CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

2.1. TÍCH PHÂN KÉP

2.1.1.Định nghĩa và Cách tính

2.1.2.Đổi biến trong tích phân kép

2.1.3.Ứng dụng của tích phân kép

2.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.2.1.Định nghĩa và Cách tính

2.2.2.Đổi biến trong tích phân bội ba

2.2.3.Ứng dụng của tích phân bội ba

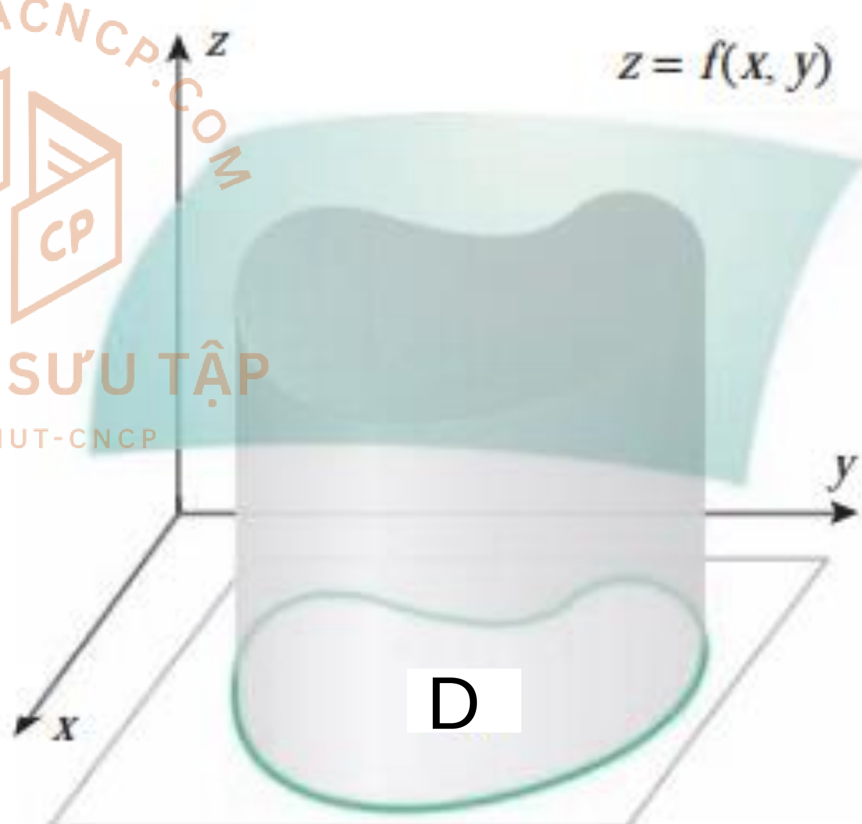
2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Bài toán mở đầu: Tính thể tích vật thể như trong hình vẽ

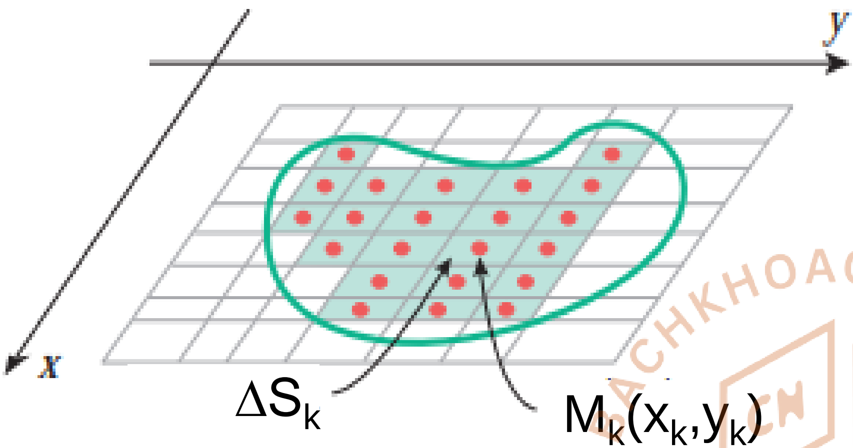
Cho trong không gian 3 chiều một hình trụ cong đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là biên của miền D

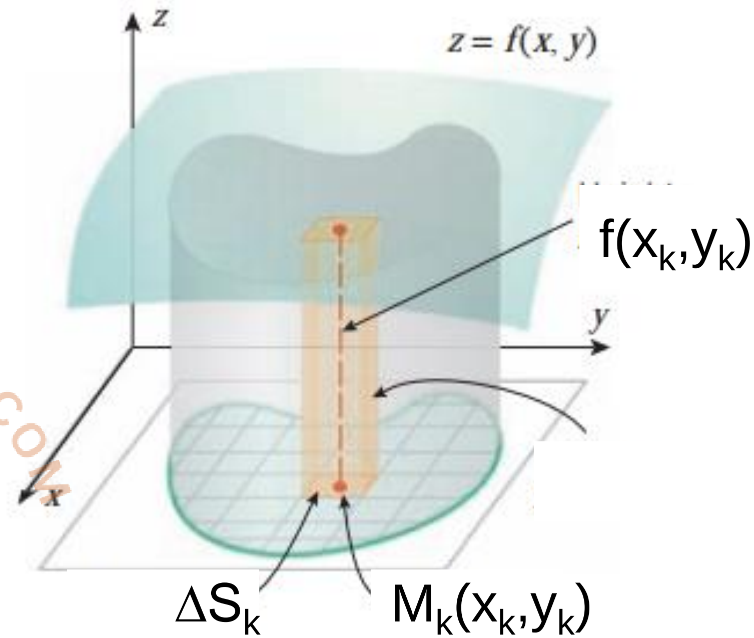
Ta lấy 1 phần của hình trụ bằng cách cắt nó bởi mp Oxy nằm dưới và mặt cong z=f(x,y) nằm trên và gọi đây là hình trụ cong

Áp dụng cách tính xấp xỉ như khi tính diện tích hình thang cong



2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính





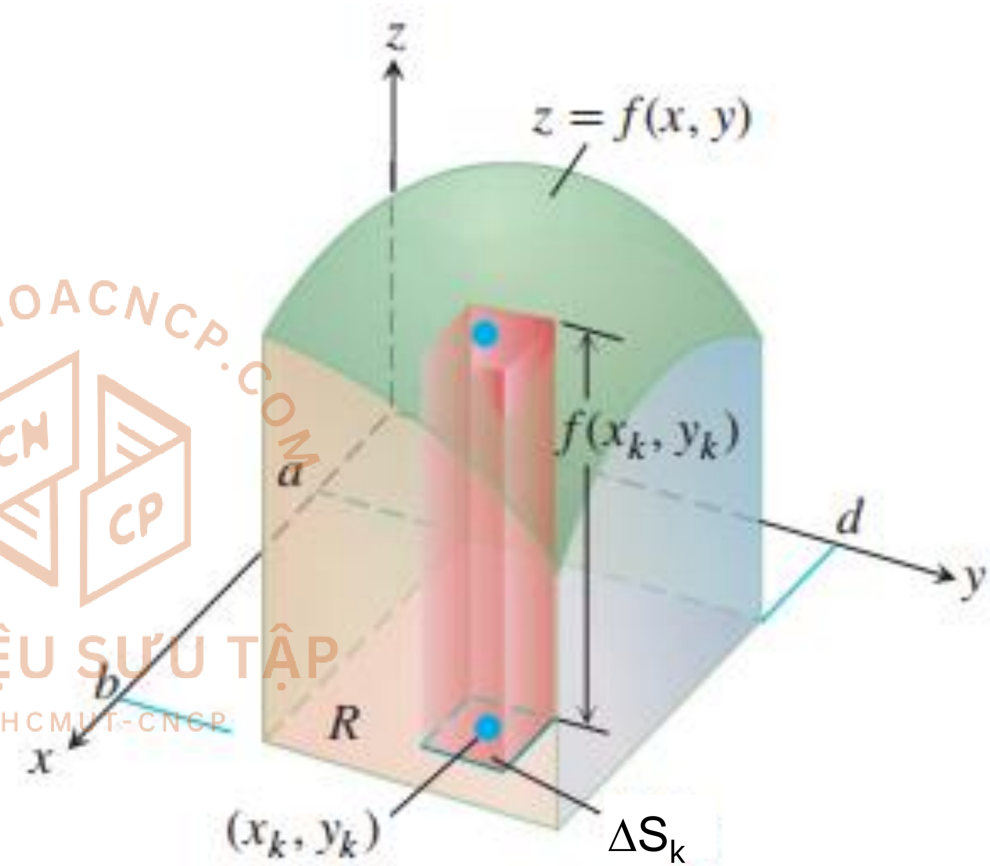
Chia miền D thành n phần tùy ý D_1, D_2, …, D_n bởi các đường thẳng song song với 2 trục Ox, Oy.

Gọi diện tích của mỗi miền nhỏ là ΔS_k, trong mỗi miền D_k lấy 1 điểm $M(x_k,y_k)$ tùy ý

Vẽ các hình trụ nhỏ đáy là D_k, chiều cao là $f(x_k,y_k)$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Thể tích các hình trụ nhỏ với đáy dưới là D_k, trên là 1 phần mặt *z=f(x,y)* xấp xỉ với hình trụ đáy là D_k, chiều cao là $f(x_k,y_k)$.

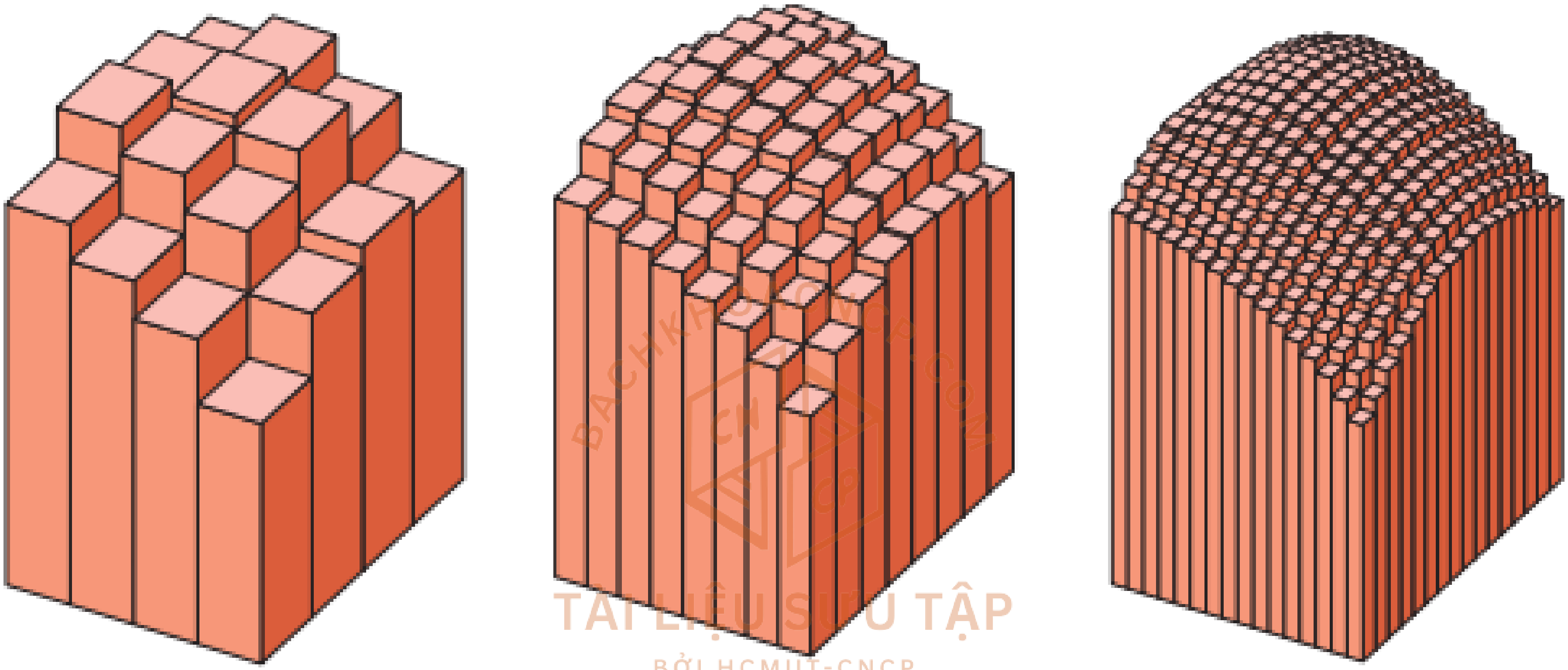


Tổng thể tích của tất cả các hình hộp nhỏ tính được là xấp xỉ với thể tích hình trụ cong cần tính. Vậy:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Cho số các phần chia tăng lên, sai số giữa tổng thể tích các hình trụ thường tính được và thể tích hình trụ cong cần tính càng nhỏ

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

Ta cho $n \to \infty$, nếu tổng thể tích các hình trụ thường có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là thể tích hình trụ cong cần tính.

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa tích phân kép :

Cho hàm f(x,y) xác định trong miền đóng, bị chặn D.

Chia miền D thành n phần không dẫm lên nhau là D_1, D_2, D_3, …(các phần không có phần chung) tương ứng có diện tích là ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3, …

Trên mỗi miền D_k ta lấy 1 điểm $M_k(x_k,y_k)$ tùy ý.

Lập tổng (gọi là tổng tích phân kép của hàm *f(x,y)*)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Hiển nhiên tổng trên phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_k

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max\{d(D)\} \to 0$ (d(D) là kí hiệu đường kính của miền D tức là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm bất kỳ thuộc D)

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Nếu khi ấy tổng S_n tiến đến giới hạn hữu hạn S mà không phụ thuộc vào cách chia miền D cũng như cách lấy điểm M_k thì giới hạn S được gọi là tích phân kép của hàm f(x,y) trên miền D.

Vậy kí hiệu và biểu thức định nghĩa của tp kép là:

$$\iint_D f(x,y)ds = \lim_{\max\{d(D_k)\}\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k$$

Hàm f(x,y) được gọi là hàm dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân, ds là yếu tố diện tích. Khi ấy, ta nói hàm f(x,y) khả tích trên miền D

Trong chương này, chúng ta sẽ chỉ nói đến các hàm khả tích trên miền D

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Tính chất : *Cho f(x,y), g(x,y) là các hàm khả tích trên D*

1. $S(D) = \iint_D dxdy$ (S(D) là diện tích miền D)

2. $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$

3. $\iint_D Cf(x,y)dxdy = C\iint_D f(x,y)dxdy$

4. Chia D thành 2 miền không dẫm lên nhau là E, F thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_F f(x,y)dxdy$$

5. Nếu f(x,y)≤g(x,y) trên D thì: $\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$

6. Trên D, hàm f(x,y) đạt GTLN f_{max}=M, GTNN f_{min}=m thì

$$m.S(D) \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M.S(D)$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Định lý: (Về giá trị trung bình)

Cho hàm f(x,y) liên tục trong miền đóng, bị chặn, liên thông D. Khi ấy trong D có ít nhất 1 điểm (x_0,y_0) sao cho :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S(D)$$

Đại lượng sau được gọi là giá trị trung bình của hàm f(x,y) trên miền D:

$$\alpha = \frac{1}{S(D)}\iint_D f(x,y)dxdy$$

Ý nghĩa hình học của tích phân kép :

Phần hình trụ đường sinh song song với trục Oz bị cắt bởi mp Oxy (giao diện là miền D) ở dưới, mặt cong z=f(x,y) ở trên có thể tích được tính bởi

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ví dụ : Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $z = 16 - x^2 - 2y^2$, giới hạn dưới bởi hình vuông $D = [0,2]x[0,2]$ và giới hạn xung quanh bởi 4 mặt phẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$. Ước lượng thể tích của vật thể trong các trường hợp sau :

a) Chia D thành 4 phần bằng nhau;

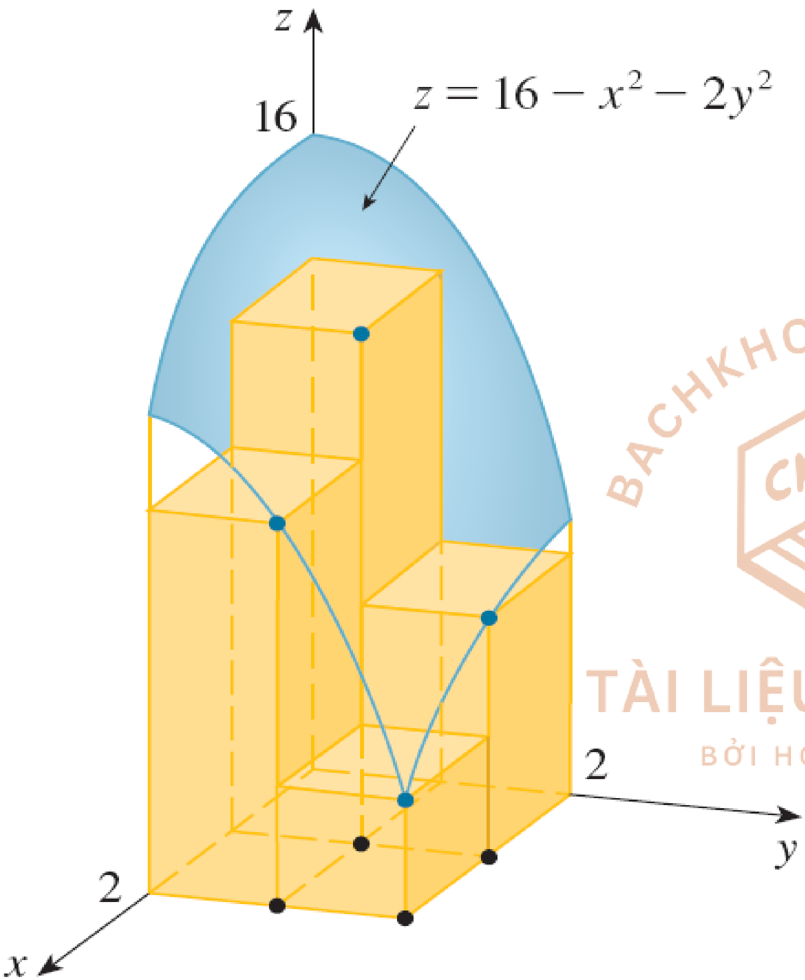
b) Chia D thành 16 phần bằng nhau;

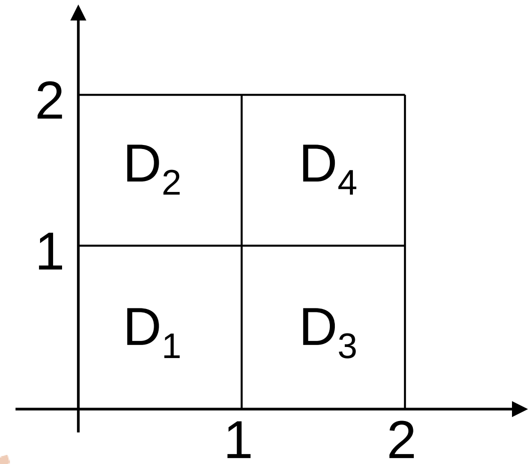
c) Chia D thành 64 phần bằng nhau;

d) Chia D thành 256 phần bằng nhau;

e) Tính thể tích vật thể

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)





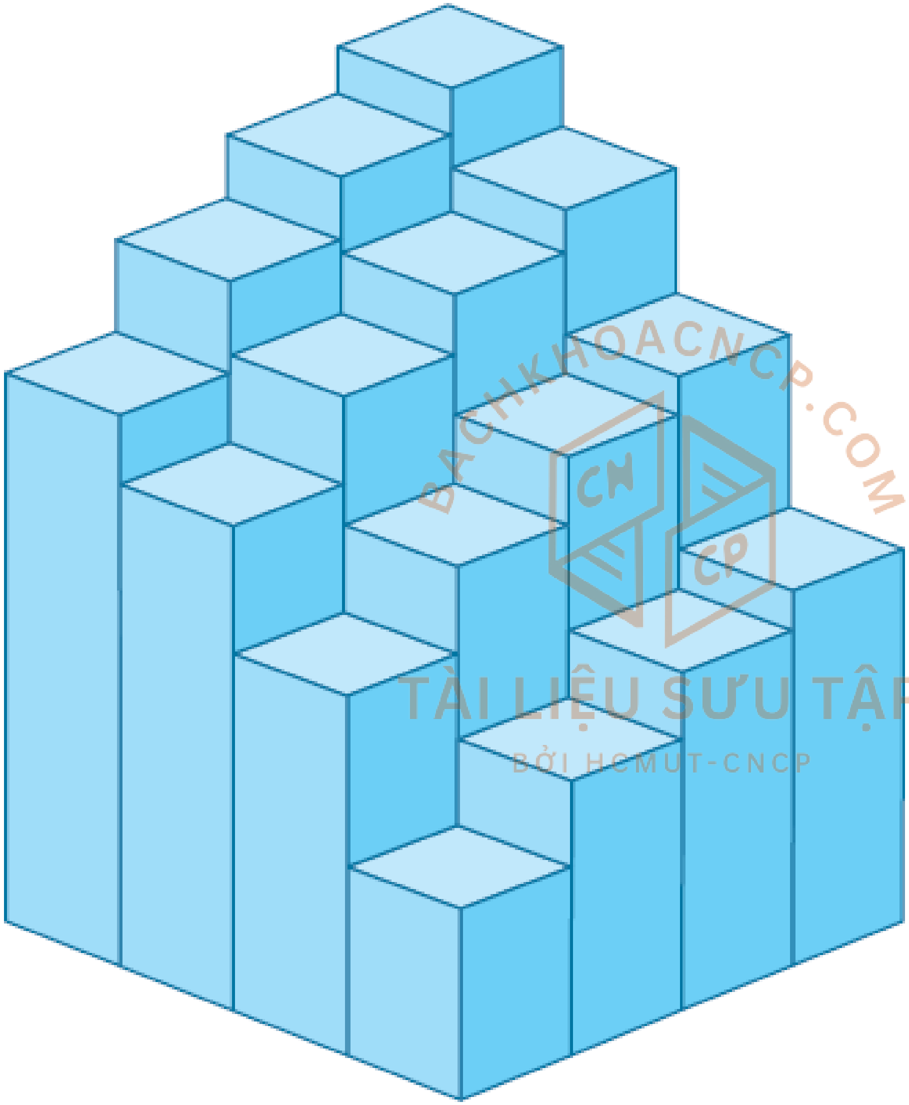
Chọn các điểm M_i là điểm góc trên bên phải mỗi hình vuông nhỏ. Ta được:

$$S_{D_k} = 1, \forall k = 1,2,3,4.$$

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{4} f(M_k) \times S_{D_k}$$

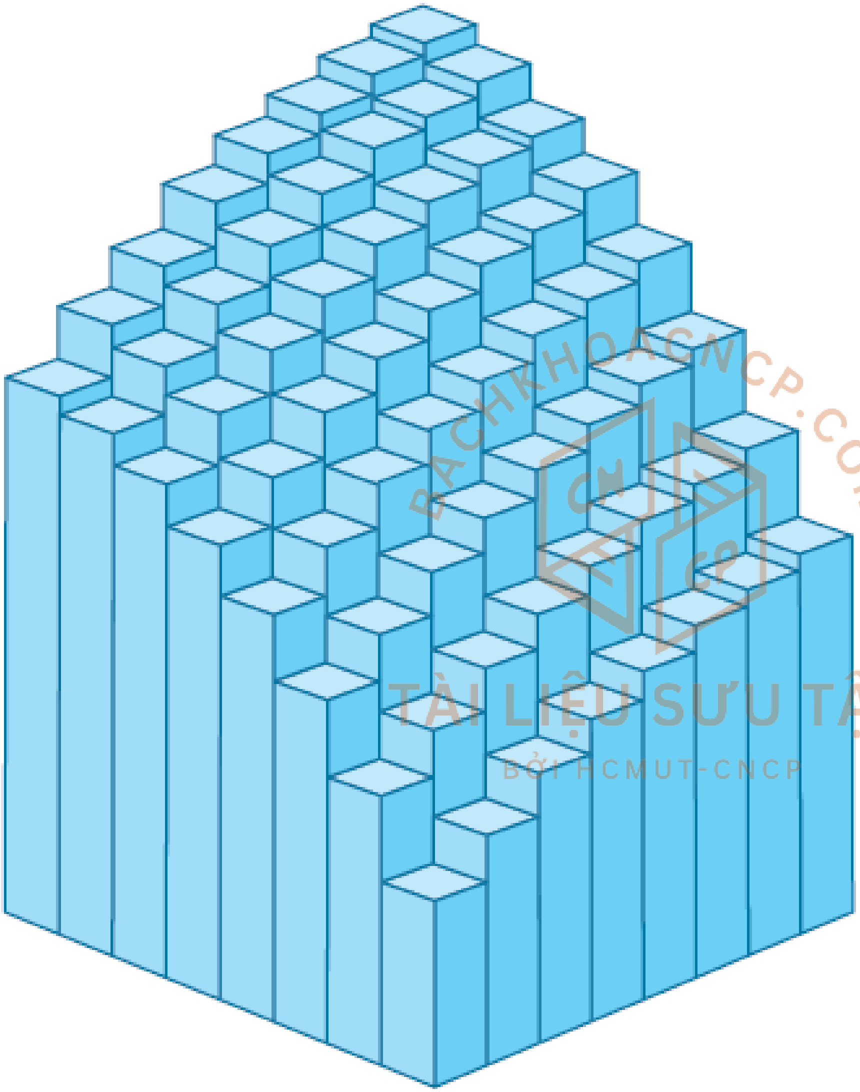
$$V \approx f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2) \quad \approx 13 + 7 + 10 + 4 = 34.$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)



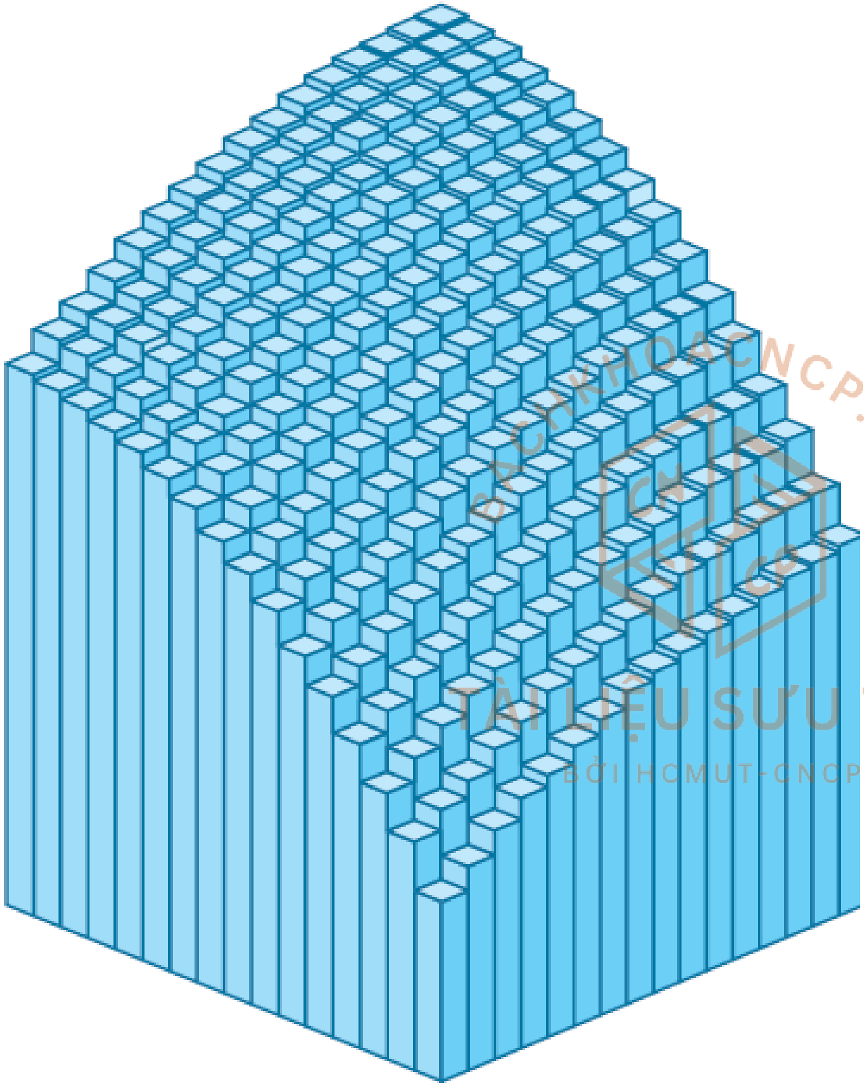
b. Chia thành 16 phần, V≈ 41,5

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)



c. Chia thành 64 phần, V≈44,875

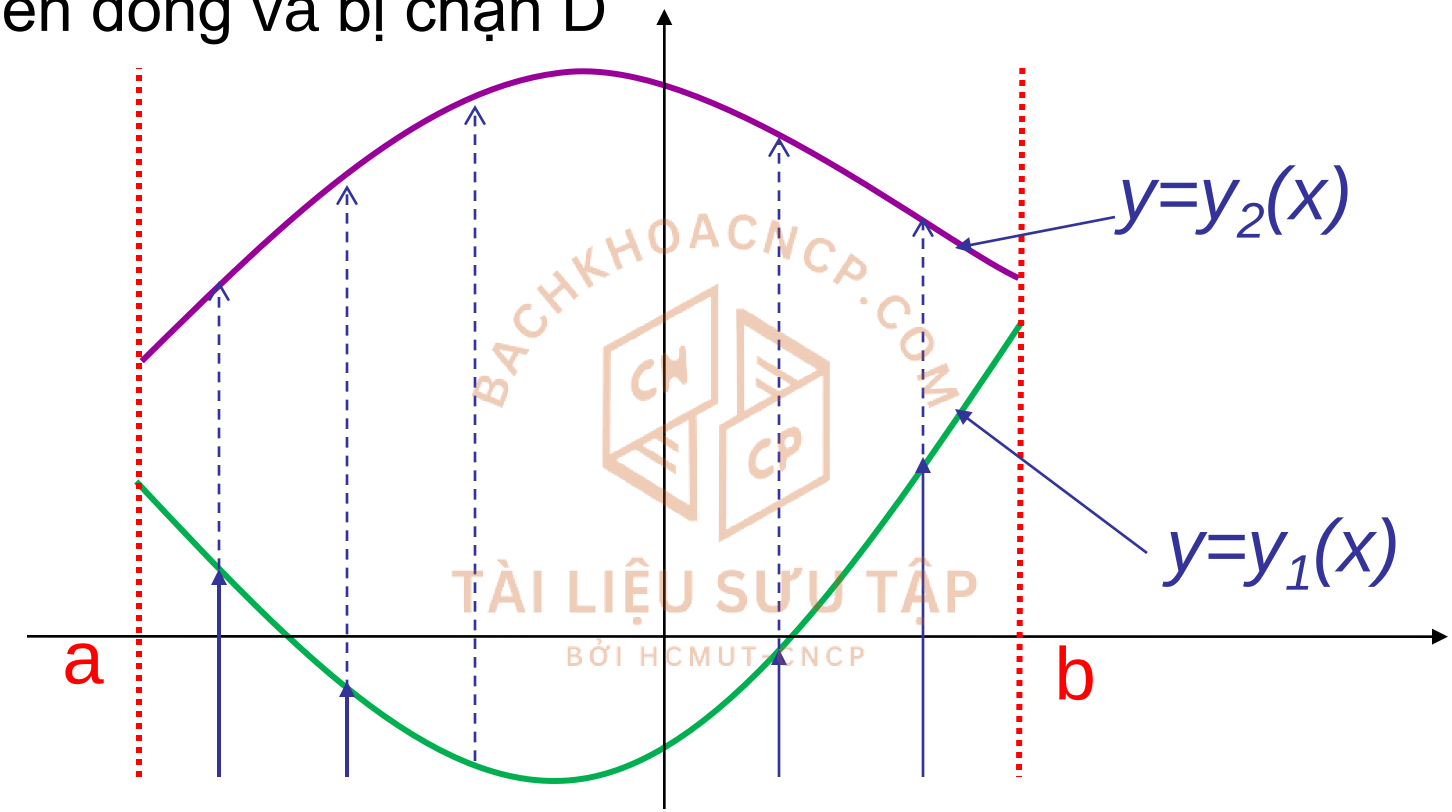
2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)



d. Chia thành 256 phần, V≈46,46875

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Định lý Fubini: (Cách tính tích phân kép) Cho hàm *f(x,y)* liên tục trên miền đóng và bị chặn D

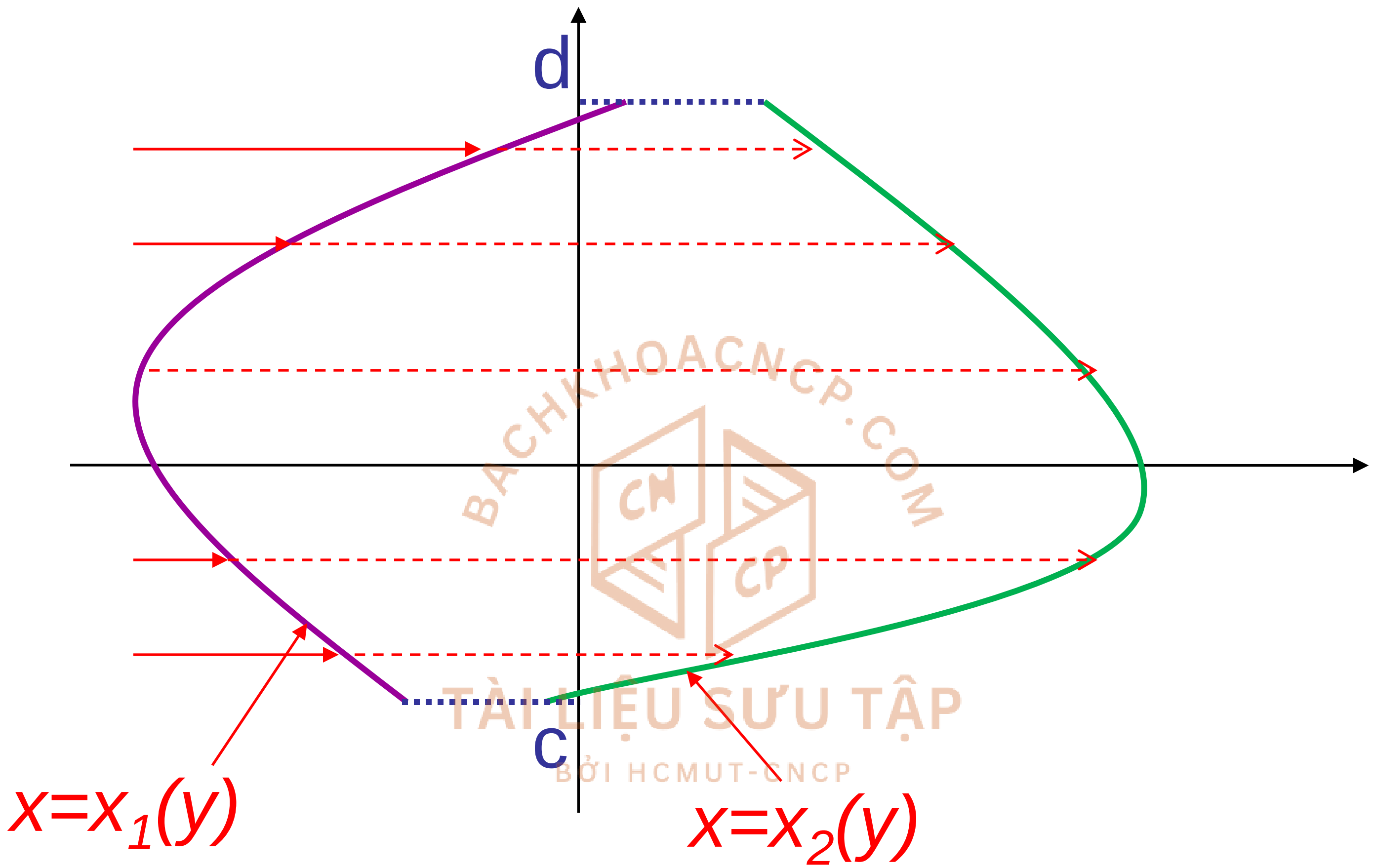


1) Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \boxed{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}$$

§1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



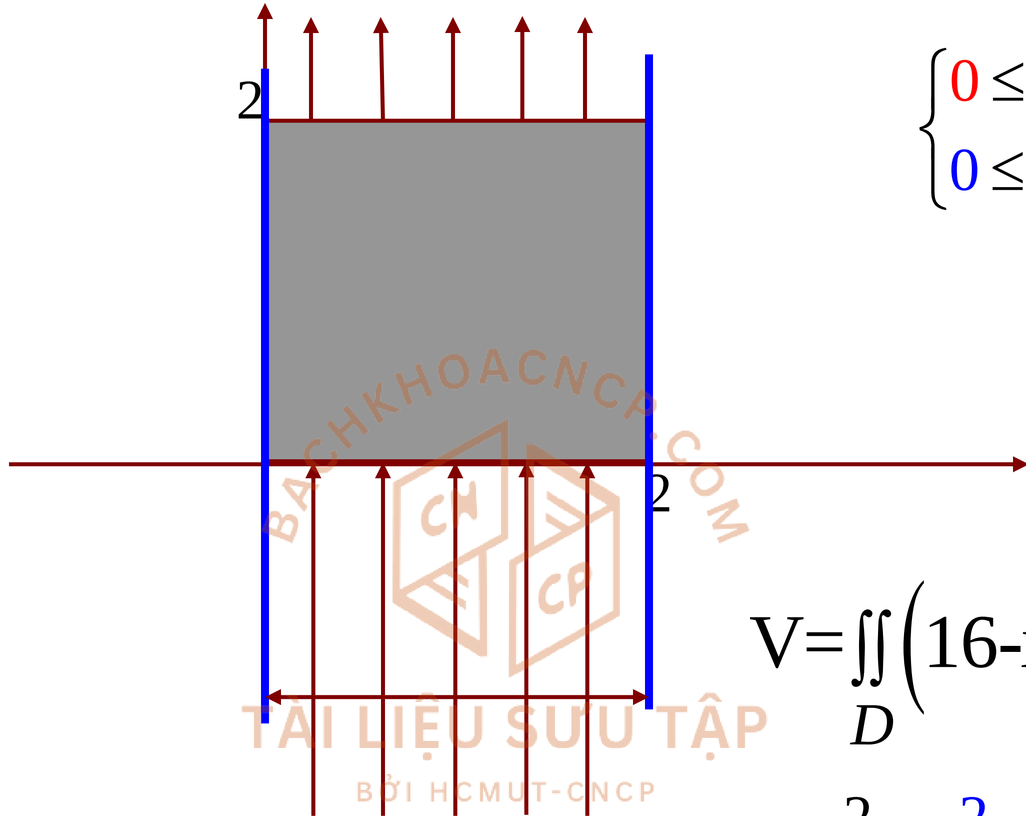
2) Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \boxed{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Giải câu e)



$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$V=\iint_D \left(16-x^2-2y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 \left(16-x^2-2y^2\right)dy$$

Tính thể tích của vật thể.

$$=\int_0^2 \left[(16-x^2)y-2\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx =\int_0^2 \left(32-2x^2-\frac{16}{3}\right)dx \; =48$$

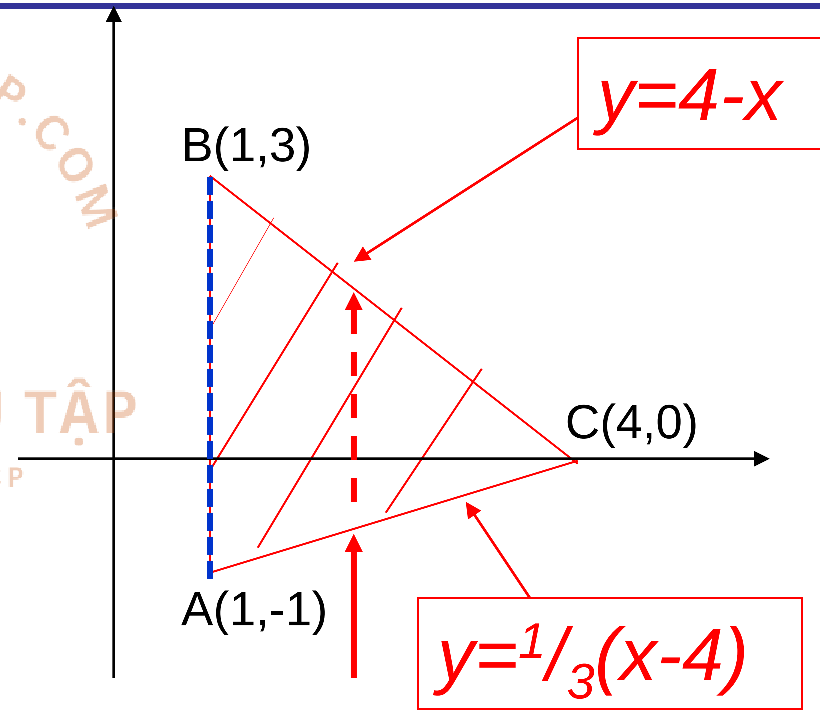
2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Cho miền D là ΔABC với A(1,-1), B(1,3), C(4,0). Tính tích phân: $I = \iint\limits_D xydxdy$

Ta đi tích phân này bằng 2 cách

Cách 1: Chiếu miền D xuống trục Ox ta được đoạn [1,4]

Đi theo hướng trục Oy từ dưới lên



$$\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ \frac{1}{3}(x-4) \le y \le 4 - x \end{cases}$$

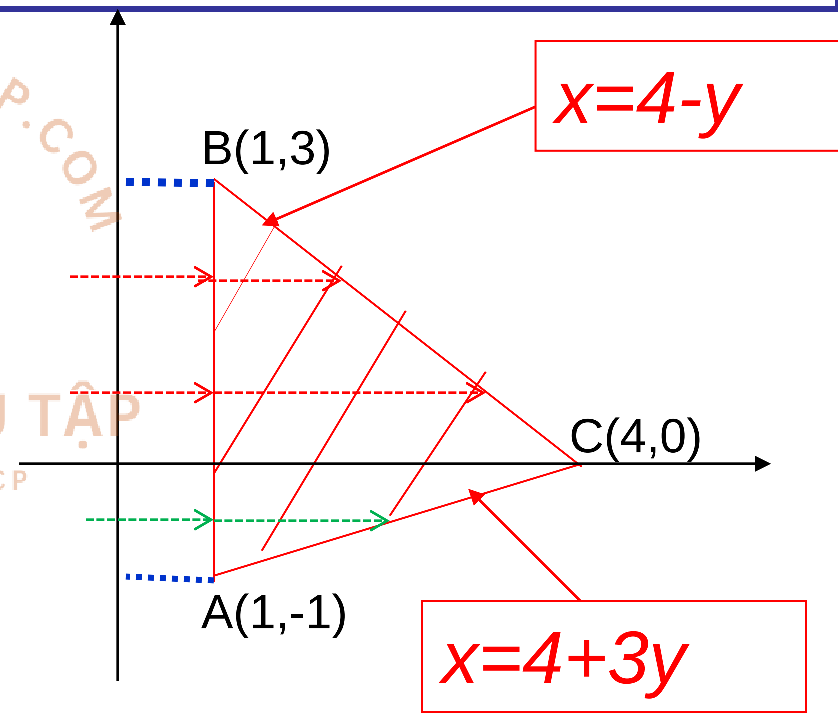
$$I = \int_1^4 dx \int_{\frac{1}{3}(x-4)}^{-x+4} xydy = \int_1^4 \left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}(x-4)}^{-x+4} dx = \frac{4}{9}\int_1^4 x(x-4)^2 dx = 7$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Cho miền D là ΔABC với A(1,-1), B(1,3), C(4,0). Tính tích phân: $I = \iint\limits_D xydxdy$

Cách 2 : Chiếu miền D xuống trục Oy ta được đoạn [-1,3]

Đi theo hướng trục Ox từ trái sang phải, ta sẽ phải chia miền D thành 2 phần bởi trục Ox

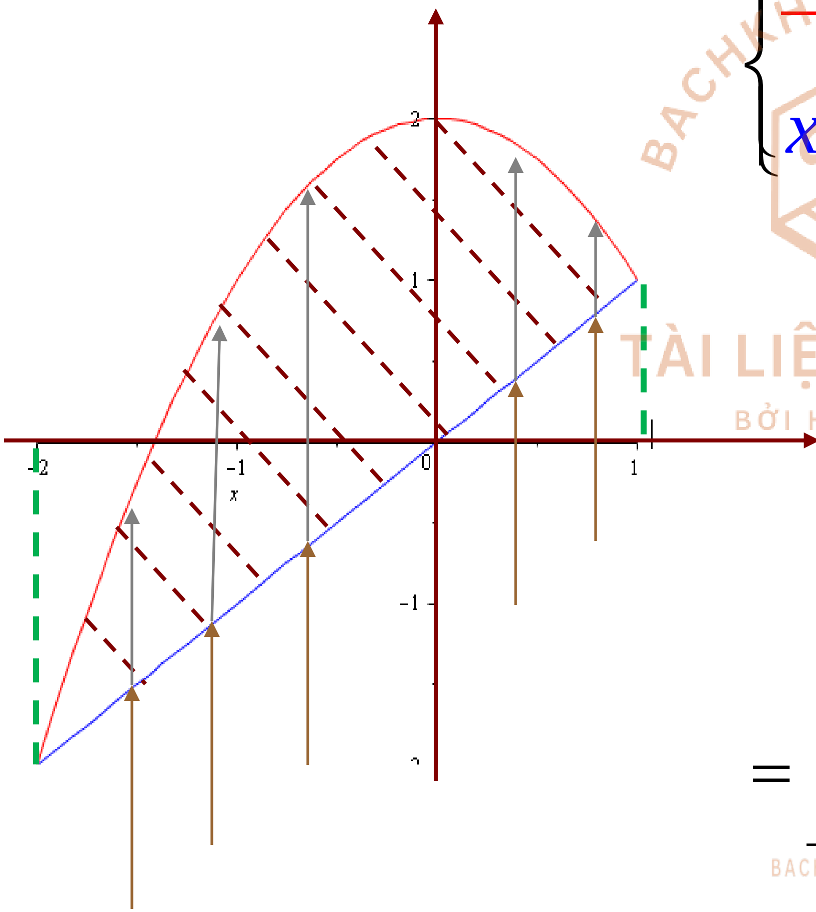


$$\begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ 1 \le x \le 4 - y \end{cases}, \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ 1 \le x \le 4 - 3y \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{1}^{4+3y} xydx + \int_{0}^{3} dy \int_{1}^{4-y} xydx = 7$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân kép $I = \iint\limits_{D} (x - y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi $y = x; y = 2 - x^2$



$$\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_{D} (x - y)dxdy$$

$$= \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (x - y)dy$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{x}^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(x((2 - x^2) - x) - \frac{(2 - x^2)^2 - x^2}{2} \right) dx$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ta còn có thể ***xác định cận của tích phân*** trên mà ***không cần vẽ hình*** như sau:

Tìm giao điểm của 2 đường biên của miền D:

$y = x = 2-x^2 \longleftrightarrow x^2+x-2 = 0 \longleftrightarrow x = -2, x = 1$

Vậy ta có $-2 \le x \le 1$, tức là ta lấy trong khoảng 2 nghiệm của tam thức $f(x) = x^2+x-2$ nên ta có bất đẳng thức:

$x^2+x-2 \le 0 \longleftrightarrow x \le 2-x^2$

Tức là, với x nằm trong khoảng (-2,1) thì đường thẳng $y=x$ *nằm dưới* đường parabol $y = 2-x^2$. Vậy ta cũng viết được cận tích phân:

$$I = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (x-y)dy$$

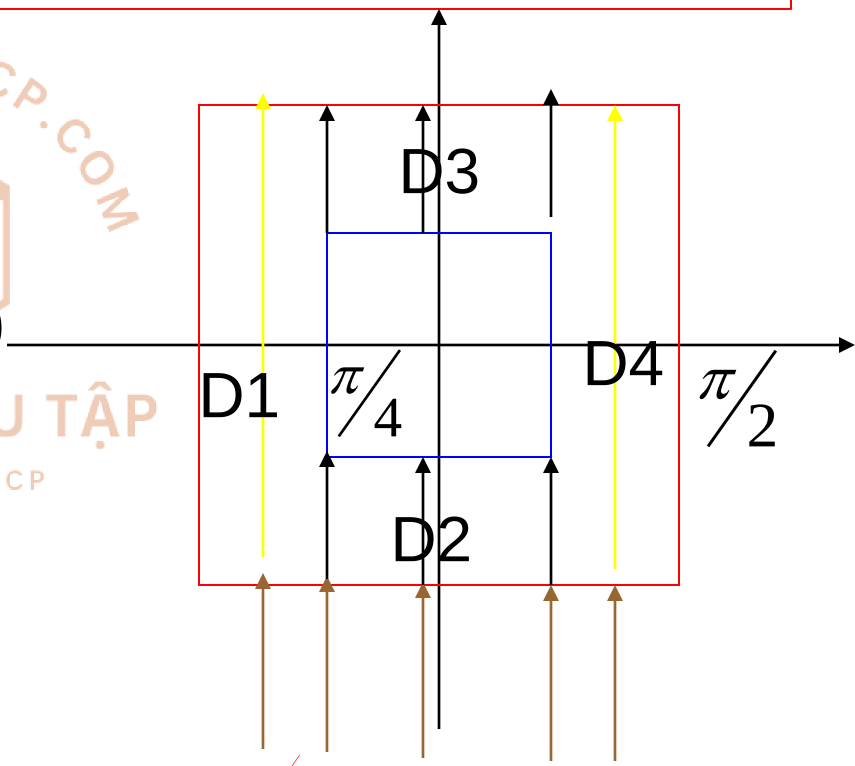
2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$ trong đó

D là miền giới hạn bởi : $\pi/4 \le \max\{|x|,|y|\} \le \pi/2$

Miền D được chia thành 4 phần

$$\left[\begin{array}{l} -\pi/2 \le x \le -\pi/4, -\pi/2 \le y \le \pi/2 \; (D1) \\ -\pi/4 \le x \le \pi/4, -\pi/2 \le y \le -\pi/4 \; (D2) \\ -\pi/4 \le x \le \pi/4, \pi/4 \le y \le \pi/2 \; (D3) \\ \pi/4 \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le \pi/2 \; (D4) \end{array}\right.$$



$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y)dy = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin(x+y)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dx$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} (\cos x - (-\cos x))dx = 2 - \sqrt{2}$$

Tương tự, ta tính cho 3 tích phân trên 3 miền còn lại.

Ta còn có thể tính tích phân này bằng cách tính tích phân trên hình vuông lớn trừ tích phân trên hình vuông nhỏ

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y)dy - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x+y)dy$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos x dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin\left(x + \pi/4\right) - \sin\left(x - \pi/4\right)dx$$

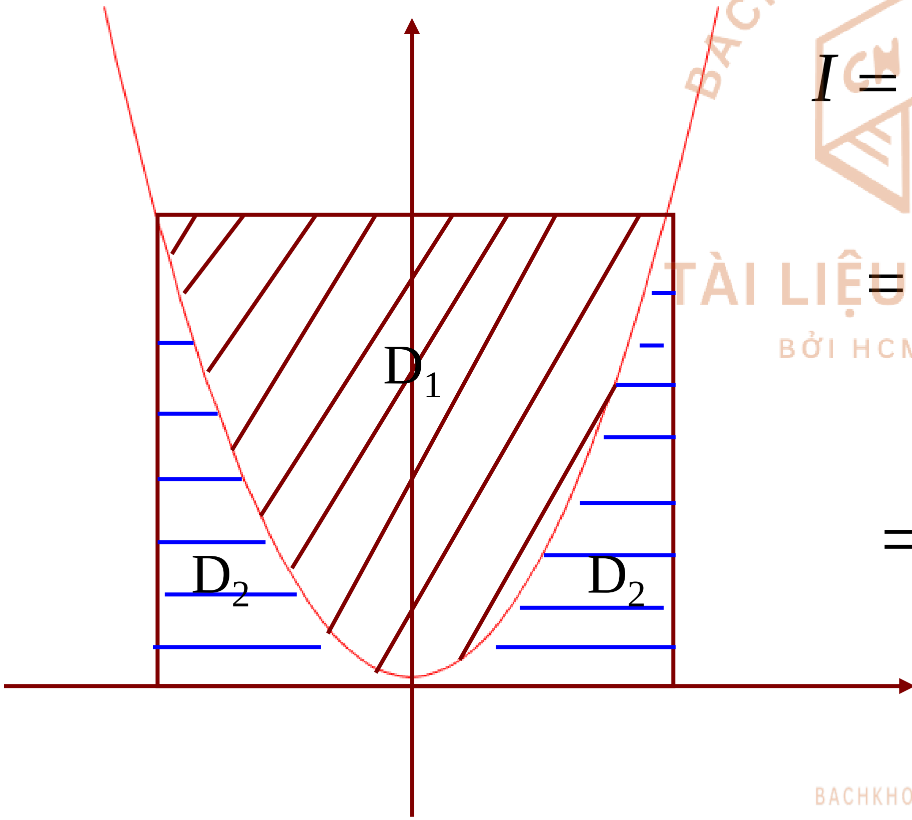
$$= 2.2 - 2 = 2$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân kép $I = \iint\limits_D \left| y - x^2 \right| dxdy$

D là miền giới hạn bởi -1≤x≤1, 0≤y≤1

Ta bỏ dấu trị tuyệt đối trong hàm dưới dấu tp bằng cách chia trường hợp $y \geq x^2$ và $y < x^2$. Do đó, ta vẽ thêm đường cong $y=x^2$



$$I = \iint\limits_{D_1} \left| y - x^2 \right| dxdy + \iint\limits_{D_2} \left| y - x^2 \right| dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(y - x^2 \right) dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(x^2 - y \right) dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \left(y - x^2 \right) dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \left(x^2 - y \right) dy$$

$$I = \frac{11}{15}$$

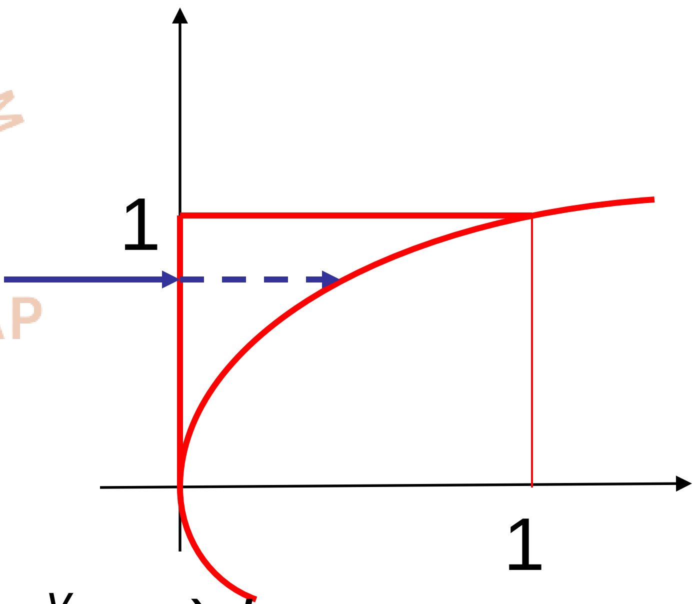
2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân $I = \iint\limits_D e^{x/y} dxdy$

Với D là miền giới hạn bởi $x = y^2, x = 0, y = 1$

Nếu chỉ nhìn vào miền lấy tích phân này thì ta chiếu D xuống trục nào cũng như nhau.

Tuy nhiên, hàm dưới dấu tích phân sẽ buộc ta phải chiếu D xuống trục Oy



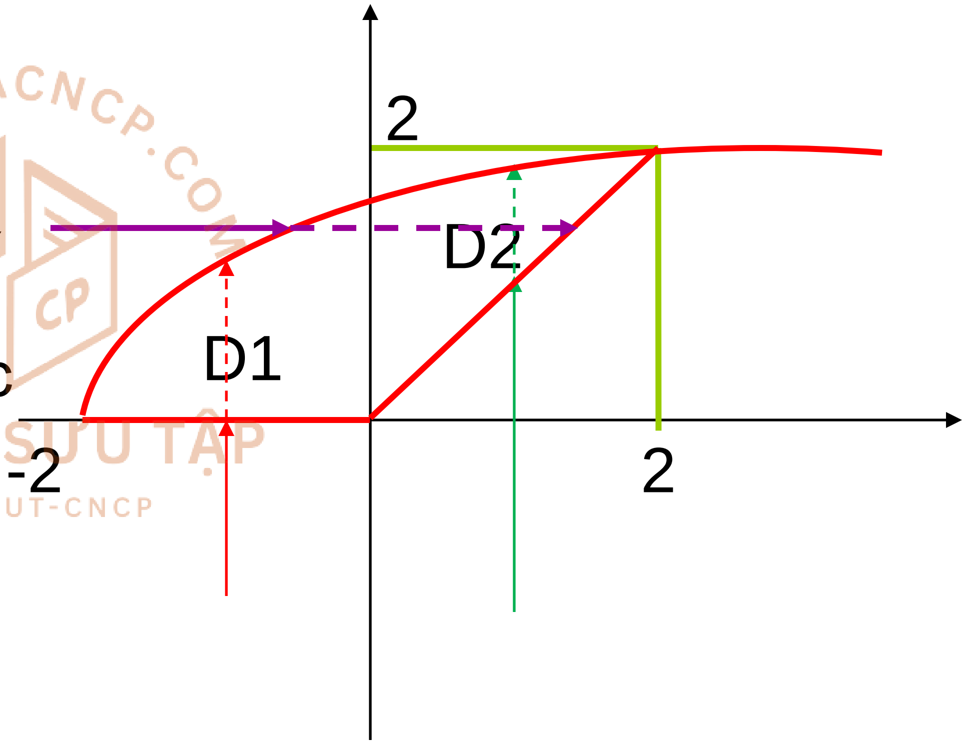
$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y} dx = \int_0^1 y e^{x/y} \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y)dy$$

2.1.1. Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Đổi thứ tự lấy tích phân sau $I = \int_0^2 dy \int_{y^2-2}^{y} f(x,y)dx$

Ta vẽ miền lấy tích phân

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y^2 - 2 \le x \le y \end{cases}$$



Chiếu miền D vừa vẽ xuống trục Ox

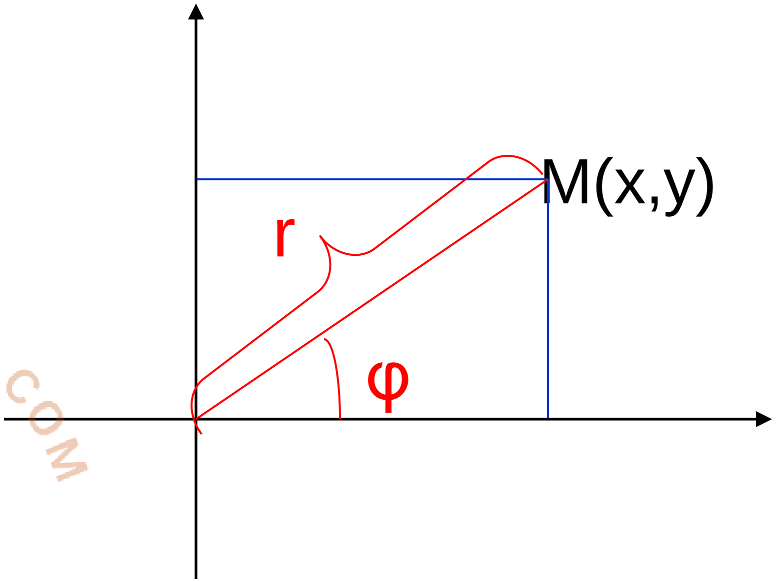
Ta phải chia D thành 2 phần D1 và D2

$$I = \int_{-2}^{0} dx \int_0^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Nhắc lại về tọa độ cực

Điểm M có tọa độ là (x,y) trong tọa độ Descartes.



Đặt : $\varphi = g(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

$r = |OM|$

Ta gọi (r,φ) là tọa độ cực của điểm M

Mối liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cực là

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Khi viết pt đường cong trong tọa độ cực, ta thường viết r=r(φ)

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ: Đổi các phương trình sau sang tọa độ cực

1. $x^2 + y^2 = 2ax$ $\leftrightarrow r^2 = 2ar\cos\varphi$ $\leftrightarrow r = 2a\cos\varphi$

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Đổi sang tọa độ cực mở rộng bằng cách đặt :

$x = a.r.\cos\varphi,\ y = b.r.\sin\varphi$ Thì ta được pt $r = 1$

3. $x = 3$ $\leftrightarrow r\cos\varphi = 3$ $\leftrightarrow r = \dfrac{3}{\cos\varphi}$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Công thức đổi biến sang tọa độ cực

$$\boxed{\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D(r,\varphi)} |J| f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))drd\varphi}$$

Trong đó: $J = \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix}$ là định thức Jacobi

Thông thường, ta sẽ đổi tích phân kép sang tọa độ cực (hoặc tọa độ cực mở rộng) nếu miền lấy tích phân kép là 1 phần hình tròn hoặc 1 phần hình ellipse có phương trình là:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

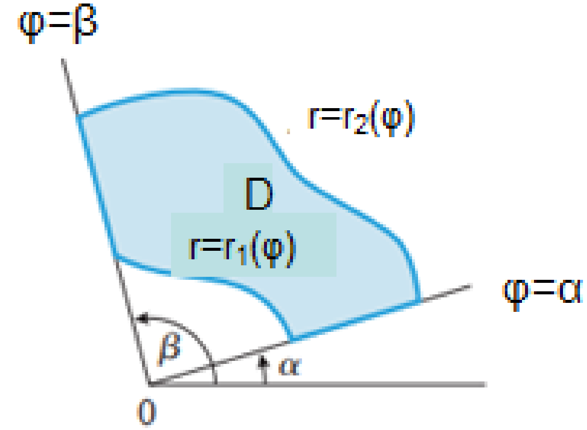
bằng cách đặt: $x = x_0 + ar\cos\varphi, y = y_0 + br\sin\varphi$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Cách xác định cận tp trong tọa độ cực: ta có 3 trường hợp

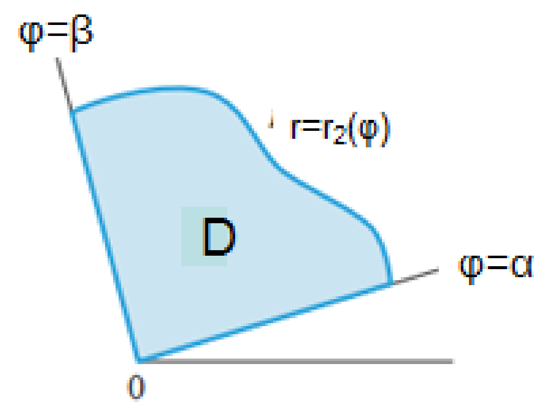
$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf\left(x(r,\varphi),y(r,\varphi)\right)dr$$

O nằm ngoài miền D



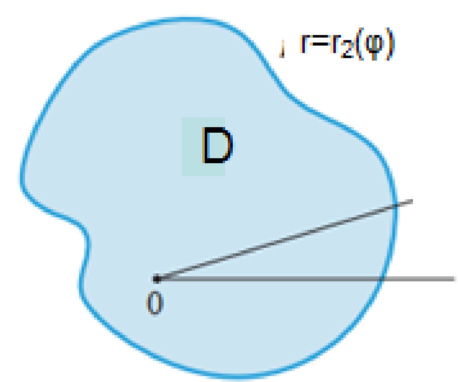
$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{r_2(\varphi)} rf\left(x(r,\varphi),y(r,\varphi)\right)dr$$

O nằm trên biên của miền D



$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{r_2(\varphi)} rf\left(x(r,\varphi),y(r,\varphi)\right)dr$$

O nằm trong miền D



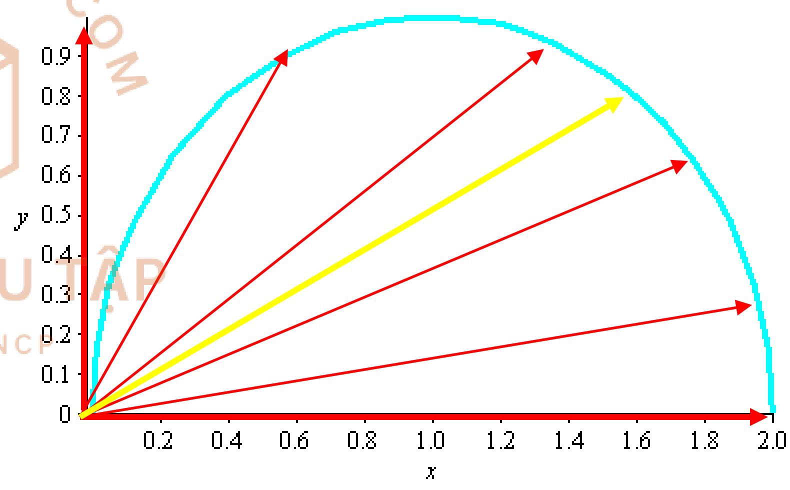
2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D (x - 2y)dxdy$

Trong đó D giới hạn bởi : $x^2 + y^2 = 2x, y = 0 (y \geq 0)$

Đặt x=rcosφ, y=rsinφ. Ta tính được đt Jacobi: J=r

Để xác định φ, ta quét tia màu đỏ theo ngược chiều kim đồng hồ: φ đi từ 0 đến $^{\pi}/_{2}$



Để xác định r, ta sẽ đi theo một trong các tia vừa quét với hướng từ gốc tọa độ ra gặp đường nào trước thì pt đường đó (trong tọa độ cực) là cận dưới, đường nào gặp sau thì pt đường đó là cận trên.

Đây là trường hợp O nằm trên biên của miền D

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Vậy :

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r(r\cos\varphi - 2r\sin\varphi)dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 2\sin\varphi) \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 2\sin\varphi) 8\cos^3\varphi d\varphi$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$

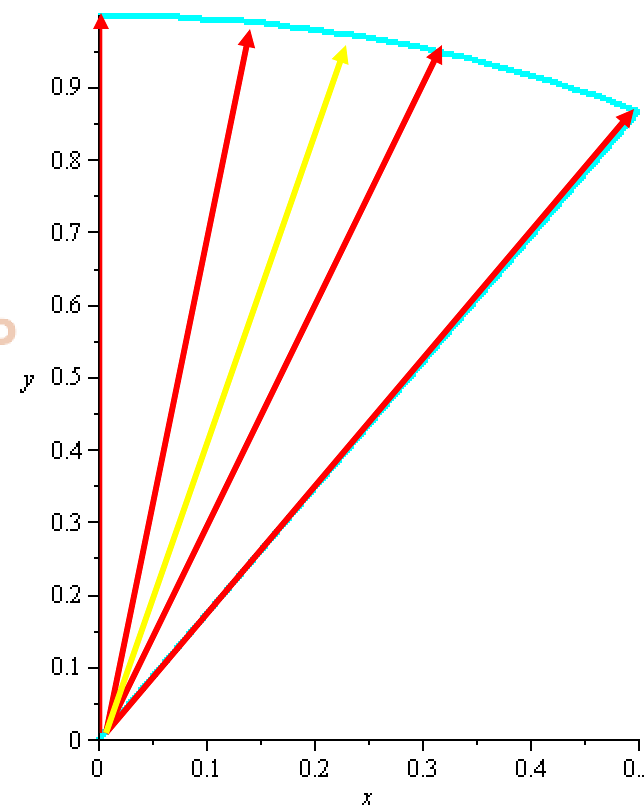
Trong đó D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = a^2, x = 0, y = \sqrt{3}x, (x, y \geq 0)$

Đặt *x= rcosφ, y=rsinφ. Ta có:*

$$y = \sqrt{3}x \leftrightarrow y/x = \sqrt{3} \leftrightarrow \varphi = \pi/3$$

Suy ra: $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$

O nằm trên biên của miền D nên
$0 \leq r \leq a$



$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r.r.dr = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{18}a^3$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D xydxdy$

Trong đó D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 2y, x + y \le 0$

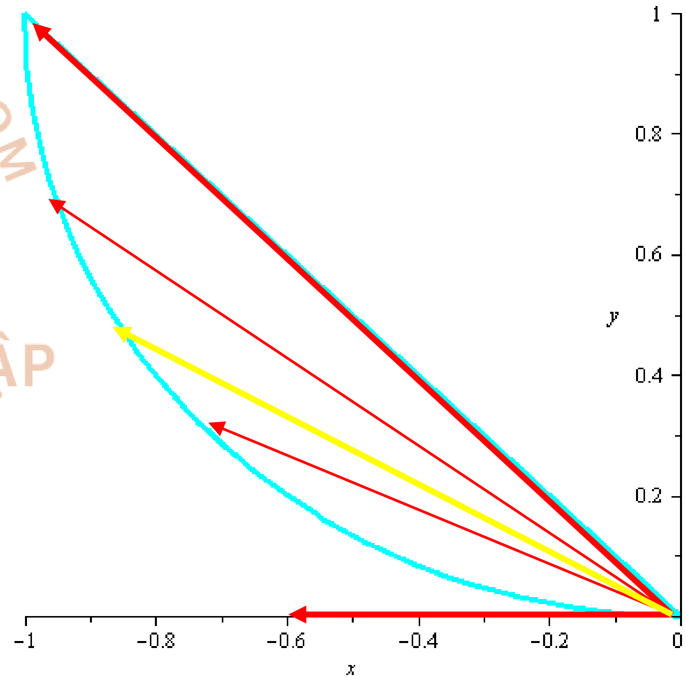
Đặt x=rcosφ, y=rsinφ.

$y > 0,\ x+y=0 \leftrightarrow \varphi = {}^{3\pi}/_{4}$

Suy ra : ${}^{3\pi}/_{4} \le \varphi \le \pi$

$x^2+y^2 = 2y \leftrightarrow r = 2\sin\varphi$

Suy ra : $0 \le r \le 2\sin\varphi$



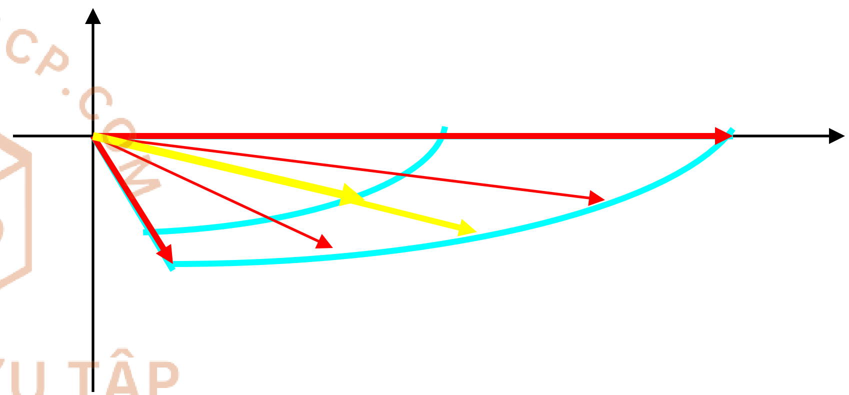
$$I = \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{2\sin\varphi} r.r\cos\varphi.r\sin\varphi dr$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_{D} (2y-1)dxdy$

Trong đó D giới hạn bởi : $2x \le x^2 + y^2 \le 4x, -\sqrt{3}x \le y \le 0$

Đặt x=rcosφ, y=rsinφ.



Đây là trường hợp ta có thể không cần vẽ hình cũng lấy được cận tích phân

$2x \le x^2+y^2 \le 4x \leftrightarrow 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi$

$-\sqrt{3}x \le y \le 0 \leftrightarrow -\pi/3 \le \varphi \le 0$

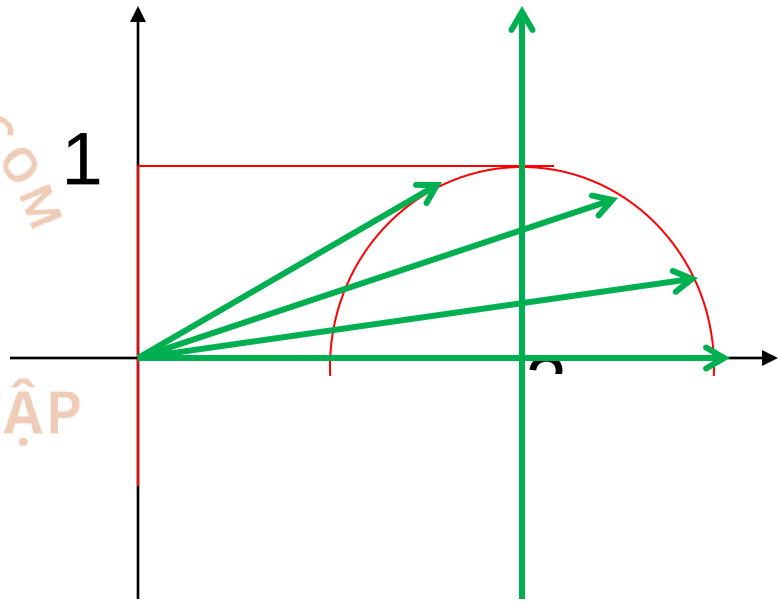
$$I = \int\limits_{-\pi/3}^{0} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r(2r\sin\varphi - 1)dr$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D x\,dx\,dy$

Trong đó D giới hạn bởi $(x-2)^2 + y^2 \le 1, 0 \le y$

Xác định góc φ sẽ rất khó vì ta phải xác định hệ số góc của tiếp tuyến với đường tròn qua gốc O



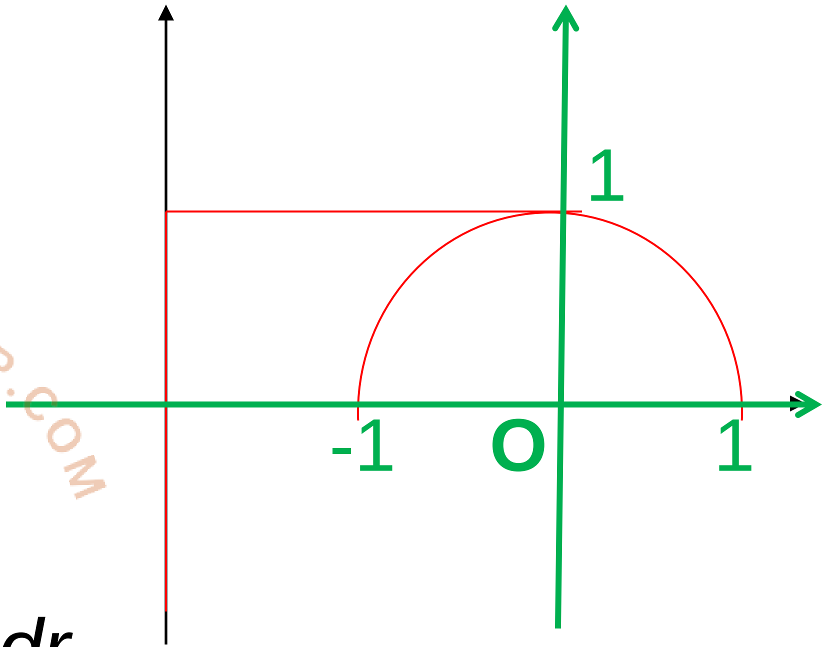
Do vậy, ta đi tính tích phân này bằng cách dời trục tọa độ để tâm hình tròn là (0,0), sau đó mới đổi sang tọa độ cực.

