Computer Architecture

Computer Science & Engineering

Chương 3

Phép số học

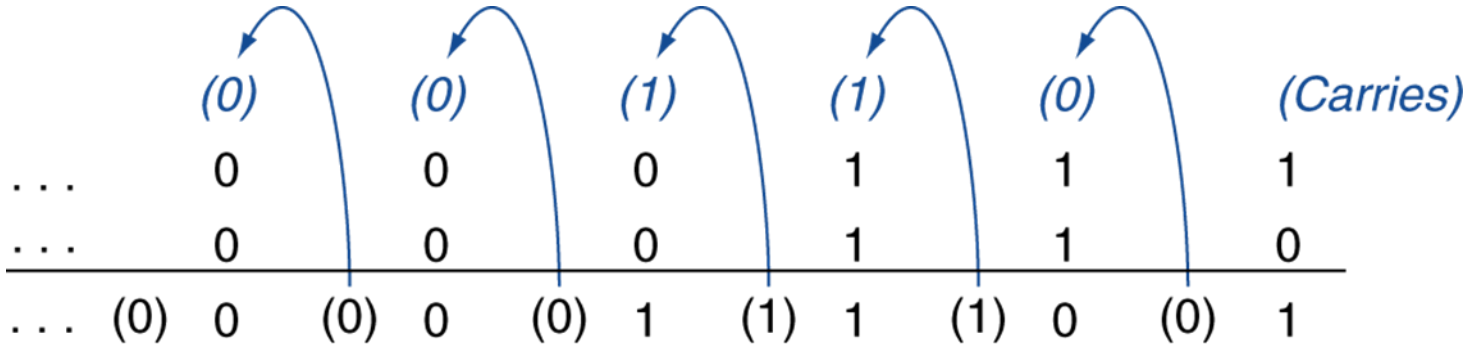
Các phép số học

- Các phép tính trên số nguyên
  - Cộng và Trừ
  - Nhân và Chia
  - Xử lý tràn
- Số thực với dấu chấm di động (Floating-Point)
  - Cách biểu diễn và các phép tính

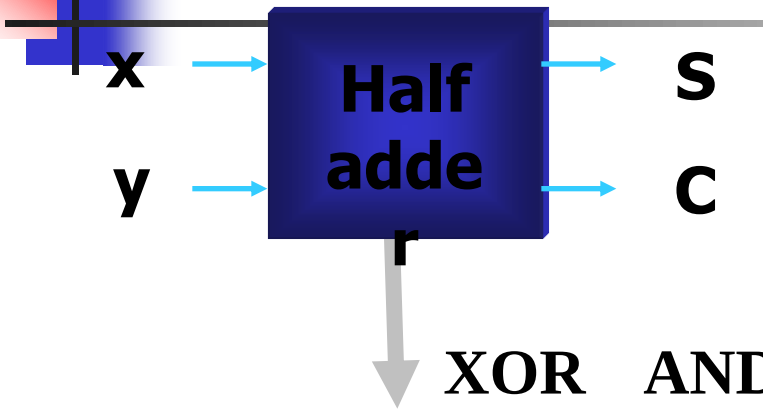
Nhắc lại mạch số

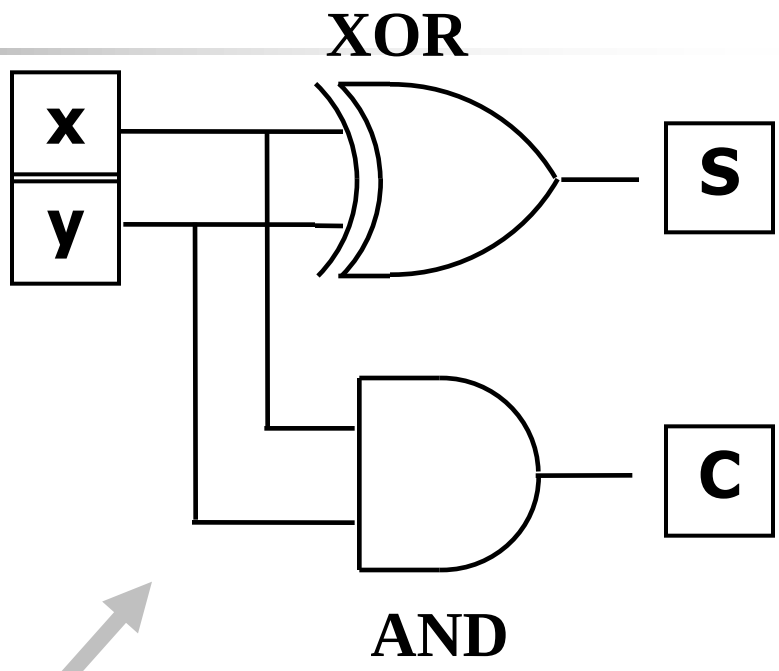
Môn học:

- Nhập môn điện toán (Năm I)
- Thiết kế hệ thống số



Mạch Half Adder

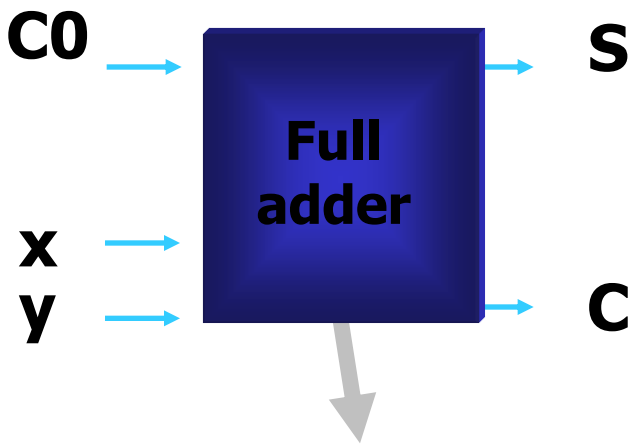




XOR AND

x	y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Mạch Full Adder



S = x + y + C0

S = (x + y) + C0

Tính: S1 = x + y

Tính: S2 = S1 + C0

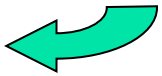
Half adder 1

Half adder 2

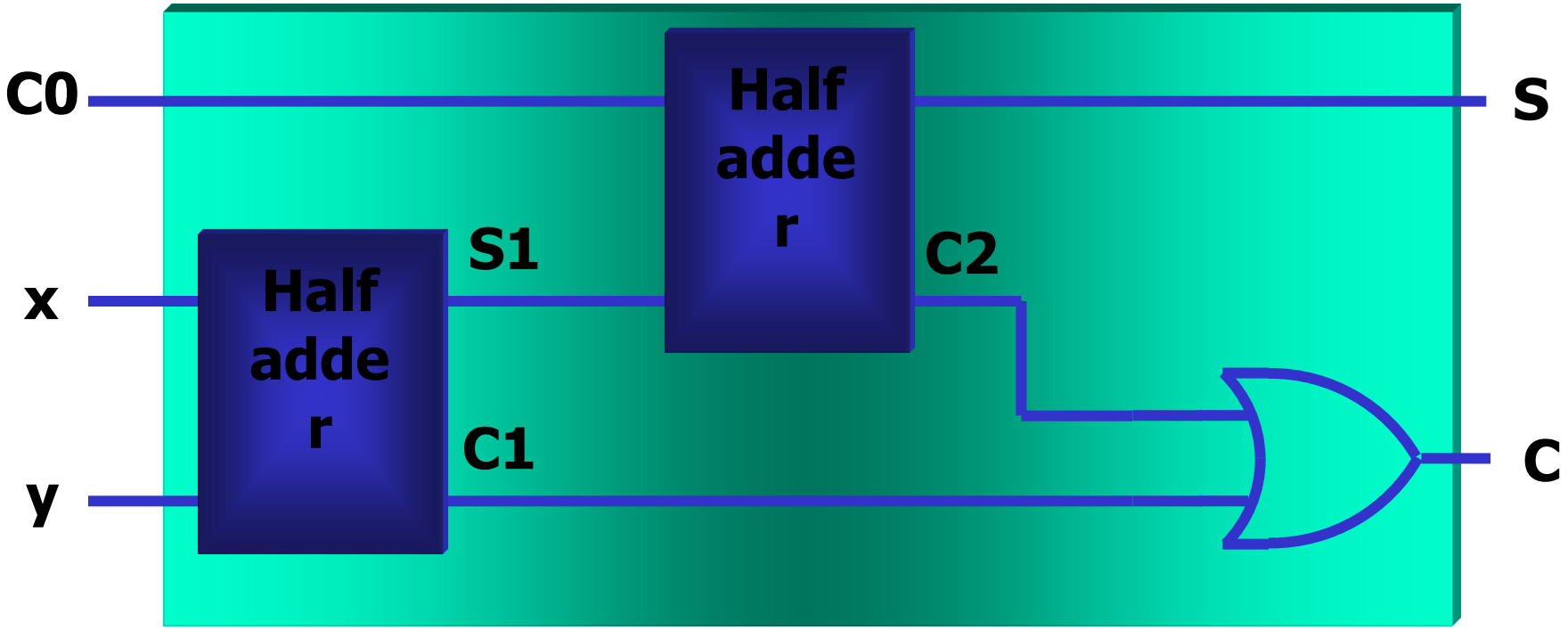
Full adder (2)

C_0	x	y	S	C	C_0	S_1	C_1	C_2	C
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1

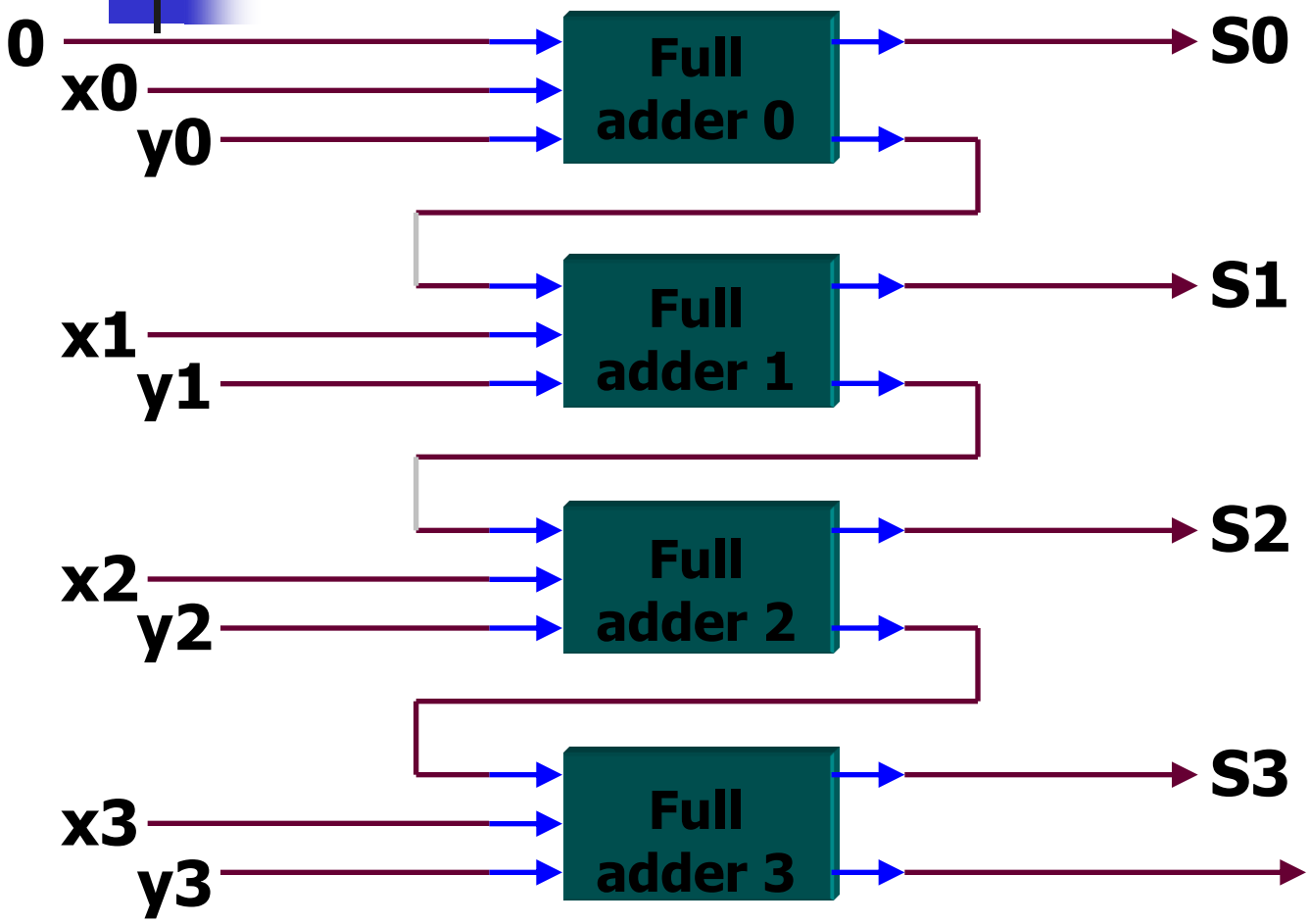
C = 1 when C1 = 1 or C2 = 1



Full adder (3)



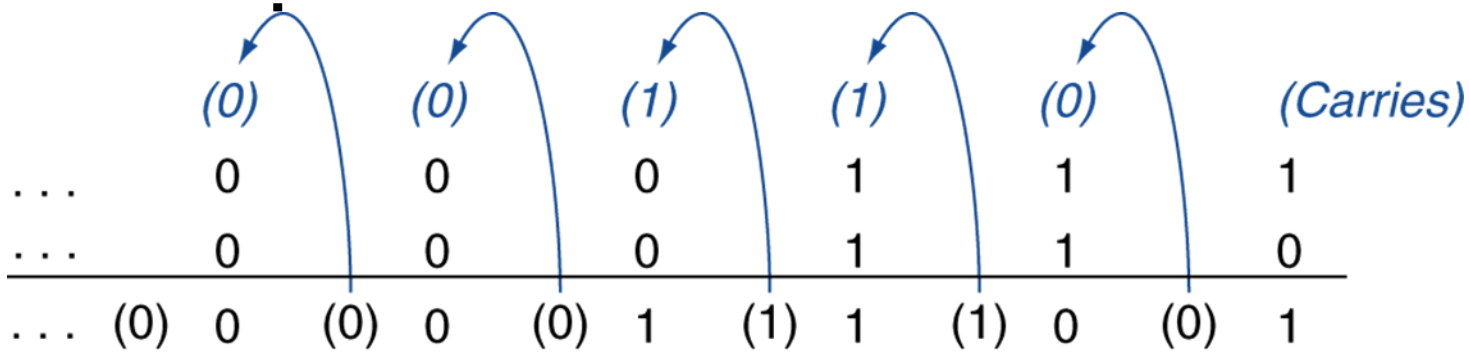
Cộng nhiều Bits



x3x2x1x0
+ y3y2y1y0
C S3S2S1S0

Phép cộng số nguyên

- Ví dụ: 7 + 6



- Tràn nếu kết quả tràn ngưỡng
  - Cộng 2 toán hạng trái dấu: không tràn
  - Cộng 2 toán hạng đều dương
    - Tràn nếu bit dấu của kết quả là 1
  - Cộng 2 toán hạng đều âm
    - Tràn nếu bit dấu của kết quả là 0

Phép trừ số nguyên

- Cộng số âm của toán hạng thứ 2
- Ví dụ: 7 – 6 = 7 + (–6)

```
+7:     0000 0000 … 0000 0111
–6:     1111 1111 … 1111 1010
+1:     0000 0000 … 0000 0001
```

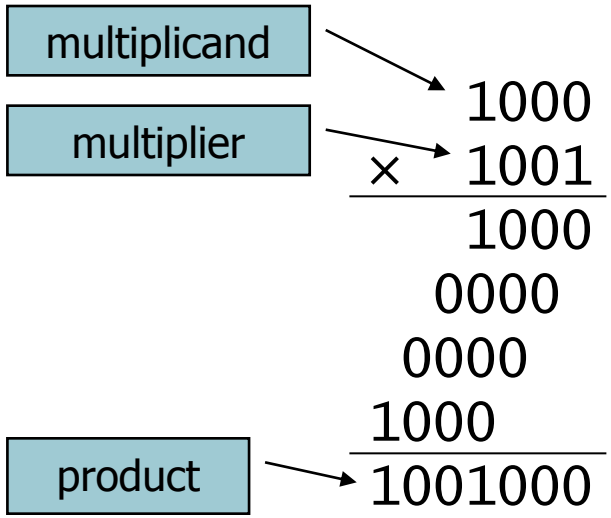
- Tràn nếu kết quả vượt ngưỡng
  - Phép trừ 2 toán hạng cùng dấu, không bao giờ tràn
  - Trừ 1 toán hạng âm với 1 toán hạng dương
    - Tràn nếu bit dấu của kết quả là 0
  - Trừ 1 toán hạng dương với 1 toán hạng âm
    - Tràn nếu bit dấu của kết quả là 1

Xử lý tràn

- Một số ngôn ngữ (như C) không xử lý tràn
  - Sử dụng lệnh MIPS: `addu`, `addui`, `subu`
- Các ngôn ngữ khác (như Ada, Fortran) yêu cầu xử lý tràn bằng ngoại lệ
  - Sử dụng lệnh MIPS: `add`, `addi`, `sub`
  - Khi có tràn, bẫy bằng ngoại lệ & xử lý:
    - Cất PC vào thanh ghi exception PC (EPC)
    - Nhảy đến chương trìn xử lý tràn
    - Dùng `mfc0` khôi phục giá trị EPC value, trở về sau khi xử lý tràn

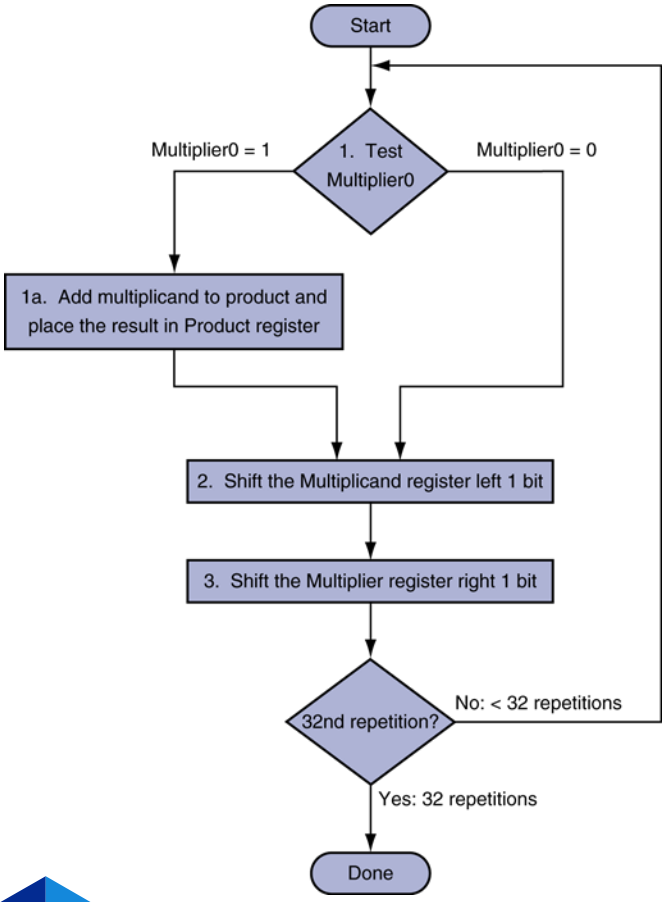
Phép nhân

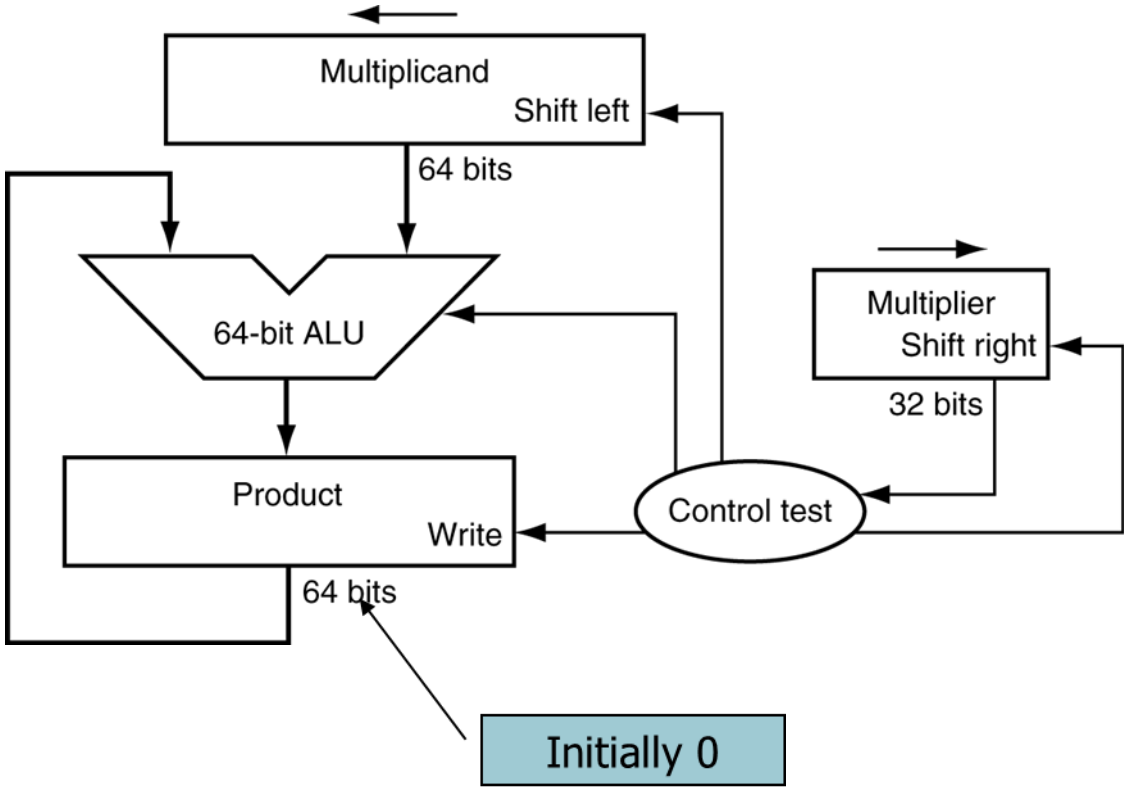
- Bắt đầu bằng phép nhân thuần túy



Length of product is the sum of operand lengths

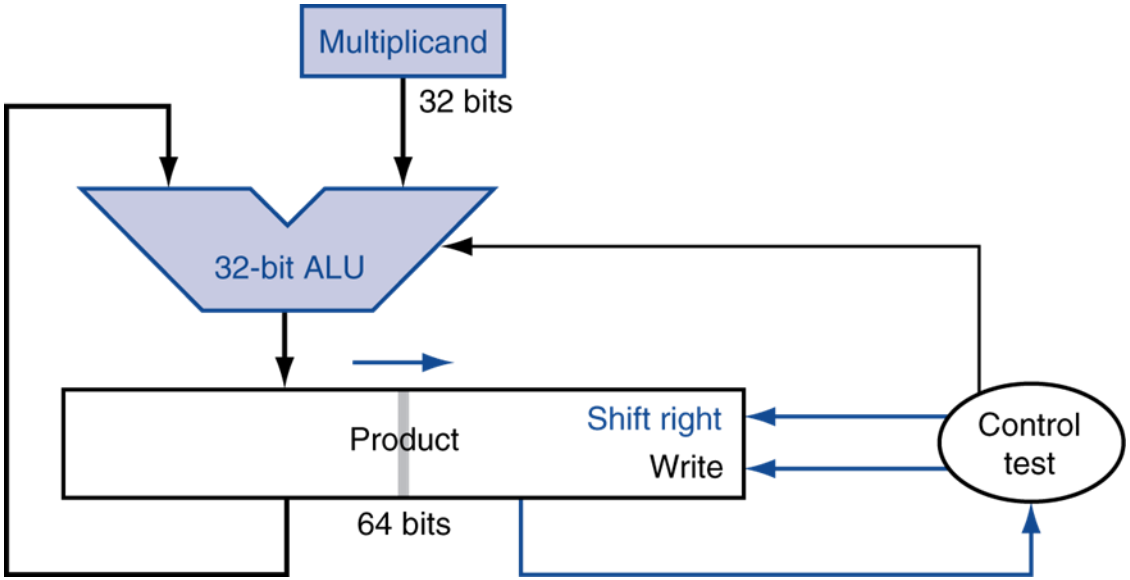
Phần cứng thực hiện nhân





Bộ nhân cải thiện

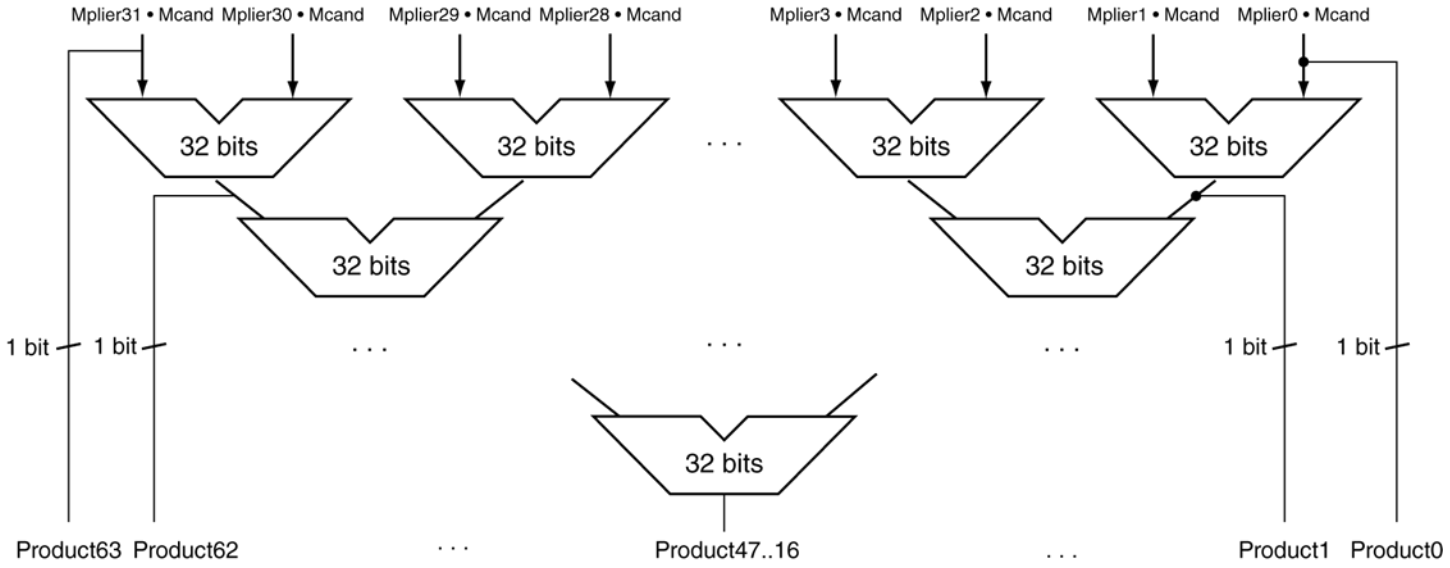
- Các bước song song: add/shift



- Một chu kỳ cho mỗi phép cộng (tích thành phần)
  - Có thể chấp nhận khi tần xuất thấp

