

**Bài toán.** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \geq \frac{9}{3+a+b+c}. \quad (1)$$

(Nguyễn Văn Quý)

**Lời giải.** (Nguyễn Văn Huyền) Ta viết (??) lại dưới dạng thuần nhất

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \frac{9\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}. \quad (2)$$

Đặt  $x = \sqrt{b+c}$ ,  $y = \sqrt{c+a}$  và  $z = \sqrt{a+b}$  thì  $x, y, z$  là độ dài ba cạnh của tam giác nhọn. Bất đẳng thức (??) trở thành

$$x+y+z \geq \frac{18xyz}{x^2+y^2+z^2+\sqrt{3(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}}.$$

Chuyển sang  $pRr$ <sup>1</sup> như sau

$$2p \geq \frac{36pRr}{p^2-4Rr-r^2+2\sqrt{3}pr},$$

hay là

$$p^2 + 2\sqrt{3}pr \geq r(22R+r). \quad (3)$$

Bây giờ

- Nếu  $R^2 - 2Rr - r^2 > 0$ , tức  $R > (\sqrt{2}+1)r$ , sử dụng đánh giá  $p \geq 2R+r$ , ta có

$$p^2 + 2\sqrt{3}pr \geq (2R+r)^2 + 2\sqrt{3}(2R+r)r \geq r(22R+r).$$

- Nếu  $R^2 - 2Rr - r^2 \leq 0$ , ta viết (??) lại như sau

$$(p + \sqrt{3}r)^2 \geq 2r(11R + 2r),$$

hay là

$$p^2 \geq [\sqrt{2r(11R+2r)} - \sqrt{3}r]^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Blundon's<sup>2</sup>, ta đưa bài toán về chứng minh

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geq [\sqrt{2r(11R+2r)} - \sqrt{3}r]^2. \quad (4)$$

Đặt  $k = \frac{R}{r}$ , ta có  $2 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ . Bất đẳng thức (??) trở thành

$$2k^2 + 10k - 1 - 2(k-2)\sqrt{k(k-2)} \geq [\sqrt{2(11k+2)} - \sqrt{3}]^2,$$

<sup>1</sup><https://wp.me/p7ChCZ-6g>

<sup>2</sup><https://wp.me/p7ChCZ-3S>

Khai triển và thu gọn ta được

$$k^2 - 6k - 4 + \sqrt{6(11k + 2)} \geq (k - 2)\sqrt{k(k - 2)}. \quad (5)$$

Để thấy vế trái của (??) không âm, tiếp tục bình phương hai vế và thu gọn ta được

$$14 + 61k + 8k^2 - 3k^3 \geq (4 + 6k - k^2)\sqrt{6(11k + 2)},$$

tương đương với

$$(14 + 61k + 8k^2 - 3k^3)^2 \geq 6(11k + 2)(4 + 6k - k^2)^2,$$

hay là

$$(9k^4 - 78k^3 + 130k^2 + 20k + 1)(k - 2)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì

$$\begin{aligned} & 9k^4 - 78k^3 + 130k^2 + 20k + 1 \\ &= 11k^2(k - 2)(12 - 5k) + 2k^2(24k^2 - 120k + 151) + (4k^2 - 10k - 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □