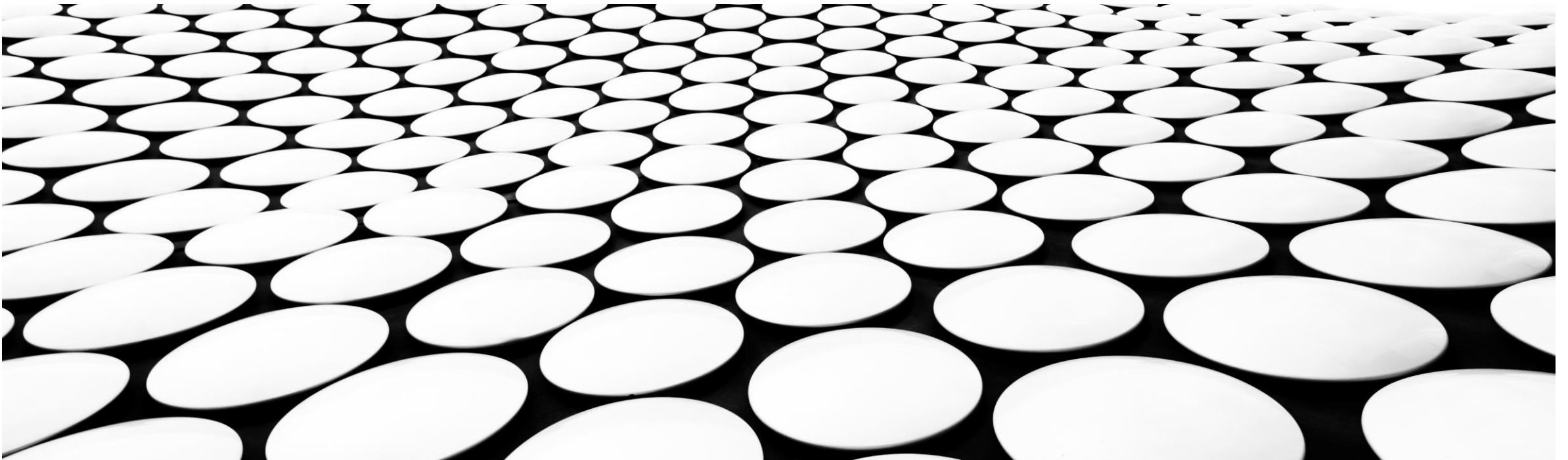


# BÀI TẬP TUẦN 2

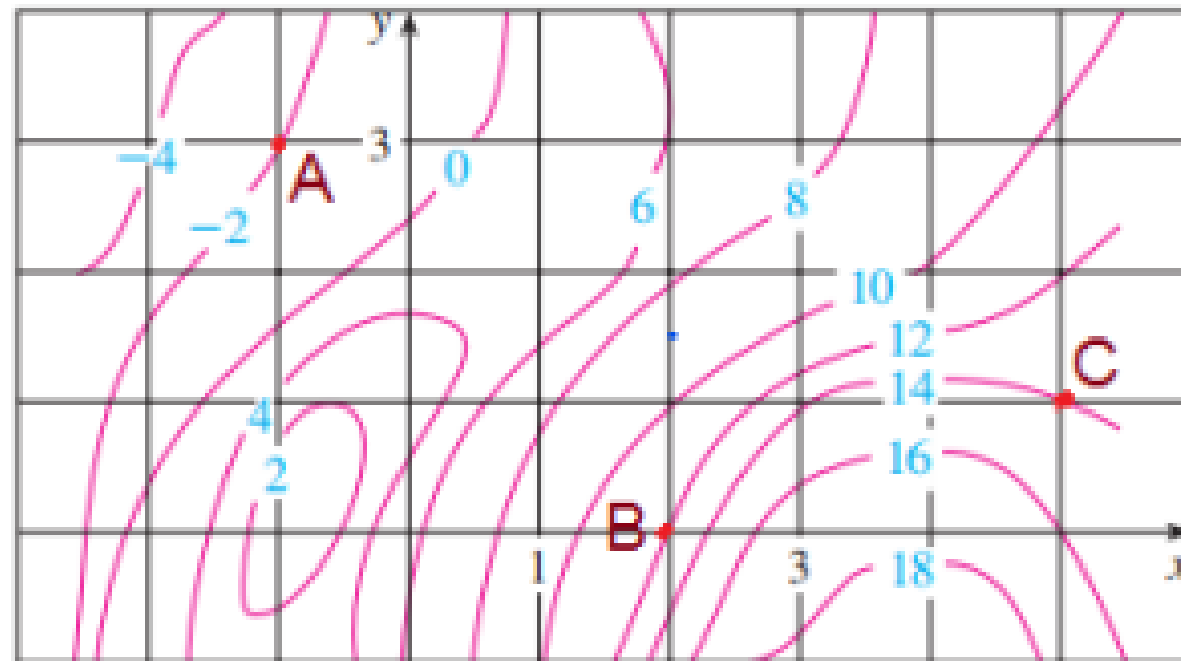
1. VI PHÂN HÀM SỐ  $z = f(x, y)$
2. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG VÀ BT THỰC TẾ
3. ĐẠO HÀM HÀM HỢP VÀ ĐẠO HÀM HÀM ẨN VÀ BT THỰC TẾ



# BÀI TOÁN

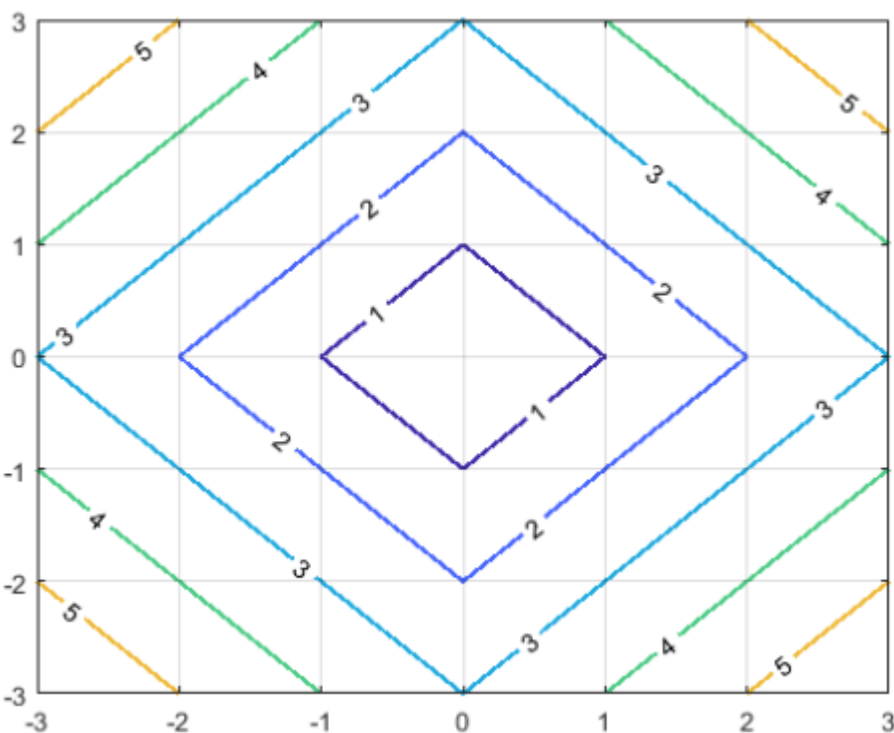
Cho bản đồ mức  $f(x, y)$  với 3 điểm A, B, C trên bản đồ và cho hai vector,  $\vec{u} = (1; -1)$ ,  $\vec{v} = (-1, 1)$ . Hãy cho biết

- a.  $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(B)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(C)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(B)$
- b.  $\frac{\partial f}{\partial u}(B)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}(B)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(A)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}(C)$



Âm hay dương?

Hình vẽ bên dưới là bản đồ đường mức của hàm số  $z = f(x, y)$ . Hãy trả lời các câu hỏi từ Câu 7 đến Câu 9.



Câu 7. Chọn khẳng định đúng.

A.  $f(2, 1) = 4$ .

B.  $f(-2, 0) = 3$ .

C.  $f(-1, 1) = 1$ .

D.  $f(2, 2) = 4$ .

E.  $f(-1, 2) = 2$ .

Câu 8. Chọn khẳng định đúng.

A.  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, -1) < 0$ .

B.  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) > 0$ .

C.  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) < 0$ .

D.  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) < 0$ .

E.  $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, -2) > 0$ .

Câu 9. Cho các vector  $\mathbf{u} = \langle -1, -2 \rangle$  và  $\mathbf{v} = \langle 0, -1 \rangle$ . Chọn khẳng định đúng.

A.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1) > 0$ .

B.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(-1, 1) > 0$ .

C.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(-1, 1) > 0$ .

D.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(-2, -1) < 0$ .

E.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(2, 1) < 0$ .

7 D

8 A

9 E

## Bài toán:

1. Cho  $z(x, y) = \begin{cases} 3x + 2y^2, & \text{nếu } x - y \leq 3 \\ -2y, & \text{nếu } x - y > 3 \end{cases}$ , với  $y = \begin{cases} \cos(x), & \text{nếu } x \leq 0 \\ -1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ .

Tính  $z'(-1)$

2. Cho  $z(t) = f(x, y) = \begin{cases} -9x, & \text{nếu } y \geq -6x^2 \\ y, & \text{nếu } y < -6x^2 \end{cases}$  với  $\begin{cases} x(t) = te^t \\ y(t) = 5t^2 \end{cases}$ . Tính  $z'(-2)$

## Bài toán:

---

Cho mặt cong (S):  $z = 6e^{x^2+y}$

- Với  $u$  là một vecto pháp tuyến của tiếp diện S tại  $M(-2, -4, 6)$ ,  $u$  hợp với chiều dương Oy 1 góc tù. Xác định vecto  $u$
- Viết phương trình tiếp diện của S tại M.

## Bài 1:

---

Cho  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5xy$ . Tính  $df(1; 2)$ , nếu  $\Delta x = 0.05, \Delta y = -0.1$

## Bài 2 :

---

1. Tìm phép xấp xỉ tuyến tính của hàm số  $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$  tại  $(2;1)$  và dùng nó để tính xấp xỉ  $f(1.95; 1.08)$
2. Tìm phép xấp xỉ tuyến tính của hàm số  $f(x, y) = \ln(x - 3y)$  tại  $(7;2)$  và dùng nó để tính xấp xỉ  $f(6.9; 2.06)$ .

## Bài 3:

**Câu 1.** Người ta dự định làm 1 rạp xiếc bằng cách xây 4 bức tường dọc theo 4 cạnh hình chữ nhật chiều rộng  $x = 10$  m, chiều dài  $y = 15$  m với mái vòm che có diện tích được cho bởi  $S(x, y) = \frac{\pi}{2}xy$ . Khi dùng vi phân của hàm  $S(x, y)$  để ước lượng sự thay đổi của diện tích mái vòm thì thấy diện tích mái sẽ giảm đi khoảng  $5.4978 \text{ m}^2$  nếu thay đổi  $x$  và giảm  $y$  xuống còn  $14.8\text{m}$ . Tìm sự thay đổi của chiều rộng  $x$ .

- A. Tăng  $0.3667\text{m}$ .      B. Giảm  $0.1\text{m}$ .      C. Giảm  $0.3667\text{m}$ .      D. Tăng  $0.1\text{m}$ .

**Câu 3.** Điện thế tại một điểm  $(x, y)$  được cho bởi  $V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$ . Hãy dùng vi phân để xấp xỉ sự thay đổi của điện thế, khi di chuyển từ điểm có tọa độ  $(1, 1)$  sang điểm có tọa độ  $(1.01, 0.98)$ .

- A.  $-0.005$ .      B.  $0.005$ .      C.  $-0.015$ .      D.  $0.015$ .



## Bài 4:

**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x, y) = 1 - 2x^2 - 3y^2$  có đồ thị là mặt cong  $(S)$ . Mặt phẳng  $y = 1$  cắt mặt cong  $(S)$  theo giao tuyến  $(C)$ . Hệ số góc tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(1, 1, -4)$  bằng bao nhiêu?

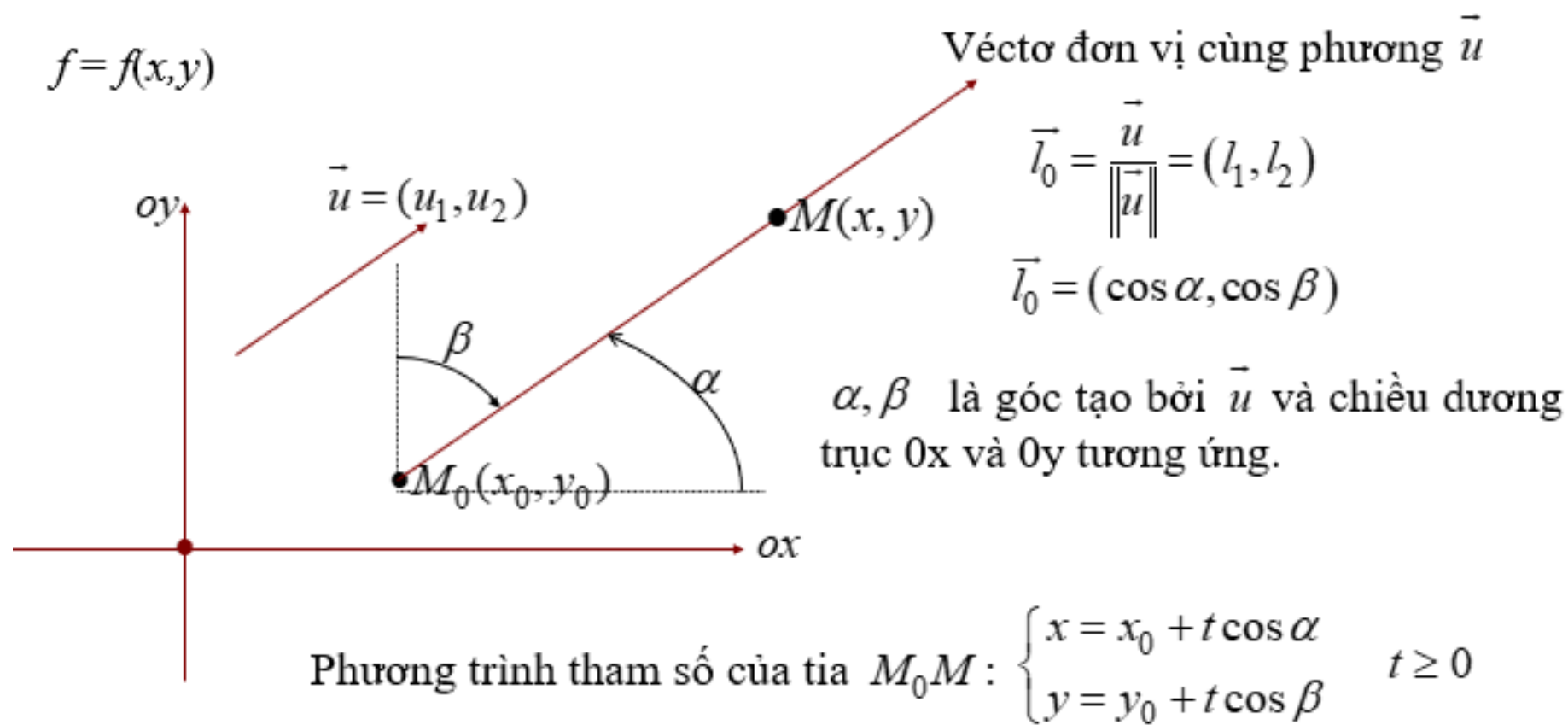
A. -5.                      B. Đáp án khác.                      C. -6.                      D. -4.

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x, y)$  có đạo hàm riêng liên tục và các điểm  $A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7), D(6, 15)$ . Nếu  $\frac{\partial f}{\partial \vec{AB}}(A) = 3, \frac{\partial f}{\partial \vec{AC}}(A) = 26$  thì  $\frac{\partial f}{\partial \vec{AD}}(A)$  bằng:

A. 327.                      B.  $\frac{171}{2}$ .                      C.  $\frac{327}{13}$ .                      D.  $\frac{171}{26}$ .

**BT1:** Cho hàm  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Tìm tất cả các vectơ đơn vị  $\vec{a}$  sao cho  $f'_{\vec{a}}(2, 3) = 0$

**BT2:** Tìm đạo hàm của  $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$  tại  $M_0(1, 2)$  theo hướng vector tạo với chiều dương trục  $Ox$  một góc  $30^\circ$ .



Đạo hàm của hàm  $f$  theo hướng véc tơ  $\vec{u}$  tại điểm  $M_0$  là giới hạn (nếu có)

$$f'_u(M_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$$

## Bài 8 :

1. Cho hàm  $z = x^2y - 3xy^2 + 2x + 4y$ , trong đó  $x = ue^v, y = \ln(1 + u^2 + v^2)$ . Tính  $z'_u, z'_v$  tại  $u = 1, v = 0$ . Từ đó suy ra  $dz(1, 0)$  theo  $du, dv$ .
2. Cho hàm  $z = e^{x+y} + x^2 - 2y$ , trong đó  $x = \sin 2t, y = \cos(2t + \pi)$ . Tính  $\frac{dz}{dt} \left( \frac{\pi}{4} \right)$ .
3. Cho hàm  $y = \arctan(x^2 + 1)$ , trong đó  $x = u^v + 2u - 5v$ . Tính  $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ , tại  $(u, v) = (2, 0)$ .
4. Cho hàm  $z = \frac{x + y}{1 + x^2}$ , trong đó  $y = \arctan \frac{1}{x}$ . Tính  $\frac{dz}{dx}$  tại  $x = \sqrt{3}$ .

## Bài 9:

1. Cho  $z = f(x, y)$  và hàm  $f$  khả vi, với  $x = g(t), y = h(t), g(3) = 1, h(3) = -1, g'(3) = 0, h'(3) = 2, f_x(1, -1) = 3, f_y(1, -1) = -2$ . Tính  $\frac{dz}{dt}$  khi  $t = 3$ .
2. Cho hàm  $z = \arctan\left(\frac{f(x^2 + y^2)}{y}\right)$ , trong đó  $f$  là hàm khả vi, biết  $f(2) = 2, f'(2) = 1$ .  
Tính  $z'_x(1; 1)$ .
3. Cho hàm  $z = e^{\frac{x}{y}} f(x + y)$ , biết  $f'(1) = f(1) = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $z'_x(0, 1) + z'_y(0, 1)$ .
4. Cho hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi phương trình  $z^2 - \frac{2}{x} = y^2 + z$ . Tính  $z'_x + 2z'_y$  tại  $(x, y) = (1, 2)$  với  $z > 0$ .
5. Cho hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi phương trình  $z \cdot \arctan y - z^2 + x^2 = 2$  và  $z(-\sqrt{3}, 0) = -1$ . Tìm giá trị của  $z'_x(-\sqrt{3}, 0)$ .
6. Cho hàm số  $z = z(x, y)$  xác định từ phương trình:  $z^2 + 3,2 \cdot \arccos y = 3,2\sqrt{x^2 + z^2} + 4x$   
Tính  $z'_x(0; 1)$ , biết  $z(0, 1) = 3,2$

## Bài 5:

---

**Câu 1:** Cho hàm  $f(x, y, z) = y^2 z^2 + x^2 - 3xz - 2y - z + 5$ . Chứng minh rằng hướng tăng nhanh nhất của hàm  $f$  khi đi qua  $M(-1; 2; 2)$  trùng với  $\vec{u} = (-4; 7; 9)$ . Tìm tốc độ biến thiên của hàm  $f$  theo hướng này.

**Câu 2:** Cho hàm  $f(x, y, z) = xz^3 - 3x^2 + 4xy - 4y - 12z + 3$ . Tìm tất cả các điểm  $M(x, y, z)$  mà tại đó hướng tăng nhanh nhất của hàm  $f$  là  $\vec{u} = (1; 0; 0)$

**Bài 12** Cho hàm số  $f(x, y) = 6x^2 y^2 - 2mx^3 + m^2 xy^2 - 6y^3$ . Tìm tất cả các giá trị thực  $m$  để  $\nabla f(3; -2)$  vuông góc với vector  $(2; 1)$ .

Một công ty sản xuất sợi tre (sợi làm từ bột tre) ước tính số kilogram (kg) sợi tre sản xuất mỗi tuần được cho bởi công thức  $z = f(x, y) = 6000x + 1750y + 5x^2y - 10x^3$ , trong đó  $x$  là số công nhân tay nghề cao (nhóm 1) và  $y$  là số công nhân tay nghề thấp (nhóm 2) của công ty. Hãy trả lời các câu hỏi từ Câu 10 đến Câu 12.

**Câu 10.** Xác định tốc độ thay đổi số kg sợi tre được sản xuất mỗi tuần theo  $x$  (kg/công nhân) khi  $x = 11$  và  $y = 38$ .

- A. 6549 .                      B. 6550 .                      C. 6548 .                      D. 6552 .                      E. 6551 .

---

MSSV: .....Họ và tên SV:..... Trang 2/4 - Mã đề 1080

---

**Câu 11.** Thông thường công ty sử dụng 14 công nhân nhóm 1 và 33 công nhân nhóm 2. Dùng vi phân ước tính sự thay đổi số kg sợi tre được sản xuất mỗi tuần nếu tăng thêm 3 công nhân nhóm 1 và giảm bớt 2 công nhân nhóm 2 so với số công nhân thông thường.

- A. giảm 4710 (kg).                      B. giảm 14940 (kg).                      C. tăng 19650 (kg).  
D. tăng 8760 (kg) .                      E. Tăng 4360 (kg).

**Câu 12.** Hiện tại công ty đang sử dụng 14 công nhân nhóm 1 và 33 công nhân nhóm 2. Kế hoạch trong 10 tuần tới, mỗi tuần công ty sẽ tăng thêm 2 công nhân nhóm 1 và 3 công nhân nhóm 2. Tốc độ thay đổi số kg sợi tre theo thời gian (kg/tuần) ở tuần thứ 5 tính từ thời điểm hiện tại là

- A. 14372 .                      B. 14370 .                      C. 14366 .                      D. 14371 .                      E. 14373 .



## Bài 6:

**Câu 13.** Nhiệt độ trên một tấm kim loại đặt trong mặt phẳng  $Oxy$  tại điểm có tọa độ  $(x, y)$  được cho bởi mô hình  $T(x, y) = 0.02x^3 + 0.1y^2 - x - 2y$  °C. Giả sử đơn vị trên các trục tọa độ tính theo centimet(cm). Tính tốc độ thay đổi của nhiệt độ nếu từ điểm  $(-2, -3)$  di chuyển theo hướng vectơ  $\vec{i} = (1, 0)$ .

- A. Tăng  $0.76(^{\circ}C/cm)$ .      B. Giảm  $0.61(^{\circ}C/cm)$ .      C. Giảm  $0.76(^{\circ}C/cm)$ .      D. Tăng  $0.61(^{\circ}C/cm)$ .

**Câu 14.** Đặt một đĩa phẳng kim loại trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ . Nhiệt độ tại mỗi điểm trên đĩa được cho bởi công thức  $T(x, y) = x^2 + xy^2$ . Trên mỗi đĩa có 1 hạt tìm nhiệt được thiết kế để luôn di chuyển theo hướng nhiệt tăng nhanh nhất. Khi đặt hạt tại điểm  $M(1, 2)$ , nó sẽ di chuyển theo hướng nào?

- A.  $\vec{i} + 2\vec{j}$ .      B.  $3\vec{i} - 2\vec{j}$ .      C.  $3\vec{i} + 2\vec{j}$ .      D.  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ .

**Câu 17.** Một ngọn núi được đặt trong một hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị tính trên mỗi trục là mét) có hình dạng được cho bởi hàm  $z = z(x, y)$  khả vi trên toàn miền xác định và một người đứng tại điểm A có tọa độ  $(200, 300, z(200, 300))$ . Khi người này đi theo hướng dương trục  $Ox$  đến điểm B có hoành độ là 201 m thì độ cao tại B giảm 5m so với độ cao tại A, còn khi đi theo hướng dương trục  $Oy$  đến điểm C có tung độ là 301m thì độ cao tại điểm C tăng 4m so với độ cao tại A. Dùng vi phân ước lượng xem khi người này đi đến điểm D có hoành độ 201m và tung độ là 298m thì độ cao tại điểm D thay đổi ra sao so với độ cao tại A.

- A. Tăng 3m.      B. Tăng 13m.      C. Giảm 13m.      D. Giảm 3m.

## Bài 7:

(DTK201) Cho mặt cong  $S$  có phương trình  $z = f(x, y)$  có các đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm thuộc miền xác định và điểm  $M(-1, 2, 1)$  thuộc miền xác định của hàm. Biết  $f'_{\vec{MA}}(M) = 2, f'_{\vec{MB}}(M) = \sqrt{5}$ , trong đó  $A(2, -2), B(-3, 3)$ .

1. Tìm  $f'_x(M)$  và  $f'_y(M)$ .
2. Tính  $f'_{AB}(M)$ .
3. Viết phương trình tiếp diện của mặt  $S$  tại  $M$



