

Chuyên đề 8:

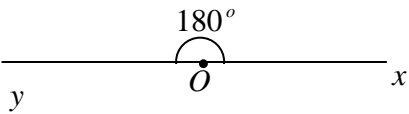
LƯỢNG GIÁC
TÓM TẮT GIÁO KHOA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Đơn vị đo góc và cung:

1. **Độ:**

$$\text{Góc } 1^0 = \frac{1}{180} \text{ góc bẹt}$$



2. **Radian: (rad)**

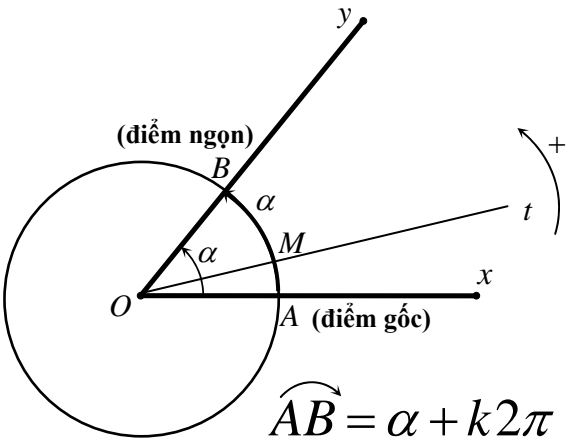
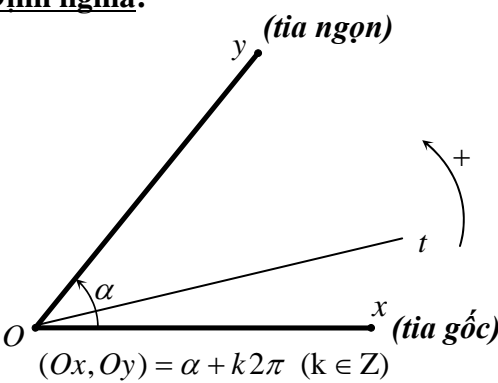
$$180^0 = \pi \text{ rad}$$

3. Bảng đổi độ sang rad và ngược lại của một số góc (cung) thông dụng:

Độ	0 ⁰	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰	360 ⁰
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

II. Góc lượng giác & cung lượng giác:

1. **Định nghĩa:**



2. **Đường tròn lượng giác:**

Số đo của một số cung lượng giác đặc biệt:

- A

→

2kπ
- B

→

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- C

→

$\pi + 2k\pi$
- D

→

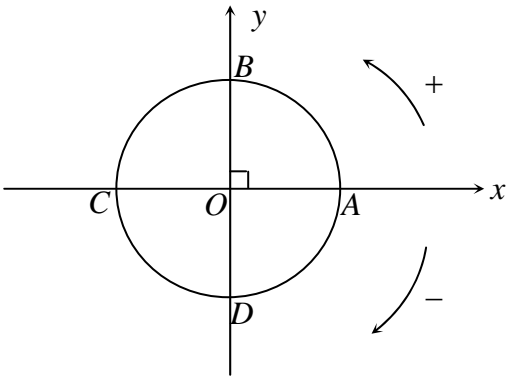
$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- A,C

→

kπ
- B,D

→

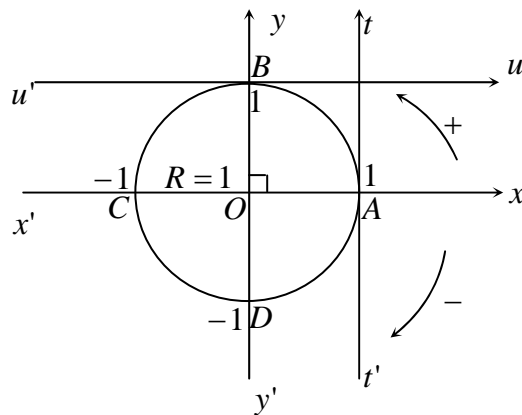
$\frac{\pi}{2} + k\pi$



III. Định nghĩa hàm số lượng giác:

1. Đường tròn lượng giác:

- A: điểm gốc
- $x'Ox$: trục cosin (trục hoành)
- $y'Oy$: trục sin (trục tung)
- $t'At$: trục tang
- $u'Bu$: trục cotang



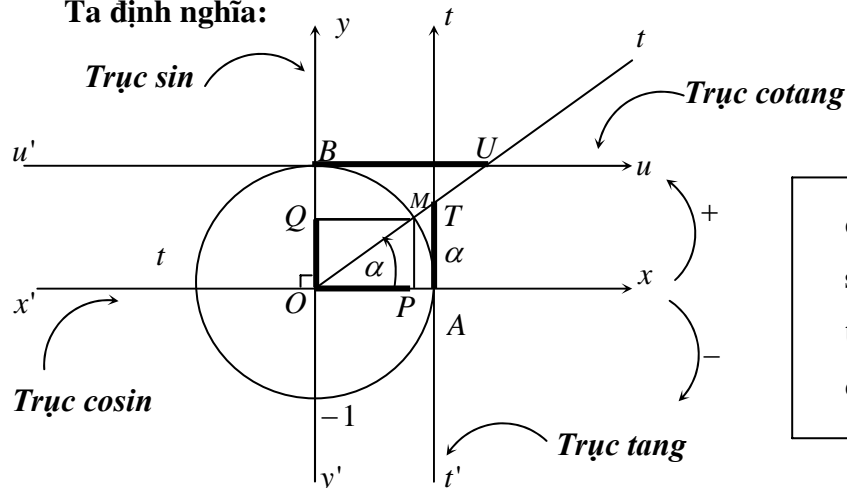
2. Định nghĩa các hàm số lượng giác:

a. **Định nghĩa:** Trên đường tròn lượng giác cho $AM = \alpha$.

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên $x'Ox$ và $y'Oy$

T, U lần lượt là giao điểm của tia OM với $t'At$ và $u'Bu$

Ta định nghĩa:



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \overline{OP} \\ \sin \alpha &= \overline{OQ} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{AT} \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{BU}\end{aligned}$$

b. Các tính chất:

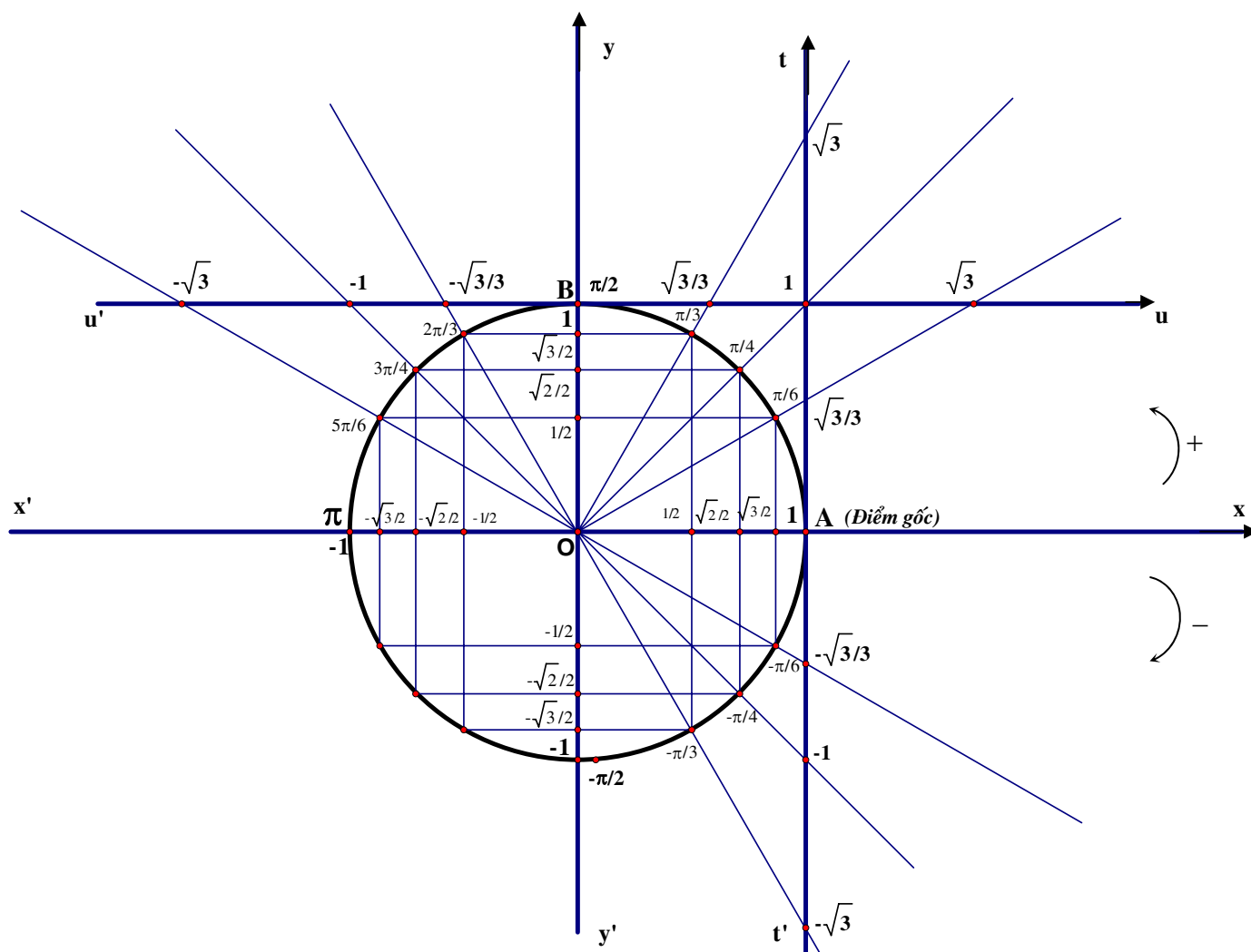
- Với mọi α ta có :
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ hay $|\sin \alpha| \leq 1$
 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ hay $|\cos \alpha| \leq 1$
- $\operatorname{tg} \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\operatorname{cotg} \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq k\pi$

c. Tính tuần hoàn

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{cotg} \alpha\end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

IV. Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt:

Ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt



Góc	0 ⁰	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰	360 ⁰
Hslg	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
cotg α	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

V. Hàm số lượng giác của các cung (góc) có liên quan đặc biệt:

Đó là các cung :

1. Cung đối nhau : α và $-\alpha$ (tổng bằng 0) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $-\frac{\pi}{6}$, ...)

2. Cung bù nhau : α và $\pi - \alpha$ (tổng bằng π) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{5\pi}{6}$, ...)

3. Cung phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{\pi}{3}$, ...)

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{2\pi}{3}$, ...)

5. Cung hơn kém π : α và $\pi + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6}$, ...)

1. Cung đối nhau:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

Đối cos

Bù sin

2. Cung bù nhau :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

3. Cung phụ nhau :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

Phụ chéo

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$

sin bằng cos

cos bằng trừ sin

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

5. Cung hơn kém π :

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

Hơn kém π

tang, cotang

Ví dụ 1: Tính $\cos(-\frac{11\pi}{4})$, $\operatorname{tg} \frac{21\pi}{4}$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $A = \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

VI. Công thức lượng giác:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

1. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

2. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

2. Công thức cộng :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

1. $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$

2. $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$

3. Công thức nhân đôi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

4 Công thức nhân ba:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

5. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

6. Công thức tính $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ theo $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Ví dụ:

1. Biến đổi thành tổng biểu thức: $A = \cos 5x \cdot \cos 3x$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B = \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$

8. Công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Ví dụ: Biến đổi thành tích biểu thức: $A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

9. Các công thức thường dùng khác:

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}$$

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các bước giải một phương trình lượng giác

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa

Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**

Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)

Bước 4: Kết luận

I. Định lý cơ bản: (Quan trọng)

$$\begin{aligned} \sin u = \sin v & \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \\ \cos u = \cos v & \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \\ \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v & \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v & \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq k\pi) \end{aligned}$$

(u; v là các biểu thức chứa ẩn và $k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ: Giải phương trình:

$$1. \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$3. \cos 3x = \sin 2x$$

$$4. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 - \cos 6x)$$

II. Các phương trình lượng giác cơ bản:

1. Dạng 1: $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\operatorname{tg} x = m$; $\operatorname{cotg} x = m$ ($\forall m \in \mathbb{R}$)

*** Gpt: $\sin x = m$ (1)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(1) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \sin \alpha$ và ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = (\pi - \alpha) + k2\pi \end{cases}$$

*** Gpt: $\cos x = m$ (2)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(2) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \cos \beta$ và ta có

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + k2\pi \\ x = -\beta + k2\pi \end{cases}$$

* **Gpt: $\operatorname{tg} x = m$ (3)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

- Đặt $m = \operatorname{tg} \gamma$ thì
- $$(3) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi$$

* **Gpt: $\operatorname{cotg} x = m$ (4)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

- Đặt $m = \operatorname{cotg} \delta$ thì
- $$(4) \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \delta \Leftrightarrow x = \delta + k\pi$$

Các trường hợp đặc biệt:

$\sin x = -1$	$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
$\sin x = 0$	$\Leftrightarrow x = k\pi$
$\sin x = 1$	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$\cos x = -1$	$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$
$\cos x = 0$	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos x = 1$	$\Leftrightarrow x = k2\pi$

Ví dụ:

1) Giải các phương trình :

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} = 0$

d) $2\cos(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} = 0$

e) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

f) $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 2x$

2) Giải các phương trình:

a) $1 + \cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos 2x$

c) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin 4x - 2 = 0$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$

d) $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$

e) $\cot gx + \sin x(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = 4$

2. Dạng 2:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

($a \neq 0$)

Cách giải:

Đặt ẩn phụ : $t = \sin x$ ($t = \cos x$; $t = \tan x$; $t = \cot x$)

Ta được phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ (1)

Giải phương trình (1) tìm t , rồi suy ra x

Chú ý : Phải đặt điều kiện thích hợp cho ẩn phụ (nếu có)

Ví dụ :

a) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

b) $\cos 2x - 4 \cos x + \frac{5}{2} = 0$

c) $2 \sin^2 x = 4 + 5 \cos x$

d) $2 \cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$

f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$

g) $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin x$

h) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cdot \cos x = 0$

k) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$

l) $5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x}) = \cos 2x + 3$

3. Dạng 3:

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (1)$$

($a; b \neq 0$)

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ thì pt

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

- Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$ thì :

$$(2) \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

Pt (3) có dạng 1. Giải pt (3) tìm x .

Chú ý :

$$\text{Pt } a \cos x + b \sin x = c \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$

b) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

c) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

d) $\tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$

e) $\frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$

d. Dạng 4:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (a; c \neq 0) \quad (1)$$

Cách giải 1:

$$\text{Áp dụng công thức hạ bậc : } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ và } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\text{và công thức nhân đôi : } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ thay vào (1) ta sẽ biến đổi pt (1) về dạng 3}$$

Cách giải 2: (Quy về pt theo tang hoặc cotang)

Chia hai vế của pt (1) cho $\cos^2 x$ ta được pt:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

Đây là pt dạng 2 đã biết cách giải

Chú ý: Trước khi chia phải kiểm tra xem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm của (1) không?

Ví dụ : Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

d. Dạng 5:

$$a(\cos x + \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0 \quad (1)$$

Cách giải :

- Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\text{Do } (\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

- Thay vào (1) ta được phương trình :

$$at + b \frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \quad (2)$$

- Giải (2) tìm t . Chọn t thỏa điều kiện rồi giải pt: $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = t$ tìm x .

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$$

Chú ý : Ta giải tương tự cho pt có dạng :

$$a(\cos x - \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$$

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$$

4. Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng :

a. **Phương pháp 1:** Biến đổi pt đã cho về một trong các dạng pt lượng giác cơ bản đã biết

Ví dụ: Giải phương trình:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$$

b. **Phương pháp 2:** Biến đổi pt đã cho về dạng tích số

Cơ sở của phương pháp là dựa vào các định lý sau đây:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad A.B.C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

b. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

c. $2 \sin^3 x + \cos 2x - \cos x = 0$

d. $\sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3 = 0$

c. **Phương pháp 3:** Biến đổi pt về dạng có thể đặt ẩn số phụ

Một số dấu hiệu nhận biết :

* Phương trình chứa cùng một hàm số lượng giác (cùng cung khác lũy thừa)

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

b. $4 \cos^3 x - \cos 2x - 4 \cos x + 1 = 0$

c. $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$

d. $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$

* Phương trình có chứa $(\cos x \pm \sin x)$ và $\sin x \cdot \cos x$

Ví dụ : Giải phương trình : a. $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

b. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DANG 1: Giải phương trình lượng giác

Sử dụng 1 trong 3 phương pháp sau

- Biến đổi phương trình về dạng phương trình lượng giác cơ bản
- Biến đổi phương trình về dạng phương trình tích số
- Biến đổi phương trình về dạng có thể đặt ẩn số phụ chuyển về phương trình đại số

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau

$$\begin{aligned} 1) \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3 &= 0 & 2) \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} + \sin 2x \cos 7x &= 0 \\ 3) \cos^2(x + \frac{\pi}{2}) + \cos^2(2x + \frac{\pi}{2}) + \cos^2(3x - \frac{\pi}{2}) &= \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ 4) \frac{\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}}{\sin 2x} &= \frac{1 + \sin 2x}{2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4})} & 5) \cos 7x + \sin 8x &= \cos 3x - \sin 2x \\ 6) 2 \sin x + \cos x &= \sin 2x + 1 \end{aligned}$$

Bài 2: Giải các phương trình lượng giác sau

$$\begin{aligned} 1. 2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x &= 0 & 8. \sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} &= 0 \\ 2. \sin x \cdot \cos 4x - \sin^2 2x &= 4 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - \frac{7}{2} & 9. \frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} &= 2(1 + \sin x) \\ 3. 9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x &= 8 & 10. \tan 2x - \tan x &= \frac{1}{3} \cos x \cdot \sin 3x \\ 4. \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} &= \frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8 \sin 2x} & 11. 2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 &= \frac{1}{\cos x} \\ 5. \tan^4 x + 1 &= \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x} & 12. \cot gx - 1 &= \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \\ 6. 3 - \tan x (\tan x + 2 \sin x) + 6 \cos x &= 0 & 13. \cot gx - \tan x + 4 \sin 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\ 7. \cos 2x + \cos x \cdot (2 \tan^2 x - 1) &= 2 & 14. \tan x + \cos x - \cos^2 x &= \sin x \cdot (1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

DANG 2: Phương trình lượng giác có chứa tham số

Sử dụng phương pháp sau

- Chọn ẩn phụ thích hợp và tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ vừa chọn (tùy thuộc vào x)
- Chuyển phương trình về phương trình đại số
- Lập luận để chuyển bài toán đã cho theo ẩn phụ vừa chọn
- Sử dụng phương pháp giải tích hoặc đại số để tìm tham số theo yêu cầu của đề bài

Bài 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0$$

Bài 2: Định m để phương trình : $\sin x + \cos x + 1 + \frac{1}{2}(\tan x + \cot gx + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = m$

có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 3: Cho hàm số: $2\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x\right) + m\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 4: Cho phương trình: $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Bài 5: Xác định m để phương trình:

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x - m = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 6: Cho phương trình: $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = m \quad (1)$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Bài 7: Tìm m để phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$ có nghiệm.

Bài 8: Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x \cos x - m = 0$

Định m để phương trình có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Bài 9: Tìm m để phương trình: $2\cos 2x + (\sin x \cdot \cos x - m)(\sin x + \cos x) = 0$

có nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 10: Cho phương trình: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m \tan x$

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Bài 11: Cho phương trình: $\sin^4 x + (\sin x - 1)^4 = m$

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Bài 12: Tìm m để phương trình: $2 + 2\sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Câu 1. Nghiệm của phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Ta có $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{9}$. B. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{9}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$.

Ta có $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$ B. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$ C. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$ D. $x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}; x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$.

Ta có $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ là

- A. $x = 2k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. D. $x = 2k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\tan \frac{x}{2} - \tan x = 0$ là:

- A. $x = k\pi$. B. $x = 2k\pi$. C. $x = \pi + 2k\pi$. D. $x = -\pi + 2k\pi$.

$\tan \frac{x}{2} - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = \tan x \Leftrightarrow x = \frac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x = x + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi$

Câu 6. Nghiệm của phương trình $3\cos x + 4\sin x = -5$ là:

- A. $x = \pi + \alpha + 2k\pi$, với $\frac{3}{5} = \cos \alpha$. B. $x = \pi + \alpha + 2k\pi$, với $\frac{3}{5} = \sin \alpha$.
C. $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ với $\frac{3}{5} = \cos \alpha$. D. $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, với $\frac{3}{5} = \sin \alpha$.

$3\cos x + 4\sin x = -5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = -1$ với $(\cos \alpha = \frac{3}{5})$
 $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = -1 \Leftrightarrow x - \alpha = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + \alpha + k2\pi$

Câu 7. Phương trình $\cos x - m = 0$ có nghiệm khi m thỏa mãn điều kiện là:

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $m > 1$ C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m < -1$.

$\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$ có nghiệm khi $|m| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$

Câu 8. Phương trình $\sin 2x + \frac{1}{2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm thỏa $0 < x < \pi$

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Ta có $\sin 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$

Câu 9. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$ có nghiệm là :

A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Ta có $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Câu 10. Nghiệm của phương trình lượng giác : $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ có nghiệm là:

A. $x = k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Ta có $\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Câu 11. Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\sin x + 3 = 0$ B. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ C. $\tan x + 3 = 0$ D. $3\sin x - 2 = 0$

Phương án A.

Câu 12. Nghiệm dương bé nhất của phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = \frac{3\pi}{2}$ D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Ta có $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0.5 \\ \sin x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

Câu 13. Giải phương trình lượng giác $2\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

A. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi$ D. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$

Ta có $2\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$

Câu 14. Điều kiện để phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm là

A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 4$ B. $m > 4$ C. $m < -4$ D. $-4 < m < 4$

Phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ có $a=3, b=m, c=5$ vô nghiệm khi $a^2 + b^2 < c^2$

$3^2 + m^2 < 5^2 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow m^2 < 4^2 \Leftrightarrow |m| < 4 \Leftrightarrow -4 < m < 4$

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ là :

A. $x = k2\pi$ B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

Ta có $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

Câu 16. Phương trình $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây :

A. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ B. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$ C. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ D. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 3x \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Câu 17. Phương trình lượng giác $\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$$\sqrt{3} \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Câu 18. Phương trình $\cos x - m = 0$ có nghiệm khi m là

A. $m > 1$ B. $-1 \leq m \leq 1$ C. $m < -1 \vee m > 1$ D. $m < -1$

Phương án B.

Câu 19. Điều kiện để phương trình $m \sin x - 3 \cos x = 5$ có nghiệm là :

A. $m \geq 4$ B. $-4 \leq m \leq 4$ C. $m \geq \sqrt{34}$ D. $m \leq -4 \vee m \geq 4$

Phương trình $3 \sin x + m \cos x = 5$ có $a = m, b = 3, c = 5$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$m^2 + 3^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow m^2 \geq 4^2 \Leftrightarrow |m| \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -4 \vee m \geq 4$$

Câu 20. Nghiệm của phương trình $\sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$ là

A. $x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ B. $x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ C. $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

$$\sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0$ là:

A. $x = -100^\circ + k180^\circ$ B. $x = 100^\circ + k180^\circ$ C. $x = -10^\circ + k180^\circ$ D. $x = 10^\circ + k180^\circ$.

$$\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan(2x + 10^\circ) + \tan(90^\circ - x) = 0 \Leftrightarrow \tan(2x + 10^\circ) = \tan(x - 90^\circ)$$

Câu 22. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ với $\pi \leq x \leq 3\pi$ là

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\text{Vì } \pi \leq x \leq 3\pi \text{ nên } \pi \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{4} + 2k \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq 2k \leq \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq k \leq \frac{11}{8}$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên chỉ chọn được } k = 1 \text{ vậy phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm là } x = \frac{9\pi}{4}$$

Câu 23. Phương trình $\sin x - \frac{1}{2} = 0$ có nghiệm thỏa $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là :

A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ B. $x = \frac{\pi}{6}$ C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ D. $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2k \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \leq 2k \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \leq k \leq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên chỉ chọn được $k=0$ vậy phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm là $x = \frac{\pi}{6}$

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 < x < \pi \text{ nên } \begin{cases} 0 < k2\pi < \pi \\ 0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k2\pi < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < k2\pi < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 2k < \frac{1}{2}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên chỉ chọn được $k=0$ vậy phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm là $x = \frac{\pi}{2}$

Câu 25. Phương trình lượng giác $\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2 \sin x - 1} = 0$ có nghiệm là :

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ B. Vô nghiệm C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ D. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

$$\text{Điều kiện } 2 \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \neq \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \wedge x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\text{Ta có } \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x - \tan \frac{\pi}{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x - \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{Cách khác } \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm là $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Câu 26. Nghiệm của phương trình $2 \cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ là:

A. $x = 2k\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$2 \cos^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \\ \tan x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Câu 28. Nghiệm của phương trình $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$ là:

- A. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, x = \frac{13\pi}{12} + k\pi$. B. $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$.
C. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

$$2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2(\sin 2x - \cos 2x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \end{cases}$$

Câu 29. Nghiệm của phương trình $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$ là:

- A. $x = k\pi$. B. $x = 2k\pi$. C. $x = \pi + 2k\pi$. D. Phương trình vô nghiệm.

$$5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 6 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 3 - 3\cos 2x = 13$$

$$\Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16$$

Có $a = 5, b = 3, c = 16$ mà $a^2 + b^2 < c^2$ nên phương trình vô nghiệm

Câu 30. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-5) + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-5) + k\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan 5 + k\pi$ D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan 5 + k\pi$.

$$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 1 \quad (1 = \sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$$

...

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1, \tan x = 5. \text{ Chọn C.}$$

Câu 31. Nghiệm của phương trình $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$ là:

- A. $x = k\pi$. B. $x = \frac{k\pi}{2}$. C. $x = \frac{k\pi}{3}$. D. $x = \frac{k\pi}{4}$.

$$\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$ là:

- A. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{3}$. B. $x = \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$. C. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$. D. Phương trình vn.

$$\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 2\sin 3x \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = \cos 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ 3x = x + k2\pi \\ 3x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 33. Nghiệm của phương trình $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$ là:

- A. $x = k\pi$ B. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$ C. Phương trình vn D. $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{7}$.

$$\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 9x = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 5x + k2\pi \\ 9x = \pi - 5x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = +k2\pi \\ 14x = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = +k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7} \end{cases}$$

Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \pi + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \pi + 2k\pi$ C. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi$ D. vn

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

Câu 35. Nghiệm của phương trình $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$ là:

- A. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{3}$ B. $x = \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$ C. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$ D. Phương trình vn

$$\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 4x + \cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 3x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x = 3x + k2\pi \\ 7x = -3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 4x = k2\pi \\ 10x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

Câu 36. Phương trình $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0,5$ có nghiệm là:

- A. $x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$. D. $x = \pm \arctan \frac{1}{2} + k\pi$.

$$\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0,5 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x + (1 - \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}. \text{ Có nghiệm } x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$$

Câu 37. Phương trình $2\sin^2 x + 3\cos x = 2$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ là:

- A. $x = 30^\circ$ và $x = 120^\circ$ B. $x = 90^\circ$ và $x = 120^\circ$ C. $x = 90^\circ$ và $x = 270^\circ$ D. Phương trình vn

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 2 \Leftrightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 2 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{3}{2} \end{cases} (vn)$$

$$\Leftrightarrow x = 90^\circ + k180^\circ$$

$$\text{Vì } 0^\circ \leq x \leq 360^\circ \text{ nên } 0^\circ \leq 90^\circ + k180^\circ \leq 360^\circ \Leftrightarrow 0 \leq 1 + 2k \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq 2k \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Từ chỗ } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \text{ do đó phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 270^\circ \end{cases}$$

Câu 38. Phương trình $\tan x + 2\cot x = 3$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$ là:

- A. $x = 205^\circ$ và $x = 213,435^\circ$. B. $x = 220^\circ$ và $x = 223,435^\circ$.
C. $x = 215^\circ$ và $x = 233,435^\circ$. D. $x = 225^\circ$ và $x = 243,435^\circ$.

$$\tan x + 2\cot x = 3 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan 45^\circ \\ \tan x = \tan 63,435^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + k180^\circ \\ x = 63,435^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

Chọn D. là đúng nhất

Câu 39. Tìm các giá trị của m để phương trình $\sin x + (m-1)\cos x = 1$ vô nghiệm:

- A. \emptyset B. $(-\infty; 1)$ C. $(1; +\infty)$ D. $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\text{Điều kiện có nghiệm } 1^2 + (m-1)^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Câu 40. Tìm các giá trị của m để phương trình $\sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + m - 1 = 0$ có nghiệm:

- A. $m < 1 - \sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$ C. $m > 1 + \sqrt{3}$ D. $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}$

$$\text{Ta có } \sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -m + 1 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-m + 1}{\sqrt{3}}$$

Có nghiệm khi

$$-1 \leq \frac{-m + 1}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq -m + 1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} - 1 \leq -m \leq \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \geq m \geq -\sqrt{3} + 1$$

Câu 41. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Khi đó

- A. $240^\circ \in X$ B. $220^\circ \in X$ C. $290^\circ \in X$ D. $200^\circ \in X$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x &\Leftrightarrow \sin\left(75^\circ - \frac{x}{2}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ - \frac{x}{2} + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 75^\circ + \frac{x}{2} + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 150^\circ - x + k720^\circ \\ 2x = 105^\circ + x + k720^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 150^\circ + k720^\circ \\ x = 105^\circ + k720^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k240^\circ \\ x = 105^\circ + k720^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn C.

Câu 42. Giải phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{k2\pi}{3}$ B. $x = k2\pi$ C. $x = \frac{k\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$

$$\text{Ta có } \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

Câu 43. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$. C. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. D. Tất cả các đáp án đều đúng.

$$\text{Ta có } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x = 4 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0 \Leftrightarrow 2.2\cos x \cos 5x \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

Câu 44. Nghiệm của phương trình $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ D. $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$\text{Ta có } (1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)(1 + 2\sin x \cos x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x) = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \cos x + \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 45. Nghiệm của phương trình $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cdot \cos x$ là

- A. $x = k\pi$ B. $x = \frac{k\pi}{2}$ C. $x = \frac{k\pi}{3}$ D. $x = \frac{k\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \tan x + \tan 2x = \sin 3x \cdot \cos x &\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \sin 3x \cdot \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos x \cos 2x \\ &\Leftrightarrow \sin 3x(1 - \cos^2 x \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos^2 x \cos 2x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 1. $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$

Trường hợp 2. $\cos^2 x \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$

Ta thấy $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$

Tổng hợp nghiệm ta được họ nghiệm là $x = k\frac{\pi}{3}$

Câu 46. Nghiệm của phương trình $\tan x + \cot 2x = 2 \cot 4x$ là:

- A. $x = k\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. D. Pt vn.

Điều kiện của phương trình là $x \neq k\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \tan x + \cot 2x = 2 \cot 4x &\Leftrightarrow \cot 4x - \tan x = \cot 2x - \cot 4x \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x} \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x}{\sin 4x \cos x} = \frac{\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x}{\sin 2x \sin 4x} \Leftrightarrow \frac{\cos 5x}{\sin 4x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin 2x \sin 4x} \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 5x}{\sin 4x \cos x} = \frac{1}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{\cos 5x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \cos 5x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có họ nghiệm là $x = k\frac{\pi}{3}$

Câu 47. Phương trình $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2 \Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) - 2 = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x + \cot x = -1 \\ \tan x + \cot x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -1 \\ \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = -1 \\ \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x \sin x} = -1 \\ \frac{1}{\cos x \sin x} = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \sin x = -1 \\ \cos x \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x = -1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -2 \text{ (vn)} \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

Câu 48. Phương trình $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$ B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ D. Phương trình vô nghiệm.

$$3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\text{Biến đổi được } 3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi \end{cases}$$

Câu 49. Phương trình $3\sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$ có nghiệm là:

- A. $x = \arctan 2 + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan(-3) + \frac{k\pi}{2}$ B. $x = \arctan 2 + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}$.
C. $x = \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}$ D. $x = \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan(-3) + \frac{k\pi}{2}$.

$$\text{Ta có } 3\sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2 \Leftrightarrow \sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 6\cos^2 2x = 0$$

$$\text{Ta đc } \tan^2 2x - \tan 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 3 \\ \tan 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arctan 3 + k\pi \\ 2x = \arctan(-2) + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arctan 3 + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 50. Phương trình $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cdot \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ D. Phương trình vô nghiệm.

Câu 51. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ là:

- A. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ B. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ C. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ D. Tất cả các đáp án đều đúng.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cos x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x - \cos 2x = 0 \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 52. Nghiệm của phương trình $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ B. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$.
C. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{3}$ D. Phương trình vô nghiệm.

$$\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 5x$$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Câu 53. Nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. B. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. C. $x = k\pi$. D. Phương trình vô nghiệm.

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{2 \sin 2x \cos 2x} \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = \frac{1}{2}$$

Câu 54. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$. D. Phương trình vô nghiệm.

Câu 55. Nghiệm của phương trình $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$ là:

- A. $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ B. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ D. Phương trình vô nghiệm.

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x) = \cos x \sin 2x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = \cos x \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \cos x \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 56. Nghiệm của phương trình $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} = \cos 2x$ là:

- A. Phương trình vô nghiệm. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.

Câu 57. Giải phương trình $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = 9$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 58. Tìm m để phương trình: $\cos^2 x - \sin x + m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \geq -\frac{4}{5}$. B. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 1$. C. $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$. D. $-\frac{5}{4} \leq m \leq -1$.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 59. Giải phương trình: $\frac{\cos x(1-2\sin x)}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$ có nghiệm.

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ **B.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ **D.** $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 60. Tìm m để phương trình: $\cos 2x - \cos x - m = 0$ có nghiệm.

A. $-\frac{9}{8} \leq m \leq 2.$ **B.** $-\frac{9}{8} \leq m \leq 1.$ **C.** $m \geq -\frac{9}{8}.$ **D.** $-\frac{5}{8} \leq m \leq 2.$

Tham gia vào group: Tài Liệu VIP - 2K3 Học Là Giỏi <https://www.facebook.com/groups/2436168169960793> để nhận thêm nhiều tài liệu hữu ích