HOCMAI

THEO CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG MỚI
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỔNG HỢP TỪ A ĐẾN Z KIẾN THỨC HỌC KỲ I

MÔN TOÁN

Bí quyết học nhẹ
Tự tin điểm cao!

Lớp 11

Biên soạn bởi đội ngũ giáo viên HOCMAI

BÍ QUYẾT
ÔN THI CUỐI KỲ HIỆU QUẢ

1 LẬP KẾ HOẠCH ÔN TẬP

Cuối kỳ là khoảng thời gian bạn sẽ phải thi toàn bộ các môn học của kỳ đó. **Lượng kiến thức là rất nhiều.** Bạn nên lập kế hoạch dựa trên số lượng môn học, phân bổ thời gian một cách hợp lý nhất.

2 NẮM VỮNG NỀN TẢNG

Thường đề thi sẽ bám sát vào các kiến thức cơ bản có trong sách giáo khoa. Để tránh ôn tập không đúng trọng tâm, bạn nên hệ thống lại kiến thức trước khi ôn thi. **Chi tiết kiến thức được Hocmai tổng hợp ngay TẠI ĐÂY**

3 LUYỆN TẬP THƯỜNG XUYÊN

Luyện tập bài và đề thi giúp các bạn không những **nắm được các kiến thức đã học**, bổ sung những kiến thức còn thiếu mà còn **nắm bắt được các thủ thuật làm bài thi** sao cho nhanh và chính xác nhất.

4 THAM GIA THI THỬ

Là cơ hội để các bạn **tự đánh giá lại trình độ bản thân** và đề ra chiến lược ôn luyện hiệu quả hơn. Đặc biệt, giúp bạn **nhận biết lỗi sai thường gặp** và từ đó đúc rút mẹo xử lý nhanh các câu hỏi khó sau khi thi.

Để đồng hành cùng Phụ huynh và học sinh trong giai đoạn ôn thi tăng tốc về đích cuối học kỳ 1, HOCMAI dành tặng *MIỄN PHÍ 1 lượt thi thử Đánh giá năng lực môn toán* từ lớp 6 đến lớp 11. Ba mẹ và học sinh cùng tham gia ngay nhé!

TÀI LIỆU ÔN TẬP HỌC KỲ I
MÔN TOÁN LỚP 11
Bộ: KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Chương I: Hàm số LG – Phương trình LG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

1. Đơn vị đo góc và cung tròn

Liên hệ giữ độ và rad

$360° = 2\pi$ (số đo đường tròn bán kính R)

$\Rightarrow 180° = \pi \text{ rad} \Rightarrow 1 \text{ rad } = \dfrac{180°}{\pi} = 57°17'45"$

$1° = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad } = 0,0175 \text{ rad}$

2. Hệ thức lượng giác cơ bản

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	5. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
2. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	6. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1\left(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	7. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}\right)$
4. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	

3. Hệ thức liên hệ giữa các cung đặc biệt

1. Cung đối nhau (α và $-\alpha$) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	2. Cung bù nhau (α và $\pi-\alpha$) $\sin(\pi - a) = \sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$
3. Cung phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$
5. Cung hơn kém π (α và $\pi+\alpha$) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi+\pi) = \tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\qquad$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\qquad$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\qquad$ $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\qquad$ $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cot b-1}{\cot b-\cot a}$

2. Công thức nhân đôi, nhân ba, hạ bậc

a. Công thức nhân đôi

$\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\qquad$ $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\qquad$ $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

b. Công thức nhân ba

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ $\qquad$ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

c. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ $\qquad$ $\cot^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$

3. Công thức biến tổng thành tích

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

$\cos a-\cos a=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\cot a+\cot b=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$

$\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\cot a-\cot b=\dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$

4. Công thức biến tích thành tổng

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$ $\qquad$ $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

III. Hàm số lượng giác

Tính chất của hàm số lượng giác

1. Hàm số sin

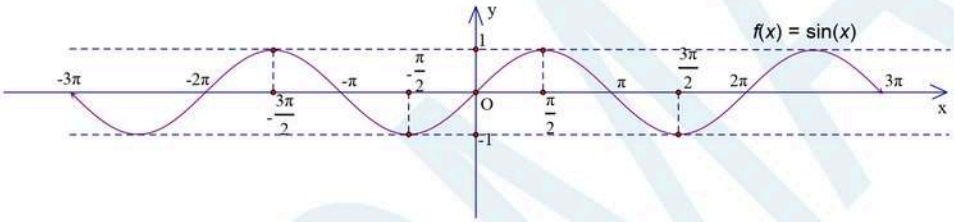
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

+ Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y=\sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



2. Hàm số cos

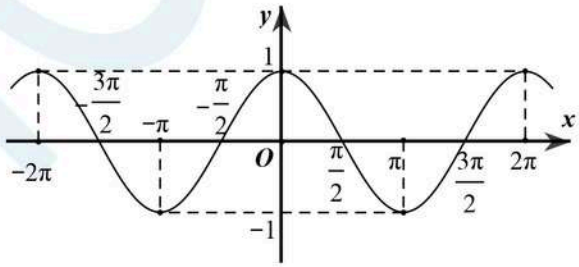
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

+ Tập giá trị. $[-1;1]$, có nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y=\cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng (Hình vẽ dưới đây).



3. Hàm số tan

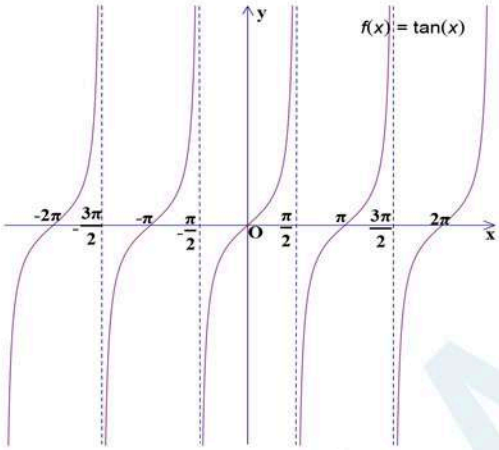
+ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

+ Tập giá trị là R.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x, (k \in \mathbb{Z})$.

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$.

+ $y = \tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận. (Hình vẽ dưới đây)



4. Hàm số cot

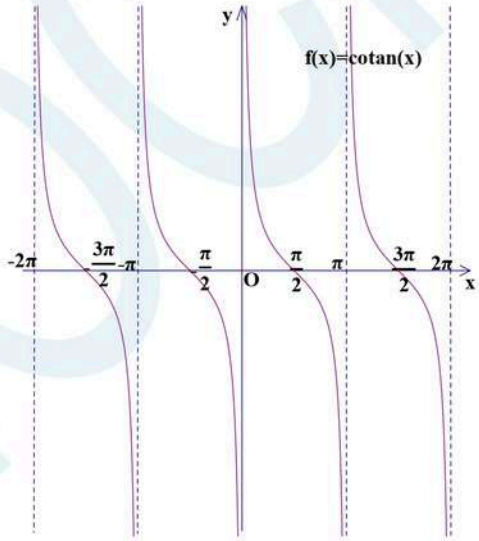
+ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

+ Tập giá trị là $\mathbb{R}$.

+ Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\cot(x + k\pi) = \cot x, (k \in \mathbb{Z})$.

+ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận (Hình vẽ dưới đây).



IV. Phương trình lượng giác

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \sin\alpha$

Phương trình $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Phương trình $\cos x = a\ (2)$

+ Nếu $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm do $|\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

+ Nếu $|a| \le 1$, khi đó xác định α sao cho $a = \cos\alpha$

Phương trình $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

+ Trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

3. Phương trình $\tan x = a\ (3)$

Điều kiện xác định: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó, xác định α sao cho $a = \tan\alpha$.

Phương trình (3): $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

+ Trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4. Phương trình $\cot x = a\ (4)$

Điều kiện xác định: $x \neq k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Khi đó, xác định α sao cho $a = \cot\alpha$.

Phương trình (4): $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

+ Trường hợp đặc biệt:

$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

HOCMAI

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định dấu và tính toán các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp giải:

- Dựa vào đường tròn lượng giác xác định dấu của cá giá trị lượng giác

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos a$	+	–	–	+
$\sin a$	+	+	–	–
$\tan a$	+	–	+	–
$\cot a$	+	–	+	–

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

- Sau đó, áp dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để tính toán các giá trị lượng giác còn lại.

Ví dụ 1 Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải:

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\sin x < 0$).

Khi đó, $\begin{cases} \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = -\dfrac{1}{2} \\ \cot x = \dfrac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}$

Vậy $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \tan x = -\dfrac{1}{2}; \cot x = -2.$

Ví dụ 2 Biết $\tan\alpha = 2$ và $180° < \alpha < 270°$. Tính giá trị của biểu thức $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Lời giải:

Do $180° < \alpha < 270°$ nên $\cos\alpha < 0$.

Ta có $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (vì $\cos\alpha < 0$)

Suy ra, $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Do đó, $\sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức lượng giác

Phương pháp giải:

Áp dụng các hệ thức lượng giác của cung đặc biệt và các công thức lượng giác (nhân đôi – nhân ba, hạ bậc, công thức cộng, biến đổi tổng thành tích – tích thành tổng)

Ví dụ 1 Rút gọn biểu thức $D = \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$.

Lời giải:

$D = \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$

$D = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2 \cdot 6\pi + \pi + \alpha) - 3\sin(\pi - \alpha - 3 \cdot 2\pi)$

$D = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) - 3\sin(\pi - \alpha)$

$D = \cos\alpha - \cos\alpha + 3\sin\alpha$

$D = 3\sin\alpha.$

Ví dụ 2 Rút gọn biểu thức

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$.

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$.

Lời giải:

a. $P=\dfrac{\cos a+2\cos 3a+\cos 5a}{\sin a+2\sin 3a+\sin 5a}$

$$P=\frac{(\cos a+\cos 5a)+2\cos 3a}{(\sin a+\sin 5a)+2\sin 3a}$$
$$P=\frac{2\cos 3a\cos 2a+2\cos 3a}{2\sin 3a\cos 2a+2\sin 3a}$$
$$P=\frac{2\cos 3a(\cos 2a+1)}{2\sin 3a(\cos 2a+1)}$$
$$P=\frac{\cos 3a}{\sin 3a}$$
$$P=\cot 3a.$$

b. $Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos 22^\circ\cos 12^\circ-\cos 10^\circ$

$$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\cos(90^\circ-68^\circ)\cos(90^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$$
$$Q=\cos 68^\circ\cos 78^\circ+\sin 68^\circ\sin 78^\circ-\cos 10^\circ$$
$$Q=\cos(68^\circ-78^\circ)-\cos 10^\circ$$
$$Q=\cos(-10^\circ)-\cos 10^\circ$$
$$Q=\cos 10^\circ-\cos 10^\circ$$
$$Q=0.$$

Dạng 3. Tìm điều kiện xác định, chu kì và tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

Phương pháp giải:

+ Điều kiện xác định:

- Với hàm số $y=\tan x$ có điều kiện $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

- Với hàm số $y=\cot x$ có điều kiện $x\neq k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

- Với hàm số chứa phân thức $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ thì mẫu số $g(x)\neq 0$.

- Với hàm số chứa căn thức $y=\sqrt{f(x)}$ thì $f(x)\geq 0$.

+ Chu kì của hàm số lượng giác

- Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ có chu kì là $T=2\pi$.

- Hàm số $y=\tan x; y=\cot x$ có chu kì là $T=\pi$.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có chu kì là T thì hàm số $y=g(x)=f(kx)$ (với $k\neq 0$) có chu kì là $T'=\frac{T}{|k|}$.

+ Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

- Hàm số chẵn là hàm số thỏa mãn tính chất: $f(-x)=f(x),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số lẻ là hàm số thỏa mãn tính chất: $f(-x)=-f(x),\forall -x;x\in D$.

- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

- Hàm số $y=\sin x; y=\tan x; y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\sin\sqrt{x+4}$.

b. $y=\frac{1+\tan x}{\sin x}$.

c. $y=\sqrt{3-2\cos x}$.

d. $y=\cot\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\tan 2x}{\sin x+1}$.

Lời giải:

a. Điều kiện xác định: $x+4\ge 0\Leftrightarrow x\ge -4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-4;+\infty)$.

b. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\ne k\pi \end{cases}(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. Điều kiện xác đinh: $3-2\cos x\ge 0\Leftrightarrow \cos x\le \frac{3}{2}$ (luôn đúng vì $|\cos x|\le 1$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x+\frac{\pi}{6}\ne k\pi \\ 2x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x\ne -1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3} \\ x\ne \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x\ne -\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 2 Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a. $y=1-\sin 5x$.

b. $y=\cos^2 x-1$.

c. $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

d. $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right)$.

Lời giải:

a. Hàm số $y=1-\sin 5x$ tuần hoàn và có chu kì $T_1=\frac{2\pi}{5}$.

b. Hàm số $y=\cos^2 x-1=\frac{\cos 2x-1}{2}$ tuần hoàn và có chu kì $T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

c. Hàm số $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{5}x\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kì $T_3=\frac{2\pi}{\frac{4}{5}}=\frac{5\pi}{2}$.

d. Hàm số $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y=\cos x$ có chu kì $T_1=2\pi$ và hàm số $y=\cos\left(\sqrt{3}x\right)$ có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1=2\pi$ và $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a. $y=\tan x+\cot x.$

b. $y=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right).$

c. $y=\dfrac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x}, n\in\mathbb{Z}.$

Lời giải:

a. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\tan\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)=-\tan x-\cot x=-\left(\tan x+\cot x\right)=-f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

Nhận xét: $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x.$

Ta có $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\cos\left(-2x\right)=\cos 2x=f\left(x\right).$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D.$

+ Nhận xét: $\begin{cases}\sin^{2020n}\left(-x\right)=\left(-\sin x\right)^{2020n}=\sin^{2020n}x, \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\left\{0\right\}\\ \cos\left(-x\right)=\cos x\end{cases}$

Do đó $\forall x\in D: f\left(-x\right)=\dfrac{\sin^{2020n}\left(-x\right)+2020}{\cos\left(-x\right)}=\dfrac{\sin^{2020n}x+2020}{\cos x}=f\left(x\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\left\{0\right\}.$

+ Với $n=0$ thì $\sin^{2020n}x=1$. Do đó $\forall x\in D: f(-x)=\dfrac{2021}{\cos(-x)}=\dfrac{2021}{\cos x}=f(x)$

$\Rightarrow$ Hàm số là hàm số chẵn với $n=0$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Dạng 4. GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

Một số chú ý về GTLN – GTNN của hàm số lượng giác

+ $\begin{array}{lll} -1\le\sin x\le 1 & -1\le\cos x\le 1 & 0\le\sin^2 x\le 1 \\ -1\le -\sin x\le 1 & -1\le -\cos x\le 1 & 0\le\cos^2 x\le 1 \end{array}$

+ Hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$.

+ Hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

Ví dụ 1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y=4\sin x\cos x+1$ b. $y=4-3\sin^2 2x$

Lời giải:

a. Ta có $y=2\sin 2x+1$.

Do $-1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin 2x\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin 2x+1\le 3$

$\Rightarrow -1\le y\le 3$.

* $y=-1\Leftrightarrow\sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

* $y=3\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

b. Ta có: $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 4-3\sin^2 x\le 4$

* $y=1\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

* $y=4\Leftrightarrow\sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 2 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$.

Lời giải:

$y=f\left(x\right)=4\sqrt{\sin x+3}$.

Có $-1\le \sin x\le 1$

$\Leftrightarrow 2\le \sin x+3\le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\le \sqrt{\sin x+3}\le 2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-1\le 4\sqrt{\sin x+3}-1\le 7$.

Có $4\sqrt{\sin x+3}-1=4\sqrt{2}-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $4\sqrt{\sin x+3}-1=7\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(x\right)=4\sqrt{2}-1$, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(x\right)=7$.

Dạng 5. Phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1 Giải các phương trình lượng giác sau:

a. $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos\left(2x+50^\circ\right)=\frac{1}{2}$.

c. $\tan^2 x=1$.

d. $\tan 4x\cdot\cot 2x=1$.

Lời giải:

a. $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{\pi}{3}+k2\pi;\frac{4\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b. $\cos\left(2x+50^\circ\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(2x+50^\circ)=\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+50^\circ=60^\circ+k360^\circ \\ 2x+50^\circ=-60^\circ+k360^\circ \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5^\circ+k180^\circ \\ x=-55^\circ+k180^\circ \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{5^\circ+k180^\circ;-55^\circ+k180^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

c. $\tan^2 x=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \tan x=1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \tan x=\tan\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x\neq k\pi \end{cases},(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x\neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

Ta có $\tan 4x\cdot\cot 2x=1$

$\Leftrightarrow \tan 4x=\dfrac{1}{\cot 2x}$

$\Leftrightarrow 4x=2x+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})\ (loai)$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải phương trình lượng giác: $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ với $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải:

Ta có $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vì $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}<k<\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow -\frac{7}{6}<k<\frac{2}{3}.$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}\\x=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right\}$.

Chương II: Dãy số. Cấp số cộng – Cấp số nhân

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Dãy số

1. Định nghĩa dãy số

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...,$ trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Dãy số tăng và dãy số giảm

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dãy số bị chặn

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_m \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \le u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II. Cấp số cộng

+ **Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số không đổi d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

+ Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \ge 2.$

+ Tính chất của cấp số cộng với 3 số hạng liên tiếp: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \ge 2.$

+ Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

III. Cấp số nhân

+ **Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nhân với một số không đổi q.

Số không đổi q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Đặc biệt:

Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Khi $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

+ Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 q^{n-1}, \forall n \geq 2$.

+ Tính chất của cấp số nhân với 3 số hạng liên tiếp: $u^2{}_k = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$.

+ Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $S_n = \frac{n(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Số hạng của dãy số

Phương pháp giải:

Thay giá trị của n bằng các giá trị $1,2,3,...$ để tính giá trị của các số hạng thứ n của dãy số đã cho.

Ví dụ 1 Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = \sin^2\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{2n\pi}{3}$. Tìm bốn số hạng đầu của dãy số đó.

Lời giải:

Thay $n = 1,2,3,4$ vào số hạng tổng quát của dãy số (y_n), ta được:

$$\begin{cases} y_1 = \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0 \\ y_2 = \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ y_3 = \sin^2\frac{3\pi}{4} + \cos 2\pi = \frac{3}{2} \\ y_4 = \sin^2\frac{4\pi}{4} + \cos\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2 Cho dãy số (a_n) có $a_n = -n^2 + 4n + 11, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

Lời giải:

Ta có $a_n = -(n-2)^2 + 15 \le 15, \forall n \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Dạng 2. Dãy số tăng – giảm, dãy số bị chặn

Phương pháp giải:

Dãy số tăng, giảm

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1) Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2) Nếu $u_n > 0, \forall n \geq 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

Dãy số bị chặn

(1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

(2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

Ví dụ 1 Xác định sự tăng giảm của các dãy số sau đây : (nếu có)

a. Dãy (a_n), với $a_n = (-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Dãy (b_n), với $b_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a. Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.

b. Với dãy (b_n), ta có $b_n = 5^n + 1$ (do $(-1)^{2n} = 1$). Vì $b_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5.5^n + 1 > b_n, \forall n \geq 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.

c. Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n+2}} < \dfrac{1}{n+\sqrt{n+1}} = c_n, \forall n \geq 1$.

d. Dãy số (d_n) là một dãy số giảm vì $d_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2} < \dfrac{n}{n^2+1} = d_n, \forall n \geq 1$.

Ví dụ 2 Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau. (nếu có)

a. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^2+16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Dãy (y_n), với $y_n = -(n^2+6n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Dãy (w_n), với $w_n = (-2017)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a. Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $a_n = \sqrt{n^2+16} \geq \sqrt{17}, \forall n \geq 1$.

b. Dãy số (y_n) là dãy số giảm và bị chặn trên, y_n nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

c. Dãy số (w_n) là dãy đan dấu (dãy số không tăng, không giảm) và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

d. Dãy số (d_n) là dãy số bị chặn vì $0 < d_n \leq \dfrac{1}{4}, \forall n \geq 1$. $\left(do\ 0 < \dfrac{n}{n^2+4} \leq \dfrac{n}{4n} = \dfrac{1}{4}\right)$.

Dạng 3. Xác định cấp số cộng và các yếu tố của cấp số cộng

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức về số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng để giải quyết bài toán.

Ví dụ 1 Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải:

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1+4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$S_4 = 14 \Leftrightarrow \dfrac{4(2u_1+3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Ví dụ 2 Cho cấp số cộng (x_n) có $x_3 + x_{13} = 80$. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải:

Ta có $x_3 + x_{13} = 80$

$\Leftrightarrow (x_1 + 2d) + (x_{15} - 2d) = 80$

$\Leftrightarrow x_1 + x_{15} = 80$

$\Rightarrow S_{15} = \dfrac{15(x_1 + x_{15})}{2} = 600.$

Dạng 4. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số cộng

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của cấp số cộng: Nếu a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

Ví dụ 1 Cho cấp số cộng $6, x, -2, y$. Tính giá trị của x và y.

Lời giải:

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $\begin{cases} 2x = 6 + (-2) \\ 2.(-2) = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$.

Ví dụ 2 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Lời giải:

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng.

Theo định lý Vi-et đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$.

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Suy ra $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$.

Thay $x_2 = m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3 - 3m.m^2 + 2m(m-4).m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

+ Với $m = 0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m = 1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = -2;\ x = 4$.

Ba nghiệm $-2; 1; 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 5. Xác định cấp số nhân và các yếu tố của cấp số nhân

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức về số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân để giải quyết bài toán.

Ví dụ 1 Cho cấp số nhân (x_n) có $x_3 = 18$ và $x_7 = 1458$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

Lời giải:

Gọi q là công bội của cấp số nhân (x_n).

Ta có $\begin{cases} x_3 = 18 \\ x_7 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^6 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^2q^4 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q = \pm 3 \end{cases}$

+ Với $x_1 = 2$ và $q = 3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1}$.

+ Với $x_1 = 2$ và $q = -3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.(-3)^{n-1}$.

Ví dụ 2 Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính tổng của 21 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n).

Lời giải:

Ta có $u_4 + u_6 = -540 \Leftrightarrow (u_3 + u_5)q = -540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q = -3$.

Lại có $u_3 + u_5 = 180 \Leftrightarrow u_1(q^2 + q^4) = 180$.

Vì $q = -3$ nên $u_1 = 2$.

Suy ra $S_{21} = \dfrac{u_1(1 - q^{21})}{1 - q} = \dfrac{1}{2}(3^{21} + 1)$.

Dạng 6. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số nhân

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của cấp số nhân: Nếu a,b,c lập thành một cấp số nhân thì $ac=b^2$.

Ví dụ 1 Cho cấp số nhân $x,12,y,192$. Tính giá trị của x và y.

Lời giải:

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$y^2=12.192=2304 \Rightarrow y=\pm 48.$

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$xy=12^2=144.$

Với $y=48$ thì $x=3$; với $y=-48$ thì $x=-3$.

Ví dụ 2 Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải:

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q},q,aq.$

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V=\frac{a}{q}.a.qa=a^3=125\Rightarrow a=5.$

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp}=2\left(\frac{a}{q}.a+a.aq+aq.\frac{a}{q}\right)=2a^2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=50\left(1+q+\frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=175\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $q=2$ hoặc $q=\frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm;5cm;10cm.$

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5+5+10=17,5$ cm.

Dạng 7. Bài toán thực tế

Phương pháp giải:

Ví dụ 1 Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n, trong đó $1 \le n \le 20$.

Theo giả thiết, ta có $u_1 = 100000$ và $u_{n+1} = u_n = 30000$ với $1 \le n \le 19$.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100000$ và công sai $d = 30000$.

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng chính là tổng các số hạng của cấp số cộng d. Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là

$$S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{20[2u_1 + (20-1)d]}{2} = 7700000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 2 Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \ge 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1 + r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$.

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Chương III: Giới hạn. Hàm số liên tục

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Giới hạn dãy số

1. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

d) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

e) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Tổng của cấp số nhận lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$.

Các định lí về giới hạn

a) Nếu $\lim u_n = a; \lim v_n = b$. Khi đó:

$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$.

