Độ tăng của hàm

33

- Big-O.
- Một số kết quả Big-O quan trọng.

Nguồn gốc lịch sử

34

- Khái niệm Big-O lần đầu tiên được đưa ra bởi nhà toán học người Đức Paul Bachmann vào năm 1892.
- Big-O được trở nên phổ biến hơn nhờ nhà toán học Landau. Do vậy, Big-O cũng còn được gọi là ký hiệu Landau, hay Bachmann-Landau.
- Donald Knuth được xem là người đầu tiên truyền bá khái niệm Big-O trong tin học từ những năm 1970. Ông cũng là người đưa ra các khái niệm Big-Omega và Big-Theta.

Định nghĩa toán học của Big-O

35

- *Cho f và g là hai hàm số từ tập các số nguyên hoặc số thực đến số thực. Ta nói f(x) là O(g(x)) nếu tồn tại hằng số C và k sao cho:*

$$|f(x)| \le C\,|g(x)| \text{ với mọi } x > k$$

Định nghĩa toán học của Big-O

36

- *Cho f và g là hai hàm số từ tập các số nguyên hoặc số thực đến số thực. Ta nói f(x) là O(g(x)) nếu tồn tại hằng số C và k sao cho:*

$$|f(x)| \le C\,|g(x)| \text{ với mọi } x > k$$

- Ví dụ, hàm $f(x) = x^2 + 3x + 2$ là $O(x^2)$.

  Thật vậy, khi $x > 2$ thì $x < x^2$ và $2 < 2x^2$

  Do đó $x^2 + 3x + 2 < 6x^2$.

  Nghĩa là **ta chọn được C = 6 và k = 2**.

Ý nghĩa của Big-O (1)

37

- Big-O giúp xác định được **mối quan hệ** giữa f(x) và g(x), trong đó **g(x) thường là hàm ta đã biết trước**. Từ đó ta xác định được sự tăng trưởng của hàm f(x) cần khảo sát.

- *C* và *k* trong định nghĩa của khái niệm Big-O được gọi là **bằng chứng** của mối quan hệ f(x) là O(g(x)).

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Ý nghĩa của Big-O (2)

38

- Big-O phân hoạch được các hàm với các độ tăng khác nhau. Nếu có hai hàm f(x) và g(x) sao cho f(x) là O(g(x)) và g(x) là O(f(x)) thì ta nói hai hàm f(x) và g(x) đó là có **cùng bậc**.

- Ví dụ: f(x) $7x^2$ là O(x^2) (chọn k = 0, C = 7).
  Do vậy $7x^2$ và $x^2 + 3x + 2$, và x^2 là 3 hàm có cùng bậc.

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Ý nghĩa của Big-O (3)

39

- Lưu ý: $7x^2$ cũng là $O(x^3)$ nhưng x^3 không là $O(7x^2)$.

  Thật vậy: Nếu x^3 là $O(7x^2)$ thì ta phải tìm được C và k sao cho

  $$|x^3| \le C|7x^2| \Leftrightarrow x \le 7C \text{ với mọi } x > k.$$

  Điều này không thể xảy ra vì không thể tìm được k và C nào như vậy.

- Do vậy, trong quan hệ f(x) là O(g(x)), hàm g(x) thường được chọn là **nhỏ nhất có thể**.

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Một số kết quả Big-O quan trọng

40

1. Hàm đa thức:

   $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

   Khi đó f(x) là $O(x^n)$.

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Độ tăng của tổ hợp các hàm

41

- Nếu f(x) là O(g(x)) thì c.f(x) là O(g(x)) với c là hằng số.

- Cho $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$.

Khi đó:

  - Quy tắc tổng:
    $(f_1(x)+f_2(x))$ là $O(\max(|g_1(x)|, |g_2(x)|))$

  - Quy tắc nhân:
    $(f_1(x) * f_2(x))$ là $O(g_1(x) * g_2(x))$.

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Độ tăng của hàm

42

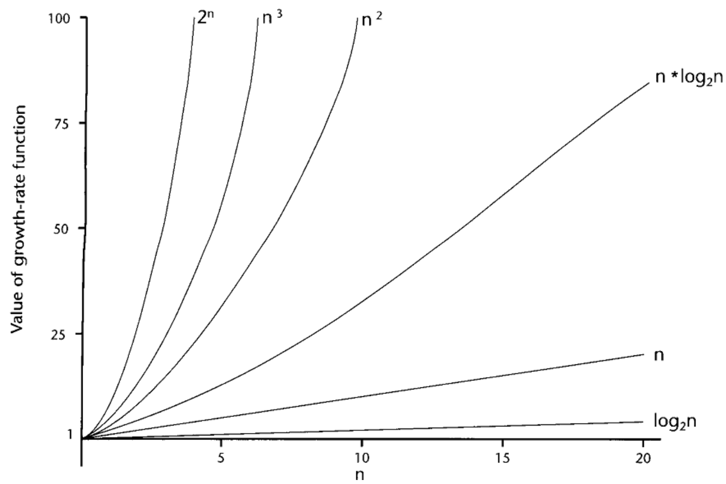
(a)

Function	n = 10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
1	1	1	1	1	1	1
$\log_2 n$	3	6	9	13	16	19
n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$n * \log_2 n$	30	664	9,965	10^5	10^6	10^7
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
2^n	10^3	10^{30}	10^{301}	$10^{3,010}$	$10^{30,103}$	$10^{301,030}$

Cấu trúc dữ liệu và giải thuật - HCMUS 2016

Độ tăng của hàm

43



Sử dụng ký hiệu Big-O

44

- Nói như sau là không chính xác:
  f(x) = O(g(x))
- Nói như dưới đây lại càng không chính xác:
  f(x) > O(g(x))
- Chỉ sử dụng như sau:
  f(x) là O(g(x)), hoặc
  f(x) với bậc g(x).

Chương trình

Tiêu chuẩn đánh giá thuật toán

- Tốc độ thực thi.
- Tính chính xác.
- Đơn giản, dễ hiểu, dễ bảo trì.
- Mức phổ dụng
- …

Thời gian giải quyết 1 bài toán?

47

- Thời gian giải quyết một bài toán phụ thuộc vào nhiều yếu tố:
  - Tốc độ thực thi của máy tính (phần cứng lẫn phần mềm).
  - Tài nguyên (ví dụ: bộ nhớ).
  - Thuật toán.

Làm thế nào đánh giá được thời gian thực thi hiệu quả?

Đánh giá thời gian thực thi theo phép toán

48

- Đánh giá thời gian thực hiện dựa trên những phép toán quan trọng như:
  - Phép so sánh
  - Phép gán
- Đánh giá bằng cách tính số lượng các phép toán quan trọng theo **độ lớn của dữ liệu**.

Từ đó, thời gian thực hiện của một thuật toán có thể được đánh giá theo một hàm phụ thuộc vào độ lớn đầu vào.

Ví dụ

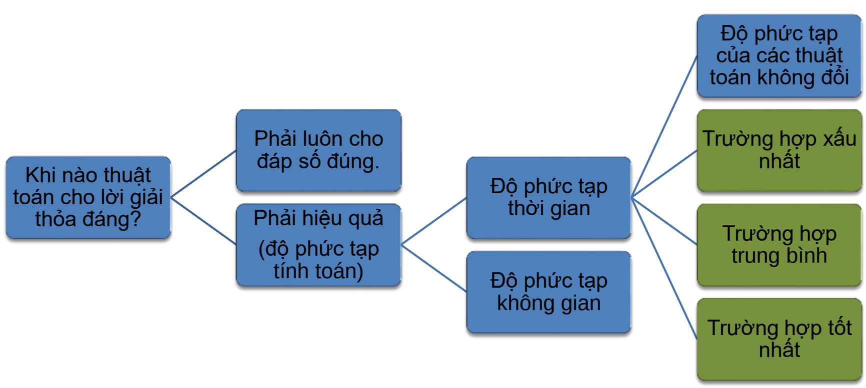
49

- Bước 1. Gán tổng = 0. Gán i = 0.
- Bước 2.
  - Tăng i thêm 1 đơn vị.
  - Gán Tổng = Tổng + i
- Bước 3. So sánh i với 10
  - Nếu i < 10, quay lại bước 2.
  - Ngược lại, nếu i ≥ 10, dừng thuật toán.

Số phép gán của thuật toán là bao nhiêu? Số phép so sánh là bao nhiêu?
- Gán: $g(n) = 2n + 2$, So sánh: $s(n) = n$

Độ phức tạp thuật toán

50



Độ phức tạp cố định của thuật toán

51

- Thuật toán:
  - B1. Đặt giá trị cực đại tạm thời bằng số nguyên đầu tiên trong dãy.
  - B2. So sánh số nguyên tiếp sau với giá trị cực đại tạm thời. Nếu nó lớn hơn giá trị cực đại tạm thời thì đặt cực đại tạm thời bằng số nguyên đó.
  - B3. Lặp lại B2 nếu còn các số nguyên trong dãy.
  - B4. Dừng khi không còn số nguyên nào nữa trong dãy. Cực đại tạm thời chính là số nguyên lớn nhất của dãy.

Độ phức tạp cố định của thuật toán

52

- Vì phép sơ cấp sử dụng trong thuật toán là phép so sánh, nên phép so sánh được dùng làm thước đo độ phức tạp.
- Tại mỗi số hạng, ta thực hiện 2 phép so sánh, 1 phép xem đã hết dãy hay chưa và 1 phép so với cực đại tạm thời.
- Vì hai phép so sánh được dùng từ số hạng thứ 2 đến n, và thêm 1 phép so sánh nữa để ra khỏi vòng lặp, nên ta có chính xác 2(n-1) + 1 = 2n – 1 phép so sánh.
- Do vậy, độ phức tạp của thuật toán là O(n).

Độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất

53

- Bước 1. Gán i = 1.
- Bước 2. Trong khi i ≤ n và x ≠ a_i thì tăng i thêm 1.

  while (i ≤ n and x ≠ a_i)

  i = i + 1
- Bước 3.
  - Nếu i ≤ n, trả về giá trị là i.
  - Ngược lại, i > n, trả về giá trị 0 cho biết không tìm được x trong dãy a.

Độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất

54

- Số phép so sánh dùng làm thước đo.
- Ở mỗi bước của vòng lặp, thực hiện 2 phép so sánh.
- Cuối vòng lặp, thực hiện 1 phép so sánh.
- Như vậy, nếu x = a_i, số phép so sánh thực hiện là (2i +1).
- Trong trường hợp xấu nhất, không tìm được x thì tổng số phép so sánh là 2n + 2.
- Từ đó, thuật toán tìm kiếm tuần tự đòi hỏi tối đa O(n) phép so sánh.

Độ phức tạp trong trường hợp tốt nhất

55

- Trong trường hợp tốt nhất, ta bắt gặp x ngay phần tử đầu tiên nên chỉ cần tốn 3 phép so sánh.
- Khi đó, ta nói thuật toán tìm kiếm tuần tự đòi hỏi ít nhất O(1) phép so sánh.

Độ phức tạp trong trường hợp trung bình

56

- Nếu x là số hạng thứ i, số phép so sánh sử dụng để tìm ra x là 2i + 1.
- Do đó, số phép so sánh trung bình ta cần sử dụng là:

$$\frac{3+5+7+..+(2n+1)}{n} = \frac{2(1+2+3+...+n)+n}{n} = \frac{2\frac{n(n+1)}{2}+n}{n} = n+2$$

- Như vậy độ phức tạp trung bình của thuật toán tìm kiếm tuần tự là O(n)

Ghi chú

57

- Trong thực tế, các phép so sánh cần để xác định xem đã tới cuối vòng lặp hay chưa thường được bỏ qua, không đếm.
- Trong đa số các trường hợp không đòi khỏi sự khắt khe về tính chính xác, người ta sử dụng Big-O cho mọi trường hợp.
- Hệ số trong các hàm theo đa thức không được tính trong phân tích độ phức tạp, ví dụ $O(n^3)$ và $O(20000n^3)$ là như nhau, nhưng trong thực tế đôi khi hệ số rất quan trọng.

Sự phân lớp các độ phức tạp

58

Độ phức tạp	Thuật ngữ/tên phân lớp
$O(1)$	Độ phức tạp hằng số
$O(\log_2 n)$	Độ phức tạp logarit
$O(n)$	Độ phức tạp tuyến tính
$O(n\log_2 n)$	Độ phức tạp $n\log_2 n$
$O(n^a)$	Độ phức tạp đa thức
$O(a^n)$, $a > 1$	Độ phức tạp hàm mũ
$O(n!)$	Độ phức tạp giai thừa

Sự phân lớp các độ phức tạp

59

	logn	n	nlogn	n^2	2^n	n!
10	3.10^{-9}	10^{-8}	3.10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	3.10^{-3}
10^2	7.10^{-9}	10^{-7}	7.10^{-7}	10^{-5}	4.10^{13} năm	*
10^3	$1,0.10^{-8}$	10^{-6}	1.10^{-5}	10^{-3}	*	*
10^4	$1,3.10^{-8}$	10^{-5}	1.10^{-4}	10^{-1}	*	*
10^5	$1,7.10^{-8}$	10^{-4}	2.10^{-3}	10	*	*
10^6	2.10^{-8}	10^{-3}	2.10^{-2}	17 phút	*	*

- Lưu ý:
  - Mỗi phép toán giả sử thực hiện trong 10^{-9} giây (~ CPU 1GHz).
  - *: thời gian lớn hơn 100^{100} năm

Một số lưu ý mở rộng

60

- Có một số thuật toán có độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất là rất lớn nhưng trong trường hợp trung bình lại chấp nhận được.
- Đôi khi, trong thực tế ta phải tìm nghiệm gần đúng thay vì nghiệm chính xác.
- Có một số bài toán tồn tại nhưng có thể chứng minh được không có lời giải cho chúng (ví dụ bài toán Halting).
- Trong thực tế, đa số ta chỉ khảo sát các bài toán có độ phức tạp đa thức trở xuống.

Các phương pháp đánh giá độ phức tạp

61

- Phương pháp đếm
- Phương pháp hàm sinh
- Một số kết quả hoán vị
- Các kết quả, định lý liên quan đến các cấu trúc dữ liệu cụ thể
- …

Bài tập

62

1. Các hàm sau đây có là O(x) hay không?
   a) f(x) = 10
   b) f(x) = 3x + 7
   c) f(x) = $2x^2$ + 2

2. Mô tả thuật toán tìm số nhỏ nhất trong dãy hữu hạn các số tự nhiên. Có bao nhiêu phép so sánh, bao nhiêu phép gán trong thuật toán?

Bài tập

3. Phân tích độ phức tạp của thuật toán tính tổng dãy số sau:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

4. Cho biết số phép gán, số phép so sánh trong đoạn code sau đây theo n:

```
sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
{
    scanf("%d", &x);
    sum = sum + x;
}
```


Bài tập

5. Cho biết số phép gán, số phép so sánh trong đoạn code sau đây theo n:

```
for (i = 0; i < n ; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
    {
      C[i][j] = 0;
      for (k = 0; k < n; k++)
           C[i][j] = C[i][j] +
                     A[i][k]*B[k][j];
    }
```

Bài tập

65

6. Hãy cho biết các hàm số f(n) dưới đây là Big-O của những hàm số g(n) nào?
   - $f(n) = (2 + n) * (3 + \log_2 n)$
   - $f(n) = 11 * \log_2 n + n/2 – 3542$
   - $f(n) = n * (3 + n) – 7 * n$
   - $f(n) = \log_2(n^2) + n$

66

Hỏi và Đáp