Ký hiệu $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$.

Bài toán. *Với ba số thực a, b, c thỏa mãn $p = 1$ và $q > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-3q)^3}{q(q+1)^2}}. \tag{1}$$

Lời giải. (*Nguyễn Văn Huyện*) Trước hết ta chứng minh

$$pq - r = (a+b)(b+c)(c+a) > 0.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$0 < a(b+c) + bc \leqslant a(b+c) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(1-a) + \frac{(1-a)^2}{4} = \frac{(1-a)(3a+1)}{4}.$$

Suy ra $-\frac{1}{3} < a < 1$, cho nên $b + c = 1 - a > 0$, do đó

$$(a+b)(b+c)(c+a) > 0.$$

Quay trở lại bài toán, đặt

$$M = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-3q)^3}{q(q+1)^2}},$$

Ta viết (1) lại như sau

$$\frac{3(pq-r) - (a-b)(b-c)(c-a)}{pq-r} \geqslant 2M,$$

tương đương với

$$(3-2M)(pq-r) \geqslant (a-b)(b-c)(c-a),$$

Vì

$$3 - 2M = \sqrt{\frac{(1-3q)^3}{q(q+1)^2}} > 0,$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$(3-2M)(pq-r) \geqslant \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.$$

Bình phương hai vế

$$(3-2M)(pq-r) \geqslant (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Khai triển và và nhóm lại theo r như sau

$$(3-2M)^2(pq-r)^2 \geqslant q^2(p^2-4q) - 2p(2p^2-9q)r - 27r^2,$$

$$(3-2M)^2(q-r)^2 \geqslant q^2(1-4q) - 2(2-9q)r - 27r^2,$$

$$(M^2 - 3M + 9)r^2 - \left[(2M^2 - 6M + 9)q - 1\right]r + q^2(q + M^2 - 3M + 2) \geqslant 0,$$

hay là

$$\frac{(9q+1)^2}{4q(q+1)^2}\cdot r^2+\frac{(9q+1)(2q^2-5q+1)}{2(q+1)^2}\cdot r+\frac{q(2q^2-5q+1)^2}{4(q+1)^2}\geqslant 0,$$

hoặc

$$\frac{\left[(9q+1)r+q(2q^2-5q+1)\right]^2}{4q(q+1)^2}\geqslant 0.$$

Bài toán được chứng minh. $\square$