩm, hỏi tổng số lượng sản phẩm sản xuất được, còn gọi là đầu ra, ta có

$$C = B - AB = (I - A)B \Leftrightarrow B = (I - A)^{-1}C$$

⇨

Outer Product:

Def:

Là tích 2 Vector dưới dạng Matrix

Tác dụng của Vector nào đó lên hướng này biểu diễn trên hướng kia

$\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u}\vec{v}^T$

Ex:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{bmatrix}$$

Singular Value:

Def:

Căn 2 của Eigen Value của Matrix MM^T hoặc M^TM tùy theo matrix nào có số chiều nhỏ hơn

Sắp xếp các Singular Value theo chiều giảm dần

Ex:

$$M = \begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix} => \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 4$$

Left Singular Vector:

Def:

Normalized Eigen Vector của Matrix MM^T

Ex:

$$M = \begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix} => u_1 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

Right Singular Vector:

Def:

Normalized Eigen Vector của Matrix M^TM

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} => v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Eigen Value Decomposition:

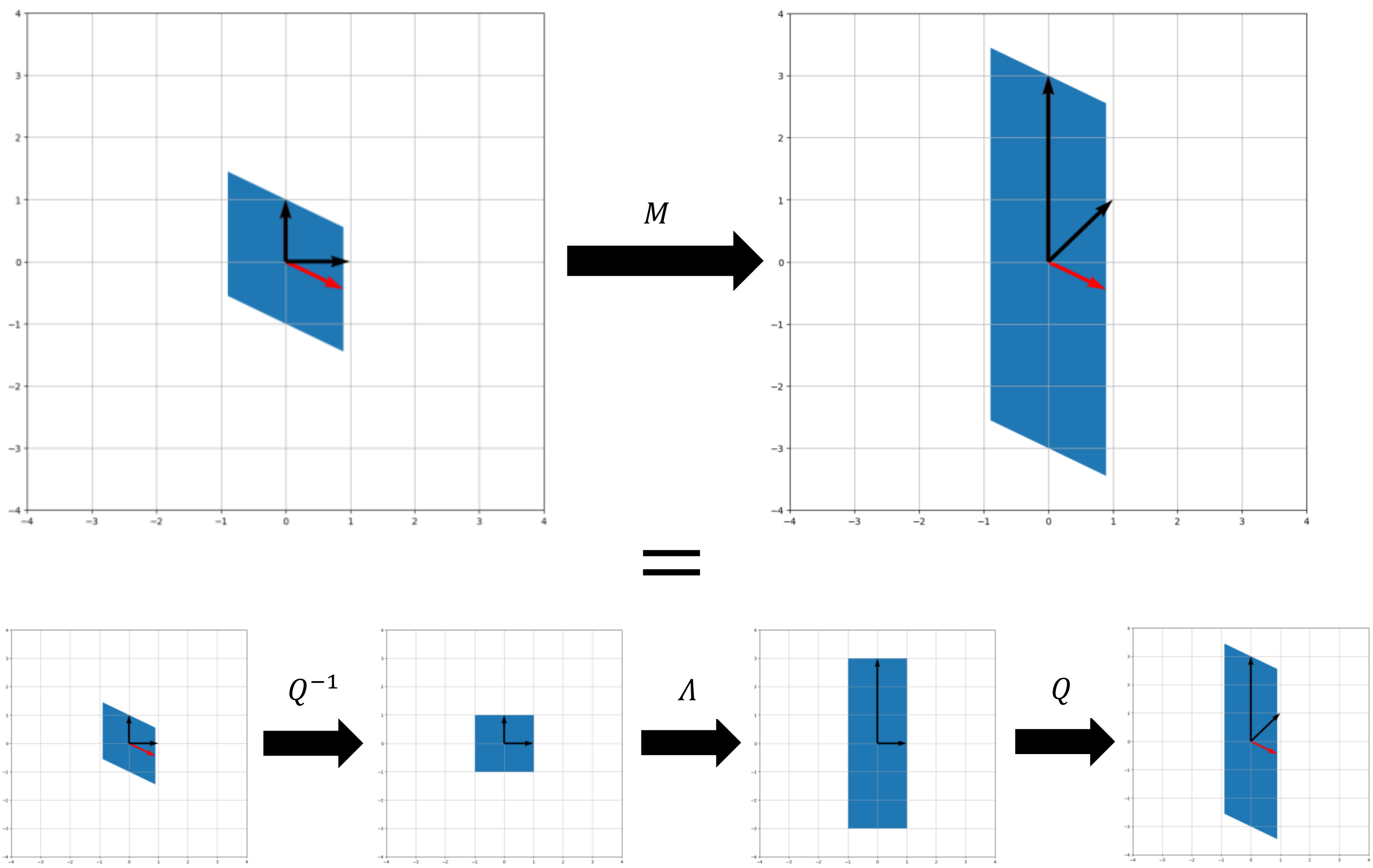
Def:

Phân tích Matrix M thành tích của Eigen Vectors Matrix Q và Eigen Values Matrix Λ

$M = Q\Lambda Q^{-1}$

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$



Singular Value Decomposition:

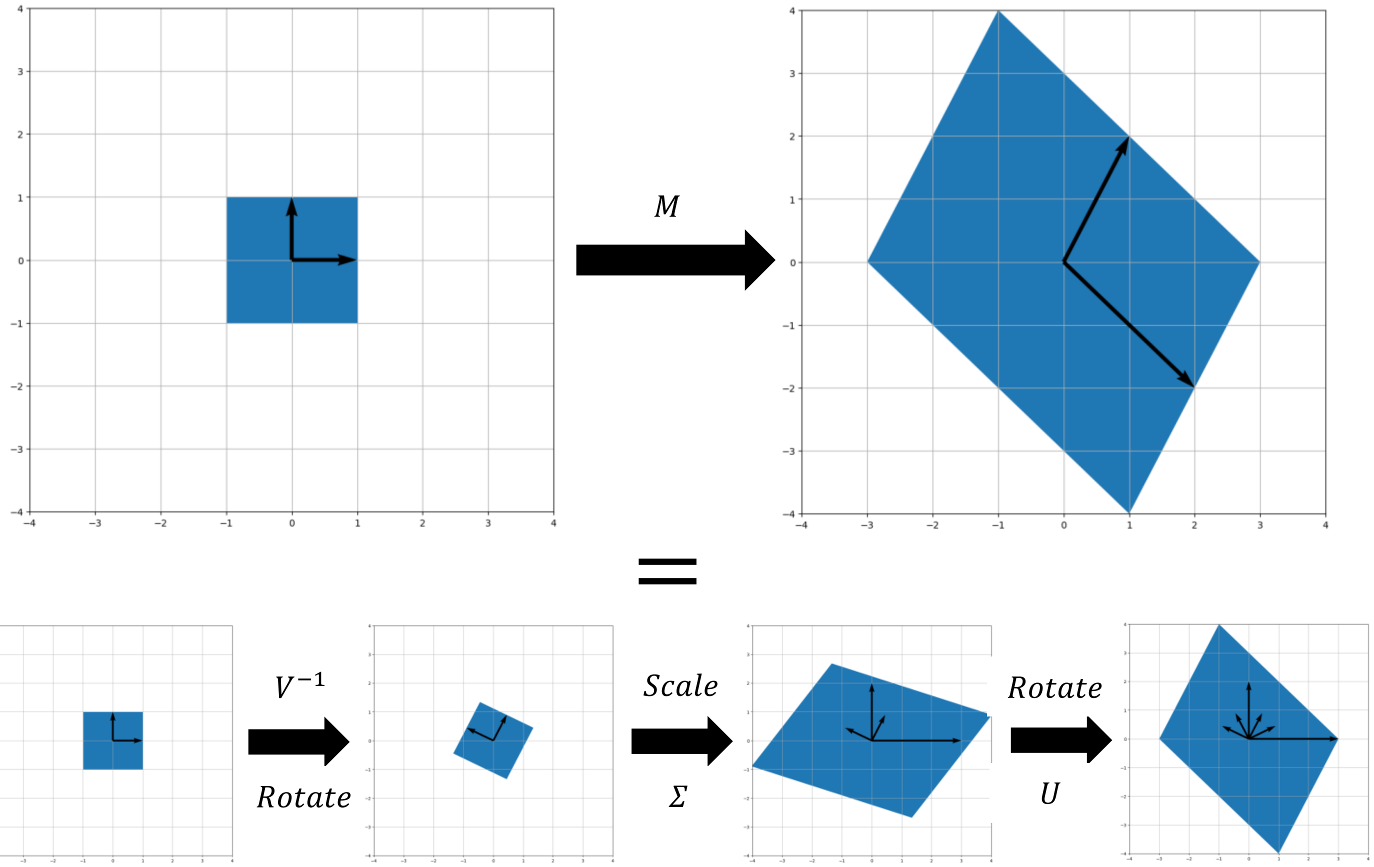
Def:

Phân tích Matrix M thành tích của Left Singular Vectors Matrix U, Singular Values Matrix Σ và Right Singular Vectors Matrix V

$$M = U\Sigma V^{-1}$$

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1}$$



Norm:

Def:

Một hàm Map giá trị bất kì sang giá trị thực không âm như khoảng cách, chiều dài, độ lớn, …

Two Norm:

Def:

Một Norm tính khoảng cách bằng cách lấy căn 2 của tổng bình phương các phần tử

Ex:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} => \|\vec{V}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Low Rank Approximation:

Def:

Mô phỏng gần đúng Matrix M bằng một Matrix N với Rank nhỏ hơn

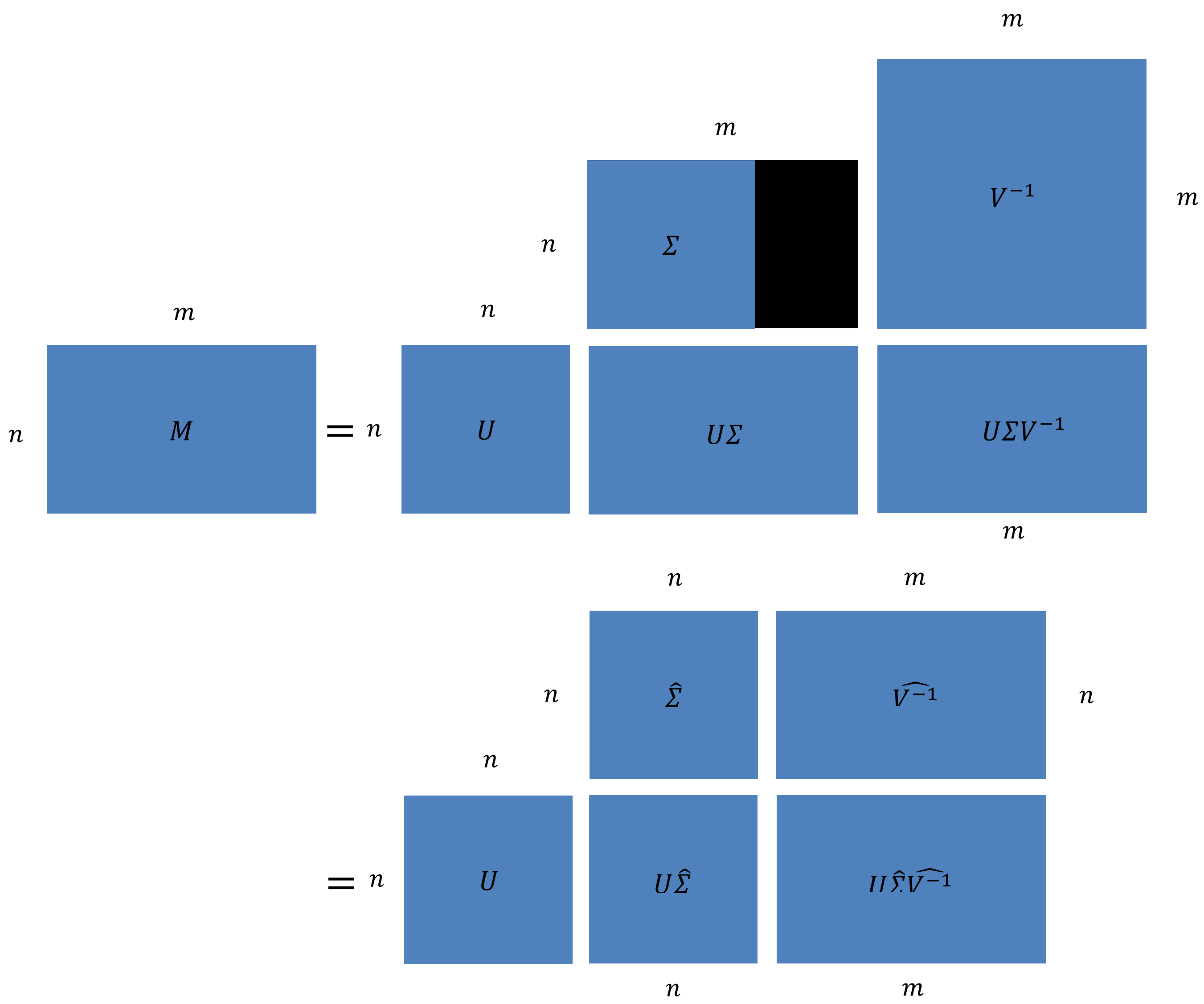
Thường sử dụng Singular Value Decomposition để nén ảnh

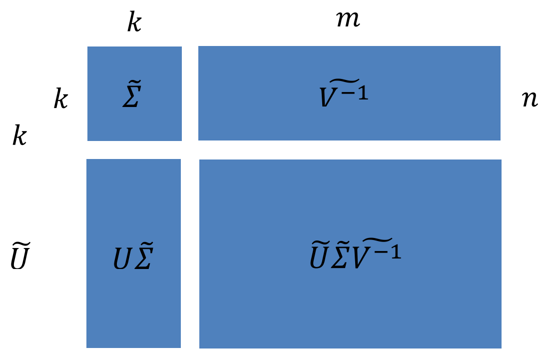
Phân tích $M = U\Sigma V^{-1} = \overrightarrow{u_1}\sigma_1\overrightarrow{v_1}^T + \overrightarrow{u_2}\sigma_2\overrightarrow{v_2}^T + \cdots + \overrightarrow{u_n}\sigma_n\overrightarrow{v_n}^T$

Vì các Singular Values có giá trị giảm dần nên các Terms càng về cuối càng không đáng kể nên có thể được loại bỏ

$M \sim N = \overrightarrow{u_1}\sigma_1\overrightarrow{v_1}^T + \overrightarrow{u_2}\sigma_2\overrightarrow{v_2}^T + \cdots + \overrightarrow{u_k}\sigma_k\overrightarrow{v_k}^T$, $k < n$

Đây là Matrix với Rank k gần với M nhất với $\|M - N\|_F$ đạt cực tiểu





Frobenius Norm:

Def:

Một Norm tính khoảng cách bằng cách lấy căn 2 của tổng bình phương các phần tử trong Matrix M, tương đương căn 2 của tổng bình phương các phần tử trong Singular Values Matrix

$\|M\|_F = \|\Sigma\|_F$

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} => \|M\|_F = \sqrt{257}$$

Linear Independence:

Def:

Matrix M mà mỗi Column Vector không thể được tạo ra bằng các phép toán Linear trên các Column Vector khác

$|M| \neq 0$

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} => M$ không Linear Independent

Rank:

Def:

Số Linear Independent Column hay số chiều không gian sau khi

được tạo ra khi Span các Column Vector trong Matrix M

Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} => Rank(M) = 2$$

Matrix Decomposition: đưa matrix về dạng tích các matrix

Diagonalizable Matrix:matrix M có thể decomposition thành $A^{-1}BA$, B là diagonal matrix với entry là eigenvalue, A là matrix có col là eigenvector

Orthogonal Matrix: matrix A mà mỗi row là vector có độ dài 1 và các vector vuông góc với nhau đôi một

Formula: $A^TA = I$, $A^T = A^{-1}$

Ex: [1/3, 2/3, -2/3]

[-2/3, 2/3, 1/3]

[2/3, 1/3, 2/3]

Lower Triangular Matrix: matrix tam giác mà mọi phần tử bên trên đường chéo = 0

Ex: [1, 0, 0]

[2, 4, 0]

[3, 1, 2]

Positive-definite Matrix: matrix đối xứng A mà mọi vector z <> 0, $z^TAz > 0$

Ex:[1, 0]

[0, 1]

Symmetric Matrix: matrix đối xứng qua diag

Formula:

$A^T = A$

Mọi B, $B^T + B$ = Symmetric Matrix

$A = U^TSU$, U là orthogonal matrix, S là diagonal matrix với entry là

Eigenvalue, => eigen vector x(value a), y(value b) orthogonal

$ax \bullet y = Ax \bullet y = x^TA^Ty = x \bullet Ay = x \bullet by => (a - b)x \bullet y = 0 => x \perp y$ => đpcm

Ex: [1, 2, 4]

[2, 0, 3]

[4, 3, 0]

Sparse Matrix: matrix mà đa số phần tử = 0

Ex: [1, 0, 2]

[0, 0, 3]

[0, 0, 0]

Base Q-Orthogonal: xét vector này có vuông góc với vector khác trong hệ tọa độ

Matrix khác

Formula: $u^TQv = 0$

Ex: A = [2, 3]

[4, 5]

Trong hệ A, vector a [13, -7] vuông góc vector b [2, 1] vì a vuông góc Ab

Jacobian Matrix:

Def:

Ma trận tuyến tính cục bộ của ánh xạ phi tuyến

Formula:

Cho ánh xạ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Khi đó Jacobian Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ex:

Cho ánh xạ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x^2y + y^2 + 1 \\ x^2 + 2xy + y \end{bmatrix}$$

Khi đó Jacobian Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 + 2y \\ 2x + 2y & 2x + 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ tại vị trí có tọa độ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Intuation: