

Bài tập chương 6

Phép đếm

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến các phép đếm (bao gồm lượng số, tổ hợp, chỉnh hợp, và các nguyên lý đếm). Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 3 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Giả sử bộ môn Khoa học máy tính có tổng cộng 10 môn học chuyên ngành. Trong bộ môn có 12 giảng viên (6 kĩ sư, 4 tiến sĩ và 2 giáo sư). Biết rằng mỗi môn học sẽ do một tiến sĩ hoặc một giáo sư đảm nhiệm. Mỗi môn học cũng có một trợ giảng là kĩ sư. Cho biết:

- Tổng số kết hợp có thể có của các môn học và các giảng viên trong bộ môn. Cho trước kết hợp là bộ 3: Môn học + Giảng viên lý thuyết + trợ giảng
- Nếu số lượng môn học và giảng viên giảm đi một nửa. Tổng số kết hợp có thể có là bao nhiêu?
- Giả sử số lượng môn học và giảng viên như câu b, khoa tuyển thêm một thạc sĩ toán học chuyên giảng dạy Toán rời rạc. Tổng số kết hợp có thể có là bao nhiêu?

Lời giải.

a) *Kết hợp của các bộ 3 là tích Đề Các $A \times B \times C$ với A là tập tất cả môn học, B là tập các tiến sĩ và giáo sư, C là tập các kĩ sư. Tổng số kết hợp sẽ là $10 \times 6 \times 6$.*

b) $5 \times 3 \times 3$

c) *Số lượng tăng thêm $1 \times 1 \times 6$.*

□

Câu 2.

Nhà nhiếp ảnh có bao nhiêu cách sắp xếp một hàng 6 người từ một nhóm gồm 10 người trong một lễ cưới, nếu chú rể và cô dâu cũng nằm trong số 10 người đó, nếu

- cô dâu phải có mặt trong bức ảnh?
- cả cô dâu và chú rể phải có mặt trong bức ảnh?
- phải có chính xác một người, hoặc cô dâu, hoặc chú rể có mặt trong bức ảnh?

Lời giải.

- Bài toán được chia làm 2 giai đoạn: chọn vị trí cho cô dâu trước, sau đó chọn vị trí cho 5 người còn lại.

- Chọn vị trí cho cô dâu: 6 cách chọn
- Chọn vị trí cho 5 người còn lại: chọn và hoán vị 5 người trong 9 người còn lại, $P(9, 5) = \frac{9!}{4!}$

Vậy số cách sắp xếp: $6 \cdot \frac{9!}{4!}$

2. Bài toán chia làm 2 giai đoạn: chọn vị trí cho cô dâu và chú rể, sau đó chọn vị trí cho 4 người còn lại.

- Chọn vị trí cho cô dâu và chú rể: chọn và hoán vị 2 trong 6 vị trí: $P(6, 2) = \frac{6!}{4!}$
- Chọn vị trí cho 4 người còn lại: chọn và hoán vị 4 người trong 8 người còn lại, $P(8, 4) = \frac{8!}{4!}$

Vậy số cách sắp xếp: $\frac{6!}{4!} \cdot \frac{8!}{4!}$

3. Có 2 cách làm: 1) chọn vị trí cho chú rể, sau đó chọn 5 vị trí còn lại cho 8 người (trừ cô dâu), sau đó nhân 2 để có thêm trường hợp chỉ chọn cô dâu, hoặc 2) lấy kết quả của câu a nhân với 2 để có trường hợp có mặt cô dâu hoặc chú rể, sau đó trừ đi 2 lần câu b để loại ra trường hợp có mặt cả cô dâu và chú rể, mà ta đã đếm 2 lần cho câu a, một khi có mặt cô dâu, và một khi có mặt chú rể.

Đáp số: $2.P(6, 1).P(8, 5) = 2.6.P(9, 5) - 2.P(6, 2).P(8, 4)$

□

3 Bài tập cần giải

Câu 3.

Nhà nhiếp ảnh có bao nhiêu cách sắp xếp một hàng 6 người trong một lễ cưới, trong đó có cô dâu và chú rể, nếu

1. cô dâu phải đứng kế chú rể?
2. cô dâu không đứng kế chú rể?
3. cô dâu đứng ở đâu đó phía bên trái chú rể?

Câu 4.

Có bao nhiêu chuỗi bit có chiều dài là 10 có hoặc năm số 0 liên tiếp hoặc 5 số 1 liên tiếp?

Câu 5.

Giả sử mật khẩu của một hệ thống máy tính phải có tối thiểu 8 ký tự, nhưng không được quá 12 ký tự, trong đó mỗi ký tự phải là chữ tiếng Anh ở dạng chữ thường hoặc chữ hoa, chữ số, hoặc một trong sáu ký tự đặc biệt *, >, <, !, +, và =.

1. Có tất cả bao nhiêu mật khẩu khác nhau mà hệ thống này chấp nhận?
2. Có bao nhiêu mật khẩu trong số mật khẩu này có chứa ít nhất một lần xuất hiện của ít nhất một trong sáu ký tự đặc biệt?
3. Nếu một hacker cần một nano-giây để kiểm tra từng mật khẩu một có phải mật khẩu của ta hay không, hacker phải mất bao nhiêu lâu để dò qua hết tất cả các mật khẩu?

Câu 6.

Một mạng máy tính gồm 6 máy tính. Mỗi máy sẽ nối trực tiếp với 0 hoặc nhiều máy tính khác. Chứng minh rằng sẽ có ít nhất là hai máy tính trong mạng được kết nối trực tiếp đến cùng số máy tính khác.

Câu 7.

Chứng minh rằng trong bất kỳ $n + 1$ số nguyên dương không lớn hơn $2n$, chắc chắn phải có một số nguyên chia hết cho một trong các số nguyên còn lại.

Câu 8.

Có bao nhiêu cách để 8 người đàn ông và 5 người phụ nữ đứng vào một hàng sao cho không có hai người phụ nữ nào đứng kế nhau?

Câu 9.

Có bao nhiêu cách để xếp chỗ cho 6 người ngồi quanh một bàn tròn?

Câu 10.

Một cửa hàng kẹo có bán các loại kẹo dẻo, kẹo cứng, kẹo trái cây, kẹo mạch nha, kẹo mút, kẹo cam thảo, kẹo bông và kẹo bọc đường. Có bao nhiêu cách để chọn

1. sáu viên kẹo?
2. một tá kẹo?
3. hai tá kẹo?
4. một tá kẹo với mỗi loại có ít nhất một viên?
5. một tá kẹo với ít nhất 3 kẹo trái cây và không có quá hai viên kẹo cứng?

Câu 11.

Giả sử một gia đình có 14 đứa con, trong có hai nhóm sinh 3, ba cặp sinh đôi, và 2 đứa sinh một. Có bao nhiêu cách để sắp chỗ ngồi cho chúng thành 1 hàng nếu các nhóm trẻ sinh ba và sinh đôi là không thể phân biệt được giữa chúng với nhau?

Câu 12.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số thập phân (chỉ tính số >99):

- a) Không chứa cùng một chữ số ba lần.
- b) Bắt đầu bằng chữ số lẻ.
- c) Có đúng hai chữ số 4.

4 Bài tập làm thêm

Câu 13.

Một trăm tờ vé số, được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 100, được bán cho 100 người khác nhau để rút thăm. Sẽ có bốn giải được trao, trong đó có một giải đặc biệt. Có bao nhiêu cách để trao giải nếu

1. không có bất kỳ hạn chế nào?
2. người đang giữ vé 47 giành giải đặc biệt?
3. người đang giữ vé 47 giành được một giải?
4. người đang giữ vé 47 không giành giải nào cả?
5. những người đang giữ vé 19 và 47 đều giành giải?
6. những người đang giữ vé 19, 47, và 73 đều giành giải?
7. những người đang giữ vé 19, 47, 73, và 97 đều giành giải?

8. không có ai trong số những người đang giữ vé 19, 47, 73, và 97 giành giải?
9. người thắng giải đặc biệt là người đang giữ vé 19, 47, 73, hoặc 97?
10. người đang giữ vé 19 và 47 giành giải, nhưng người giữ vé 73 và 97 không giành giải?

Câu 14.

Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong bất kỳ tập gồm n số nguyên liên tiếp, luôn có chính xác một số chia hết cho n .

Câu 15.

Hai anh em John chia nhau một bịch kẹo có 100 viên.

Biết rằng em John chỉ mới 3 tuổi nên chỉ biết đếm từ 1 tới 9.

Với những số lớn hơn 9 thì lại chỉ đếm được thành hàng đơn vị (nghĩa là 10 sẽ đếm thành 0, 11 đếm thành 1...).

Khi John chia kẹo cho 2 anh em, nếu em của John đếm kẹo của 2 bên mà khác nhau thì sẽ khóc.

Hỏi John có bao nhiêu cách chia 100 viên kẹo để em mình không khóc và số kẹo của John luôn nhiều hơn kẹo của em.

Câu 16.

Có bao nhiêu hoán vị của 26 kí tự Tiếng Anh mà không chứa các chuỗi "fish", "rat" và "bird".

Câu 17.

Có bao nhiêu quan hệ trên tập gồm n phần tử là quan hệ phản xạ? Giải thích.

Câu 18.

Cho A và B lần lượt là các tập hợp có m và n phần tử. Xác định số lượng các quan hệ từ A đến B . Giải thích.

Câu 19.

Có bao nhiêu lời giải cho phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21,$$

trong đó $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, là số nguyên không âm sao cho

1. $x_1 \geq 1$?
2. $x_i \geq 2$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
3. $0 \leq x_1 \leq 10$?
4. $0 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 < 4$, và $x_3 \geq 15$?

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với các phép đếm (bao gồm lượng số, tổ hợp, chỉnh hợp, và các nguyên lý đếm) mà chi tiết về lý thuyết đã được trình bày trong slide chương 3.