Thực hiện 2 việc trên bằng 1 phép đổi biến sang tọa độ cực mở rộng như sau, đặt:

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$$

2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Khi đó, hệ trục tọa độ mới sẽ có gốc trùng với tâm đường tròn



Miền D giới hạn bởi

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

Vậy : $$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} r(2 + r\cos\varphi)dr$$

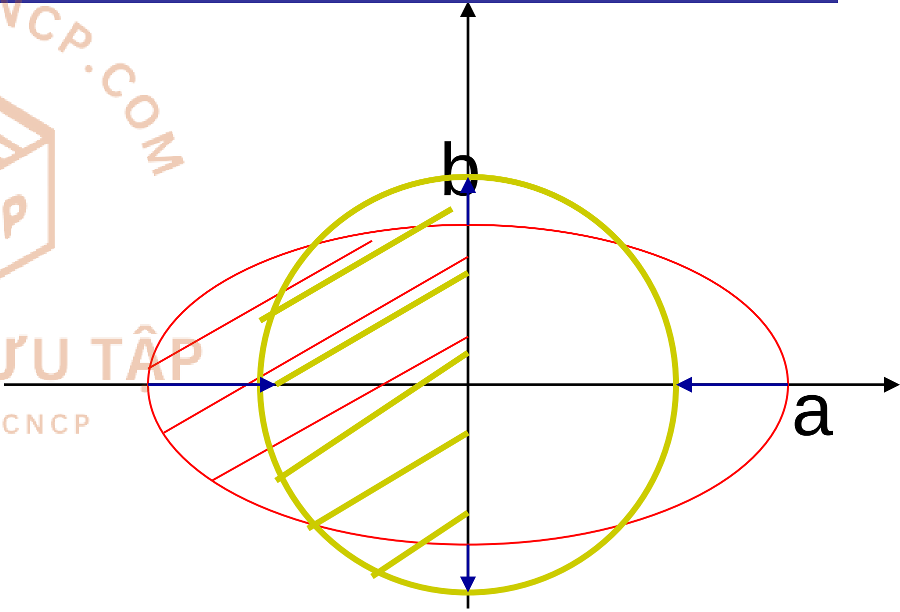
2.1.2. Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$

Trong đó D giới hạn bởi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, x \le 0$

Ta đổi biến sang tọa độ cực mở rộng bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = abr$$



Thì D giới hạn bởi

$$\begin{cases} \pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^1 abr\sqrt{1 - r^2}\,dr$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng (Tự đọc)

I. Ứng dụng hình học của tích phân kép

1. *Diện tích hình phẳng*: Diện tích miền D trong mặt phẳng Oxy được tính bởi

$$\boxed{S(D) = \iint_D dxdy}$$

Ví dụ 1: Tính diện tích miền phẳng D giới hạn bởi
$y^2+2y-3x+1=0,\ 3x-3y-7=0$

Ta tìm giao điểm 2 đường cong bằng cách khử x từ 2 pt

$$\begin{cases} 3x = y^2 + 2y + 1 \\ 3x = 3y + 7 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 3y + 7 (1) \Leftrightarrow y = 3, y = -2$$

Tức là chiếu miền D xuống trục Oy được đoạn [-2,3]

Khi $-2 \le y \le 3$, suy ngược lại phương trình (1) ta sẽ được $y^2 + 2y + 1 \le 3y + 7$

Vậy :

$$S(D) = \int_{-2}^{3} dy \int_{(y^2+2y+1)/3}^{(3y+7)/3} dx$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 2: Tính diện tích phần mặt phẳng nằm ngoài đường tròn r = 1 và trong đường tròn $r = 2\cos\varphi / \sqrt{3}$

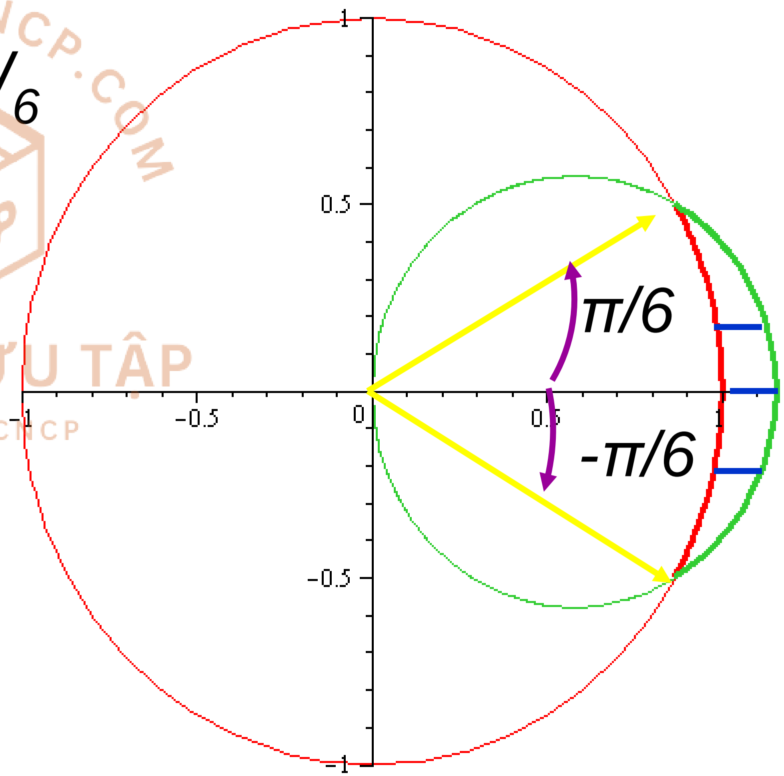
Trước tiên, ta tìm giao điểm

$\cos\varphi = \sqrt{3}/2 \leftrightarrow \varphi = \pi/6,\ \varphi = -\pi/6$

Vậy :

$$S(D) = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_{1}^{2/\sqrt{3}\cos\varphi} r\,dr$$

$$S(D) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{18}$$



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

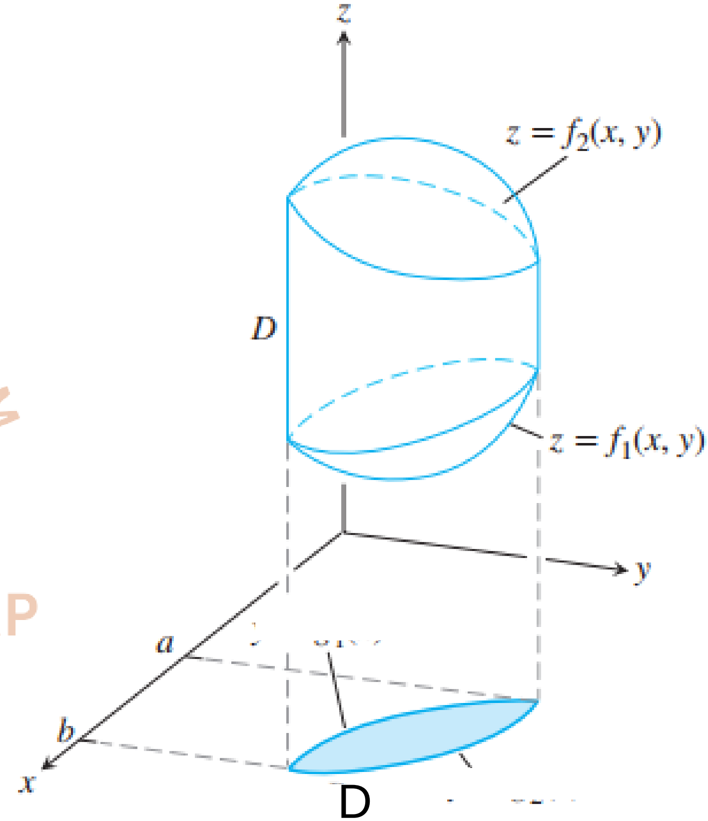
I. Ứng dụng hình học của tích phân kép

2. *Thể tích vật thể*

Ω giới hạn trên bởi mặt $S_2: z = f_2(x,y)$

giới hạn dưới bởi mặt $S_1: z = f_1(x,y)$

và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ song song với trục Oz có đường chuẩn là biên miền D được tính bởi:



$$\boxed{V(\Omega) = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right)dxdy}$$

$$\left(f_2(x,y) \le f_1(x,y), \forall (x,y) \in D\right)$$

Nhận xét: Miền D chính là hình chiếu của vật thể Ω xuống mp Oxy, hàm dưới dấu tp là hiệu 2 pt 2 mặt cong chặn vật thể Ω

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

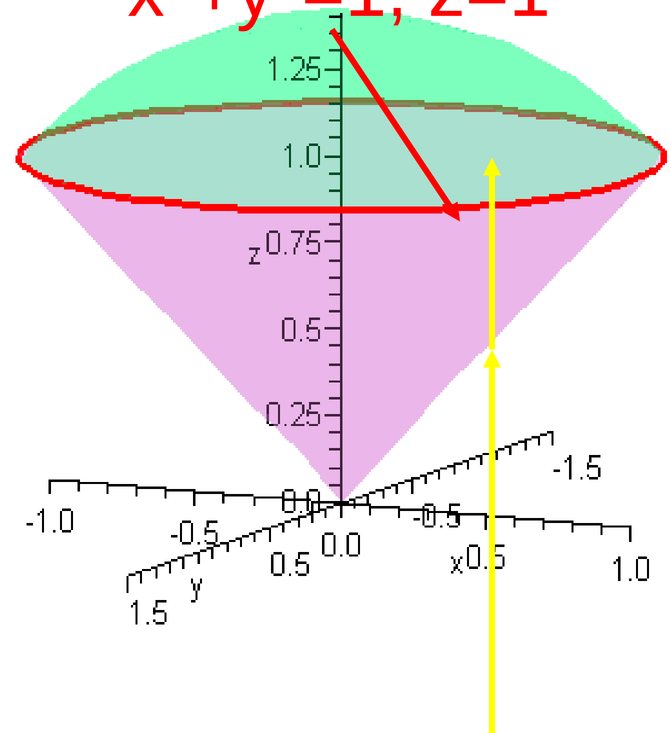
Ví dụ 3: Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi mặt nón và nửa mặt cầu: $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

Khi vật thể giới hạn chỉ bởi 2 mặt thì ta tìm hình chiếu D của nó xuống mặt phẳng ***z=0*** bằng cách **khử z** từ 2 phương trình 2 mặt

$$x^2+y^2=2-x^2-y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

$x^2+y^2=1, z=1$



Hình chiếu của giao tuyến là đường tròn thì hình chiếu của vật thể là hình tròn $x^2+y^2\le 1$

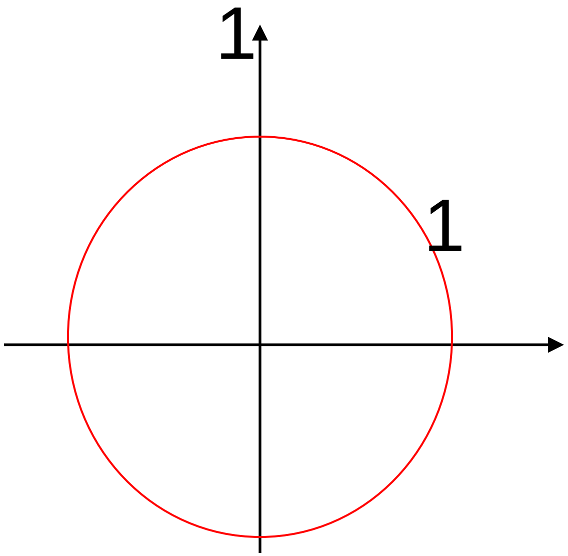
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 2-\left(x^2+y^2\right) \quad \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2-x^2-y^2}$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ta có: $\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

Tức là mặt nón là mặt giới hạn dưới, mặt cầu là mặt giới hạn trên của vật thể. Vậy :

$$V(\Omega) = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$



$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\sqrt{2-r^2} - r\right)dr$$

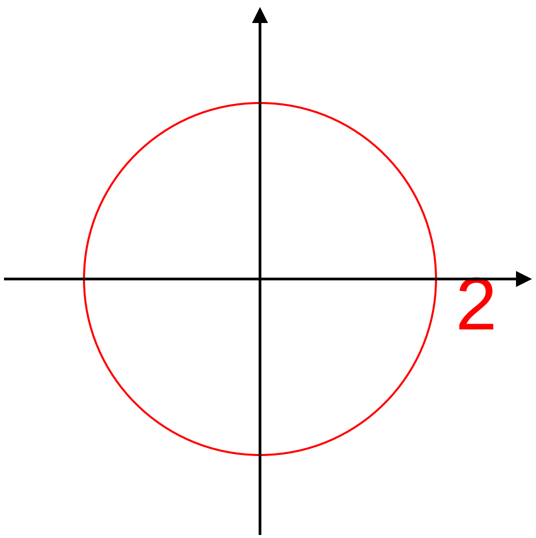
$$V(\Omega) = -2\pi\left(\frac{r^3}{3} + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(2-r^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$V(\Omega) = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$$

Ví dụ 4: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 2z$, $z=0$

Ta xét phương trình không chứa z: $x^2+y^2=4$.

Trong không gian, đó là mặt trụ tròn xoay song song với trục Oz. Suy ra, vật thể là phần hình trụ tròn xoay giới hạn bởi mp z=0 và mặt trụ $y^2=2z$



Do đó, hình chiếu là hình tròn

$$x^2 + y^2 \le 4$$

Hiển nhiên: $0 \le \frac{1}{2}y^2$

tức là mặt $z = 0$ ở phía dưới và $z = \frac{1}{2}y^2$ ở phía trên

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Suy ra hàm dưới dấu tích phân là:

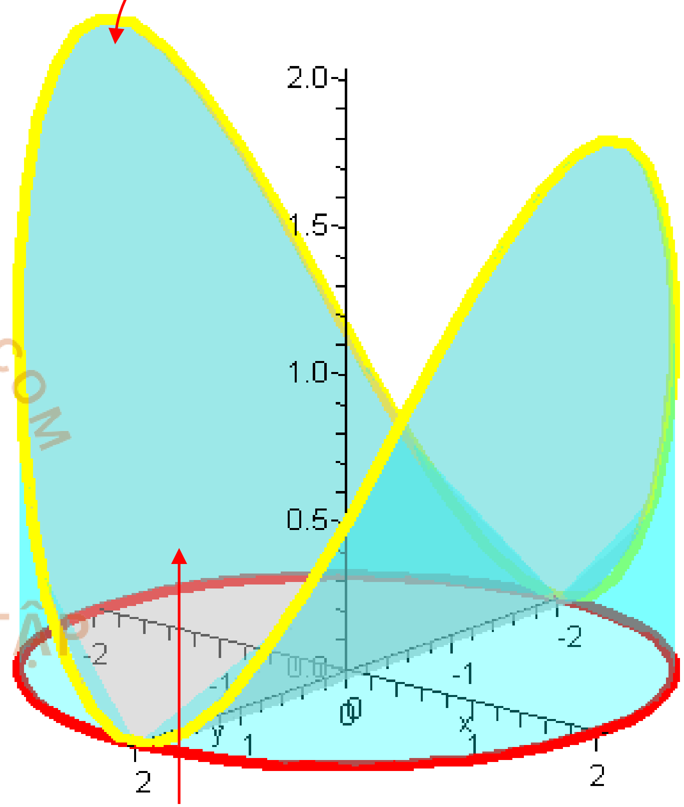
$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} - 0 = \frac{y^2}{2}$$

Vậy thể tích cần tính là :

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \frac{y^2}{2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\frac{r^2\sin^2\varphi}{2}dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr$$



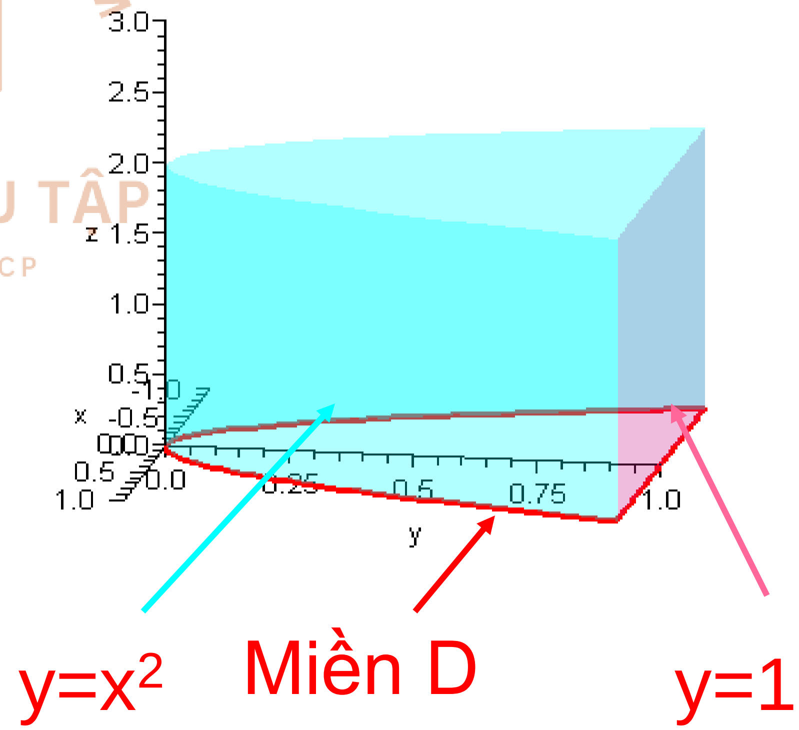
Ví dụ 5: Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi

$$z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0$$

Ta sẽ tìm hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy dựa trên các pt không chứa z tức là các hình trụ có đường sinh song song với trục Oz

Trong 4 pt đã cho 2 *phương trình không chứa z* : $y=1$, $y = x^2$

Vẽ 2 đường cong trong mp Oxy ta được miền D đóng trong mặt Oxy, tương ứng trong không gian ta được 2 mặt trụ



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

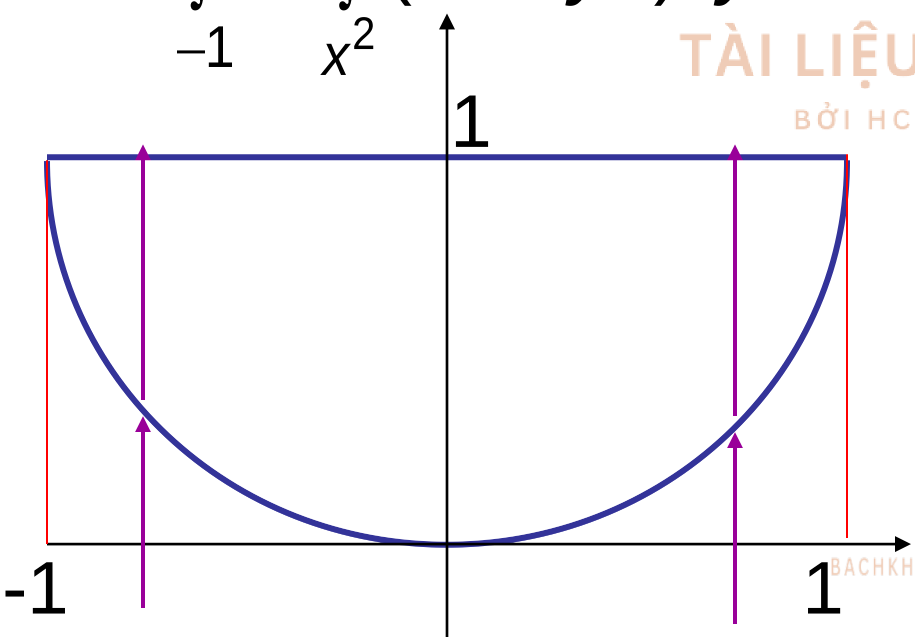
Với 2 mặt còn lại hiển nhiên ta có $0 \le x^2+y^2$ tức là hàm

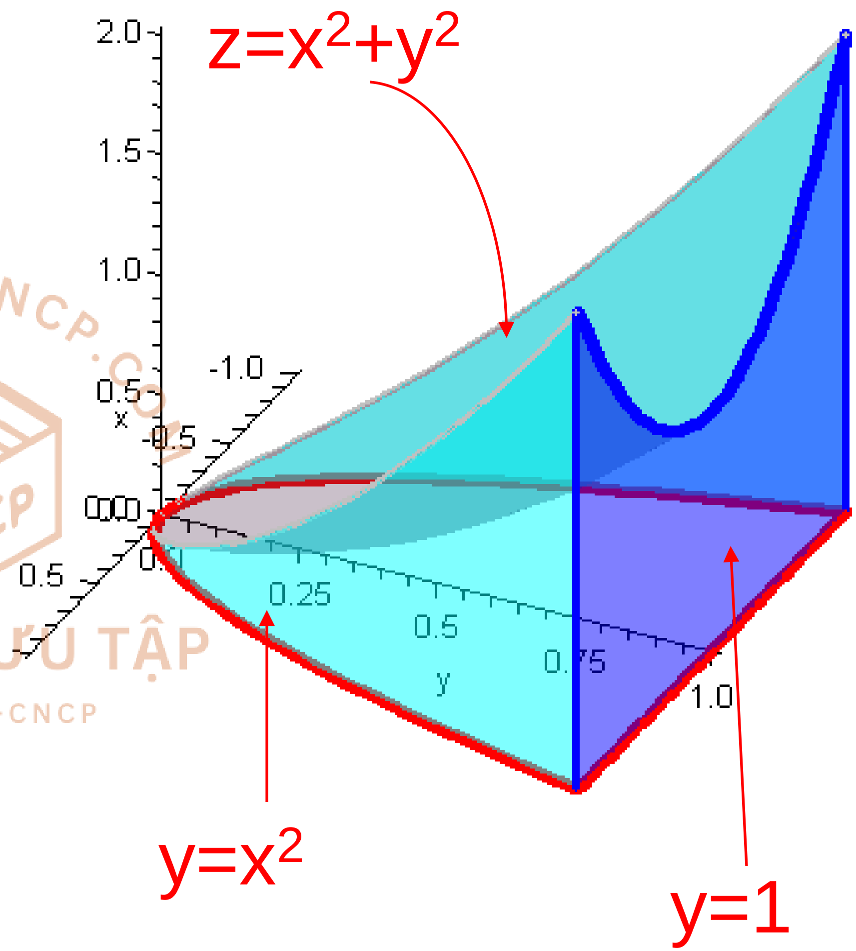
$f(x,y) = x^2+y^2+0$

Vậy :

$$V = \iint_D ((x^2+y^2)-0)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)dy$$





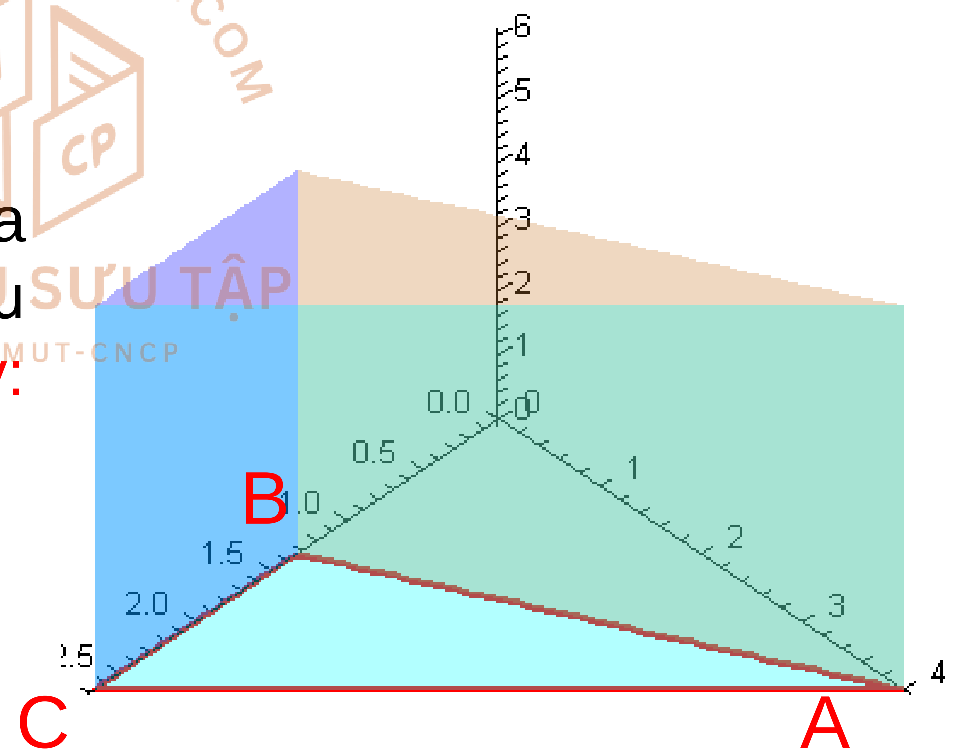
2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 6: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi

$$z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}, z=0, y=0, 3x+y=4, \frac{3}{2}x+y=4$$

Các phương trình không chứa z : $y = 0,\ 3x+y = 4,\ {}^{3}/_{2}x+y = 4$.

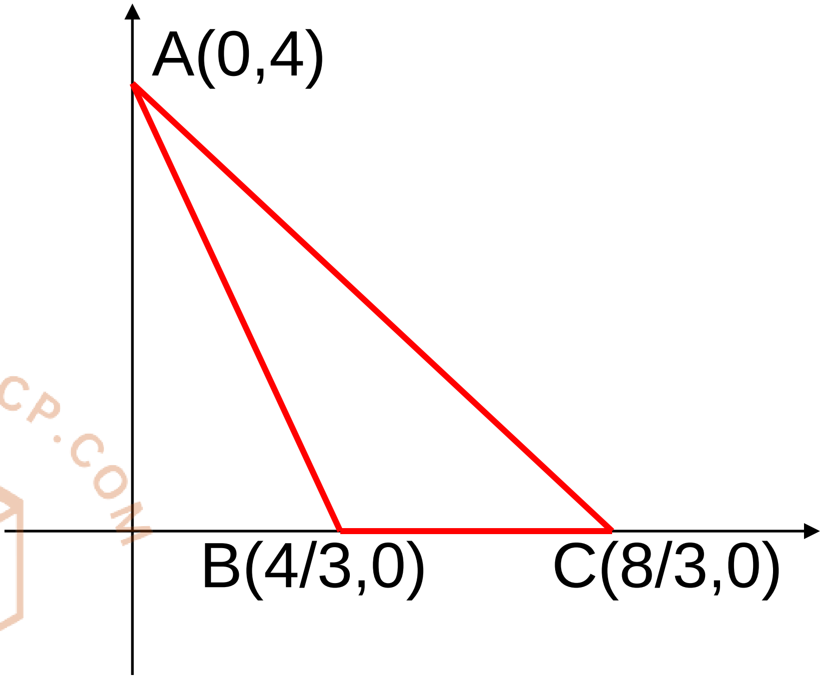
Vẽ 3 đt này trong mp Oxy ta được ΔABC nên hình chiếu của V xuống mp Oxy là Dxy: ΔABC



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Còn 2 mặt mà pt chứa z là

$$z = 0, z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$$



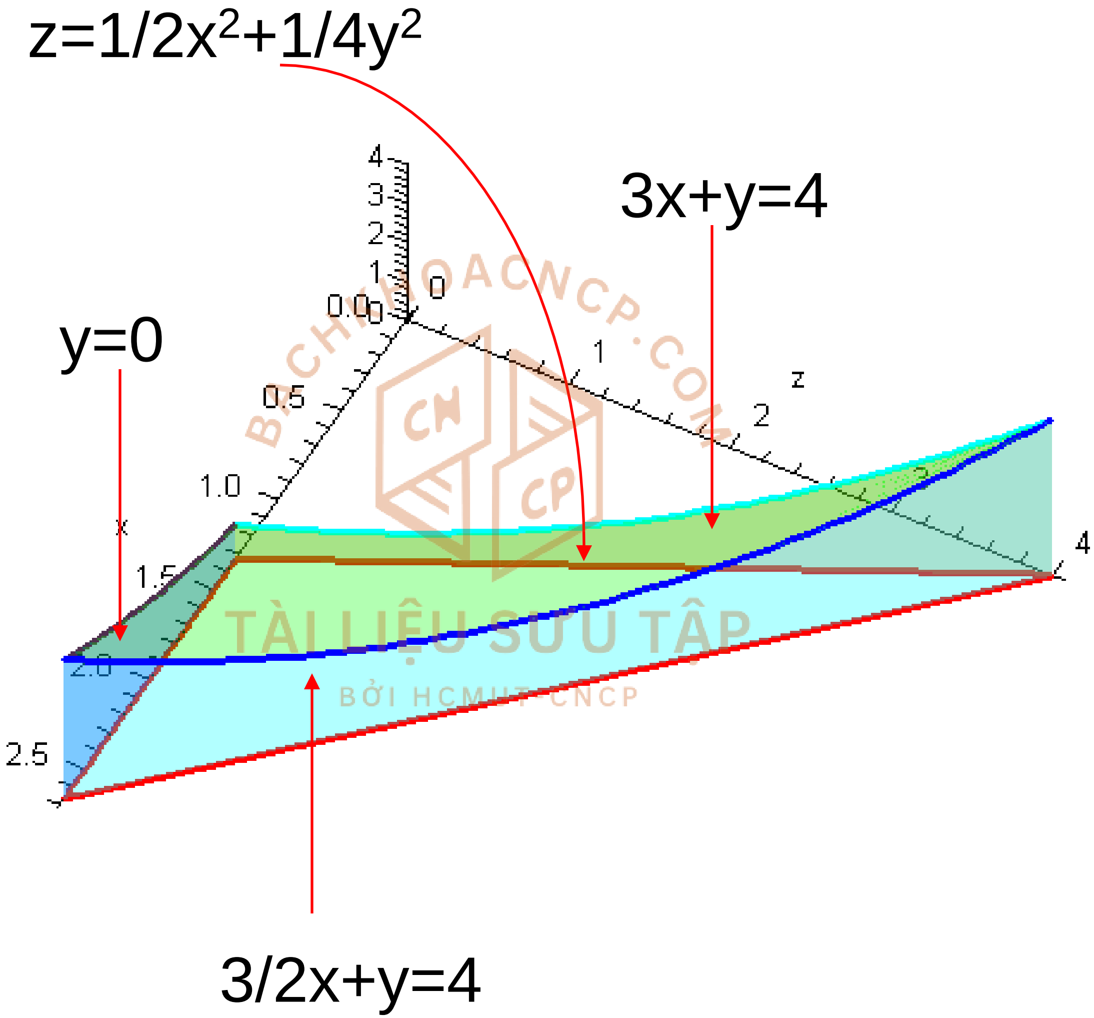
So sánh : $0 \le z \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$

Suy ra hàm dưới dấu tích phân là

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$$

Vậy: $V = \iint\limits_{\Delta ABC} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) dxdy = \int_0^4 dy \int_{\frac{4-y}{3}}^{2\frac{4-y}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) dx$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng



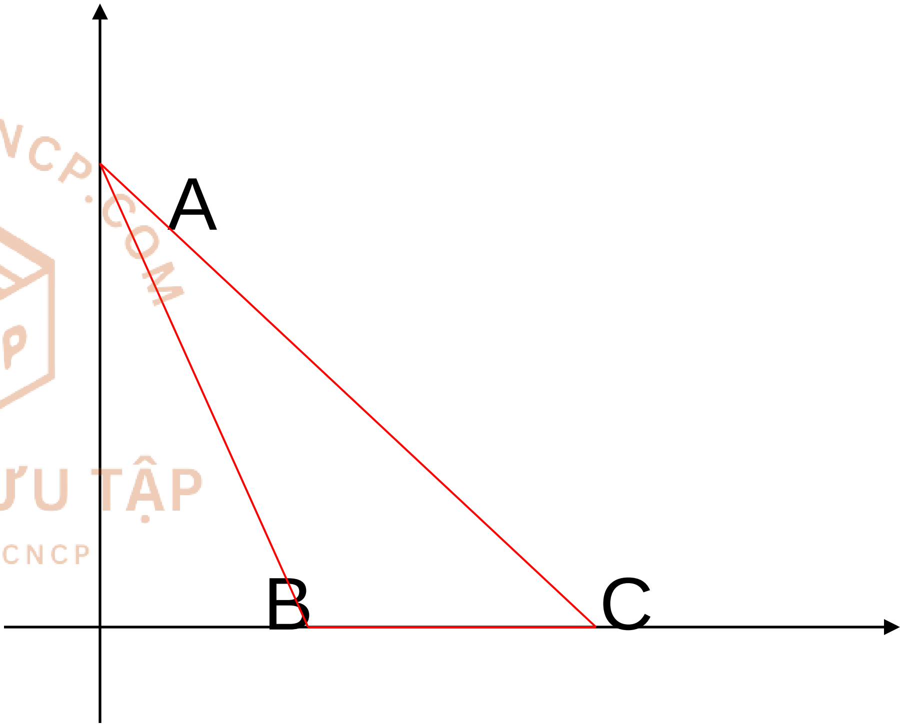
Ví dụ 7 : Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$$y = 0,\ z = 0,\ z = a - x - y,\ 3x + y = a,\ 3/2x + y = a$$

Trong 5 pt đã cho có 3 pt không chứa z tương ứng với 3 mp cùng song song với trục Oz

3 đt này giúp ta có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là

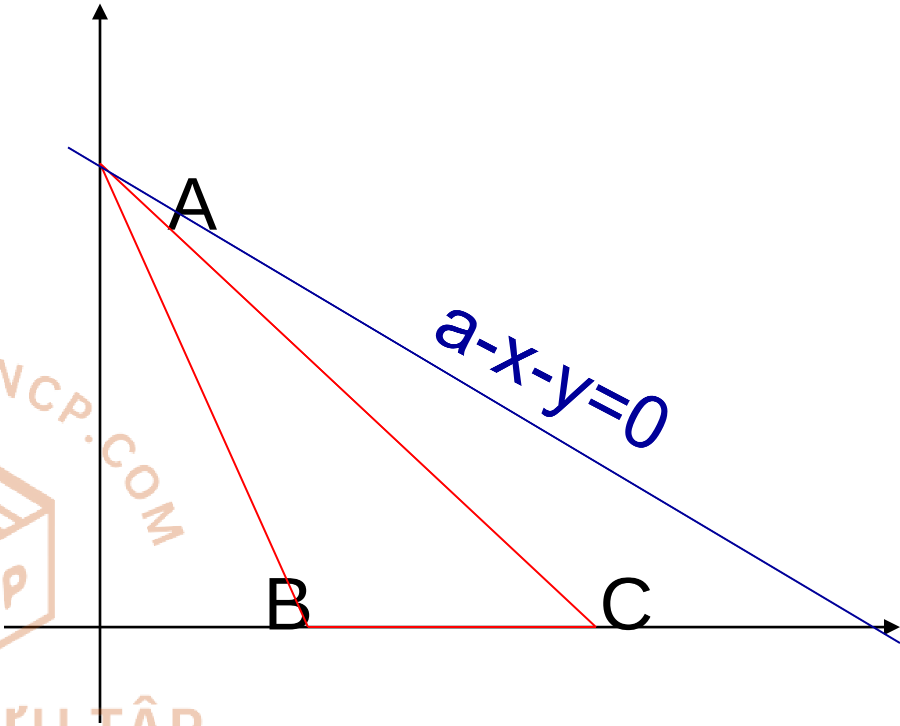
ΔABC = Miền D



Còn lại 2 mặt có pt chứa z, ta sẽ tìm cách xác định mặt nằm trên, nằm dưới để có hàm dưới dấu tích phân

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ta đi so sánh z = a-x-y với z = 0 bằng cách vẽ thêm đường a-x-y=0 trong mặt phẳng Oxy



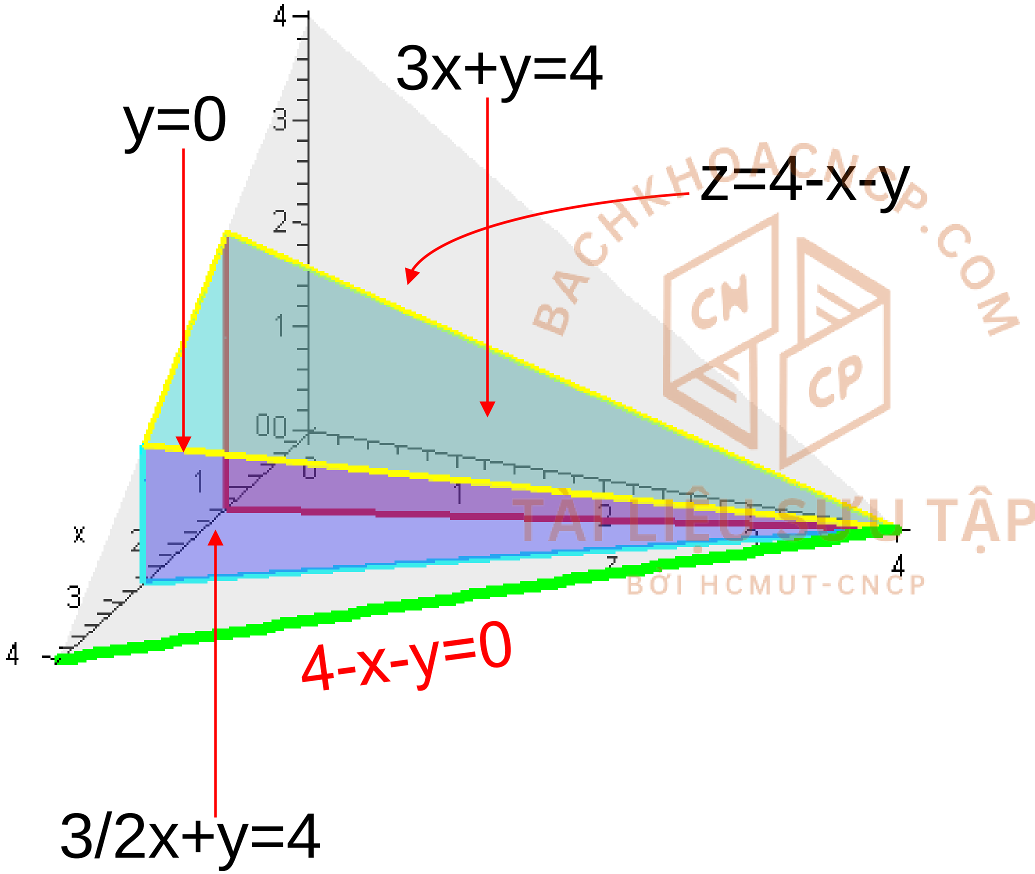
Rõ ràng, trên hình vẽ ta thấy ΔABC nằm phía dưới đường thẳng *a-x-y=0*

tức là trong miền D ta có bất đẳng thức *0 ≤ a-x-y.*

Suy ra hàm dưới dấu tích phân là f(x,y) = a-x-y

$$\text{Vậy: } V = \iint_{\Delta ABC} (a-x-y)dxdy = \int_0^a dy \int_{\frac{a-y}{3}}^{2\frac{a-y}{3}} (a-x-y)dx$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng



Ta xoay trục Oy thẳng đứng, ta sẽ thấy vật thể chính là hình chóp tứ giác, thể tích bằng 1/3 chiều cao nhân diện tích đáy

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

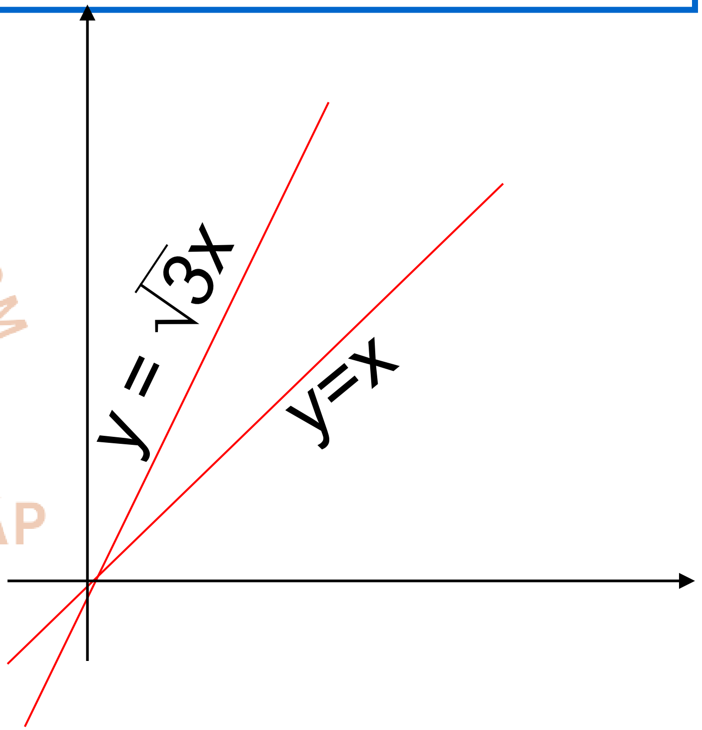
Ví dụ 8: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong:

$$z = 1-x^2-y^2,\ y = x,\ y = \sqrt{3}x,\ z = 0 \text{ với } x, y, z \ge 0$$

Ta có 2 pt không chứa z:

$$y = x, y = \sqrt{3}x$$

Vẽ 2 đường thẳng trên trong mp Oxy không đủ cho ta miền đóng D.



Vì vậy, ta sẽ tìm thêm giao tuyến của các mặt còn lại với mặt z=0

Thay $z = 0$ vào phương trình paraboloid: $z=1-x^2-y^2$ ta được $x^2+y^2 =1$, tức là giao tuyến của mặt paraboloid với mặt Oxy là đường tròn.

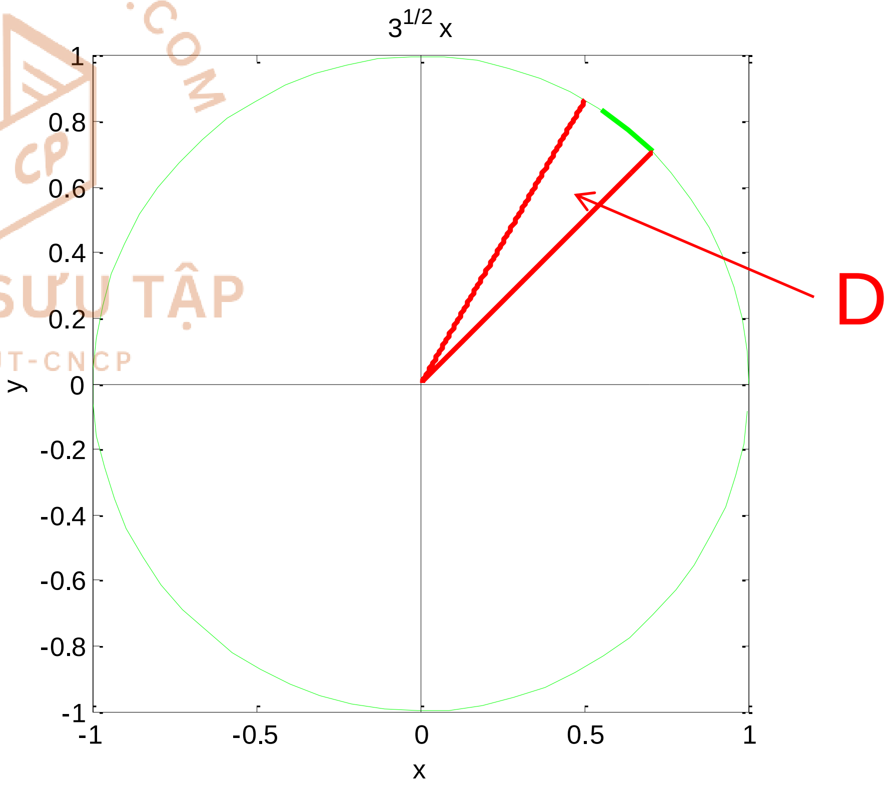
2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

1 phần đường tròn đó sẽ “ĐẬY KÍN” phần còn mở giữa 2 đường thẳng trên.

Từ đó suy ra, D là 1 phần hình tròn $x^2+y^2 \leq 1$ nằm giữa 2 đường thẳng với x, y ≥0

Với mọi (x,y) thuộc D, ta đều có : $0 \leq 1-x^2-y^2$

tức là mặt phẳng z = 0 nằm dưới và paraboloid $z = 1-x^2-y^2$ nằm trên



Vậy:

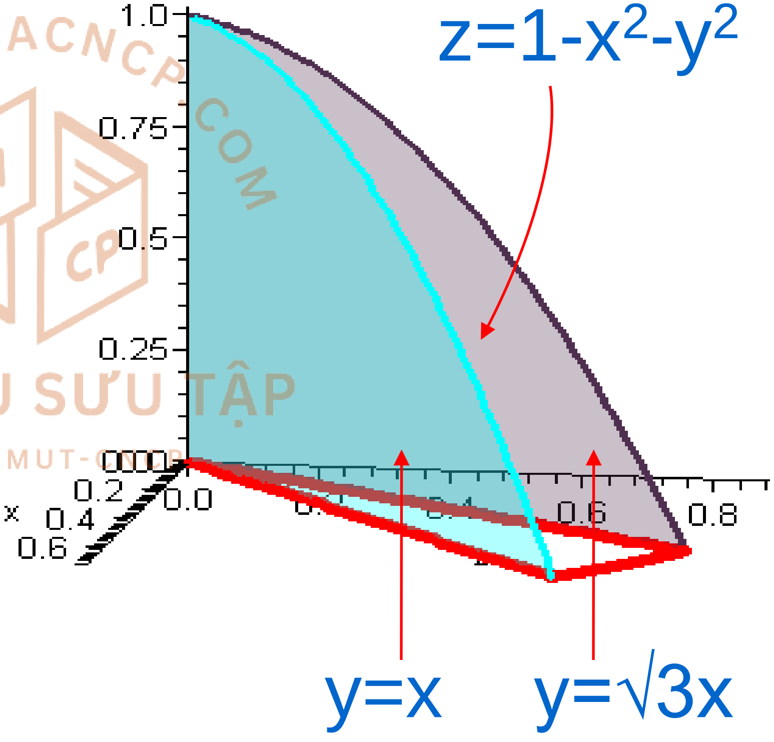
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Vì miền lấy tích phân là hình tròn nên ta sẽ đổi sang tọa độ cực bằng cách đặt

x=rcosφ, y=rsin φ

$$V = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 r(1-r^2)dr$$



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 9: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$$x=1, x=2, y^2+z^2=1, y^2+z^2=4$$

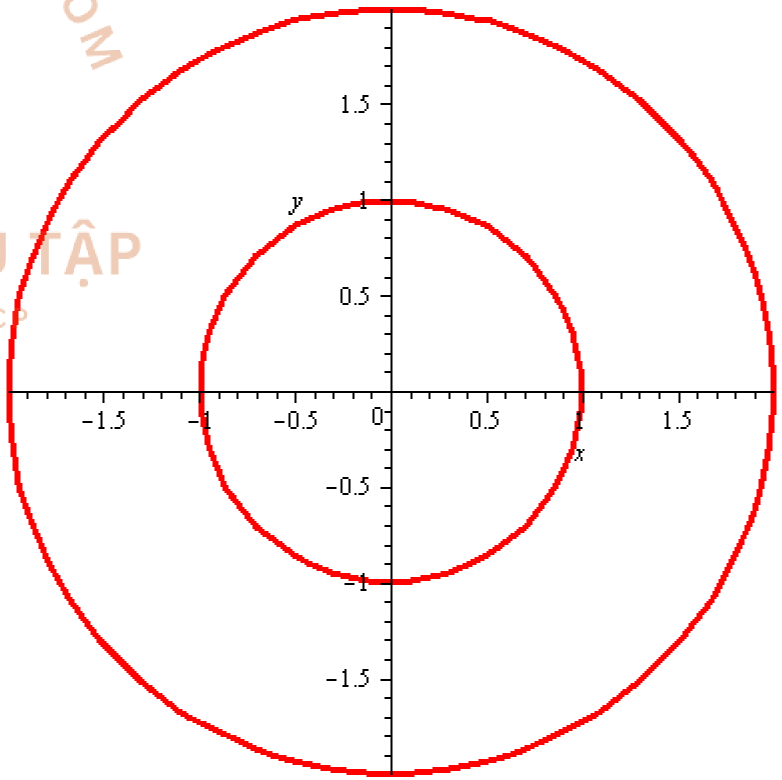
Hai pt không chứa x cho ta 2 mặt trụ cùng song song với trục Ox là:

$$y^2+z^2=1, y^2+z^2=4$$

Vì vậy, hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oyz là miền D :

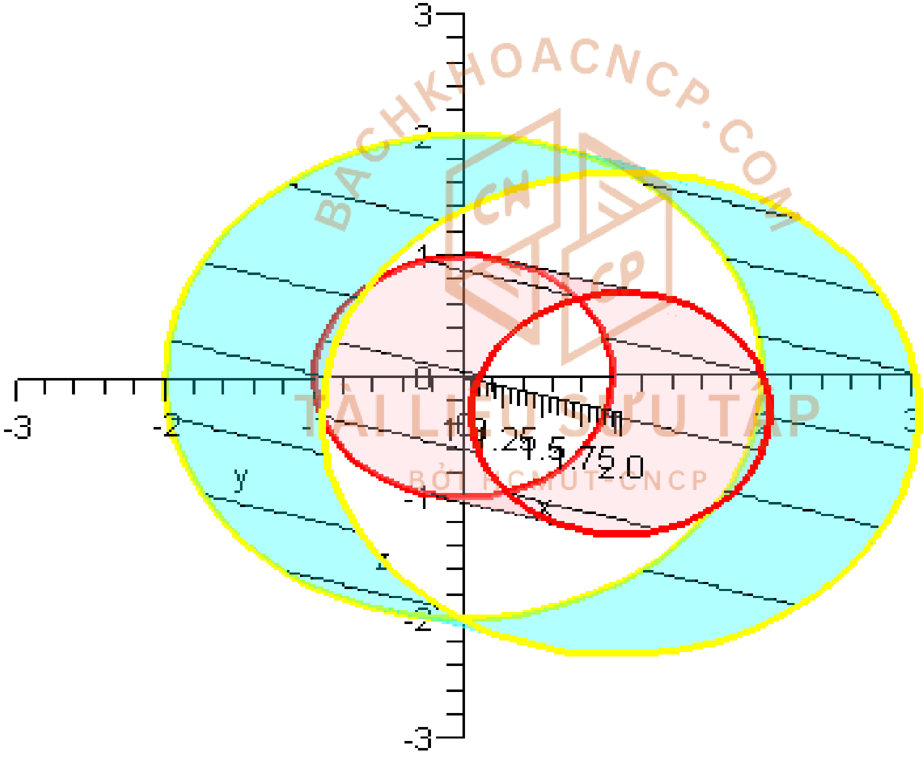
$$1 \le y^2+z^2 \le 4$$

$$V = \iint\limits_{1\le y^2+z^2\le 4} (2-1)dydz$$



V bằng diện tích hình tròn lớn trừ diện tích hình tròn nhỏ

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

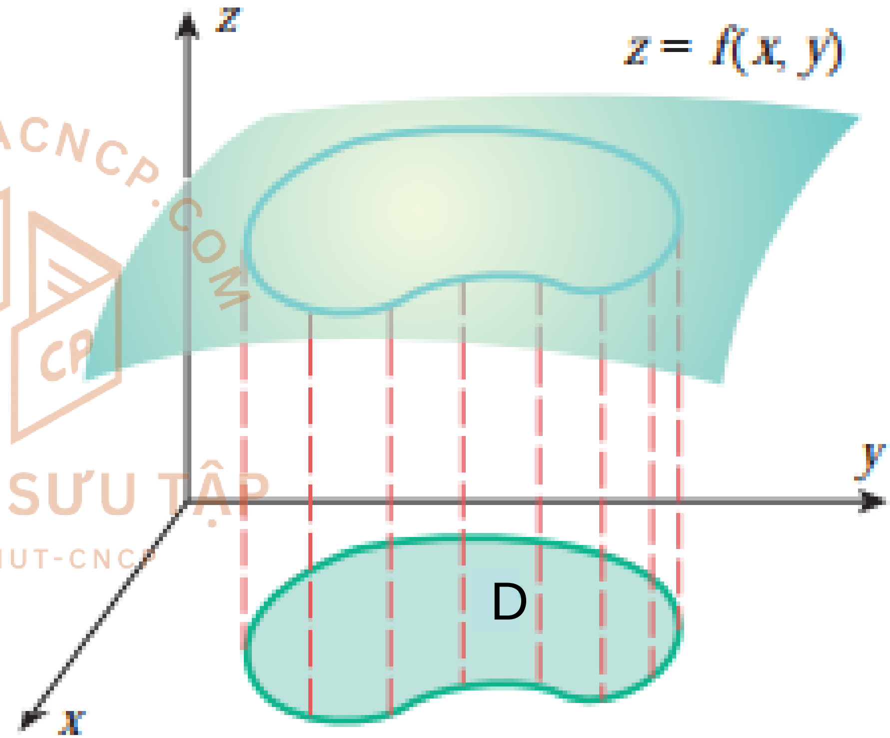


2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

3. ***Diện tích mặt cong*** : Diện tích phần mặt cong S có phương trình z = f(x,y) và có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D được tính bởi

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy}$$

Để tính diện tích 1 phần mặt cong thì trước tiên ta phải xác định được *hình chiếu D của phần mặt cong cần tính diện tích xuống mặt tọa độ* Oxy (Oyz, Ozx).



Sau đó, ta phải viết lại pt mặt cong S bằng cách viết 1 biến theo 2 biến còn lại tuỳ vào việc ta tìm hình chiếu xuống mp toạ độ nào.

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 10 : Tính diện tích phần mặt cầu S: $x^2+y^2+z^2 = 4$ nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta đi tìm được hình chiếu D của mặt cong xuống 1 trong 3 mặt tọa độ.

Với ví dụ này, ta sẽ tìm hình chiếu của S xuống mặt z=0 bằng cách khử z từ 2 phương trình đã cho

$z^2 = 4-x^2-y^2 = x^2+y^2 \leftrightarrow x^2+y^2 = 2$

Suy ra: hình chiếu của S xuống mặt $z = 0$ là hình tròn D_{xy} : $x^2+y^2 \leq 2$

Tìm hình chiếu xuống mặt $z = 0$ xong, ta tính $z=f(x,y)$ từ phương trình mặt S

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Vì mặt S nằm phía trên mặt nón tức là z ≥ 0 nên ta lấy

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

Suy ra : $$\sqrt{1 + z'^{\,2}_x + z'^{\,2}_y} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Vậy: $$S = \iint\limits_{x^2 + y^2 \le 2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} dr$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-d(4 - r^2)}{\sqrt{4 - r^2}} = 2\pi \left(-2\sqrt{4 - r^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi(2 - \sqrt{2})$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 11:Tính diện tích phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$

nằm giữa 2 mặt phẳng $z=y, z=\sqrt{3}y, (z\geq 0, y\geq 0)$

2 mặt phẳng cắt mặt cầu S đều song song với trục Ox (pt không chứa x) nên ta sẽ tìm hình chiếu của S xuống mặt phẳng *x = 0*

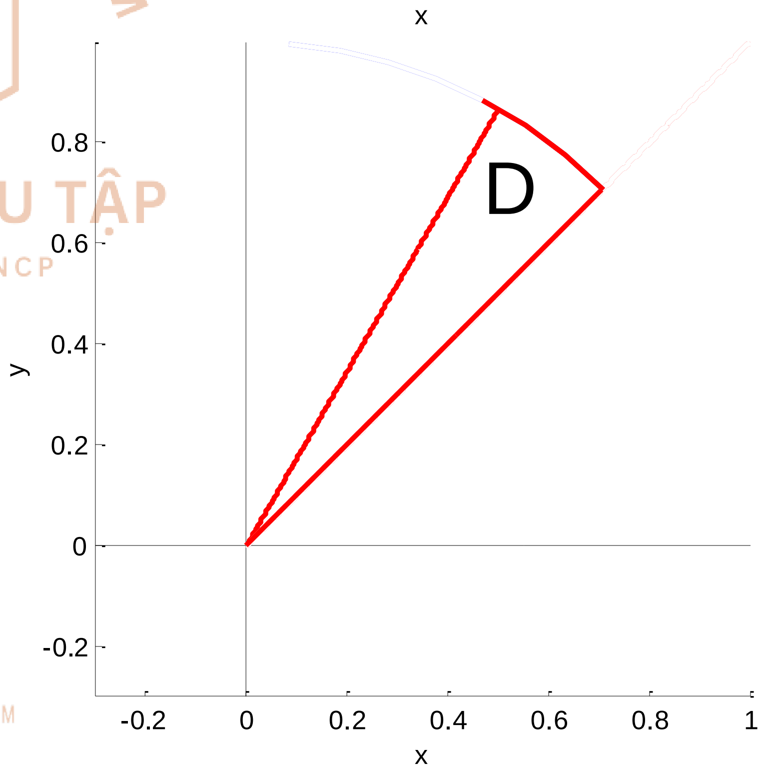
Vẽ 2 nửa đường thẳng:

$z=y, z=\sqrt{3}y, (z\geq 0, y\geq 0)$

chưa tạo thành miền đóng D.