$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = a - b$

$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.

b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

c) $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$ $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$.

Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a; \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$; $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty; \lim v_n = b > 0$ $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

II. Giới hạn hàm số

1. Các giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c: hằng số)

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = +\infty$ với k chẵn; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = -\infty$ với k lẻ

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$

2. Định lí

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì L ≥ 0 và $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

c) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$.

d) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

e) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ khi $L\cdot g(x)>0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ khi $L\cdot g(x)<0$.

Chú ý: Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

3. Giới hạn một bên

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

III. Hàm số liên tục

+ Hàm số liên tục tại một điểm: $y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

+ Hàm số liên tục trên một khoảng: $y=f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

+ Hàm số liên tục trên một đoạn $[a;b]$: $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Chú ý:

- Hàm số đa thức liên tục trên R.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Giả sử $y=f(x), y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

  + Các hàm số $y=f(x)+g(x); y=f(x)-g(x); y=f(x)\cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

  + Hàm số y = $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

+ Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$: $f(c)=0$.

Nói cách khác: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $c\in(a;b)$.

Mở rộng: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Đặt $m=\min\limits_{[a;b]} f(x); M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi $T\in(m;M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b): f(c)=T$.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính giới hạn dãy số

Dạng phân thức hữu tỉ: Khi $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các là các đa thức của n)

Phương pháp giải: Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ cao nhất của $P(n)$ và $Q(n)$, sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn (u_n) là đa thức bậc k, ta đặt n^k làm nhân tử chung, sau đó sử dụng định lí 2 về giới hạn.

Dạng chứa căn thức

Phương pháp giải:

+ Hướng 1: Đánh giá bậc của tử và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫu cho n^k với k là số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử). Áp dụng các định lí về giới hạn để tìm giới hạn.

+ Hướng 2: Nhân với biểu thức liên hợp.

Dạng chứa lũy thừa: Khi $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ $a^n, b^n, c^n ...$

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số lớn nhất.

Ví dụ 1 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(-2n^3 + 3n - 1)$.

b) $\lim \dfrac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}$.

c) $\lim \dfrac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

d) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{4n+1}\right)$.

e) $\lim \dfrac{1-3^{n+1}}{1+3^n}$.

f) $\lim \dfrac{9^n - 3.4^n}{6.7^n + 8^n}$.

Lời giải:

a) $\lim(-2n^3+3n-1)=\lim n^3(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3})=-\infty$.

b) Chia cả tử và mẫu cho n^7 ta có:

$$\lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}=\lim\frac{\frac{2n-1}{n}.\frac{(3n^2+2)^3}{n^6}}{\frac{1}{n^2}.\frac{-2n^5+4n^3-1}{n^5}}$$

$$=\lim\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{\frac{1}{n^2}\left(-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}\right)}=\lim\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{\left(-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}\right)}=-\infty$$

Vì $\lim n^2=+\infty$ nên $\lim\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}=-27$.

c) $\lim\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim\frac{\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=\lim\left(\sqrt{2+\frac{2}{n}}-1\right)=\sqrt{2}-1$.

d) $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=\lim n^2\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$

Vì $\lim n^2=+\infty$

và $\lim\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1>0$.

e) $\lim\frac{1-3^{n+1}}{1+3^n}=\lim\frac{1-3.3^n}{1+3^n}=\lim\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-3}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}=-3$.

f) $\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}=\lim\frac{\left[1-3.\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{\left[6.\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]}=+\infty.$

Vì $\lim\left[1-3.\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=1>0;\ \lim\left[6.\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]=0;\ \lim 6.\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n>0.$

Ví dụ 2 Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $u_n = \frac{1}{4^n}$.

Lời giải:

Ta có: u_n là cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{4}; q_1 = \frac{1}{4}$

Nên tổng các số hạng của dãy số là $S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^n} = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Dạng 2. Tính giới hạn hàm số cơ bản

Phương pháp giải:

Áp dụng các định nghĩa và định lý về giới hạn hàm số để tính các giới hạn của hàm số.

Ví dụ 1 Tính các giới hạn sau:

a) $A = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2}$.

b) $B = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\tan x + 1}{\sin x + 1}$.

Lời giải:

a) $A = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)}{2(x^2 - x + 1)} = 0.$

b) $B = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\tan x + 1}{\sin x + 1} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\tan\frac{\pi}{6} + 1}{\sin\frac{\pi}{6} + 1} = \frac{4\sqrt{3} + 6}{9}$.

Ví dụ 2 Tính các giới hạn sau:

a) $K = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$.

b) $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 + x^2 + 2\right)$.

Lời giải:

a) $K = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -2$.

b) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3\right).\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)\right]$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=-1$.

Vậy $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)=-\infty$.

Dạng 3. Tính giới hạn hàm số có chứa dạng vô định

Phương pháp giải:

Ta có thể sử dụng linh hoạt: phân tích thành phân tử và rút gọn; nhân liên hợp; chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất; … để giải quyết dạng vô định.

Ví dụ 1 Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$.

Lời giải:

$$A=\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$$

$$A=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-2x-2\right)}{(x-1)(x-3)}$$

$$A=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}$$

$$A=\frac{1^2-2\cdot1-2}{1-3}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2 Tính giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-|x|\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{1}}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}.$$

Ví dụ 3 Tính giới hạn $C=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$.

Lời giải:

$$C=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4 Tính giới hạn $D=\lim_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^3-1}}$.

Lời giải:

$$D=\lim_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^3-1}}$$

$$D=\lim_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{\frac{(1-2x)^2(3x-11)}{x^3-1}}\right]$$

$$D=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)^2\left(3-\frac{11}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^3}}}$$

$$D=-\sqrt{\frac{2^2\cdot 3}{1}}=-2\sqrt{3}.$$

Dạng 4. Xét tính liên tục của hàm số

Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để xét sự liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm tại x_0 ta thực hiện các bước :

+ Bước 1 : Tính $f(x_0)$

+ Bước 2 : Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp để tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ta cần tính $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

+ Bước 3 : So sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ và $f(x_0)$ rồi rút ra kết luận.

Chú ý: *hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại x_0*

Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn

Phương pháp giải:

+ Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.

+ Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.

+ Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào.

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - 7x + 5x^2 - x^3}{x^2 - 3x + 2} & khi\ x \neq 2 \\ 1 & khi\ x = 2 \end{cases}$ (tại $x = 2$).

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & khi\ x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & khi\ x \leq 5 \end{cases}$ (tại $x = 5$).

Lời giải:

a) Ta có: $f(2) = 1$

Mà $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-1}{(x-1)}=1=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$

b) Ta có: $f(5)=(5-5)^2+3=3$.

+ Lại có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left[(x-5)^2+3\right]=3$

+ Và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=3$

Từ đó $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=5$.

Ví dụ 2 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ -4 & khi\ x=-2\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2}\end{cases}$.

Lời giải:

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq -2$ (1)

+ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4.$

+ $f(-2)=-4\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=-2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq \sqrt{2}$ (1)

+ $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

+ $f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Dạng 5. Nghiệm của phương trình trên khoảng, đoạn

Phương pháp giải:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng: $f(x)=0$

Bước 2: Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b)<0$ (Dùng chức năng TABLE của máy tính (Mode 7) tìm cho nhanh)

Bước 3: Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ từ đó suy ra $f(x)=0$ có nghiệm

🕮 ***Chú ý:***

+ Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a;b]$

+ Để chứng minh $f(x)=0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a;b]$, ta chia đoạn $[a;b]$ thành n

Ví dụ Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$. b) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$.

Lời giải:

a) Dễ thấy hàm $f(x)=x^3-3x+1$ liên tục trên R. Ta có:

+ $\begin{cases} f(-2)=-1 \\ f(-1)=3 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(-1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_1\in(-2;-1): f(a_1)=0(1)$.

+ $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_2\in(0;1): f(a_2)=0(2)$.

+ $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_3\in(1;2): f(a_3)=0(3)$.

Do ba khoảng $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên $x^3-3x+1=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

b) Đặt $\sqrt[3]{1-x}=t \Leftrightarrow x=1-t^3 \Rightarrow 2t^3-6t+1=0$.

+ Xét hàm số $f(t)=2t^3-6t+1$ liên tục trên R.

+ Ta có: $\begin{cases} f(-2).f(-1) = -3.5 < 0 \\ f(0).f(1) = 1.(-3) < 0 \\ f(1).f(2) = -3.5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại 3 số t_1, t_2 và t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng đôi một không giao nhau là $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ sao cho $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 0$ và do đây là phương trình bậc 3 nên $f(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

+ Ứng với mỗi giá trị t_1, t_2 và t_3 ta tìm được duy nhất một giá trị x thỏa mãn $x = 1 - t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

HOCMAI

Chương IV: Quan hệ song song trong không gian

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1. Các tính chất thừa nhận

Có 6 tính chất thừa nhận:

+ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

+ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

+ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

+ Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa. Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

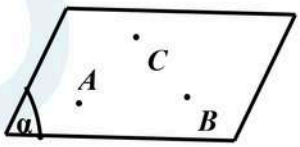
+ Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Cách xác định mặt phẳng

Có 3 cách xác định một mặt phẳng:

+ Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

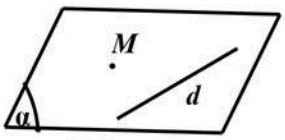
(ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (h1)



(h1)

+ Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.

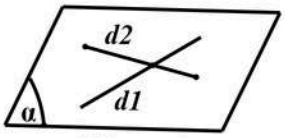
(M, d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)



(h2)

+ Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

(d_1, d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h3)



(h3)

II. Hai đường thẳng song song

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có các trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa cả a và b, khi đó theo kết quả tronh hình học phẳng ta có ba khả năng sau:

+ a và b cắt nhau tại điểm M, ta kí hiệu $a \cap b = M$.

+ a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a // b$.

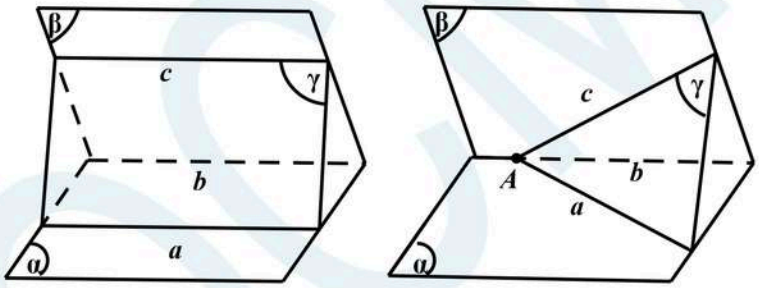
+ a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, khi đó ta nói a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

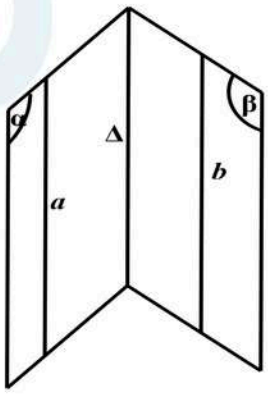
2. Các định lí và tính chất

+ Trong không gian, qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng a có một và chỉ một đường thẳng song song với a.

+ Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.



+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



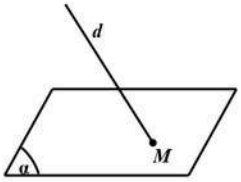
+ Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song.

III. Đường thẳng và mặt phẳng song song

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

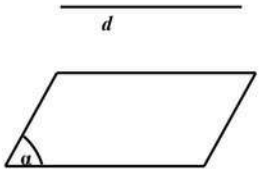
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta có ba vị trí tương đối giữa chúng là:

+ d và (α) cắt nhau tại điểm M, kí hiêu $\{M\} = d \cap (\alpha)$ hoặc để đơn giản ta kí hiệu $M = d \cap (\alpha)$ (h1)



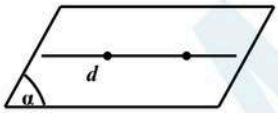
h1

+ d song song với (α), kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \,//\, d$ (h2)



h2

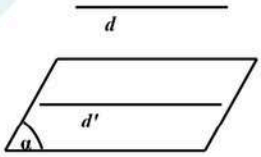
+ d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$ (h3)



h3

2. Các định lí và tính chất

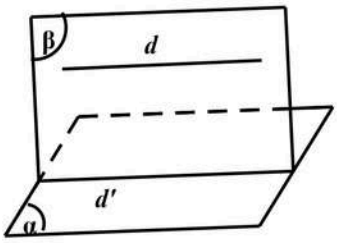
+ Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằn trong (α) thì d song song với (α).



h3

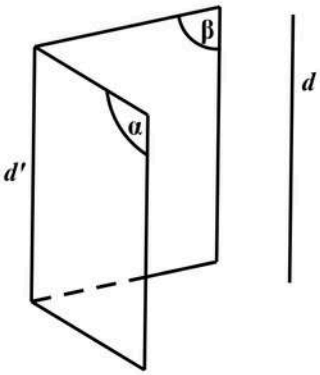
Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$

+ Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' \,//\, d$.



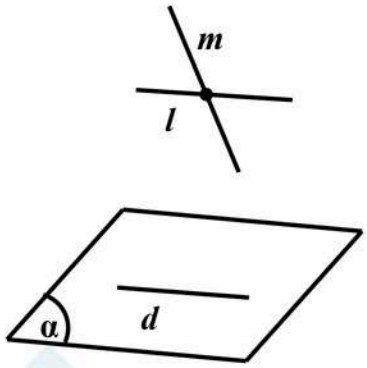
Vậy $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \,//\, d$.

+ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Vậy $\begin{cases} (\alpha) \,//\, d \\ (\beta) \,//\, d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \,//\, d$.

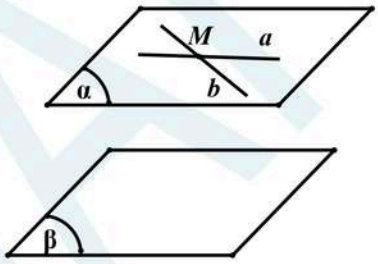
+ Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



IV. Hai mặt phẳng song song

1. Định lý và tính chất

+ Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha)\,//\,(\beta)$.



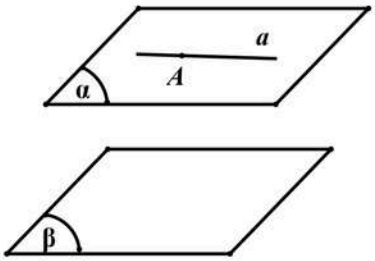
Vậy $\begin{cases} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b = M \\ a\,//\,(\beta), b\,//\,(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\,//\,(\beta).$

+ Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1: Nếu $d\,//\,(\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.

Hệ quả 3: Cho điểm không nằm trên mặt phẳng (α).Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằn trong mặt phẳng qua A song song với (α).



Vậy $\begin{cases} A\notin(\alpha), A\in(\beta) \\ A\in d \\ d\,//\,(\alpha) \\ (\beta)\,//\,(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d\subset(\beta).$

+ Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

Vậy $\begin{cases} (\alpha)\,//\,(\beta) \\ (\delta)\cap(\alpha) = a \end{cases} \Rightarrow (\delta)\cap(\beta) = b\,//\,a.$

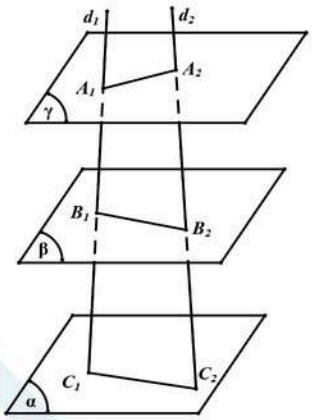
Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

2. Định lí Ta-lét (Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (\alpha)\,//\,(\beta)\,//\,(\chi) \\ d_1\cap(\alpha) = A_1, d_1\cap(\beta) = B_1, d_1\cap(\chi) = C_1 \\ d_2\cap(\alpha) = A_2, d_2\cap(\beta) = B_2, d_2\cap(\chi) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

Định lí Ta-lét (Thales) đảo



Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phăng.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

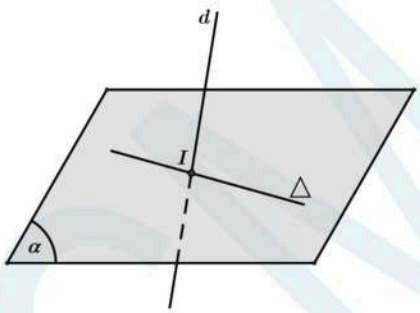
Dạng 1. Tìm giao điểm của đường thẳng – mặt phẳng

Phương pháp giải:

Cơ sở của phương pháp tìm giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là xét hai khả năng xảy ra:

- Trường hợp 1: (α) chứa đường thẳng Δ và Δ cắt đường thẳng d tại I.

Khi đó: $I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

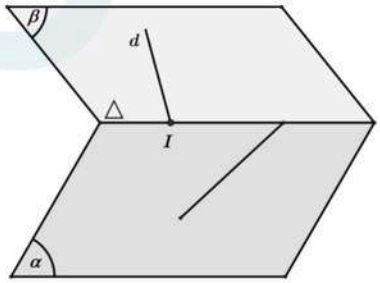


- Trường hợp 2: (α) không chứa đường thẳng nào cắt d.

+ Tìm $(\beta) \supset d$ và $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$;

+ Tìm $I = d \cap \Delta$;

$\Rightarrow I = d \cap (\alpha)$.

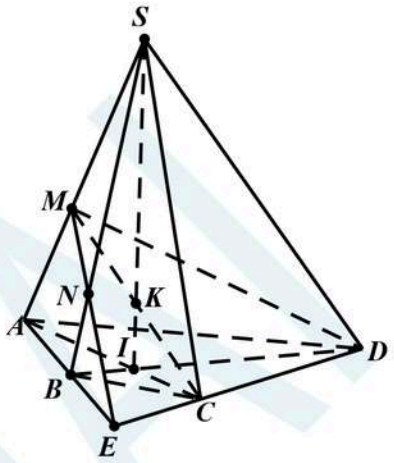


Ví dụ 1 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

Lời giải:



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong (SAB) gọi $N = SB \cap EM$.

Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và $N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.

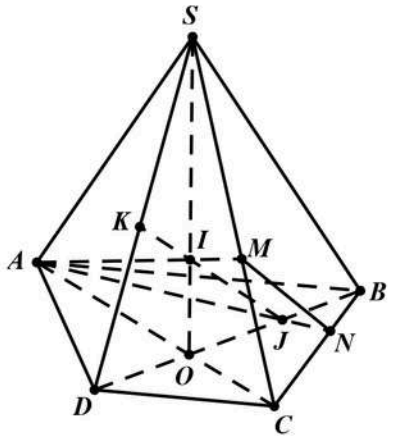
b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên $K = MC \cap (SBD)$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Lời giải:



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$

$\Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$.

Vậy $K = SD \cap (AMN)$

Phương pháp giải:

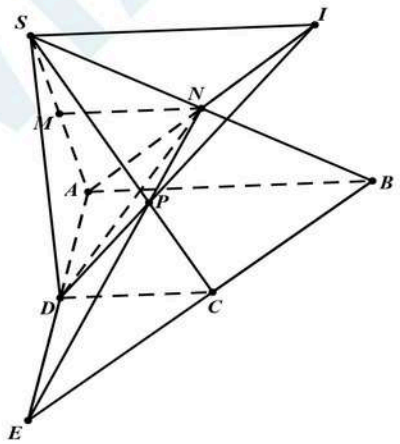
Áp dụng các tính chất và định lý, hệ quả để chứng minh các mối quan hệ song song giữa các đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Lời giải:



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

Lại có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AB \parallel CD$.

Vậy $\begin{cases} MN \parallel AB \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$, trong (SCD) gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset (ADN) \Rightarrow EN \subset (AND) \Rightarrow P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \parallel CD$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$.

a) Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.

b) Chứng minh $MG \parallel (SCD)$.

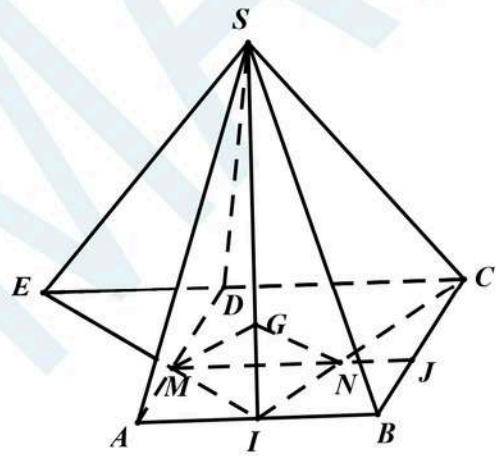
Lời giải:

a) Ta có $\frac{IN}{IC} = \frac{BJ}{BC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}, \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow NG \parallel SC$,

mà $SC \subset (SCD)$

$\Rightarrow NG \parallel (SCD)$.



b) Gọi E là giao điểm của IM và CD

Ta có $\frac{IM}{IE} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{IG}{IS}$

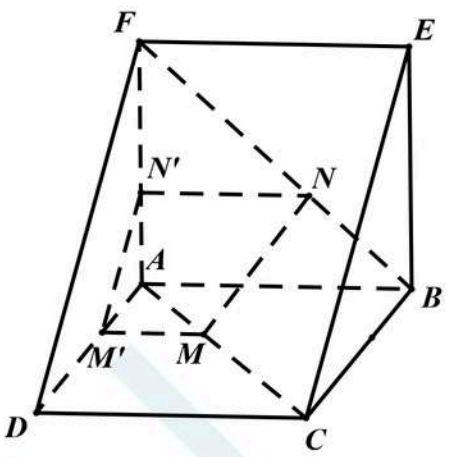
$\Rightarrow MG \parallel SE$, $SE \subset (SCD) \Rightarrow GM \parallel (SCD)$.

Ví dụ 3 Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải:



a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$

$\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Dạng 3. Giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải:

Cơ sở của phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) cần thực hiện:

- Bước 1: Tìm hai điểm chung A và B của (α) và (β).

- Bước 2: Đường thẳng AB là giao tuyến cần tìm ($AB = (\alpha) \cap (\beta)$).

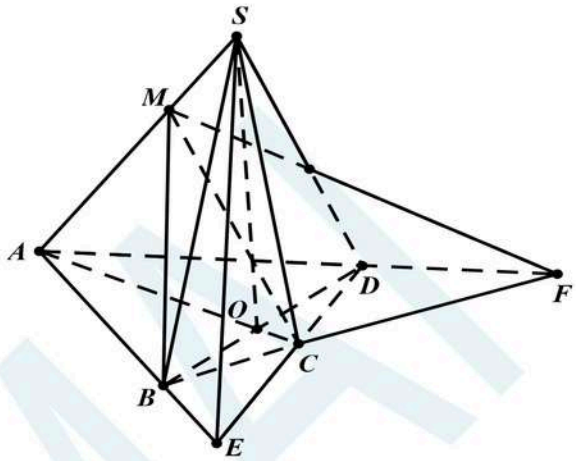
Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải:

a) Gọi $O = AC \cap BD$



$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

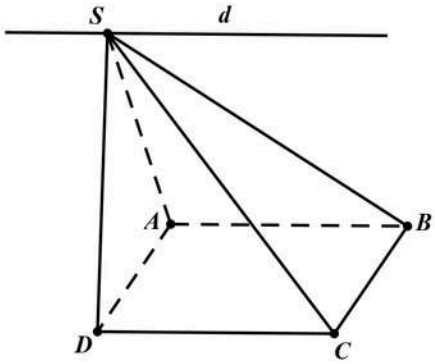
Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Lời giải:

Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \,//\, AB \,//\, CD, S \in d$.

Dạng 4. Bài toán tìm thiết diện (thiết diện là hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng với khối đa diện)

Phương pháp giải:

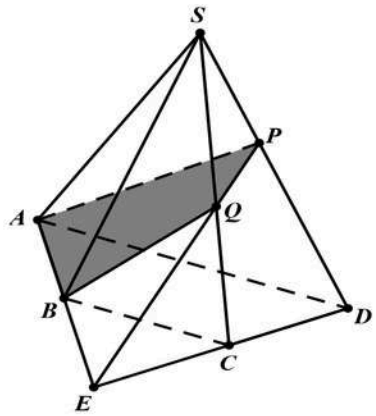
Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp).

Ví dụ 1 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

Lời giải:



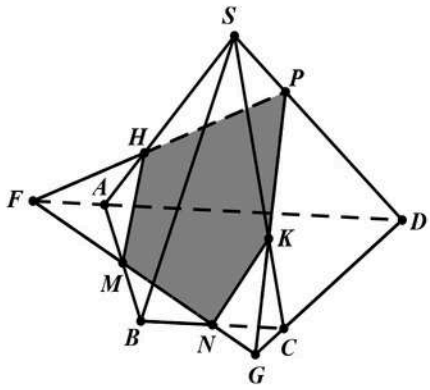
a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F, G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD



Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP)$,

$\Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

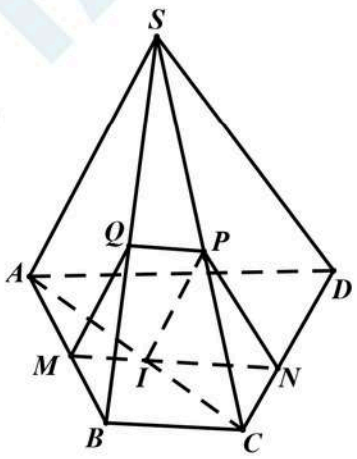
a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MQ \,//\, SA, Q \in SB$.



Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap MN$

$\begin{cases} I \in MN \subset (\alpha) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SAC)$

Vậy $\begin{cases} I \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = IP \,//\, SA, P \in SC$

Từ đó ta có $(\alpha) \cap (SBC) = PQ, (\alpha) \cap (SAD) = NP$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang khi $MN \,//\, PQ$ hoặc $MQ \,//\, NP$.

Trường hợp 1:

Nếu $MQ \,//\, NP$ thì ta có $\begin{cases} MQ \,//\, NP \\ MQ \,//\, SA \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, NP$

Mà $NP \subset (SCD) \Rightarrow SA \,//\, (SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2:

Nếu $MN \,//\, PQ$ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD),(\alpha),(SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, BC, PQ nên $MN \,//\, BC$.

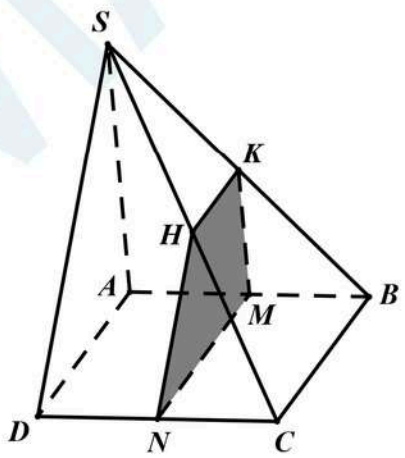
Đảo lại nếu $MN \,//\, BC$ thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, PQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ là hình thang thì điều kiện là $MN \,//\, BC$.

Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

Lời giải:



Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \,//\, SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \,//\, SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \,//\, BC \Rightarrow MN \,//\, HK$.

Vậy thiết diện là một hình thang .

Dạng 5. Bài toán có chứa yếu tố tính toán

Phương pháp giải:

Với các bài toán có chứa yếu tố tính toán thường là các bài toán xác định thiết diện, sau đó tính diện tích hoặc chu vi thiết diện (có thể tìm GTLN – GTNN của diện tích, chu vi thiết diện, điều kiện để thiết diện là một đa giác đặc biệt,…). Chính vì thế ta cần xác định đúng thiết diện của hình chóp và mặt phẳng cắt, sau đó áp dụng các phương pháp tính toán để hoàn thành yêu cầu bài toán.

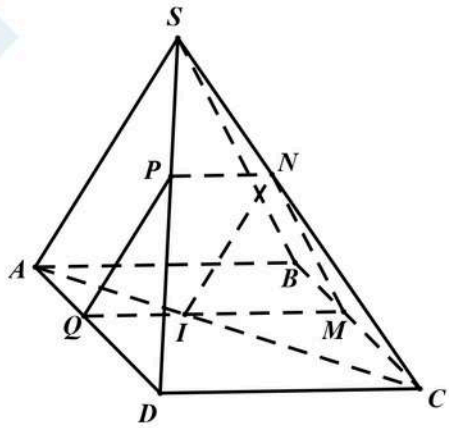
Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x\ (0 < x < a)$, (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) \,//\, SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases}$



$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MN \,//\, SB, N \in SC$

Tương tự $\begin{cases} N \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = NI \,//\, SA, I \in AC$

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MI \cap AD$, thì ta có

$$\begin{cases} Q \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = QP \,//\, SA, P \in SD.$$

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Do $MN \,//\, SB \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)

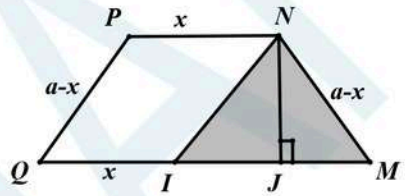
Lại có $IN // SA \Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CN}{CS}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CM}{CB} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow IM // AB$

Mà $AB // CD \Rightarrow IM // CD$.

Ba mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$ và (SCD) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MQ, CD, NP với $MQ // CD \Rightarrow MQ // NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $\frac{MN}{SB} = \frac{CM}{CB} = \frac{DQ}{DA} = \frac{PQ}{SA}$, mà $SA = SB = a \Rightarrow MN = PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.



Từ $\frac{MN}{SA} = \frac{CM}{CB} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = a - x$,

$\frac{PN}{DC} = \frac{SN}{SC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow PN = BM = x$,

$\frac{IM}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow IM = CM = a - x$

Gọi J là trung điểm của IM thì

$$NJ = \sqrt{MN^2 - MJ^2} = \sqrt{(a-x)^2 - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}NJ(MQ + NP) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(a+x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$$

Ví dụ 2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh $AB, CC', C'D', AA'$ lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x$, $(0 \le x \le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

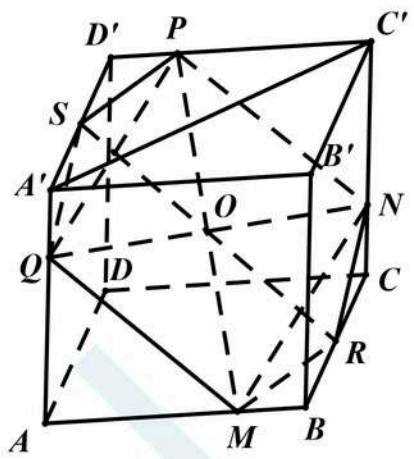
c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Lời giải:

a) Dễ thấy $PN // CD'$ và $QM // A'B$ mà $A'B // C'D$ nên $PN // QM$ hay M, N, P, Q đồng phẳng.

b) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.

$\Rightarrow O \in (MNPQ)$.



Mặt khác $A'B \,//\, MQ \subset (MNPQ)$

$\Rightarrow A'B \,//\, (MNPQ)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$(MNPQ) \,//\, (A'BC') \Rightarrow BC' \,//\, (MNPQ) \Rightarrow BC' \,//\, NR$

$\Leftrightarrow \dfrac{BR}{BC} = \dfrac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Đảo lại $x = \dfrac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ) \,//\, (A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là: $2p = 2(RM + MQ + QS)$.

Ta có $MR = QS = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}$, $QM = x\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0;a]$.

Theo CauChy-Schwarz

$\sqrt{\left(a^2 + 4(a-x)^2\right)\left(1^2 + 1^2\right)} \ge a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$

Nên $f(x) \ge x\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{a}{2}$

Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \le \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \le 0$ đúng $\forall x \in [0;a]$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = a$.

Vậy $\max(2p) = 2a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

HOCMAI

Chương V: Thống kê

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Mẫu số liệu ghép nhóm

+ Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Chú ý:

+ Bảng trên gồm k nhóm $[u_j;u_{j+1})$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

+ Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$.

+ Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy.

Ví dụ: nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

+ Hiệu số $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j;u_{j+1})$.

II. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như bảng dưới đây:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

1. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\overline{u} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n}$.

Trong đó, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ là cỡ mẫu và $x_j = \dfrac{u_j + u_{j+1}}{2}$ là giá trị đại diện của nhóm $\left[u_j; u_{j+1}\right)$ (với $j = 1, 2, ..., k$)

2. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $\left[u_m; u_{m+1}\right)$, khi đó một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_o, được xác định bởi công thức: $M_o = u_m + \dfrac{n_m - n_{m-1}}{\left(n_m - n_{m-1}\right) + \left(n_m - n_{m+1}\right)}\left(u_{m+1} - u_m\right)$.

Trong đó:

+ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị.

+ n_{m-1} là tần số của nhóm liền trước nhóm chứa trung vị.

+ n_{m+1} là tần số của nhóm liền sau nhóm chứa trung vị.

3. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Giả sử nhóm chứa trung vị là $\left[u_m; u_{m+1}\right)$, khi đó trung vị kí hiệu là M_e được xác định bởi công thức:

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot \left(u_{m+1} - u_m\right).$$

Trong đó:

+ n là cỡ mẫu.

+ $C = n_1 + n_2 + ... + n_{m-1}$.

+ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị.

4. Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

❖ Giả sử nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $\left[u_m; u_{m+1}\right)$, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, được xác định bởi công thức: $Q_1 = u_m + \dfrac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot \left(u_{m+1} - u_m\right)$.

Trong đó:

+ n là cỡ mẫu.

+ $C = n_1 + n_2 + ... + n_{m-1}$.

+ n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất.

❖ Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

❖ Giả sử nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $\left[u_j; u_{j+1}\right)$, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, được xác định bởi công thức: $Q_3 = u_j + \dfrac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot \left(u_{j+1} - u_j\right)$.

Trong đó:

+ n là cỡ mẫu.

+ $C = n_1 + n_2 + ... + n_{j-1}$.

+ n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba.

B MỘT SỐ DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Số trung bình – Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức tính số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm để xử lí bài toán.

Ví dụ 1 Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Lời giải:

a) Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Cân nặng đại diện(g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A xấp xỉ bằng:

$$\frac{2\cdot 152,5+6\cdot 157,5+12\cdot 162,5+4\cdot 167,5+1\cdot 172,5}{25}\approx 161,7(g)$$

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng B xấp xỉ bằng:

$$\frac{1\cdot 152,5+3\cdot 157,5+7\cdot 162,5+10\cdot 167,5+4\cdot 172,5}{25}\approx 165,1(g)$$

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A.

Ví dụ 2 Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m^2)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Lời giải:

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[18;22)$.

Do đó, $\begin{cases} u_m = 18; u_{m+1} = 22 \\ n_m = 120; n_{m-1} = 78; n_{m+1} = 45 \end{cases}$

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$M_o = 18 + \frac{120-78}{(120-78)+(120-45)} \cdot (22-18) = \frac{758}{39} \approx 19,4.$$

b) Dựa vào kết quả trên, ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá $19,4$ triệu đồng/m^2 thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất.

Dạng 2. Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm để giải bài toán.

Ví dụ Kết quả khảo sát cân nặng của 1 thùng táo ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số quả táo	4	7	12	6	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải:

Gọi $x_1;x_2;x_3;...;x_{31}$ là cân nặng của 31 quả bơ xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1;x_2;x_3;x_4 \in [150;155)$ và $x_5;x_6;...;x_{11} \in [155;160)$ nên trung vị của mẫu số liệu là $x_{16} \in [160;165)$.

Ta xác định được: $\begin{cases} n = 31 \\ n_m = 12 \\ C = 4+7 = 11 \\ u_m = 160; u_{m+1} = 165 \end{cases}$

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$M_e = 160 + \frac{\frac{31}{2} - 11}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

Dạng 3. Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm để giải bài toán.

Ví dụ Tiền lương nhận được trong 1 giờ làm việc của nhân viên công ty A được thống kê theo mẫu số liệu ghép nhóm sau (đơn vị: ngàn đồng)

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
[50; 60)	8
[60; 70)	10
[70; 80)	16
[80; 90)	14
[90; 100)	10
[100; 110)	5
[110; 120)	2

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải:

Gọi $x_1 \le x_2 \le ... \le x_{65}$ là tiền lương của 65 nhân viên nhận được trong 1 giờ.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; ...; x_{65}$ là $x_{33} \in [70;80)$. Do đó, tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_2 = 70 + \frac{\frac{65}{2} - (8+10)}{16}(80-70) = 79,0625.$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; ...; x_{65}$ là $x_{17} \in [60;70)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{1 \cdot 65}{4} - 8}{10} \cdot (70-60) = 68,25.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; ...; x_{65}$ là $x_{49} \in [90;100)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 90 + \frac{\frac{3 \cdot 65}{4} - (8+10+16+14)}{10} \cdot (100-90) = 90,75.$$

Nguồn : Hocmai

HOCMAI Top class

ĐIỂM DANH THÀNH TÍCH ẤN TƯỢNG CỦA HỌC VIÊN HOCMAI TOPCLASS

HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

PHẠM MINH THƯ

Lớp 6 - 40 Phạm Thế Hiển, Thừa Thiên Huế- Điểm TB: 9.03

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

Con cảm ơn thời gian qua thầy cô đã luôn đồng hành cùng con, dạy cho con những kiến thức thật bổ ích

Tin học	10	10	9.3	10	9.8	9.4
Khoa học tự nhiên	9	9 10 9	10	9.5	9.5	9.1
Giáo dục thể chất	Đ	Đ Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Nghệ thuật	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp	Đ	Đ Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Nội dung giáo	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ

HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

TRẦN NGỌC ĐỒNG

Lớp 7 - THCS Xã Mỹ Hà - Nam Định- Điểm TB: 8.5

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

Sau khi con theo học môn văn thầy cô hiệu quả nên con đã xin bố mẹ cho con theo học môn toán. Khi theo học các cô bên Trung tâm học mới con con có việc bận nên trung tâm điều cô khác dạy thay. Ban đầu con thấy rất buồn và cảm thấy cô trung vào để theo học cùng các cô, sau thời gian phấn đấu con đã tìm được sự đồng cảm giữa cô và trò và con theo học đến bây giờ. Điểm môn toán nâng cao các bạn trong lớp không giỏi được con đã con rất phấn khởi và tự tin thước lớp. Con tâm kiến thức cho con mà con không nghĩ mình có thể làm được. Phương pháp học của con: Hằng ngày bài và học thuộc hết mọi định nghĩa, định lý công thức. Sau khi thuộc lý thuyết con bảo mẹ in lại bài tập cho con để con làm bài ra vở

HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

NGUYỄN NHƯ MAI

Lớp 8 - Lớp 8A1, Trường TH&THCS Hữu nghị quốc tế, Quận Lê Chân, TP Hải Phòng

Điểm TB: 8.50

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

Phương pháp học dễ hiểu, trả lời chi tiết qua ứng dụng! Con cảm ơn thầy cô nhiều ạ!

HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

NGUYỄN QUỐC ANH THƯ

Lớp 9 - THCS Minh Thanh

Điểm TB: 8.7

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

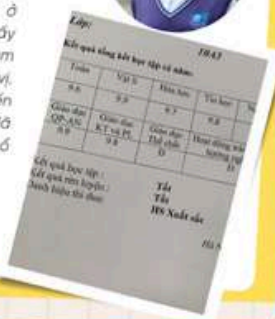
HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

NGUYỄN TÚ TÂM

Lớp 10 - THPT Nguyễn Tất Thành - Điểm TB: 9.7

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

Em không đi học thêm nên chủ yếu tự học và học qua các khóa học của hocmai. Em đã học ở hocmai từ năm lớp 7 và cảm thấy các thầy cô dạy đều rất tâm huyết, cuốn hút và đặc biệt thú vị. Em muốn gửi lời cảm ơn đến hocmai và các thầy cô giáo vì đã tạo ra những bài giảng hết sức bổ ích với những học sinh như em



HOCMAI Top class

BẢNG VÀNG THÀNH TÍCH

HỌC SINH HOCMAI NĂM HỌC 2023 - 2024

NGUYỄN TẠ TUẤN MINH

Lớp 11 - THPT MINH PHÚ - Điểm TB: 9.30

Danh hiệu: Giỏi / Hoàn thành xuất sắc

Xin cảm ơn các bài giảng của thầy cô HOCMAI Một trong những bí kíp học tập của em là "Đứng chia sẻ các bí kíp học tập còn lại cho người khác"