Bài toán (IMO 2020). *Cho bốn số thực dương $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ thỏa mãn $a+b+c+d = 1$. Chứng minh rằng*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d \leqslant 1.$$

Lời giải 1. Đặt $x = b + c + d$, thì $a + 2b + 3c + 4d \leqslant a + 3x$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant a^a b^b c^c d^d.$$

Bài toán quy về chứng minh

$$(a + 3x)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant (a + x)^3.$$

Với $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$, thì

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant a^2 + ax,$$

và

$$(a + 3x)(a^2 + ax) \leqslant (a + x)^3,$$

tương đương với

$$x(a + x)(x - a) \geqslant 0. \tag{1}$$

Đồng thời

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant a^2 + x^2,$$

và

$$(a + 3x)(a^2 + x^2) \leqslant (a + x)^3,$$

tương đương với

$$2x^2(a - x) \geqslant 0. \tag{2}$$

Do $(a - x) + (x - a) = 0$, nên trong $a - x,\ x - a$ sẽ có một số không âm, suy ra (1) và (2) sẽ có một bất đẳng thức đúng. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải 2. Tương tự như trên, ta cần chứng minh

$$[a + 3(b + c + d)](a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant (a + b + c + d)^3,$$

hay là

$$2(b + c + d)\left[a(b + c + d) - b^2 - c^2 - d^2\right] + 2(a + b + c + d)(bc + cd + db) \geqslant 0.$$

Hiển nhiên đúng do $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. □