Bộ nhân nhanh

- Sử dụng nhiều bộ cộng cùng lúc
  - Cost/performance tradeoff

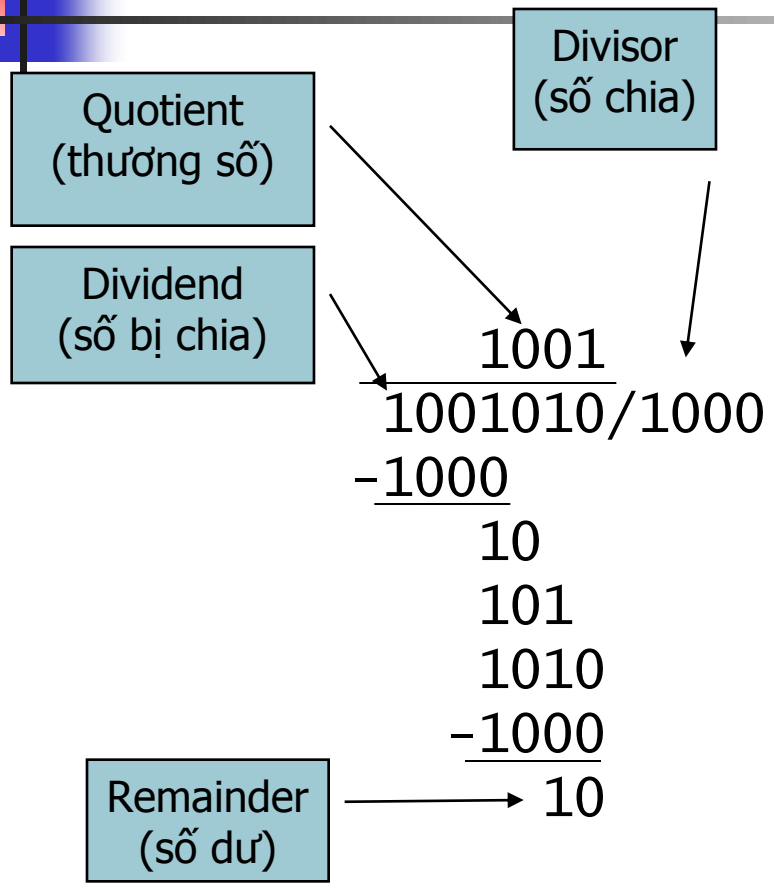


- Có thể thực hiện theo cơ chế ống
  - Nhiều tác vụ nhân thực hiện cùng lúc

Lệnh nhân trong MIPS

- Kết quả sẽ là 64-bit, chứa trong 2 thanh ghi 32-bit
  - HI: chứa 32-bit cao
  - LO: chứa 32-bit thấp
- Lệnh nhân
  - `mult rs, rt / multu rs, rt`
    - 64-bit kết quả chứa trong HI/LO
  - `mfhi rd / mflo rd`
    - Chuyển từ HI/LO vào rd
    - Có thể kiểm tra giá trị HI xem kết quả phép nhân có tràn?
  - `mul rd, rs, rt`
    - 32 bits thấp của kết quả phép nhân –> rd

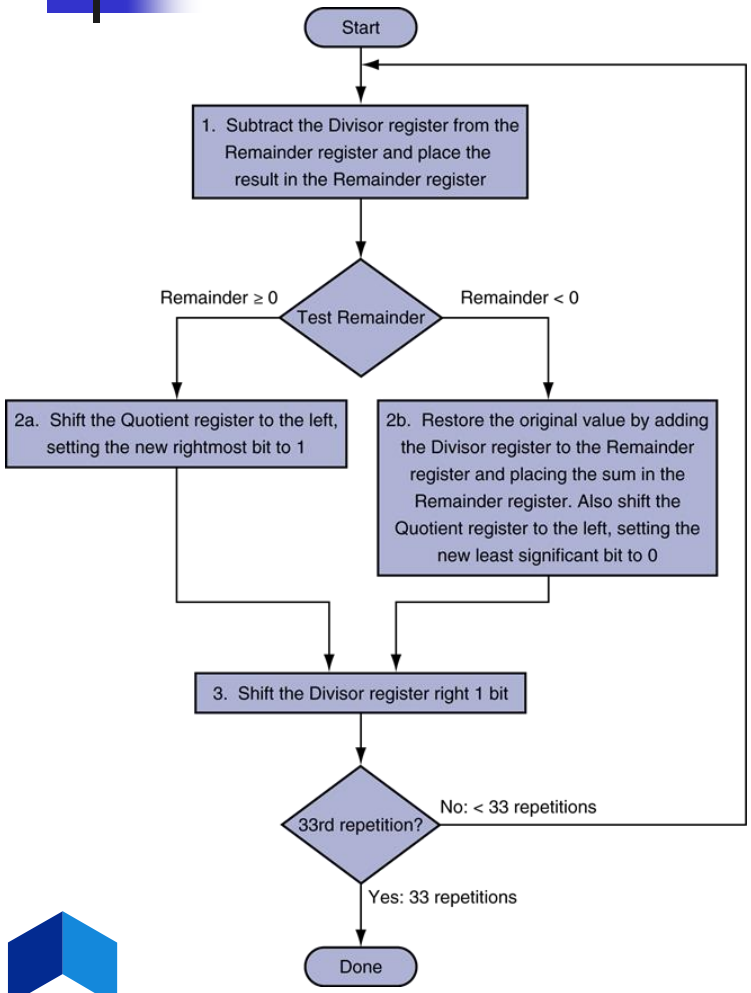
Phép chia

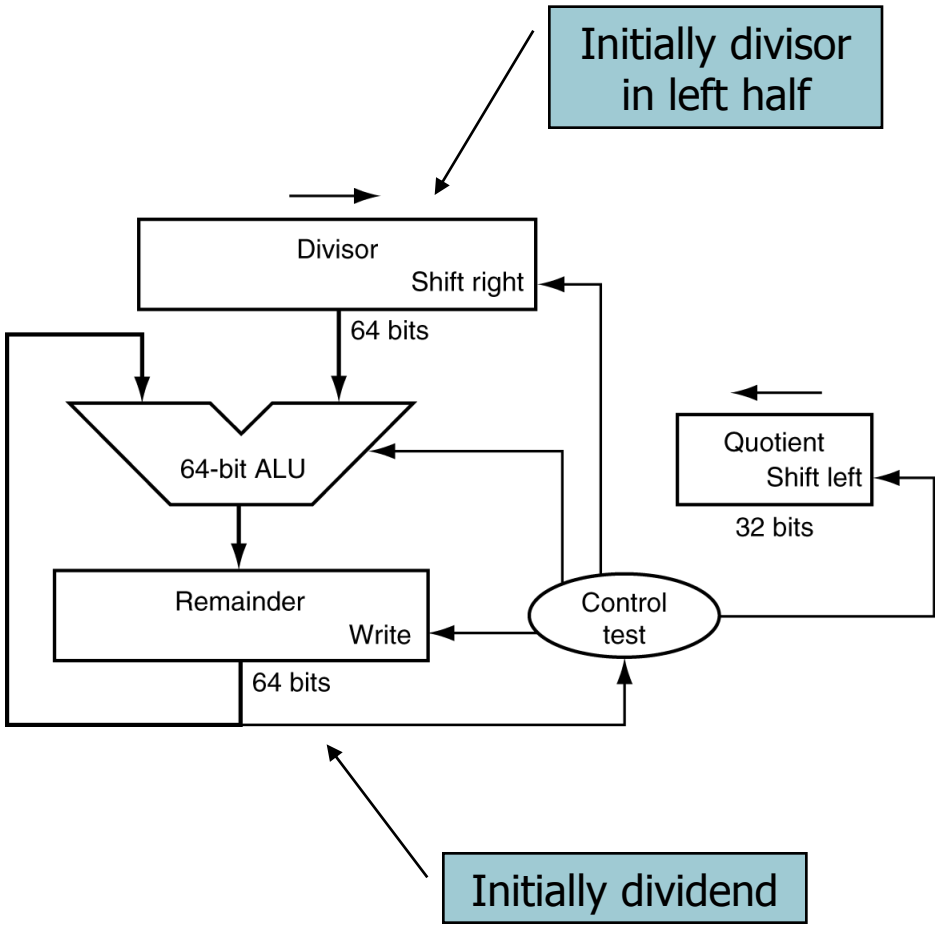


Toán hạng *n*-bit cho kết quả *n*-bit thương số và số dư

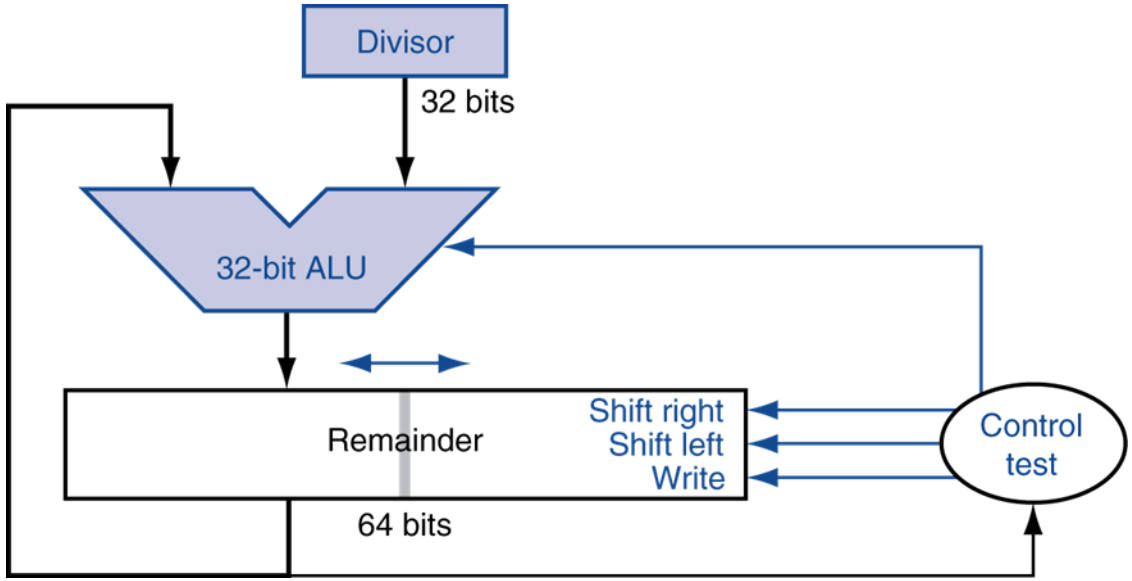
- Kiểm tra chia 0→ báo lỗi
- Long division approach
  - If divisor ≤ dividend bits
    - 1 bit in quotient, subtract
  - Otherwise
    - 0 bit in quotient, bring down next dividend bit
- Restoring division
  - Do the subtract, and if remainder goes < 0, add divisor back
- Signed division
  - Divide using absolute values
  - Adjust sign of quotient and remainder as required

Phần cứng thực hiện chia





Bộ chia cải thiện



- Một chu kỳ cho mỗi phép trừ thành phần
- Tương tự rất nhiều với bộ nhân
  - Có thể dùng cùng một phần cứng cho cả 2

Bộ chia nhanh

- Không thể thực hiện song song như trong bộ nhân
  - Dấu trong mỗi phép trừ thành phần là điều kiện
- Có thể tạo bộ chia nhanh (e.g. SRT devision)

Lệnh chia trong MIPS

- Thanh ghi HI/LO chứa kết quả phép chia
  - HI: 32-bit số dư (remainder)
  - LO: 32-bit (kết quả) quotient
- Lệnh trong MIP
  - `div rs, rt / divu rs, rt`
  - Không kiểm tra tràn hoặc lỗi /0
    - Nếu có yêu cầu, phần mềm phải tự thực hiện
  - Sử dụng lệnh `mfhi, mflo` để lấy kết quả

Dấu chấm di động (Floating Point)

- Biểu diễn các số khác số nguyên (số thực)
  - Bao gồm cả số rất nhỏ lẫn số rất lớn
- Giống như biểu diễn số trong khoa học
  - -2.34×10^{56} ← normalized
  - $+0.002 \times 10^{-4}$ ← not normalized
  - $+987.02 \times 10^{9}$ ← not normalized
- Kiểu nhị phân
  - $\pm 1.xxxxxxx_2 \times 2^{yyyy}$
- Kiểu `float` và `double` trong ngôn ngữ C

Chuẩn của hệ thống số chấm di động

- Định chuẩn bởi Tổ chức IEEE(754-1985)
- Được phát triển nhằm đáp ứng tiêu chuẩn trình bày thống nhất
  - Dễ sử dụng và chuyển đổi giữa các bộ mã trong khoa học
- Hiện nay trở thành thông dụng
- Tồn tại 2 cách biểu diễn
  - Chính xác đơn(32-bit)
  - Chính xác kép (64-bit)

Dạng định chuẩn theo IEEE

single: 8 bits
double: 11 bits

single: 23 bits
double: 52 bits

$$x = (-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$$

- S: bit dấu (0 $\Rightarrow$ (+) , 1 $\Rightarrow$ (-))
- Normalized significand: $1.0 \leq |\text{significand}| < 2.0$
  - Luôn có 1 bit trước dấu chấm, nên bit này thường ẩn
  - Significand is Fraction with the "1." restored
- Exponent: excess representation: actual exponent + Bias
  - Ensures exponent is unsigned
  - Single: Bias = 127; Double: Bias = 1203

Tầm giá trị với độ chính xác đơn

- Giá trị (Exponents) 00000000 và 11111111 : dự trữ
- Giá trị nhỏ nhất
  - Số mũ: 00000001
    $\Rightarrow$ số mũ thực chất sẽ là = 1 – 127 = –126
  - Fraction: 000…00 $\Rightarrow$ significand = 1.0
  - $\pm 1.0 \times 2^{-126} \approx \pm 1.2 \times 10^{-38}$
- Giá trị lớn nhất:
  - Số mũ: 11111110
    $\Rightarrow$ số mũ thực tế sẽ là = 254 – 127 = +127
  - Fraction: 111…11 $\Rightarrow$ significand $\approx$ 2.0
  - $\pm 2.0 \times 2^{+127} \approx \pm 3.4 \times 10^{+38}$

Mức độ chính xác

- Mang tính tương đối
  - Xác định bởi các bit fraction
  - Đơn: khoảng 2^{-23}
    - Tương đương với $23 \times \log_{10}2 \approx 23 \times 0.3 \approx 6$: chính xác đến 6 số (hệ thập phân)
  - Kép: khoảng 2^{-52}
    - Tương đương với $52 \times \log_{10}2 \approx 52 \times 0.3 \approx 16$: chính xác đến 16 số (hệ thập phân)

Ví dụ: Dấu chấm di động

- Biểu diễn số thực thập phân: –0.75
  - $-0.75 = (-1)^1 \times 1.1_2 \times 2^{-1}$
  - S = 1
  - Fraction = $1000\ldots00_2$
  - Exponent = –1 + Bias
    - Đơn: –1 + 127 = 126 = 01111110_2
    - Kép: –1 + 1023 = 1022 = 01111111110_2
- Single: 10111111010000…00
- Double: 10111111111101000…00

Ví dụ: (tt.)

- Cho biết số thực thập phân của một số biểu diễn bằng dấu chấm di động (đơn) sau:

  1100000010100 0…00

  - S = 1
  - Fraction = $01000\ldots00_2$
  - Fxponent = $10000001_2 = 129$
- $x = (-1)^1 \times (1 + 01_2) \times 2^{(129 - 127)}$

  $= (-1) \times 1.25 \times 2^2$

  $= -5.0$

Số vô hạn (Infinities) và Số không hợp lệ (NaNs)

- Exponent = 111...1, Fraction = 000...0
  - ±Infinity
  - Dùng để kiểm tra kết quả của phép tính
- Exponent = 111...1, Fraction ≠ 000...0
  - Not-a-Number (NaN)
  - Số không hợp lệ
    - Ví dụ: chia cho zero: 0.0 / 0.0
  - Dùng để kiểm tra kết quả của phép tính

Phép cộng

- Giả sử có phép cộng 2 số thập phân (4 ký số)
  - $9.999 \times 10^{1} + 1.610 \times 10^{-1}$
- 1. Điều chỉnh dấu chấm
  - Dời số mũ của số nhỏ hơn cho đồng số mũ
  - $9.999 \times 10^{1} + 0.016 \times 10^{1}$
- 2. Cộng hệ số
  - $9.999 \times 10^{1} + 0.016 \times 10^{1} = 10.015 \times 10^{1}$
- 3. Chuẩn hóa kết quả & kiểm tra ngưỡng
  - 1.0015×10^{2}
- 4. Làm tròn và điều chỉnh nếu cần thiết
  - 1.002×10^{2}

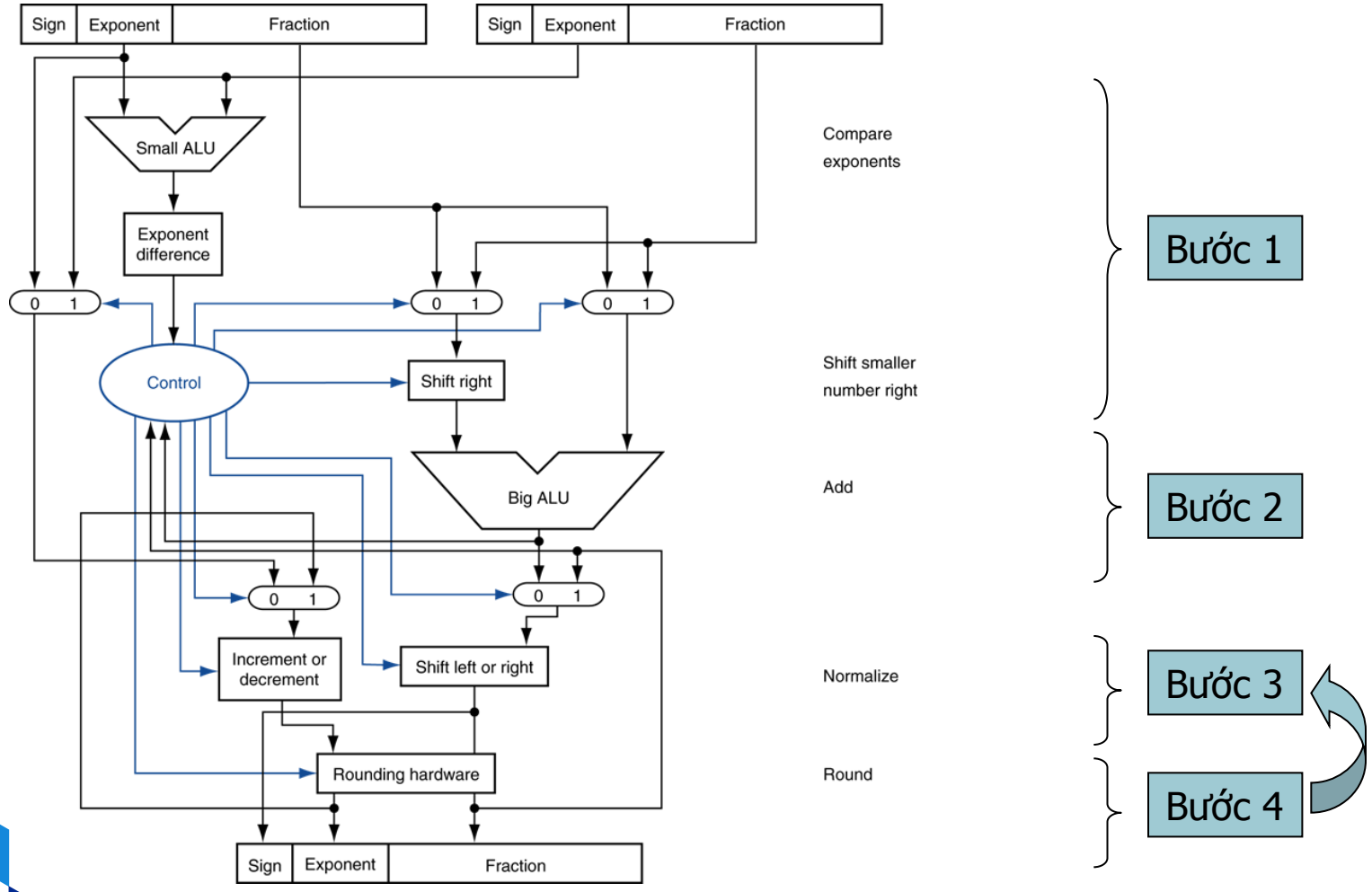
Cộng nhị phân

- Giả sử cộng 2 số nhị phân (4 ký số):
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -1.110_2 \times 2^{-2}$ (0.5 + –0.4375)
- 1. Điều chỉnh dấu chấm
  - Dời số mũ của số nhỏ hơn cho đồng số mũ
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1}$
- 2. Cộng hệ số
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-}1 = 0.001_2 \times 2^{-1}$
- 3. Chuẩn hóa kết quả & kiểm tra ngưỡng
  - $1.000_2 \times 2^{-4}$, (nằm trong ngưỡng cho phép)
- 4. Làm tròn và điều chỉnh nếu cần thiết
  - $1.000_2 \times 2^{-4}$ (không cần điều chỉnh) = 0.0625

Phần cứng bộ cộng (FP)

- Phức tạp hơn rất nhiều so với bộ cộng số nguyên
- Nếu thực hiện trong 1 chu kỳ đồng hồ -→ Chu kỳ quá dài
  - Dài hơn nhiều so với các phép cộng số nguyên
  - Kéo dài thời gian xung đồng hồ → ảnh hưởng đến các lệnh khác
- Bộ cộng (FP) thường kéo dài nhiều chu kỳ
  - Có thể cải thiện bằng cơ chế ống

Phần cứng bộ cộng (FP)



Phép nhân thập phân

- Giả sử nhân 2 số thập phân (4 ký số)
  - $1.110 \times 10^{10} \times 9.200 \times 10^{-5}$
- 1. Cộng số mũ
  - Nếu dùng số mũ biased, trừ biased vào tổng
  - Số mũ mới là = 10 + –5 = 5
- 2. Nhân hệ số
  - $1.110 \times 9.200 = 10.212 \Rightarrow 10.212 \times 10^{5}$
- 3. Chuẩn hóa kết quả & kiểm tra ngưỡng
  - 1.0212×10^{6}
- 4. Làm tròn và điều chỉnh nếu cần thiết
- 5. Xác định dấu của kết quả
  - $+1.021 \times 10^{6}$

Phép nhân nhị phân (FP)

- Giả sử nhân 2 số thập phân (4 ký số)
  - $1.000_2 \times 2^{-1} \times -1.110_2 \times 2^{-2}$ (0.5×-0.4375)
- 1. Cộng số mũ
  - Unbiased: $-1 + -2 = -3$
  - Biased: $(-1 + 127) + (-2 + 127) = -3 + 254 - 127 = -3 + 127$
- 2. Nhân hệ số
  - $1.000_2 \times 1.110_2 = 1.1102 \Rightarrow 1.110_2 \times 2^{-3}$
- 3. Chuẩn hóa kết quả & kiểm tra ngưỡng
  - $1.110_2 \times 2^{-3}$ (không đổi: nằm trong ngưỡng cho phép)
- 4. Làm tròn và điều chỉnh nếu cần thiết
  - $1.110_2 \times 2^{-3}$ (no change)
- 5. Xác định dấu: $(+) \times (-) \Rightarrow (-)$
  - $-1.110_2 \times 2^{-3} = -0.21875$

Phần cứng Bộ số học (FP)

- Bộ nhân (FP) và Bộ cộng (FP) có độ phức tạp như nhau
  - Chỉ khác nhau cho phép tính hệ số
- Phần cứng Bộ số học thường thực hiện các tác vụ sau:
  - Cộng, Trừ, Nhân, Chia, Căn, Nghịch đảo
  - Chuyển đổi FP $\leftrightarrow$ integer
- Các tác vụ này thường kéo dài trong nhiều chu kỳ xung đồng hồ
  - Cải thiện bằng cơ chế đường ống

Lệnh FP trong MIPS

- Phần cứng bộ FP là một coprocessor
  - Mở rộng kiến trúc tập lệnh
- Có các thanh ghi FP riêng
  - 32 thanh ghi (đơn): $f0, $f1, … $f31
  - Chính xác kép bằng cách ghép: $f0/$f1, $f2/$f3, ..
    - Phiên bản 2 của MIPs ISA hỗ trợ 32 × 64-bit FP reg's
- Các lệnh FP chỉ thực hiện trên các thanh ghi FP
  - Chương trình thường không thực hiện các phép số nguyên trên dữ liệu FP hoặc ngược lại
  - Thanh ghi riêng không làm phức tạp thêm code
- Các lệnh FP load và store
  - `lwc1`, `ldc1`, `swc1`, `sdc1`
    - Ví dụ: `ldc1 $f8, 32($sp)`

Lệnh FP trong MIPS

- Phép tính số học (đơn)
  - `add.s`, `sub.s`, `mul.s`, div.s
    - Ví dụ: `add.s $f0, $f1, $f6`
- Phép tính số học (kép)
  - `add.d`, `sub.d`, `mul.d`, `div.d`
    - Ví dụ: `mul.d $f4, $f4, $f6`
- Lệnh so sánh (đơn/kép)
  - `c.`*xx*`.s`, `c.`*xx*`.d` (*xx* is `eq`, `lt`, `le`, …)
  - Gán hoặc xóa bit điều kiện code
    - e.g. `c.lt.s $f3, $f4`
- Rẽ nhánh theo điều kiện
  - `bc1t`, `bc1f`
    - Ví dụ: `bc1t TargetLabel`

Ví dụ: Chuyển °F sang °C

- C code:

```
float f2c (float fahr) {
  return ((5.0/9.0)*(fahr - 32.0));
}
```

  - `fahr` chứa trong $f12, kết quả trong $f0, hằng số trong bộ nhớ toàn cục

- Biên dịch thành MIPS code:

```
f2c: lwc1  $f16, const5($gp)
     lwc2  $f18, const9($gp)
     div.s $f16, $f16, $f18
     lwc1  $f18, const32($gp)
     sub.s $f18, $f12, $f18
     mul.s $f0,  $f16, $f18
     jr    $ra
```

Ví dụ: Nhân Ma trận

- X = X + Y × Z
  - Tất cả đều là ma trận 32 × 32, các phần tử của ma trận 64-bit (chính xác kép)

- C code:

```
void mm (double x[][],
         double y[][], double z[][]) {
  int i, j, k;
  for (i = 0; i! = 32; i = i + 1)
    for (j = 0; j! = 32; j = j + 1)
      for (k = 0; k! = 32; k = k + 1)
        x[i][j] = x[i][j]
                + y[i][k] * z[k][j];
}
```

  - Địa chỉ của x, y, z chứa trong $a0, $a1, $a2, và i, j, k trong $s0, $s1, $s2

Ví dụ: Nhân Ma trận (tt.)

- MIPS code:

```
    li   $t1, 32        # $t1 = 32 (row size/loop end)
    li   $s0, 0         # i = 0; initialize 1st for loop
L1: li   $s1, 0         # j = 0; restart 2nd for loop
L2: li   $s2, 0         # k = 0; restart 3rd for loop
    sll  $t2, $s0, 5    # $t2 = i * 32 (size of row of x)
    addu $t2, $t2, $s1  # $t2 = i * size(row) + j
    sll  $t2, $t2, 3    # $t2 = byte offset of [i][j]
    addu $t2, $a0, $t2  # $t2 = byte address of x[i][j]
    l.d  $f4, 0($t2)    # $f4 = 8 bytes of x[i][j]
L3: sll  $t0, $s2, 5    # $t0 = k * 32 (size of row of z)
    addu $t0, $t0, $s1  # $t0 = k * size(row) + j
    sll  $t0, $t0, 3    # $t0 = byte offset of [k][j]
    addu $t0, $a2, $t0  # $t0 = byte address of z[k][j]
    l.d  $f16, 0($t0)   # $f16 = 8 bytes of z[k][j]
    …
```

Ví dụ: Nhân Ma trận (tt.)

```
…
sll  $t0, $s0, 5        # $t0 = i*32 (size of row of y)
addu  $t0, $t0, $s2     # $t0 = i*size(row) + k
sll   $t0, $t0, 3       # $t0 = byte offset of [i][k]
addu  $t0, $a1, $t0     # $t0 = byte address of y[i][k]
l.d   $f18, 0($t0)      # $f18 = 8 bytes of y[i][k]
mul.d $f16, $f18, $f16 # $f16 = y[i][k] * z[k][j]
add.d $f4, $f4, $f16    # f4=x[i][j] + y[i][k]*z[k][j]
addiu $s2, $s2, 1       # $k k + 1
bne   $s2, $t1, L3      # if (k != 32) go to L3
s.d   $f4, 0($t2)       # x[i][j] = $f4
addiu $s1, $s1, 1       # $j = j + 1
bne   $s1, $t1, L2      # if (j != 32) go to L2
addiu $s0, $s0, 1       # $i = i + 1
bne   $s0, $t1, L1      # if (i != 32) go to L1
```

Kết luận

- ISAs hỗ trợ phép số học
  - Số nguyên có dấu và không dấu
  - Floating-point approximation to reals
- Bounded range and precision
  - Operations can overflow and underflow
- MIPS ISA
  - Core instructions: 54 most frequently used
    - 100% of SPECINT, 97% of SPECFP
  - Other instructions: less frequent