Do đó, ta sẽ phải lấy thêm hình chiếu của mặt cầu xuống mặt phẳng *x = 0* là hình tròn

Phần giữa 2 đt trên và nằm trong hình tròn cho ta miền D



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

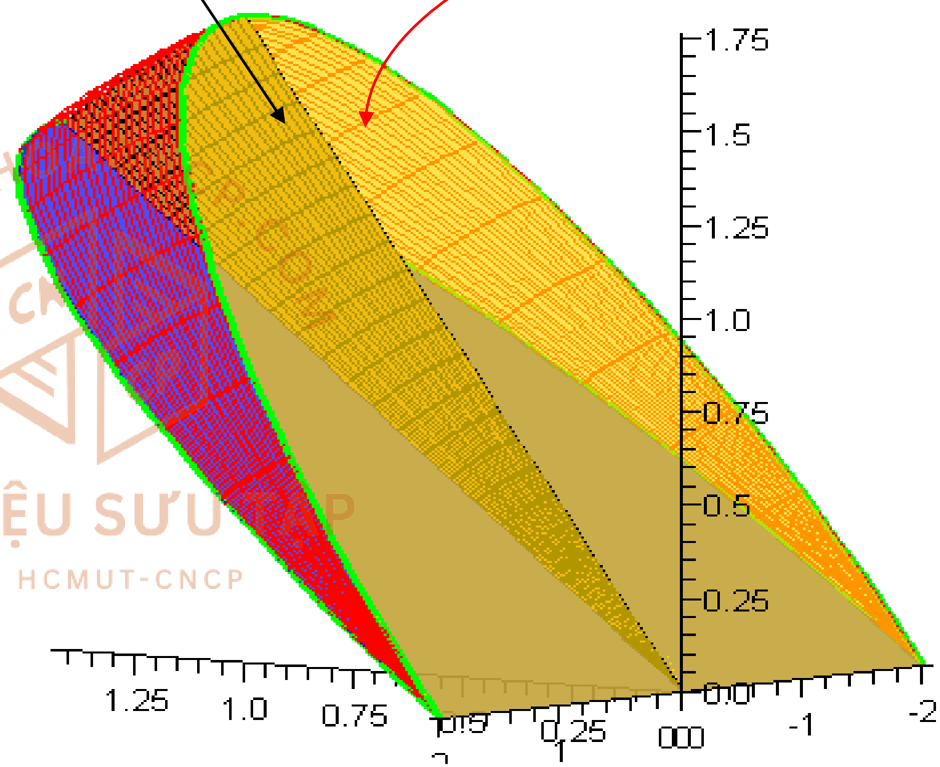
Mặt cầu và cả 2 mặt phẳng cắt nó đều nhận mặt *x = 0* là mặt đối xứng nên phần mặt S cũng nhận *x = 0* là mặt đối xứng

Do đó, ta sẽ tính diện tích phần phía trên mặt *x = 0* rồi nhân đôi

Ta viết lại phương trình mặt S theo y, z: x=f(y,z) và x ≥ 0

Miền D trên mp x=0

$x^2+y^2+z^2=2$



$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

Và đi tính đhr của hàm theo y, theo z.

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

$$x=\sqrt{1-y^2-z^2}\quad\Rightarrow\begin{cases} x'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\\ x'_z=\dfrac{-z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+x'^{2}_y+x'^{2}_z}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

Vậy: $$S=2\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int_0^1 r\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

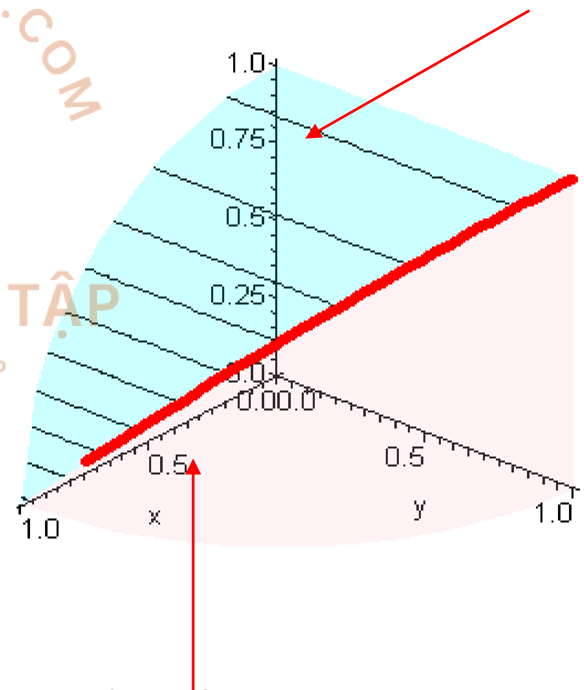
Ví dụ 12: Tính diện tích phần mặt trụ S: $x^2+y^2=4$ nằm phía trong mặt trụ R: $x^2+z^2 = 4$

Ta sẽ chiếu phần mặt S xuống mặt phẳng *y = 0* vì hình trụ R song song với trục Oy, và được hình tròn

$$x^2 + z^2 \le 4$$

Do tính đối xứng qua các mặt tọa độ của cả 2 mặt trụ nên ta chỉ tính diện tích một phần tám mặt S, nằm trong góc $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$x^2+z^2=4$ (R)



$x^2+y^2=4$ (S)

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Khi đó, ta đi tính y = f(x,z) từ phương trình mặt S.

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \\ y'_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1 + {y'_x}^2 + {y'_z}^2} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Vậy, diện tích cần tính là

$$V = 8\iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dxdz = 8\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dz$$

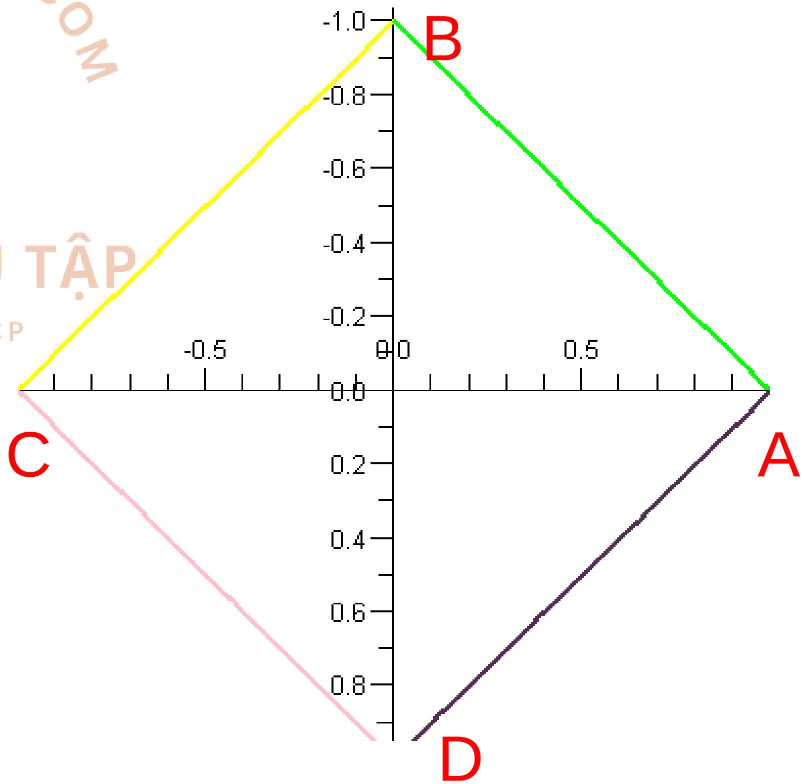
$$= 16\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \left(z\right)_0^{\sqrt{4 - x^2}} dx = 16\int_0^2 dx = 32$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 12: Tính diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2+y^2$ bị cắt bởi 4 mặt $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x – y = -1$, $x + y = -1$

4 mặt phẳng $x-y = 1$, $x+y = 1$, $x-y = -1$, $x+y = -1$ cùng song song với trục Oz, tạo trong không gian 1 hình trụ kín có hình chiếu xuống mặt Oxy là hình vuông ABCD

Mặt nón nhận mặt phẳng Oxy là mặt đối xứng nên phần nón nằm trong trụ kín trên cũng nhận Oxy là mặt đối xứng, ta tính diện tích phía trên mp Oxy rồi nhân đôi



$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{2}$$

Khi đó, hàm dưới dấu tích phân bằng hằng số nên tích phân cần tính là diện tích miền lấy tích phân nhân với hằng số.

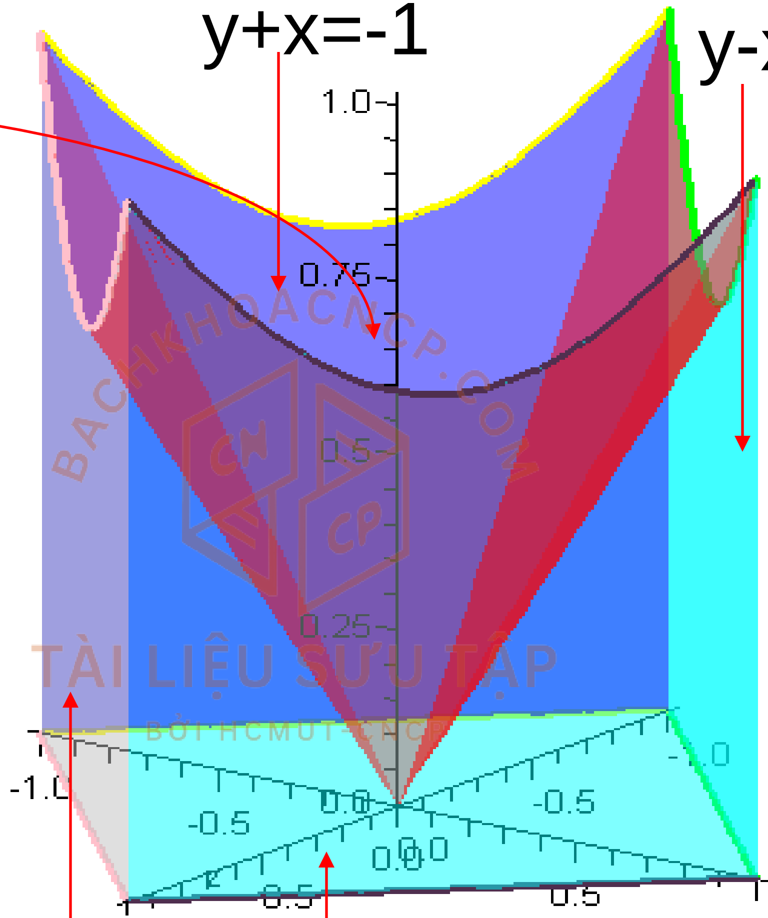
Vậy $S = 2.2.\sqrt{2}$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

$z^2=x^2+y^2,\ z\geq 0$

$y+x=-1$

$y-x=1$



$-y+x=1$

$y+x=1$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ 13: Cho vật thể Ω giới hạn bởi $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=y^2$.
Tính: 1. Diện tích phần mặt phẳng z=0 nằm trong Ω

2. Thể tích Ω

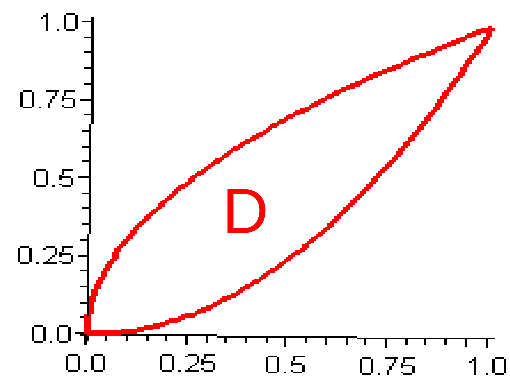
3. Diện tích phần mặt trụ $z = y^2$ nằm trong Ω

Trong 4 mặt tạo thành Ω, có 2 mặt cùng song song với trục Oz là $y=x^2$ và $x=y^2$

Từ đó ta được hình chiếu của Ω xuống mặt z = 0 là miền D

1. Diện tích miền D

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$$



2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

2. Thể tích Ω : Hiển nhiên $y^2 \geq 0$ nên $f(x,y)=y^2$

$$V(\Omega) = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy$$

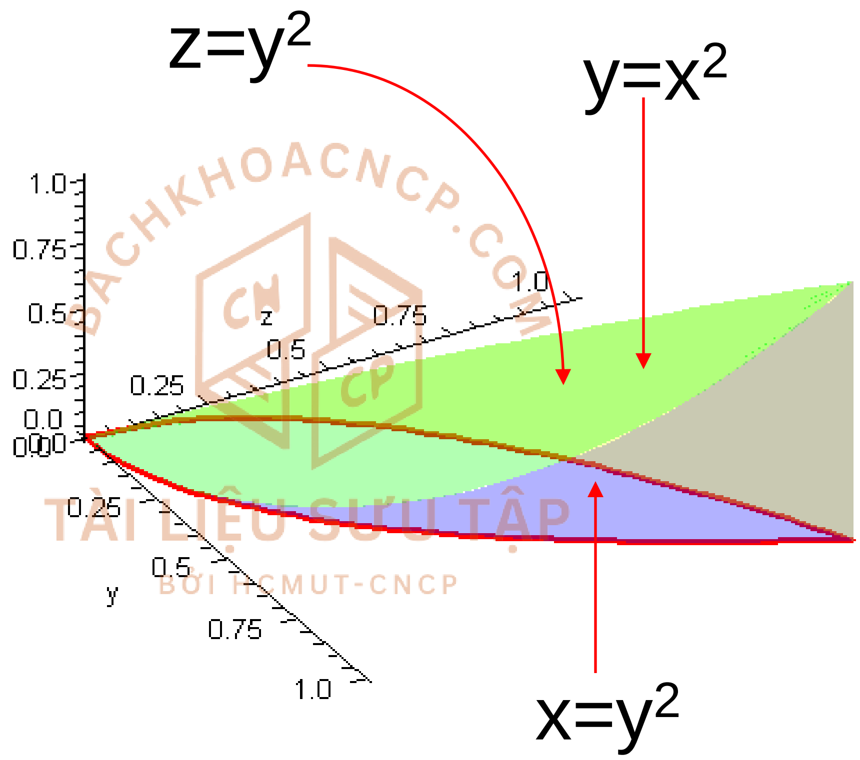
3. Diện tích mặt cong có phương trình $z=y^2$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 2y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1+4y^2}$$

Vậy diện tích mặt cong cần tính là

$$S = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{1+4y^2} dy$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng



II. Ứng dụng cơ học

Mảnh phẳng D trong mặt phẳng Oxy có khối lượng riêng tại điểm (x,y) là f(x,y)

1. Khối lượng mảnh phẳng

$$\boxed{M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}$$

2. Moment quán tính của mảnh phẳng

Với trục Ox

$$\boxed{I_x = \iint\limits_D y^2 f(x,y)dxdy}$$

Với trục Oy

$$\boxed{I_y = \iint\limits_D x^2 f(x,y)dxdy}$$

Với gốc tọa độ O

$$\boxed{I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) f(x,y)dxdy}$$

Với đt L, r(x,y) là khỏang cách từ điểm (x,y) đến L

$$\boxed{I_L = \iint\limits_D r^2(x,y) f(x,y)dxdy}$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

3. Moment tĩnh của mảnh phẳng

Với trục Ox

$$M_x = \iint_D y f(x,y)\,dxdy$$

Với trục Oy

$$M_y = \iint_D x f(x,y)\,dxdy$$

4. Trọng tâm (x_0,y_0) của mảnh phẳng

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x f(x,y)\,dxdy}{\iint_D f(x,y)\,dxdy}$$

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y f(x,y)\,dxdy}{\iint_D f(x,y)\,dxdy}$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ: Cho mảnh phẳng D giới hạn bởi $y=x^2$, $y=2-x$ và khối lượng riêng $f(x,y)=2x-y$. Tính khối lượng, các moment quán tính, moment tĩnh và trọng tâm.

Ta có : $x^2 = 2-x \longleftrightarrow x^2+x-2=0 \longleftrightarrow x=1,\ x=-2$

Suy ra D giới hạn bởi: $2 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 2-x$

Vậy:

Khối lượng D $$M = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (2x-y)dy = \frac{63}{10}$$

Moment tĩnh

$$M_x = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y(2x-y)dy \qquad M_y = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} x(2x-y)dy$$

2.1.3. Tích phân kép – Ứng dụng

Trọng tâm (x_0, y_0) :

$$x_0 = \frac{M_y}{M}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Moment quán tính :

$$I_x = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y^2(2x - y)dy \qquad I_y = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} x^2(2x - y)dy$$

Tích phân kép – Bài tập

I. Tính tích phân hàm f(x,y) trên miền D

1. $f(x,y) = x + 2y, D: y = x^2 + x - 1, y = 5x - 4$

2. $f(x,y) = y, D: y = e^{x+1}, y = e^3, x = -1$

3. $f(x,y) = 2y - x, D: x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 2y$

4. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, D: 2y \le x^2 + y^2 \le 4y, 0 \le x \le \sqrt{3}y$

5. $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(x^2 + y^2\right)\ln\sqrt{x^2 + y^2}}, D: x^2 + y^2 \le e^2, -x \le y \le x$

Tích phân kép – Bài tập

$6.\ f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}, D: x^2+y^2\le 4, x\le 0$

$7.\ f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, D: x^2+y^2\le 12x, x\ge 3$

$8.\ f(x,y)=x+3, D: y=0, y=x, x=y^2-2$

$9.\ f\left(x,y\right)=2x, D: y=e^{2x}, y=e^x+2, x=0$

$10.\ f\left(x,y\right)=y+2, D: x^2+y^2=2y, 2y=x^2, y=2$(phần $x\ge 0$)

II. Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I_1=\int_0^1 dy\int_x^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx; I_2=\int_0^2 dx\int_x^{x^2-2} f(x,y)dy$$

Tích phân kép – Bài tập

III. Tính diện tích miền D:

$$1. D_1 : x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 2y$$

$$2. D_2 : y = x^2 + 1, y = 2x + 1$$

$$3. D_3 : xy = 4, x + y = 5$$

IV. Tính thể tích vật thể:

$$V_1 : z = x^2 + y^2, z = 2x$$

$$V_2 : z = 0, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$$

$$V_3 : x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 + z^2 \le 2$$

$$V_4 : z = 0, y = x^2, z + y = 4$$

$$V_5 : x + y + z = 2, y = 0, z = 0, 2x + y = 2$$