Bài toán 1. *(Đỗ Hữu Đức Thịnh) Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \geqslant \frac{(S+3)^2}{4(1-S)}, \tag{1}$$

với

$$S = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Lời giải. (*Nguyễn Văn Huyện*) Vì

$$(ab+bc+ca)\sum \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{ab(a^2-b^2)^2+bc(b^2-c^2)^2+ca(c^2-a^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} + \frac{9-S}{4},$$

nên (1) tương đương với

$$\frac{ab(a^2-b^2)^2+bc(b^2-c^2)^2+ca(c^2-a^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} + \frac{9-S}{4} \geqslant \frac{(S+3)^2}{4(1-S)},$$

hay là

$$ab(a^2-b^2)^2+bc(b^2-c^2)^2+ca(c^2-a^2)^2 \geqslant \frac{4S(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{1-S}. \tag{2}$$

Nếu $abc = 0$ thì (2) trở thành đẳng thức.

Nếu $abc > 0$, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$bc(b^2-c^2)^2+ca(c^2-a^2)^2 \geqslant \frac{(b^2-c^2+c^2-a^2)^2}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}} = abc(a+b)(a-b)^2,$$

suy ra

$$\sum ab(a^2-b^2)^2 \geqslant ab(a+b)(a+b+c)(a-b)^2 \geqslant ab(a+b)^2(a-b)^2.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$ab(a+b)^2(a-b)^2 \geqslant \frac{4S(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{1-S}.$$

Thật vậy, từ đánh giá $(a-c)^2(b-c)^2 \leqslant a^2b^2$, ta được

$$\frac{4S(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{1-S} = \frac{4(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

$$\leqslant \frac{4a^2b^2(a-b)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2-a^2b^2(a-b)^2}.$$

Bài toán quy về chứng minh

$$ab(a+b)^2(a-b)^2 \geqslant \frac{4a^2b^2(a-b)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2-a^2b^2(a-b)^2},$$

hay là
$$1 \geqslant \frac{4ab(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 - a^2b^2(a-b)^2},$$
tương đương với
$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 - 4ab(b+c)^2(c+a)^2 \geqslant a^2b^2(a-b)^2,$$
hoặc
$$(c+a)^2(b+c)^2(a-b)^2 \geqslant a^2b^2(a-b)^2.$$
Hiển nhiên đúng vì $(c+a)^2 \geqslant a^2$ và $(b+c)^2 \geqslant b^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $abc = 0$ hoặc $a = b = c$ hoặc $a = b$, $c = 0$ cùng các hoán vị tương ứng. □