



# Biểu diễn số chấm động

**Môn học: Kiến trúc máy tính & Hợp ngữ**

# Đặt vấn đề

- Biểu diễn số $123.375_{10}$ sang hệ nhị phân?
- Ý tưởng đơn giản: Biểu diễn phần nguyên và phần thập phân riêng lẻ
  - Với phần nguyên: Dùng 8 bit ($[0_{10}, 255_{10}]$)
    $123_{10} = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 0111\ 1011_2$
  - Với phần thập phân: Tương tự dùng 8 bit
    $0.375 = 0.25 + 0.125 = 2^{-2} + 2^{-3} = 0110\ 0000_2$

→ $123.375_{10} = 0111\ 1011.0110\ 0000_2$

- Tổng quát công thức khai triển của số thập phân hệ nhị phân:

$$x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-m} = x_{n-1}.2^{n-1} + x_{n-2}.2^{n-2} \ldots + x_0.2^0 + x_{-1}.2^{-1} + x_{-2}.2^{-2} + \ldots + x_{-m}2^{-m}$$

# Đặt vấn đề

- Tuy nhiên...với 8 bit:
  - Phần nguyên lớn nhất có thể biểu diễn: 255
  - Phần thập phân nhỏ nhất có thể biểu diễn: $2^{-8} \sim 10^{-3} = 0.001$

→ Biểu diễn số nhỏ như 0.0001 ($10^{-4}$) hay 0.000001 ($10^{-5}$)?

→ Một giải pháp: Tăng số bit phần thập phân

  - Với 16 bit cho phần thập phân: min = $2^{-16} \sim 10^{-5}$
  - Có vẻ không hiệu quả...Cách tốt hơn ?

→ Floating Point Number (Số thực dấu chấm động)

# Floating Point Number ?

- Giả sử ta có số (ở dạng nhị phân)

  $X = 0.0000000000000011_2 = (2^{-15} + 2^{-16})_{10}$

  14 số 0

→$X = 0.11_2 * (2^{-14})_{10} (= (2^{-1} + 2^{-2}).2^{-14} = 2^{-15} + 2^{-16})$

→Thay vì dùng 16 bit để lưu trữ phần thập phân, ta có thể chỉ cần 6 bit:

$X = 0.11\ 1110$

→Cách làm: Di chuyển vị trí dấu chấm sang phải 14 vị trí, dùng 4 bit để lưu trữ số 14 này

→Đây là ý tưởng **cơ bản** của số thực dấu chấm động (floating point number)

# Chuẩn hóa số thập phân

- Trước khi các số được biểu diễn dưới dạng số chấm động, chúng cần được chuẩn hóa về dạng: $\pm 1.F * 2^E$
  - *F: Phần thập phân không dấu (định trị - Significant)*
  - *E: Phần số mũ (Exponent)*
- Ví dụ:
  - $+0.09375_{10} = 0.00011_2 = +1.1 * 2^{-4}$
  - $-5.25_{10} \quad = 101.01_2 \quad = -1.0101 * 2^2$

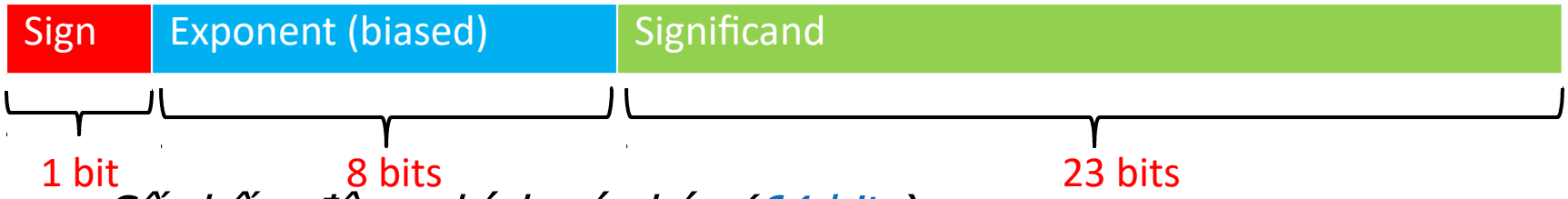
# Biểu diễn số chấm động

- Có nhiều chuẩn nhưng hiện nay chuẩn IEEE 754 được dùng nhiều nhất để lưu trữ số thập phân theo dấu chấm động trong máy tính, gồm 2 dạng:

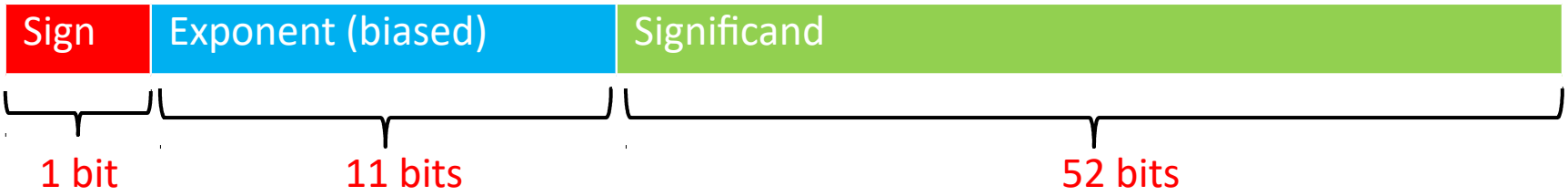
  (slide sau)

# Biểu diễn số chấm động

- *Số chấm động chính xác đơn (32 bits):*




- *Số chấm động chính xác kép (64 bits):*




- **Sign:** Bit dấu (1: Số âm, 0: Số dương)
- **Exponent:** Số mũ (Biểu diễn dưới dạng số quá K (Biased) với
  - *Chính xác đơn:* K = 127 ($2^{n-1} - 1 = 2^{8-1} - 1$) với n là số bit lưu trữ Exponent
  - *Chính xác kép:* K = 1023 ($2^{n-1} - 1 = 2^{11-1} - 1$)
- **Significand (Fraction):** Phần định trị (phần lẻ sau dấu chấm)

# Ví dụ

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = -5.25**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân
  $X = -5.25_{10} = -101.01_2$
- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng $\pm 1.F * 2^E$

  $X = -5.25 = -101.01 = -1.0101 * 2^2$
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số âm: bit dấu Sign = 1
  - Số mũ E = 2 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:
    → Exponent = E + 127 = 2 + 127 = $129_{10} = 1000\ 0001_2$
  - Phần định trị = 0101 0000 0000 0000 0000 000 (Thêm 19 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 1 1000 0001 0101 0000 0000 0000 0000 000

# Thảo luận về exponent

- Vì sao phần số mũ exponent không giữ nguyên lại phải lưu trữ dưới dạng số quá K (Dạng biased)?
- Giả sử trong số chấm động chính xác đơn (32 bits), ta dùng 8 bits để lưu giá trị exponent (biểu diễn dưới dạng số quá K), vậy miền giá trị của nó là [0, 255]

→Với K = 127, số mũ gốc ban đầu có miền giá trị [-127, 128]

→Miền giá trị này **khá vô lý**, vậy tại sao chúng ta không chọn số K = 128 để miền giá trị gốc là [-128, 127] như bình thường?

# Câu hỏi 1 - Đáp án

- Sở dĩ Exponent được lưu trữ dưới dạng Biased vì ta muốn chuyển từ miền giá trị số có dấu sang số không dấu (vì trong biased, số k được chọn để sau khi cộng số bất kỳ trong miền giá trị gốc, kết quả là số luôn dương)

→ Dễ dàng so sánh, tính toán

# Câu hỏi 2 - Đáp án

- Số K được chọn là 127 mà không phải là 128 vì tại bước 2 trước khi biểu diễn thành số chấm động, chúng ta cần phải chuẩn hóa thành dạng $\pm 1.F * 2^E$
- Tức là chúng ta sẽ luôn luôn để dành 1 bit (số 1) phía trước dấu chấm chứ không đẩy sang trái hết

→ Với 8 bit, số mũ gốc ban đầu không thể đạt mức nhỏ nhất là -128 mà chỉ là -127

→ Do vậy ta chỉ cần chọn K = 127 là được

# Vậy thì...

- Khi muốn biểu diễn số 0 thì ta không thể tìm ra bit trái nhất có giá trị = 1 để đẩy dấu chấm động, vậy làm sao chuẩn hóa về dạng $\pm 1.F * 2^E$ ?
- Với số dạng $\pm 0.F * 2^{-127}$ thì chuẩn hóa được nữa không?
- Với K = 127, exponent lớn nhất sẽ là 255

→ Số mũ gốc ban đầu lớn nhất là 255 – 127 = +128

→ **Vô lý** vì với 8 bit có dấu ta không thể biểu diễn được số +128 ?

# Trả lời

- Vì đó là những số thực đặc biệt, ta không thể biểu diễn bằng dấu chấm động ☺

# Số thực đặc biệt

- Số 0 (zero)
  - Exponent = 0, Significand = 0
- Số không thể chuẩn hóa (denormalized)
  - Exponent = 0, Significand != 0
- Số vô cùng (infinity)
  - Exponent = 111…1 (toàn bit 1), Significand = 0
- Số báo lỗi (NaN – Not a Number)
  - Exponent = 111…1 (toàn bit 1), Significand != 0

# Normalized number

- Largest positive normalized number: +1.[23 số 1] * $2^{127}$

| S | Exp | Significand (Fraction) |
|---|---|---|
| - | ---------- | ---------- |
| 0 | 1111 1110 | 1111 1111 1111 1111 1111 111 |

- Smallest positive normalized number: +1.[23 số 0] * $2^{-126}$

| S | Exp | Significand (Fraction) |
|---|---|---|
| - | ---------- | ---------- |
| 0 | 0000 0001 | 0000 0000 0000 0000 0000 000 |

- Tương tự cho số negative (số âm)

# Denormalized number

- Largest positive denormalized number: +0.[23 số 1] * $2^{-127}$

  S Exp Significand (Fraction)

  - ---------- ----------

  0 0000 0000 1111 1111 1111 1111 1111 111

  Tuy nhiên IEEE 754 quy định là +0.[23 số 1] * $2^{-126}$ vì muốn tiến gần hơn với "Smallest positive normalized number = +1.[23 số 0] * $2^{-126}$"

- Smallest positive denormalized number: +1.[22 số 0]1 * $2^{-127}$

  S Exp Significand (Fraction)

  - ---------- ----------

  0 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 001

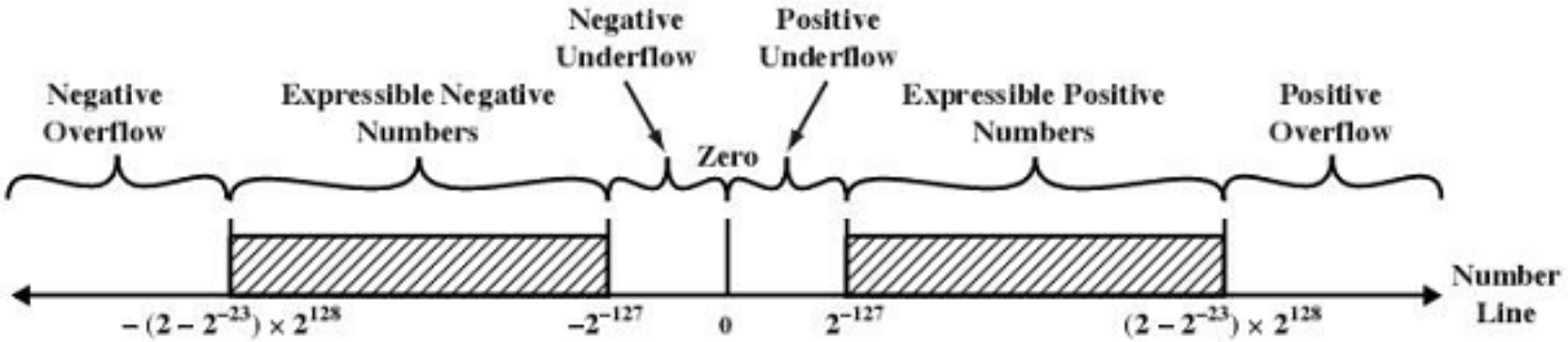
  Tuy nhiên IEEE 754 quy định là +0.[22 số 0]1 * $2^{-126}$

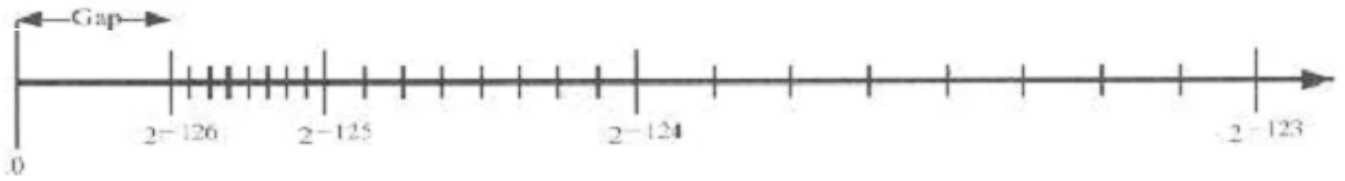
- Tương tự cho số negative (số âm)

# Ví dụ: n = 4, m = 3, bias = 7

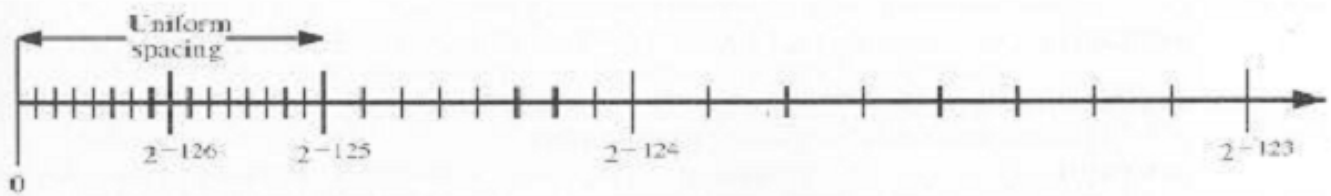
| | s | exp | frac | E | Value | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Denormalized numbers | 0 | 0000 | 000 | -6 | 0 | |
| | 0 | 0000 | 001 | -6 | 1/8*1/64 = 1/512 | ← closest to zero |
| | 0 | 0000 | 010 | -6 | 2/8*1/64 = 2/512 | |
| | ... | | | | | |
| | 0 | 0000 | 110 | -6 | 6/8*1/64 = 6/512 | |
| | 0 | 0000 | 111 | -6 | 7/8*1/64 = 7/512 | ← largest denorm |
| Normalized numbers | 0 | 0001 | 000 | -6 | 8/8*1/64 = 8/512 | ← smallest norm |
| | 0 | 0001 | 001 | -6 | 9/8*1/64 = 9/512 | |
| | ... | | | | | |
| | 0 | 0110 | 110 | -1 | 14/8*1/2 = 14/16 | |
| | 0 | 0110 | 111 | -1 | 15/8*1/2 = 15/16 | ← closest to 1 below |
| | 0 | 0111 | 000 | 0 | 8/8*1 = 1 | |
| | 0 | 0111 | 001 | 0 | 9/8*1 = 9/8 | ← closest to 1 above |
| | 0 | 0111 | 010 | 0 | 10/8*1 = 10/8 | |
| | ... | | | | | |
| | 0 | 1110 | 110 | 7 | 14/8*128 = 224 | |
| | 0 | 1110 | 111 | 7 | 15/8*128 = 240 | ← largest norm |
| | 0 | 1111 | 000 | n/a | inf | |

# Phân bố các số thực (32 bits)




Without denormalized numbers




With denormalized numbers

# Chuẩn IEEE 754

| | Format | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Parameter** | **Single** | **Single Extended** | **Double** | **Double Extended** |
| Word width (bits) | 32 | ≥ 43 | 64 | ≥ 79 |
| Exponent width (bits) | 8 | ≥ 11 | 11 | ≥ 15 |
| Exponent bias | 127 | unspecified | 1023 | unspecified |
| Maximum exponent | 127 | ≥ 1023 | 1023 | ≥ 16383 |
| Minimum exponent | –126 | ≤ –1022 | –1022 | ≤ –16382 |
| Number range (base 10) | $10^{-38}$, $10^{+38}$ | unspecified | $10^{-308}$, $10^{+308}$ | unspecified |
| Significand width (bits)* | 23 | ≥ 31 | 52 | ≥ 63 |
| Number of exponents | 254 | unspecified | 2046 | unspecified |
| Number of fractions | $2^{23}$ | unspecified | $2^{52}$ | unspecified |
| Number of values | $1.98 \times 2^{31}$ | unspecified | $1.99 \times 2^{63}$ | unspecified |

* not including implied bit

# Bài tập 1

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = +12.625**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân

  $X = -12.625_{10} = -1100.101_2$
- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng $\pm 1.F * 2^E$

  $X = -12.625_{10} = -1100.101_2 = -1.100101 * 2^3$
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số dương: bit dấu Sign = 0
  - Số mũ E = 3 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:

    → Exponent = E + 127 = 3 + 127 = $130_{10} = 1000\ 0010_2$
  - Phần định trị = 1001 0100 0000 0000 0000 000 (Thêm 17 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 0 1000 0010 1001 0100 0000 0000 0000 000

# Bài tập 2

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = -3050**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân

  $X = -3050_{10} = -1011\ 1110\ 1010_2$
- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng $\pm 1.F * 2^E$

  $X = -3050_{10} = -\ 1011\ 1110\ 1010_2 = -1.01111101010 * 2^{11}$
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số âm: bit dấu Sign = 1
  - Số mũ E = 11 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:

    → Exponent = E + 127 = 11 + 127 = $138_{10} = 1000\ 1010_2$
  - Phần định trị = 0111 1101 0100 0000 0000 000 (Thêm 12 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 1 1000 1010 0111 1101 0100 0000 0000 000

# Bài tập 3

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = +1.1 * $2^{-128}$**
- **Lưu ý:**
  - Số X: positive number
  - X < Smallest positive normalized number: +1.[23 số 0] * $2^{-126}$

  →số X là số không thể chuẩn hóa (denormalized number)

  →**Chuyển X về dạng: X = +0.011 * $2^{-126}$**
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số dương: bit dấu Sign = 0
  - Vì đây là số không thể chuẩn hóa → Phần mũ exponent được biểu diễn: $0000\ 0000_2$
  - Phần định trị = 0110 0000 0000 0000 0000 000

→ Kết quả nhận được: 0 0000 0000 0110 0000 0000 0000 0000 000

# Homework

- Sách W.Stalling – Computer Arithmetic, đọc chương 9
- Đọc file 04_FloatingPoint.doc
- Trả lời các câu hỏi:
  - Overflow, underflow?
  - Cộng trừ nhân chia trên số thực?
  - Quy tắc làm tròn?
  - NaN: nguyên tắc phát sinh?
  - Quiet NaN và Signaling NaN?