

**Bài toán.** Với  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3 \sqrt[6]{\frac{a^6 + b^6 + c^6}{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

**Lời giải.** (Nguyễn Văn Huyền) Lũy thừa 6 hai vế, bất đẳng thức trở thành

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^6 \geq 243(a^6 + b^6 + c^6).$$

Chuẩn hóa  $a + b + c = 1$  và đặt  $q = \frac{1-t^2}{3}$  với  $0 \leq t < 1$ , ta có

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 + c^6 &= 3r^2 + 6p(p^2 - 2q)r + (p^2 - 2q)(p^4 - 4p^2q + q^2) \\ &= 3r^2 + 2(2t^2 + 1)r + \frac{1}{27}(2t^2 + 1)(t^4 + 10t^2 - 2). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ <sup>1</sup>

$$0 < r \leq r_0 = \frac{p(9q - 2p^2) + 2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q}}{27},$$

ta được

$$0 < r \leq r_0 = \frac{(1 + 2t)(1 - t)^2}{27}.$$

do đó

$$\begin{aligned} 243(a^6 + b^6 + c^6) &\leq 243 \left[ 3r_0^2 + 2(2t^2 + 1)r_0 + \frac{1}{27}(2t^2 + 1)(t^4 + 10t^2 - 2) \right] \\ &= (2t + 1)^2(1 - t)^4 + 18(2t^2 + 1)(2t + 1)(1 - t)^2 + 9(2t^2 + 1)(t^4 + 10t^2 - 2) \\ &= 22t^6 + 60t^5 + 90t^4 + 40t^3 + 30t^2 + 1. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^6 \geq 22t^6 + 60t^5 + 90t^4 + 40t^3 + 30t^2 + 1,$$

Sử dụng đánh giá <sup>2</sup>

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{1 + 2t + 5t^2 + 4t^3 - 3t^4}{(2t + 1)(1 - t^2)},$$

ta cần chỉ ra

$$\left(\frac{1 + 2t + 5t^2 + 4t^3 - 3t^4}{(2t + 1)(1 - t^2)}\right)^6 \geq 22t^6 + 60t^5 + 90t^4 + 40t^3 + 30t^2 + 1,$$

<sup>1</sup><https://wp.me/p7ChCZ-ht>

<sup>2</sup><https://wp.me/p7ChCZ-ZS>

tương đương với

$$(1 + 2t + 5t^2 + 4t^3 - 3t^4)^6 \geq (22t^6 + 60t^5 + 90t^4 + 40t^3 + 30t^2 + 1)(2t + 1)^6(1 - t^2)^6,$$

hay là

$$t^2 \cdot f(t) \geq 0,$$

với

$$\begin{aligned} f(t) = & 6 - 4t - 48t^2 + 1620t^3 + 14278t^4 + 56208t^5 \\ & + 131769t^6 + 197148t^7 + 177936t^8 + 59148t^9 - 50214t^{10} \\ & - 25188t^{11} + 69318t^{12} + 40416t^{13} - 98436t^{14} - 118368t^{15} - 1320t^{16} \\ & + 46524t^{17} + 25437t^{18} + 21748t^{19} - 1962t^{20} - 13896t^{21} - 679t^{22}. \end{aligned}$$

Ta chứng minh  $f(t) > 0$ , thật vậy đặt  $t = \frac{1}{x+1} < 1$  với  $x > 0$ , ta được

$$f(t) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{g(x)}{(x+1)^{22}},$$

trong đó  $g(x)$  là đa thức bậc 22 với tất cả các hệ số đều dương

$$\begin{aligned} g(x) = & 6x^{22} + 128x^{21} + 1254x^{20} + 9060x^{19} + 74508x^{18} + 669576x^{17} \\ & + 4975341x^{16} + 27941724x^{15} + 119289936x^{14} + 395553816x^{13} \\ & + 1037590858x^{12} + 2180644272x^{11} + 3699912978x^{10} + 5084994888x^9 \\ & + 5658046506x^8 + 5075026812x^7 + 3637113678x^6 + 2051467236x^5 \\ & + 888549669x^4 + 283986324x^3 + 62710038x^2 + 8503056x + 531441 > 0. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □