**Exercices de programmation linéaire**

**Exercice 1 - Problème de fabrication d'engrais biologique**

Une entreprise de produits biologiques souhaite fabriquer 20 tonnes d'engrais (fertilisant) à partir d'ingrédients d'origine naturelle : poudre d'os, corne broyée, plumes de volaille, sang séché, coquilles d'huîtres, cendres de bois. Les teneurs des ingrédients en % pour l'azote (N), le phosphore (P), le potassium (K) et le calcium (Ca) sont les suivantes :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ingrédient | Azote (N) | Phosphore (P) | Potassium (K) | Calcium (Ca) |
| Poudre d'os | 4 | 20 | 1 | 30 |
| Corne broyée | 12 | 5 | 6 | 3 |
| Plumes de volaille | 10 | 6 | 5 | 5 |
| Sang séché | 25 | 3 | 7 | 5 |
| Coquilles d'huitres | 3 | 2 | 1 | 40 |
| Cendre de bois | 2 | 8 | 21 | 9 |

L'entreprise dispose des stocks respectifs suivants : 10, 8, 9, 5, 4 et 5 tonnes. Les coûts par tonne des ingrédients sont respectivement de 500, 400, 600, 700, 200 et 120 euros. L'engrais fabriqué doit contenir entre 10 et 18% d'azote, 8 et 14% de phosphore, 8 et 10% de potassium. La teneur en calcium ne doit pas dépasser 10%. On veut savoir les quantités à utiliser pour minimiser le coût de fabrication de l'engrais. Faire un modèle mathématique et le résoudre avec GUSEK.

**Exercice 2 – Production de verres**

Une entreprise fabrique des verres pour la table. Elle propose six modèles (V1 à V6), produits par lots de 1 000 verres, et souhaite planifier sa production sur un horizon de 12 semaines. Les lots peuvent être incomplets (moins de 1 000 verres). La demande en nombre de lots de 1 000 verres pour les 12 semaines à venir et pour chacun des modèles est connue et reportée dans le premier tableau.

Demandes pour la période de planification (lots de 1 000 verres)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Semaine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| V1 | 20 | 22 | 18 | 35 | 17 | 19 | 23 | 20 | 29 | 30 | 28 | 32 |
| V2 | 17 | 19 | 23 | 20 | 11 | 10 | 12 | 34 | 21 | 23 | 30 | 12 |
| V3 | 18 | 35 | 17 | 10 | 9 | 21 | 23 | 15 | 10 | 0 | 13 | 17 |
| V4 | 31 | 45 | 24 | 38 | 41 | 20 | 19 | 37 | 28 | 12 | 30 | 37 |
| V5 | 23 | 20 | 23 | 15 | 10 | 22 | 18 | 30 | 28 | 7 | 15 | 10 |
| V6 | 22 | 18 | 20 | 19 | 18 | 35 | 0 | 28 | 12 | 30 | 21 | 23 |

Données pour les six types de verres

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Coût production | Coût stockage | Stock initial | Stock final minimum | Temps de travail | Temps machine | Casiers de stockage |
| V1 | 100 | 25 | 50 | 10 | 3 | 2 | 4 |
| V2 | 80 | 28 | 20 | 10 | 3 | 1 | 5 |
| V3 | 110 | 25 | 0 | 10 | 3 | 4 | 5 |
| V4 | 90 | 27 | 15 | 10 | 2 | 8 | 6 |
| V5 | 200 | 10 | 0 | 10 | 4 | 11 | 4 |
| V6 | 140 | 20 | 10 | 10 | 4 | 9 | 9 |

Pour chaque modèle, on connaît le stock initial et le stock final minimum souhaité, en nombre de lots. Pour un lot de chaque modèle, on dispose du coût de production et du coût de stockage en euros, du temps de travail nécessaire en heures × hommes, du temps d’utilisation des machines en heures, et de la taille de la zone de stockage nécessaire en nombre de casiers (second tableau).

Par semaine, le nombre d’heures × hommes est limité à 390 heures, le temps de travail des machines à 850 heures. La capacité de stockage est de 1 000 casiers. Quelles sont les quantités de verres à produire pour chaque période de façon à minimiser le coût total de production et de stockage ?

**Exercice 3 – Production d'électricité**

Une compagnie privée a un barrage avec un réservoir de 10,2 km3, alimenté par une rivière. Chaque semaine, la compagnie peut rejeter de l’eau en produisant ou pas de l’électricité. 1 km3 d’eau consommé sur une semaine fournit une puissance continue de 800 MW (mégawatts). Pour 5 semaines, le tableau donne la quantité d’eau reçue, la quantité maximale d’électricité que peut acheter EDF et le prix d’achat du MWh (mégawatt × heure) proposé par EDF. Au début, le barrage contient 9,2 km3 d’eau. En fin de période, il faut laisser un stock de 8,8 km3 pour irriguer des cultures.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Semaine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Quantité d'eau reçue en km3 | 5,4 | 3,3 | 9,3 | 1,1 | 0,8 |
| Besoin d'EDF en MWh | 101000 | 550000 | 108000 | 49000 | 102000 |
| Prix d'achat du MWh en € | 165 | 167 | 171 | 169 | 170 |

On veut déterminer le volume d’eau qui doit être utilisé chaque semaine pour maximiser l’argent récupéré par la vente d’électricité à EDF. Le réservoir n’a pas le droit de déborder. On peut donc être obligé de relâcher de l’eau sans produire de l’électricité. Dans les sorties d’eau, il faut donc distinguer le volume d’eau pour produire de l’électricité et le volume improductif. Pour simplifier, on testera la capacité du réservoir à la fin de chaque semaine, après les apports et sorties d’eau de la semaine. Modéliser ce problème et le résoudre avec GUSEK.

**Exercice 4 – Construction d'un stade (gestion de projet)**

Une ville désire construire un petit stade. Après l’appel d’offres, la construction de l’ouvrage est confiée à un entrepreneur local, qui souhaite réaliser le stade le plus vite possible. Les principales tâches sont reprises dans le tableau suivant, avec des durées exprimées en semaines. Certaines tâches ne peuvent être exécutées avant la fin d’autres tâches, appelées tâches précédentes. Les deux dernières colonnes du tableau concernent la question 2.

Données pour la construction du stade

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tâche** | **Libellé des tâches** | **Durée** | **Prédécesseurs** | Réduction max | Coût additionnel  par semaine (k€) |
| 1 | Installation du chantier | 2 | Aucune | 0 | - |
| 2 | Terrassements | 16 | 1 | 3 | 30 |
| 3 | Construction des fondations | 9 | 2 | 1 | 26 |
| 4 | VRD (voirie, réseaux divers) | 8 | 2 | 2 | 12 |
| 5 | Élévation du sous-sol | 10 | 3 | 2 | 17 |
| 6 | Plancher principal | 6 | 4, 5 | 1 | 15 |
| 7 | Cloisonnement vestiaires | 2 | 4 | 1 | 8 |
| 8 | Électrification des gradins | 2 | 6 | 0 | - |
| 9 | Pose du toit | 9 | 4, 6 | 2 | 42 |
| 10 | Éclairage du stade | 5 | 4 | 1 | 21 |
| 11 | Installation des gradins | 3 | 6 | 1 | 18 |
| **Tâche** | **Libellé des tâches** | **Durée** | **Prédécesseurs** | Réduction max | Coût additionnel  par semaine (k€) |
| 12 | Mise hors d’eau du toit | 2 | 9 | 0 | - |
| 13 | Finition des vestiaires | 1 | 7 | 0 | - |
| 14 | Construction billetterie | 7 | 2 | 2 | 22 |
| 15 | Voirie secondaire | 4 | 4, 14 | 2 | 12 |
| 16 | Signalétique | 3 | 8, 11, 14 | 1 | 6 |
| 17 | Pelouse, accessoires sportifs | 9 | 12 | 3 | 16 |
| 18 | Réception de l’ouvrage | 1 | 17 | 0 | - |

Question 1. Quelle est la durée minimale du chantier ?

Question 2. La mairie souhaite que le projet dure moins longtemps que dans la question 1. Pour cela, elle est prête à donner une prime supplémentaire de 30 k€ par semaine d’avance. L’entrepreneur doit alors faire appel à des ouvriers et du matériel supplémentaires pour arriver à gagner du temps. Pour chaque tâche, il a résumé dans le tableau 6.1 le nombre de semaines qu’il peut gagner (colonne *Réduction*) et le coût supplémentaire correspondant. Quelle sera la nouvelle durée du projet si l’entrepreneur cherche à maximiser son gain ?

**Exercice 5 - La nouvelle lessive**

Une firme de détergents veut introduire une nouvelle lessive et "nettoyer" ainsi ses concurrents. Le nouveau produit A est en compétition avec trois lessives concurrentes B, C et D. Des interviews de consommateurs ont permis d’établir la matrice suivante en pourcentages:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |
| A | 75 | 10 | 5 | 10 |
| B | 40 | 20 | 10 | 30 |
| C | 10 | 20 | 40 | 30 |
| D | 20 | 20 | 30 | 30 |

La matrice indique les prévisions de changements de lessives en % si la firme fait une campagne de publicité. Par exemple, la case (A,B) = 10% signifie que 10% des utilisateurs actuels de A préfèreront passer à la lessive concurrente B après la publicité. La case (A,A) = 75% veut dire que 75% des clients actuels de la lessive A lui resteront fidèles. Le directeur du marketing de la firme prédit que A va finir par prendre 75% du marché si on répète les campagnes de publicité. A-t-il raison ?

**Exercices avec variables entières ou binaires**

**Exercice 6 – Un problème de choix de personnel**

Un atelier est composé de 7 machines différentes et indépendantes et emploie 7 opérateurs. Chaque machine nécessite un opérateur. Le tableau donne la productivité en pièces par jour si l'opérateur *i* (en ligne) est affecté à la machine *j* (en colonne). Certains opérateurs connaissent mal certaines machines, ce qui explique les productivités très variables. Proposer un modèle mathématique puis déterminer avec GUSEK quel opérateur il faut affecter à chaque machine pour maximiser la productivité, c'est-à-dire le nombre de pièces produites dans la journée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 469 | 300 | 757 | 307 | 501 | 479 | 625 |
| 2 | 382 | 842 | 228 | 349 | 104 | 759 | 373 |
| 3 | 181 | 690 | 206 | 814 | 204 | 128 | 103 |
| 4 | 276 | 867 | 906 | 361 | 470 | 178 | 757 |
| 5 | 366 | 398 | 527 | 689 | 675 | 759 | 444 |
| 6 | 979 | 807 | 873 | 321 | 886 | 260 | 639 |
| 7 | 76 | 878 | 731 | 389 | 970 | 168 | 997 |

On suppose maintenant que les machines sont en ligne, c’est-à-dire que les pièces à fabriquer passent sur les machines 1, 2, …, 7 dans cet ordre. Proposer un modèle mathématique pour maximiser la productivité et le résoudre avec GUSEK.

**Exercice 7 – Problème de fabrication avec coûts de lancement**

Une usine fabrique un médicament sur une ligne de production. Le tableau définit les besoins (nombres de boîtes) pour les 6 prochains jours. La capacité de production est de 100 boîtes par jour, avec un coût de 30€ par boîte. On peut stocker 70 boîtes en fin de journée, avec un coût de 2€ par boîte et par jour. Le stock initial est de 20 boîtes et l'usine ne veut aucun stock à la fin.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Jour | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Besoin | 80 | 20 | 120 | 30 | 80 | 60 |

On n'est pas obligé de faire le médicament tous les jours. Pour un jour donné, soit la ligne fonctionne toute la journée, soit elle est arrêtée. Au début, la ligne est à l'arrêt. Après un jour d'arrêt, si on veut utiliser la ligne, le coût de démarrage (ou *coût de lancement* ou *setup cost*) est élevé, 8000 euros, car il faut stériliser la ligne. L'objectif est de déterminer les jours de fabrication et les quantités produites pour minimiser le coût total. Proposer un modèle mathématique et le résoudre avec GUSEK.

**Exercice 8 – Les cafetières électriques**

Une usine fabrique des cafetières électriques pour les chaînes d'hypermarchés Leclerc et Carrefour. Elle peut fabriquer 2000 cafetières par mois avec un coût de production de 20 euros la pièce. Avec des heures supplémentaires, on peut augmenter la capacité de production de 20% maximum, mais le coût de production d'une cafetière faite en heures supplémentaires monte à 22 euros. La décision d'utiliser ou pas des heures supplémentaires est faite mois par mois. Le tableau suivant montre les prévisions d'achat des deux hypermarchés.

On constate les stocks à la fin de chaque mois. Toute cafetière en stock à ce moment-là induit un coût de stockage de 2 euros. Le stock initial est de 500 cafetières. Le magasin de stockage est limité à 700 cafetières.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ventes | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
| Carrefour | 800 | 1500 | 750 | 1230 | 920 | 640 |
| Leclerc | 1100 | 900 | 600 | 710 | 1210 | 530 |

**Question 1**. Si une cafetière est vendue 40 euros pièces, déterminer un plan de production pour satisfaire les demandes tout en maximisant le bénéfice sur les six mois.

**Question 2**. Même question si l'entreprise offre des tarifs dégressifs selon la quantité commandée par un hypermarché un mois donné. Le prix de vente unitaire est de 40 euros dans la tranche de 1 à 700 cafetières, 35 euros dans la tranche 701 à 1000, et 30 euros au-delà de 1000. Par exemple, si Carrefour achète 800 cafetières un mois donné, cela lui coûtera 700x40 + 100x35 euros.

**Exercice 9 – Traitement de lots**

Un responsable d’atelier doit réaliser 10 lots de produits sur cinq machines M1, M2, …, M5. Ces machines peuvent traiter n’importe quel lot mais viennent de fabricants différents et ont des âges variés. La vitesse de fabrication d’un lot dépend donc de la machine. De plus, à cause des périodes de maintenance, chaque machine est disponible seulement un certain nombre d’heures (*Capa* dans le tableau 1). Enfin, le coût de fabrication d’un lot dépend de la machine : les machines les plus vieilles sont peu automatisées et nécessitent plus d’opérateurs. Un lot ne peut pas être fragmenté pour passer sur plusieurs machines.

Tableau 1. Temps de traitement des lots et capacités des machines en heures.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lot : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Capa |
| M1 | 8 | 15 | 14 | 23 | 8 | 16 | 8 | 25 | 9 | 17 | 18 |
| M2 | 15 | 7 | 23 | 22 | 11 | 11 | 12 | 10 | 17 | 16 | 19 |
| M3 | 21 | 20 | 6 | 22 | 24 | 10 | 24 | 9 | 21 | 14 | 25 |
| M4 | 20 | 11 | 8 | 14 | 9 | 5 | 6 | 19 | 19 | 7 | 19 |
| M5 | 8 | 13 | 13 | 13 | 10 | 20 | 25 | 16 | 16 | 17 | 20 |

Tableau 2. Coût de production des lots selon la machine en milliers d’euros.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lot : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| M1 | 17 | 21 | 22 | 18 | 24 | 15 | 20 | 18 | 19 | 18 |
| M2 | 23 | 16 | 21 | 16 | 17 | 16 | 19 | 25 | 18 | 21 |
| M3 | 16 | 20 | 16 | 25 | 24 | 16 | 17 | 19 | 19 | 18 |
| M4 | 19 | 19 | 22 | 22 | 20 | 16 | 19 | 17 | 21 | 19 |
| M5 | 18 | 19 | 15 | 15 | 21 | 25 | 16 | 16 | 23 | 15 |

**Question 1**. Sur quelle machine faut-il fabriquer chaque lot pour minimiser le coût total de fabrication ?

Le responsable de fabrication veut maintenant savoir s'il peut diminuer les coûts en autorisant la division des lots en deux sous-lots. Pour des raisons de temps de préparation, si on décide de diviser un lot en deux, il faut faire deux lots égaux (faire un petit sous-lot et un gros n'est pas intéressant).

Par exemple, si on décide de diviser le lot 1 et de le passer sur les machines 1 et 2, on supposera que le sous-lot sur la machine 1 dure 8/2 = 4 heures et que celui sur la machine 2 dure 15/2 = 7,5 heures. De même, le coût de traitement d'un sous-lot sur une machine sera la moitié du coût du lot complet.

Cependant, si un lot est coupé en deux, on aura un surcoût de 3000 euros à cause du temps de préparation supplémentaire. Ce surcoût ne dépend ni du lot ni des machines choisies.

**Question 2.** Quels lots couper en deux et sur quelles machines fabriquer les lots entiers et les lots coupés en deux, pour minimiser le coût total de fabrication ?