exo 1

X : "Nombre de tirages jusqu'à obtenir le bonbon au chocolat"

1.) $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$: loi géométrique

2.) $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x) \end{cases}$

On veut calculer $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $F_X(k) = P(X \leq k)$

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(X=i) = \sum_{i=1}^{k} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{k-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\ell}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} \right)$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad F_k(k) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}}$$

3.) $P(X < 11) = P(X \leq 10) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{10}$ ■

4) $E(X) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ■ $E(X) = n$

$$Var(X) = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n(n-1) \text{ ■}$$

Exo 2

1) Lois marginales du couple (S, U)

- La loi de S est donnée par le tableau :

s	0	1
$P(S = s)$	0.7	0.3

- La loi de U est donnée par le tableau :

u	0	1
$P(U = u)$	0.6	0.4

2) L'événement « le client règle par carte bancaire » est $\{U = 0\}$. Sa probabilité est :

$$p = P(U = 0) = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

3) • S et U sont deux v.a.r. discrètes finies, par conséquent leur covariance existe. On va la calculer par la formule de KOENIG-HUYGHENS :

$$Cov(S, U) = E(SU) - E(S)E(U)$$

Nous avons :

$$E(S) = \sum_{s \in S(\Omega)} sP(S = s) = 0.3$$

$$E(U) = \sum_{u \in U(\Omega)} uP(U = u) = 0.4$$

$$E(SU) = \sum_{s \in S(\Omega)} \sum_{u \in U(\Omega)} suP(S = s, U = u) = 0 + 0 + 0 + 1 \times 1 \times 0.1 = 0.1$$

et donc

$$Cov(S, U) = 0.1 - 0.3 \times 0.4 = -0.02$$

• S et U sont indépendantes $\Rightarrow Cov(S, U) = 0$. Comme nous avons trouvé que $Cov(S, U) \neq 0$, on en déduit que S et U ne sont pas indépendantes.

4) La probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire est $P_{\{U=1\}}(S = 1)$, c'est une probabilité conditionnelle

$$P_{\{U=1\}}(S = 1) = \frac{P(S = 1, U = 1)}{P(U = 1)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$