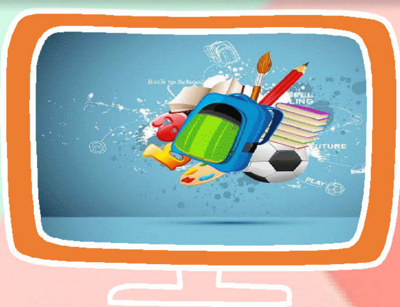
2024 *Chinh phục kỳ thi Quốc Gia*

LUYỆN ĐỀ

51 đề BGD từ 2016 - 2024

MÔN TOÁN

Ths: Nguyễn Hoàng Việt



Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Quảng Bình, ngày 27-06-2024

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

- *Đề số 1. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017, Mã MH-1* 1
- *Đề số 2. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017, Mã MH-2* 17
- *Đề số 3. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017, Mã MH-3* 34
- *Đề số 4. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017, Mã CT-101* 53
- *Đề số 5. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017, Mã CT-102* 66
- *Đề số 6. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017, Mã CT-103* 80
- *Đề số 7. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017, Mã CT-104* 93
- *Đề số 8. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2018, Mã MH-1* 105
- *Đề số 9. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018, Mã CT-104* 123
- *Đề số 10. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018, Mã CT-102* 140
- *Đề số 11. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018, Mã CT-103* 160
- *Đề số 12. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018, Mã CT-104* 178
- *Đề số 13. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2019, Mã MH-1* 197
- *Đề số 14. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019, Mã CT-101* 215
- *Đề số 15. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019, Mã CT-102* 233
- *Đề số 16. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019, Mã CT-103* 253
- *Đề số 17. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019, Mã CT-104* 274
- *Đề số 18. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2020, Mã MH-1* 294
- *Đề số 19. ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2020, Mã MH-2* 312
- *Đề số 20. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-101-1* 328
- *Đề số 21. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-102-1* 346
- *Đề số 22. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-103-1* 363
- *Đề số 23. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-104-1* 379
- *Đề số 24. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-101-2* 396
- *Đề số 25. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-102-2* 413
- *Đề số 26. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-103-2* 431
- *Đề số 27. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020, Mã CT-104-2* 449
- *Đề số 28. ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2021, Mã MH 2021* 466
- *Đề số 29. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-101-1* 475
- *Đề số 30. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-102-1* 492

Đề số 31. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-103-1 508
Đề số 32. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-104-1 524
Đề số 33. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-101-2 542
Đề số 34. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-102-2 560
Đề số 35. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-103-2 577
Đề số 36. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021, Mã CT-104-2 595
Đề số 37. ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2022, Mã MH 2022 614
Đề số 38. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022, Mã CT-101 629
Đề số 39. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022, Mã CT-102 644
Đề số 40. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022, Mã CT-103 660
Đề số 41. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022, Mã CT-104 676
Đề số 42. ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2023, Mã MH 2023 693
Đề số 43. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023, Mã CT-101 705
Đề số 44. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023, Mã CT-102 723
Đề số 45. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023, Mã CT-103 741
Đề số 46. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023, Mã CT-104 759
Đề số 47. ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2024, Mã MH 2024 778
Đề số 48. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024, Mã CT-101 795
Đề số 49. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024, Mã CT-101 814
Đề số 50. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024, Mã CT-101 833
Đề số 51. ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024, Mã CT-101 854

I ĐÁP ÁN 875

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017

Môn: Toán

Năm học: 2016 – 2017

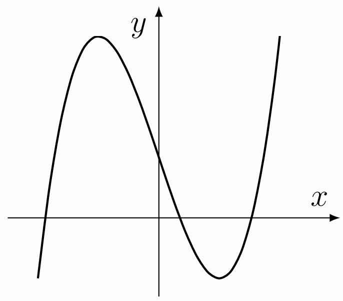
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = -x^2 + x - 1$.
(B) $y = -x^3 + 3x + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x + 1$.
(D) $y = x^4 - x^2 + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 2 cực trị và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

- Loại A: vì là parapol chỉ có 1 cực trị.
- Loại B: vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.
- Loại D: vì hàm hàm trùng phương nhận Oy làm trục đối xứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
(D) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đường tiệm cận, ta có:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} = 1$ suy ra $y = 1$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} = -1$ suy ra $y = -1$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ⓓ $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Hàm số có đúng một cực trị.

Ⓑ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Ⓒ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Ⓓ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

- Loại A: vì hàm số có 2 cực trị.
- Loại B: vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
- Loại C: vì hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

Ⓐ $y_{CD} = 4$. Ⓑ $y_{CD} = 1$. Ⓒ $y_{CD} = 0$. Ⓓ $y_{CD} = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1; & y = 4 \\ x = 1; & y = 0 \end{array}\right.$. Suy ra $y_{CD} = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \quad \text{(loại)} \\ x = 3 \end{array}\right.$ (Do xét trên đoạn $[2;4]$).

$y(3) = 6; y(2) = 7; y(4) = \dfrac{19}{3}$, suy ra $\min\limits_{[2;4]} y = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_\circ; y_\circ)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm $y_\circ$.

Ⓐ $y_\circ = 4$. Ⓑ $y_\circ = 0$. Ⓒ $y_\circ = 2$. Ⓓ $y_\circ = -1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, Suy ra $y(0) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Ⓐ $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. Ⓑ $m = -1$. Ⓒ $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. Ⓓ $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là: $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Do $AB^2 = AC^2$ nên tam giác ABC luôn cân tại A.

Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \text{(loại)} \\ m = -1 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

Ⓐ Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ⓑ $m < 0$.

Ⓒ $m = 0$.

Ⓓ $m > 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y, \lim\limits_{x\to+\infty} y$ tồn tại và khác nhau.

Do đó hàm số phải xác định trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ tức là $mx^2 + 1 > 0, \forall \Leftrightarrow m > 0$.Do đó loại B.

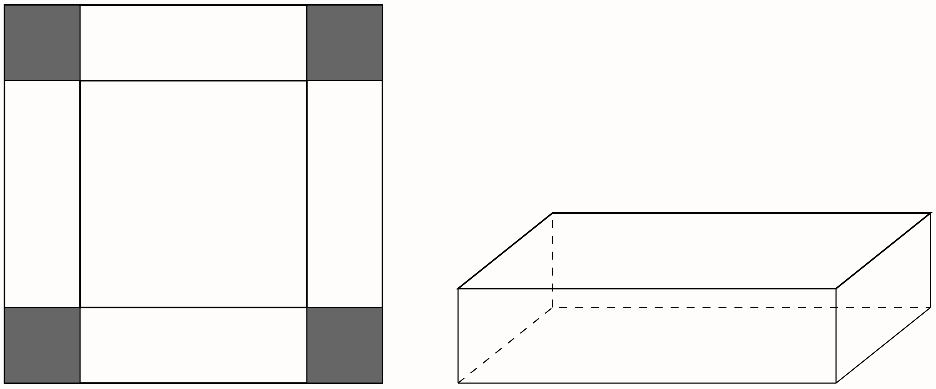
- $m = 0$ thì $y = x + 1$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.
- $m > 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

  và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

  Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



(A) $x = 6$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Mặt đáy của hộp là hình vuông có cạnh bằng $12 - 2x$ (cm), với $0 < x < 6$. Vậy diện tích của đáy hộp là $S = (12 - 2x)^2 = 4(6 - x)^2$.

Khối hộp có chiều cao $h = x$ (cm).

Vậy thể tích hộp là $V = S \cdot h = 4(6 - x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ (cm^3).

Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x, 0 < x < 6$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Do $0 < x < 6$ nên ta lấy $x = 2$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
f'		+	0	−	
f	0	↗	128	↘	0

Vậy thể tích khối hộp đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2$ (cm).

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. (B) $m \leq 0$.

(C) $1 \leq m < 2$. (D) $m \geq 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó, hàm số ban đầu trở thành $y = \dfrac{t - 2}{t - m}$ với $0 < t < 1$.

Ta có $y' = \dfrac{2 - m}{(t - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ khi $\begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant m < 2 \\ m \leqslant 0 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$.

Ⓐ $x=63$. Ⓑ $x=65$. Ⓒ $x=80$. Ⓓ $x=82$.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x-1=64 \Leftrightarrow x=65$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$.

Ⓐ $y'=x\cdot 13^{x-1}$. Ⓑ $y'=13^x\cdot\ln 13$. Ⓒ $y'=13^x$. Ⓓ $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Lời giải.

Công thức đạo hàm của $y=a^x$ là: $y'=a^x\ln a$.
Nên hàm số đã cho có đạo hàm là $y'=13^x\ln 13$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

Ⓐ $x>3$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}<x<3$. Ⓒ $x<3$. Ⓓ $x>\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 15. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\log_2(x^2-2x-3)$.

Ⓐ $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. Ⓑ $\mathscr{D}=[-1;3]$.
Ⓒ $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. Ⓓ $\mathscr{D}=(-1;3)$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$.
Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2^x\cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

Ⓐ $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$. Ⓑ $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$.
Ⓒ $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$. Ⓓ $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$, nên câu A đúng.
Và $f(x)=2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$, nên câu B đúng.
Và $f(x)=2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$, nên câu C đúng
D sai do $f(x)=2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0 \Leftrightarrow x\left(1+x\log_2 7\right)<0$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Cho các số thực dương a,b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Ⓑ $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

Ⓒ $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$.

Ⓓ $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a(ab) = \dfrac{1}{2}(1 + \log_a b) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$, nên câu D đúng.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

Ⓐ $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Ⓑ $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Ⓒ $y' = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Ⓓ $y' = \dfrac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(\dfrac{x+1}{4^x}\right)' = \dfrac{4^x - (x+1)4^x \ln 4}{4^{2x}} = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{4^x}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Ⓐ $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$.

Ⓑ $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$.

Ⓒ $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$.

Ⓓ $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{b} = \log_3 5 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \log_2 3 . \log_3 5 = \log_2 5$. Vậy ta đưa về cơ số 2.

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2(3^2.5)}{\log_2 3 + 1} = \dfrac{2a + \frac{a}{b}}{a+1} = \dfrac{2ab + a}{ab + b}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Ⓑ $1 < \log_a b < \log_b a$.

Ⓒ $\log_b a < \log_a b < 1$.

Ⓓ $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $1 < a < b \Rightarrow \begin{cases} \log_a 1 < \log_a a < \log_a b \\ \log_b 1 < \log_b a < \log_b b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 < \log_a b \\ 0 < \log_b a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 21. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

(A) $m = \dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).
(B) $m = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).
(C) $m = \dfrac{100 \times 1,03}{3}$ (triệu đồng).
(D) $m = \dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Đặt r là lãi suất hàng tháng và m là số tiền hoàn nợ mỗi tháng.
- Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ nhất là $T_1 = T(1+r) - m$.
- Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ hai là $T_2 = T_1(1+r) - m = T(1+a)^2 - m[1+(1+r)]$.
- Số tiền ông A nợ ngân hàng cuối tháng thứ ba là $T_3 = T_2(1+r) - m = T(1+r)^3 - m\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right]$

$T_3 = T(1+r)^3 - m\dfrac{(1+r)^3 - 1}{r}$.

Theo giả thiết có $T_3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{T.r.(1+r)^3}{(1+r)^3 - 1} = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$, xung quanh trục Ox.

(A) $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(B) $V = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
(C) $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $V = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$; $(a < b)$, xung quanh trục Ox được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(2x-1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

(A) 0,2m. (B) 2m. (C) 10m. (D) 20m.

Lời giải.

Chọn mốc thời gian là lúc bắt đầu đạp phanh. Thời điểm xe dừng hẳn là

$$v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2\text{s}$$

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:

$$S = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-5t+10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10\text{m}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin x\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = -\frac{1}{4}\pi^4$. (B) $I = -\pi^4$. (C) $I = 0$. (D) $I = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$

Đổi cận

x	0	π
u	1	-1

Nên $I = \int_1^{-1} u^3.(-\,\mathrm{d}u) = \int_{-1}^{1} u^3.\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4\Big|_{-1}^{1} = 0$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tính tích phân $I = \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

(A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = \frac{e^2-2}{2}$. (C) $I = \frac{e^2+1}{4}$. (D) $I = \frac{e^2-1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$, ta có:

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

(A) $\dfrac{37}{12}$. (B) $\dfrac{9}{4}$. (C) $\dfrac{81}{12}$. (D) 13.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là

$$\begin{aligned} S = \int_{-2}^{1} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

(A) $V = 4 - 2e$. (B) $V = (4 - 2e)\pi$. (C) $V = e^2 - 5$. (D) $V = (e^2 - 5)\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$ và trục hoành là

$$2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

$$V = \int_{0}^{1} \left[2(x-1)e^x\right]^2 \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{1} (x-1)^2 e^{2x} \mathrm{d}x$$

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)^2 e^{2x} \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = (x-1)^2 \\ \mathrm{d}v = e^{2x} \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2(x-1) \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$,

Ta có: $I = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x}\Big|_{0}^{1} - \displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)e^{2x} \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)e^{2x} \mathrm{d}x$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đặt $\begin{cases} u_1 = (x-1) \\ \mathrm{d}v_1 = e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}x \\ v_1 = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$,

Do đó $I = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}(x-1)e^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x \right) = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 \right) = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4} \right) = \dfrac{e^2-5}{4}$

Vậy $V = 4I = 4 \cdot \dfrac{e^2-5}{4} = e^2 - 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

(A) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$.

(B) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2.

(C) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$.

(D) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Lời giải.

Từ $z = 3 - 2i$ suy ra $\bar{z} = 3 + 2i$. Nên, phần thực của $\bar{z}$ bằng 3 và phần ảo của $\bar{z}$ bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

(A) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. (C) $|z_1 + z_2| = 1$. (D) $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải.

Ta có: $z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

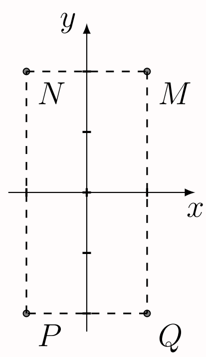
Chọn đáp án (A) □

Câu 31.

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

(A) Điểm P. (B) Điểm Q.

(C) Điểm M. (D) Điểm N.



Lời giải.

Ta có: $(1+i)z = 3 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{3-i}{1+i} = 1 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn của z là điểm $Q(1; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

(A) $w = 7 - 3i$. (B) $w = -3 - 3i$. (C) $w = 3 + 7i$. (D) $w = -7 - 7i$.

Lời giải.

Ta có: $z = 2 + 5i \Rightarrow w = iz + \bar{z} + i(2+5i) + 2 - 5i = 2i - 5 + 2 - 5i = -3 - 5i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

Ⓐ $T = 4$. Ⓑ $T = 2\sqrt{3}$. Ⓒ $4 + 2\sqrt{3}$. Ⓓ $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Ⓐ $r = 4$. Ⓑ $r = 5$. Ⓒ $r = 20$. Ⓓ $r = 22$.

Lời giải.

Giả sử $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $w = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w - i}{3 + 4i} = \dfrac{x + (y - 1)i}{3 + 4i} = \dfrac{3x - 4(y - 1) + [3(y - 1) + 4x]\, i}{25}$.

Do đó, ta có: $|z| = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3x - 4y + 4}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{4x + 3y - 3}{25}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 400$.

Suy ra $r = 20$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

Ⓐ $V = a^3$. Ⓑ $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. Ⓒ $V = 3\sqrt{3}a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải.

Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo $AC' = a\sqrt{3}$ nên có độ dài cạnh là a. Vậy thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. Ⓒ $V = \sqrt{2}a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \times SA = \dfrac{1}{3}a^2 \times a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $A.MNP$.

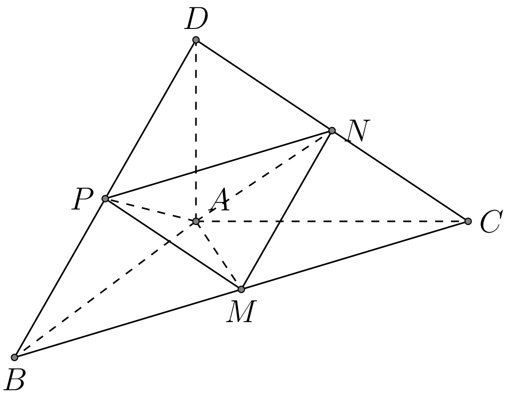
Ⓐ $V = \dfrac{7}{2}a^3$. Ⓑ $V = 14a^3$. Ⓒ $V = \dfrac{28}{3}a^3$. Ⓓ $V = 7a^3$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3$.

Dễ thấy $S_{MNP} = \frac{1}{2} S_{MNDP} = \frac{1}{4} S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3$.

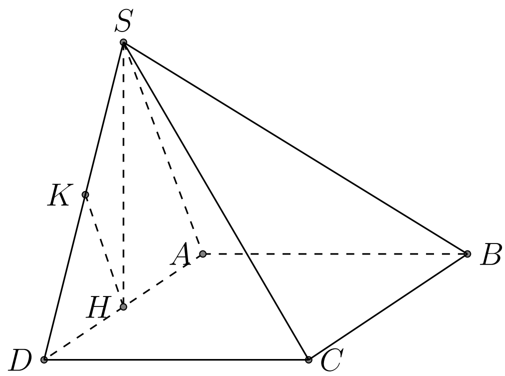


Chọn đáp án (D)

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $h = \frac{2}{3}a$. (B) $h = \frac{4}{3}a$. (C) $h = \frac{8}{3}a$. (D) $h = \frac{3}{4}a$.

Lời giải.



- Đặt $SH = x \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}a^3 \Rightarrow x = 2a$.
- Ta có $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{4a}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 39. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh ℓ của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

(A) $\ell = a$. (B) $\ell = \sqrt{2}a$. (C) $\ell = \sqrt{3}a$. (D) $\ell = 2a$.

Lời giải.

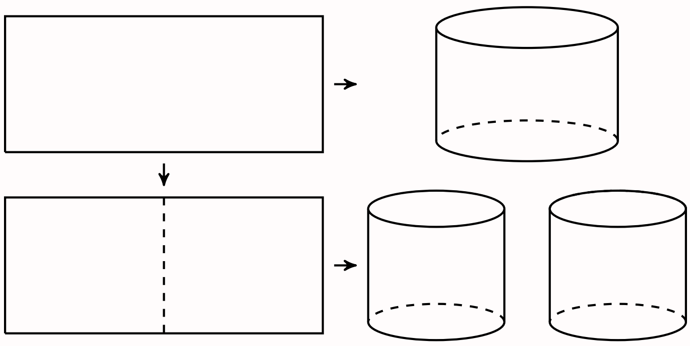
Đường sinh của hình nón có độ dài bằng đoạn $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Chọn đáp án (D)

Câu 40. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50 cm × 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



Ⓐ $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{V_1}{V_2}=1$. Ⓒ $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. Ⓓ $\dfrac{V_1}{V_2}=4$.

Lời giải.

Ban đầu bán kính đáy là R, sau khi cắt và gò ta được 2 khối trụ có bán kính đáy là $\dfrac{R}{2}$.
Đường cao của các khối trụ không thay đổi.

Ta có: $V_1=S_d\cdot h=\pi R^2\cdot h; V_2=2\left(S_{d_1}\cdot h\right)=2\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2\cdot h=\dfrac{\pi R^2 h}{2}$.

Khi đó: $\dfrac{V_1}{V_2}=2$.

Chọn đáp án C

Câu 41. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

Ⓐ $S_{tp}=4\pi$. Ⓑ $S_{tp}=2\pi$. Ⓒ $S_{tp}=6\pi$. Ⓓ $S_{tp}=10\pi$.

Lời giải.

Hình trụ có bán kính đáy $r=1$, chiều cao $h=1$ nên có $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=4\pi$.

Chọn đáp án A

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Ⓐ $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. Ⓑ $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. Ⓒ $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. Ⓓ $V=\dfrac{5\pi}{3}$.

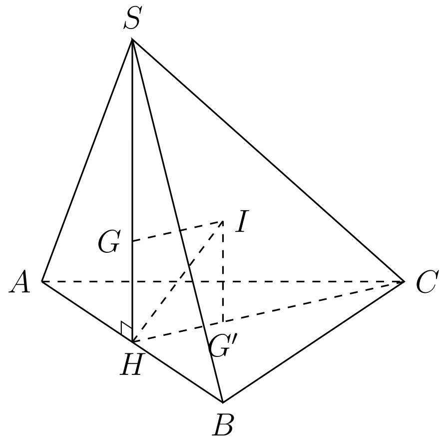
Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đặt R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.
Dựng hình như hình bên với IG' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và IG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $G'H = \dfrac{\sqrt{3}}{6}; GH = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Do vậy $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n_4} = (-1; 0; -1)$. (B) $\vec{n_1} = (3; -1; 2)$. (C) $\vec{n_3} = (3; -1; 0)$. (D) $\vec{n_2} = (3; 0; -1)$.

Lời giải.

Ta có : $(P): 3x + 0y - z + 2 = 0$ nên $(3; 0; -1)$ là tọa độ vectơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

(A) $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$. (B) $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.
(C) $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$. (D) $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

Dựa vào dạng tổng quát của phương trình mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

(A) $d = \dfrac{5}{9}$. (B) $d = \dfrac{5}{29}$. (C) $d = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$. (D) $d = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $d(A; (P)) = \dfrac{|3.1 + 4.(-2) + 2.3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$.
Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

(A) $m = -2$. (B) $m = 2$. (C) $m = -52$. (D) $m = 52$.

Lời giải.

- Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(5;1;1)$.
- Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(10;2;m)$.
- Δ vuông góc với (P) khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_\Delta}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Hay $\dfrac{10}{5}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{m}{1}$ suy ra $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A $x+y+2z-3=0$.
B $x+y+2z-6=0$.
C $x+3y+4z-7=0$.
D $x+3y+4z-26=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$x+(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-3=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A (S): $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$.
B (S): $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.
C (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.
D (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Lời giải.

- khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d=3$.
- bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.
- phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A Δ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.
B Δ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$.
C Δ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.
D Δ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Cách 1 :

- phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d là $(P): x+y+2z-5=0$.
- giao điểm của d và (P) là $B(2;1;1)$.

- khi đó đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua A và B có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$

Cách 2 :

- Gọi $B(1+b; b; -1+2b)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d.
- ta có Δ vuông góc với d nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ hay $b+b+2(2b-3) = 0$ suy ra $b = 1$ và $B(2; 1; 1)$.
- khi đó đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua A và B có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; \breve{}2; 0)$, $B(0; \breve{}1; 1)$, $C(2; 1; \breve{}1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

(A) 1 mặt phẳng. (B) 4 mặt phẳng.
(C) 7 mặt phẳng. (D) Có vô số mặt phẳng.

Lời giải.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) ta được (ABC): $x+z-1=0$. Kiểm tra tọa độ điểm D ta suy ra 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng.
- Gọi (P) là mặt phẳng cách đều 4 điểm ta có 2 trường hợp:
  + Trường hợp 1 (có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại): có 4 mặt phẳng.
  + Trường hợp 2 (mỗi phía có 2 điểm): có $C_3^2 = 3$ mặt phẳng.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017
Môn: Toán
Năm học: 2016 – 2017
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$?

A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $y = 2$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x+1}{x+1} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Số giao điểm của hai đồ thị chính bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

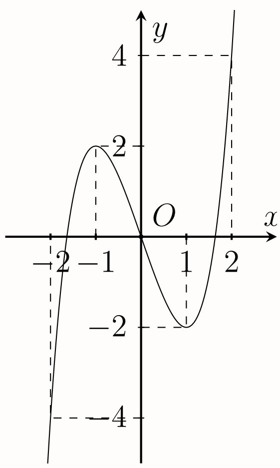
Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị có tất cả 2 giao điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 3.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

(A) $[-1; 2]$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(-1; 2]$. (D) $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên đã cho, phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$ hay $m \in (-1; 2)$ vì lúc đó, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) Cực tiểu của hàm số bằng -3. (B) Cực tiểu của hàm số bằng 1.

(C) Cực tiểu của hàm số bằng -6. (D) Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$
Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Cách 2: Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$
Khi đó: $y''(1) = 1 > 0$; $y''(-3) = -1 < 0$.
Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

(A) $216(m/s)$. (B) $30(m/s)$. (C) $400(m/s)$. (D) $54(m/s)$.

Lời giải.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = v(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$ trên đoạn $[0;10]$.
Ta có: $y' = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.
$y(6) = 54; y(0) = 0; y(10) = 30$.
Do hàm số $y = v(t)$ liên lục trên đoạn $[0;10]$ nên $\max\limits_{[0;10]} y = 54$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

(A) $x=-3$ và $x=-2$. (B) $x=-3$.
(C) $x=3$ và $x=2$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{2; 3\}$.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x-2)(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3}\right)} = \frac{-7}{6}.$$

Tương tự ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{-7}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{(x-2)(x-3)} = +\infty$

và $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A $(-\infty; -1]$. **B** $(-\infty; -1)$. **C** $[-1; 1]$. **D** $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min g(x)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min g(x) = -1$. Vậy $m \leq -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Biết $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A $y(-2) = 2$. **B** $y(-2) = 22$. **C** $y(-2) = 6$. **D** $y(-2) = -18$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

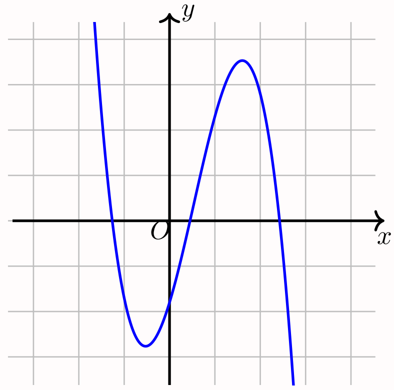
$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \\ y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ d=2 \\ 8a+4b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$$

. Vậy hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Suy ra $y(-2)=-18$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $a<0, b>0, c>0, d<0$.
B $a<0, b<0, c>0, d<0$.
C $a<0, b<0, c<0, d>0$.
D $a<0, b>0, c<0, d<0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a<0$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với trục Oy) nên $3ac<0 \Rightarrow c>0$.

Ta có: $y''=6ax+2b=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b}{3a}$.

Ta thấy điểm uốn là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung. Do đó $x=\dfrac{-b}{3a}<0 \Rightarrow b<0$.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0;d) \Rightarrow d<0$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.
B $\ln(ab)=\ln a.\ln b$.
C $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$.
D $\ln\dfrac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

Lời giải.

Với mọi số dương a, b ta có: $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$.

A $x=9$.
B $x=3$.
C $x=4$.
D $x=10$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

A 48 phút. **B** 19 phút. **C** 7 phút. **D** 12 phút.

Lời giải.

Ta có $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \dfrac{s(3)}{2^3} = 78125$

$s(t) = s(0).2^t \Rightarrow 2^t = \dfrac{s(t)}{s(0)} = 128 \Rightarrow t = 7.$

Chọn đáp án C

Câu 15. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $P = x^{\frac{1}{2}}$. **B** $P = x^{\frac{13}{24}}$. **C** $P = x^{\frac{1}{4}}$. **D** $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.

Chọn đáp án B

Câu 16. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. **B** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. **D** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right) = \log_2(2a^3) - \log_2(b) = \log_2(2) + \log_2(a^3) - \log_2(b) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$

Chọn đáp án A

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A $S = (2; +\infty)$. **B** $S = (-\infty; 2)$. **C** $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. **D** $S = (-1; 2)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{2}$. BPT $\Leftrightarrow x + 1 > 2x - 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của BPT là $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án C

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$.

A $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **B** $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

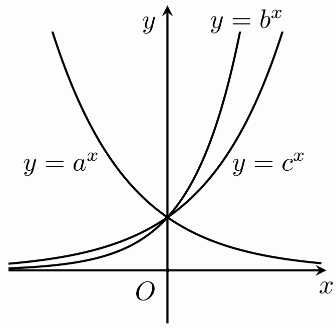
C $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **D** $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Chọn đáp án A

Câu 19.
Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < b < c$. (B) $a < c < b$. (C) $b < c < a$. (D) $c < a < b$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $0 < a < 1$ và $b, c > 1$

$\forall x_\circ : \begin{cases} y_1 = b^{x_\circ} \\ y_2 = c^{x_\circ} \end{cases}$ từ đồ thị ta thấy $y_1 > y_2 \Leftrightarrow b^{x_\circ} > c^{x_\circ} \Leftrightarrow b > c$. Vậy $a < c < b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

(A) $[3; 4]$. (B) $[2; 4]$. (C) $(2; 4)$. (D) $(3; 4)$.

Lời giải.

Ta có $6^x + (3-m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$

+ TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

+ $f'(x) = \dfrac{12^x.\ln 3 + 6^x.\ln 6 + 3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1)có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ khi $m \in (2; 4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

(A) $P_{\min} = 19$. (B) $P_{\min} = 13$. (C) $P_{\min} = 14$. (D) $P_{\min} = 15$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log^2_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$= 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$
$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b$, điều kiện $t > 0$ (vì $a > b > 1$).

Xét $P = 4(1+t)^2 + \dfrac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \dfrac{3}{t} + 4 = f(t)$.

Ta có$f'(t) = 8t + 8 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \dfrac{(2t-1)(4t^2+6t+3)}{t^2}$

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y				$+\infty$ ↘	15	↗ $+\infty$	

Ta suy ra $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$. .
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. .
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$

(A) $I = 1$.
(B) $I = -1$.
(C) $I = 3$.
(D) $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

(A) $F(3) = \ln 2 - 1$.
(B) $F(3) = \ln 2 + 1$.
(C) $F(3) = \frac{1}{2}$.
(D) $F(3) = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \ln|x-1| + C$.
Do $F(2) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow F(x) = \ln|x-1| + 1$.
Khi đó $F(3) = \ln 2 + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 32$.
(B) $I = 8$.
(C) $I = 16$.
(D) $I = 4$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4$.

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^4 \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Biết $I = \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

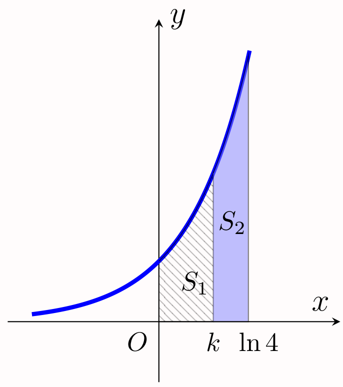
(A) $S = 6$. (B) $S = 2$. (C) $S = -2$. (D) $S = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C$.
Vậy $I = (\ln|x| - \ln|x+1|)\big|_3^4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$ nên $a = 4, b = -1, c = -1 \Rightarrow S = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27.
Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k\,(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

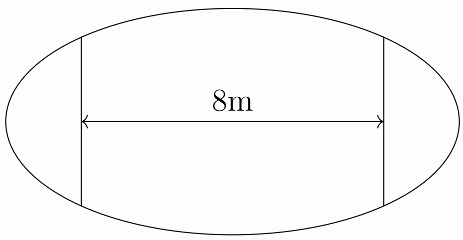
(A) $k = \frac{2}{3}\ln 4$. (B) $k = \ln 2$. (C) $k = \ln\frac{8}{3}$. (D) $k = \ln 3$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = \int\limits_0^k |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^k - 1$ và $S_2 = \int\limits_k^{\ln 4} |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = 4 - \mathrm{e}^k$.
Theo đề bài $S_1 = 2S_2 \Rightarrow \mathrm{e}^k - 1 = 2(4 - \mathrm{e}^k) \Leftrightarrow \mathrm{e}^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 28.
Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



(A) 7.862.000 đồng. (B) 7.653.000 đồng.
(C) 7.128.000 đồng. (D) 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ vào tâm của khu vườn, khi đó khu vườn có phương trình là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$.

Phần đồ thị phần phía trên trục Ox có phương trình là $y=f(x)=5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}$.

Do vậy diện tích của dải đất là $S=2\int\limits_{-4}^{4}5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=8\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=8\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\cos t\geqslant 0$.

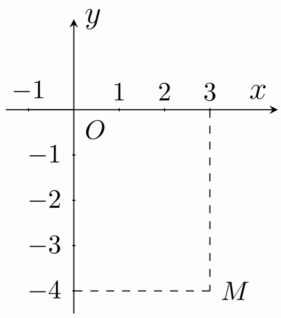
Đổi cận: $x=-4\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}; x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S=80\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=40\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=40\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^2).$$

Do đó, số tiền cần dùng là $100.000S\approx 7.653.000$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



(A) Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

(B) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

(C) Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

(D) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải.

Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Dựa vào hình vẽ suy ra $M(3;-4)\Rightarrow$ phần thực $a=3$, phần ảo $b=-4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

(A) $\overline{z}=3-i$. (B) $\overline{z}=-3+i$. (C) $\overline{z}=3+i$. (D) $\overline{z}=-3-i$.

Lời giải.

Ta có $z=-3+i\Rightarrow\overline{z}=-3-i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$.

(A) $|z|=\sqrt{34}$. (B) $|z|=34$. (C) $|z|=\frac{5\sqrt{34}}{3}$. (D) $|z|=\frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

$z(2-i)+13i=1\Leftrightarrow z=\frac{1-13i}{2-i}\Leftrightarrow z=\frac{(1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\Leftrightarrow z=3-5i$.

$|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

Ⓐ $M_1\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Ⓑ $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$. Ⓒ $M_3\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. Ⓓ $M_4\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4z^2-16z+17=0$ có $\Delta'=64-4.17=-4$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=\dfrac{8-2i}{4}=2-\dfrac{1}{2}i$, $z_2=\dfrac{8+2i}{4}=2+\dfrac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=2+\dfrac{1}{2}i$.

Ta có $w=iz_0=-\dfrac{1}{2}+2i$. Điểm biểu diễn $w=iz_0$ là $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$.

Ⓐ $P=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $P=1$. Ⓒ $P=-1$. Ⓓ $P=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$ (1).

Ta có $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Thay vào (1) ta được

$(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow(a-b)i+(3a-b)=3+2i\Leftrightarrow(a-b)i+(3a-b)=3+2i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\3a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}\Rightarrow P=-1.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

Ⓐ $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. Ⓑ $|z|>2$. Ⓒ $|z|<\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i\Leftrightarrow(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}+i(1+2i)\Leftrightarrow(1+2i)(|z|-i)=\dfrac{\sqrt{10}}{z}$

$\Rightarrow\left|(1+2i)(|z|-i)\right|=\left|\dfrac{\sqrt{10}}{z}\right|\Rightarrow|1+2i|\cdot\big||z|-i\big|=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}$ (*)

Đặt $t=|z|$ thì $t\in\mathbb{R}$, $t>0$ và (*) $\Leftrightarrow\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2+1}=\dfrac{\sqrt{10}}{t}\Leftrightarrow t^4+t^2=2\Rightarrow t=1$ (do $t>0$).

Vậy $|z|=t=1\Rightarrow\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

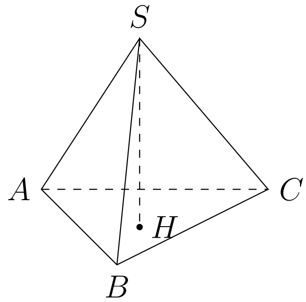
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

Ⓐ $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. Ⓑ $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Ⓒ $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Ⓓ $h=\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Do đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$ nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Mà $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}.h \Rightarrow h = \dfrac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = \sqrt{3}a$.



Chọn đáp án (D)

Câu 36. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

(A) Tứ diện đều.
(B) Bát diện đều.
(C) Hình lập phương.
(D) Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.

Dễ dàng thấy bát diện đều, hình lập phương và lăng trục lục giác đều có tâm đối xứng.
Còn tứ diện đều không có tâm đối xứng.
Chọn đáp án (A)

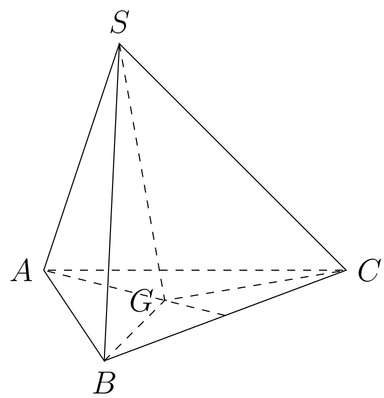
Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

(A) $V = 3$.
(B) $V = 4$.
(C) $V = 6$.
(D) $V = 5$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(G, BC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, BC) \Rightarrow S_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

$$V_{S.GBC} = \frac{1}{3}.S_{\triangle GBC}.\,\mathrm{d}(S,(ABC))$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}.S_{\triangle ABC}.\,\mathrm{d}(S,(ABC)) = \frac{1}{3}.V_{S.ABC} = 4.$$



Chọn đáp án (B)

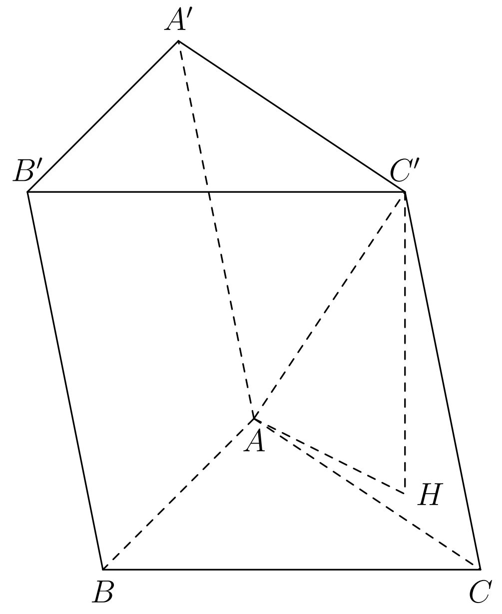
Câu 38. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $V = \dfrac{8}{3}$.
(B) $V = \dfrac{16}{3}$.
(C) $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
(D) $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của C' lên đáy $(ABC) \Rightarrow \widehat{C'AH} = 60^\circ \Rightarrow C'H = AC'\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.
Từ đó ta có
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$\Rightarrow V_{ABCB'C'} = 2V_{AC'BC} = 2\dfrac{1}{3}C'HS_{ABC} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N)

(A) $V = 12\pi$. (B) $V = 20\pi$. (C) $V = 36\pi$. (D) $V = 60\pi$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl$ nên $15\pi = 3\pi l \Rightarrow l = 5$.
Suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4$.
Do đó $V = \dfrac{1}{2}hS_{\text{Đáy}} = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = 12\pi$.
Chọn đáp án (A) □

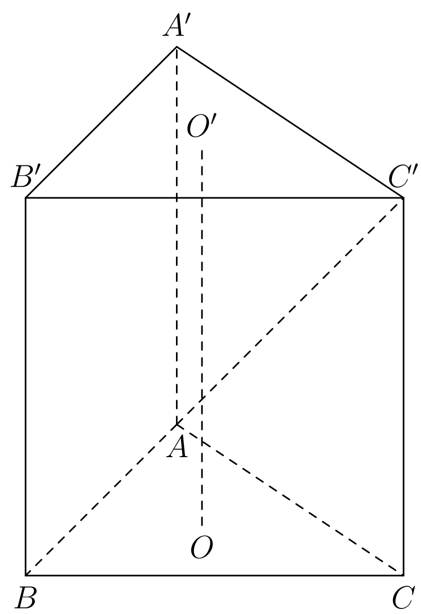
Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. (B) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$. (C) $V = 3\pi a^2 h$. (D) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$.

Lời giải.

Khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho cũng có chiều cao là $h = OO'$, trong đó O, O' lần lượt là tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Bán kính đáy của khối trụ chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt đáy là $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích lăng trụ là $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.



Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Chọn đáp án (B)

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

(A) $R = 3a$. (B) $R = \frac{3a}{4}$. (C) $R = \frac{3a}{2}$. (D) $R = 2a$.

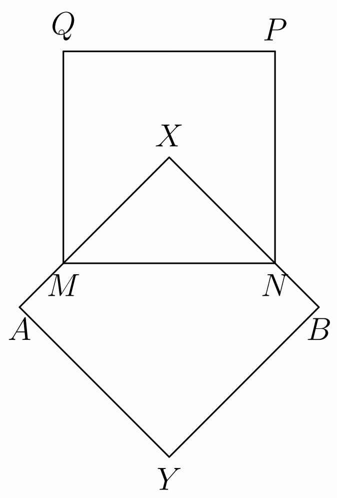
Lời giải.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp$ABB'C'$ bằng với bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho và cũng bằng nửa độ dài đường chéo dài nhất của hình hộp. Suy ra $R = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 42.

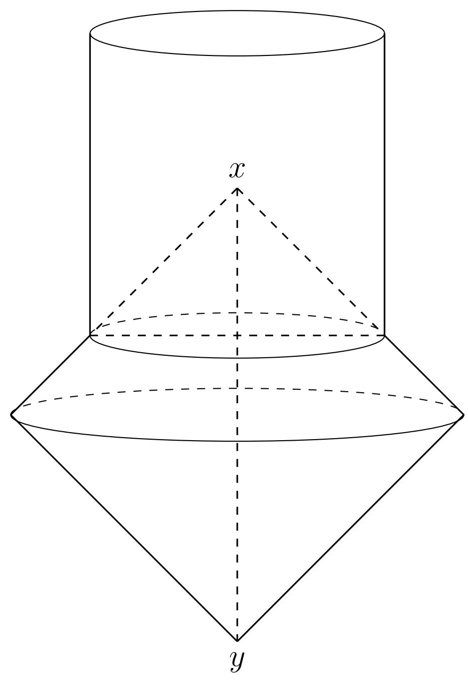
Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



(A) $V = \frac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. (B) $V = \frac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

(C) $V = \frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. (D) $V = \frac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

Lời giải.



Ta thấy rằng khi xoay hình xung quanh trục XY thì hình vuông ở trên sẽ tạo thành hình trụ có bán kính đáy là $\frac{5}{2}$ và chiều cao là 5, khi đó thể tích của nó là $V_1 = 5\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125\pi}{4}$.

Hình vuông ở dưới sẽ tạo thành hai hình nón có chung mặt đáy và có đường kính đáy là AB như hình bên. Chiều cao và bán kính đáy của hình nón này là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ nên thể tích của khối hai nón ghép lại là $V_2 = 2\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$.

Tuy nhiên, hai hình này có chung phần hình nón tạo thành khi xoay phần màu cam xung quanh XY. Dễ thấy phần chung này cũng là hình nón nhưng chiều cao và bán kính đáy là $\frac{5}{2}$. Do đó, thể tích phần chung là $V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{24}$.

Vậy $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(-2;2;1)$. B. $I(1;0;4)$. C. $I(2;0;8)$. D. $I(2;-2;-1)$.

Lời giải.

Trung điểm AB là $(1;0;4)$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=2+3t\\z=5-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u_1}=(0;3;-1)$. B. $\vec{u_2}=(1;3;-1)$. C. $\vec{u_3}=(1;-3;-1)$. D. $\vec{u_4}=(1;2;5)$.

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(0;3;-1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;0)$;$C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$. B. $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{3}=1$. C. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. D. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua 3 điểm A, B, C là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Gọi mặt cầu cần tìm là (S).
Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính R.
Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$ nên ta có
$R=d(I;(P))=\dfrac{|1-2.2-2.(-1)-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. d cắt và không vuông góc với (P). B. d vuông góc với (P).
C. d song song với (P). D. d nằm trong (P).

Lời giải.

Ta có đường thẳng d đi qua $M(-1;0;5)$ có vtcp $\vec{u}=(1;-3;-1)$ và mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(3;-3;2)$. $M\notin P \Rightarrow$ loại đáp án D.
$\vec{n},\vec{u}$ không cùng phương $\Rightarrow$ loại đáp án B.
$\vec{n}.\vec{u}=10 \Rightarrow \vec{n},\vec{u}$ không vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án C.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{AM}{BM}=2$. C $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$. D $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Lời giải.

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}(k\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=7k\\ -3=3k\\ z-1=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-9\\ -1=k\\ z=0\end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0)$. $\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)\Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB$.

Cách khác $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{d(A;(Oxz))}{d(B;(Oxz))}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A $(P): 2x-2z+1=0$. B $(P): 2y-2z+1=0$.
C $(P): 2x-2y+1=0$. D $(P): 2y-2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$.
d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$.
Vì (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$.
Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C.
Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$ của AB.
Do đó $P: 2y-2z+1=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0;n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A $R=1$. B $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C $R=\dfrac{3}{2}$. D $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy).
Ta có phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+z=1$.
Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx+my+mnz-mn=0$.
Mặt khác $\mathrm{d}(I;(ABC))=\dfrac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1$.
$\Rightarrow ID=\mathrm{d}((I;(ABC))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R = 1$.
Chọn đáp án A □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2017

Môn: Toán

Năm học: 2016 – 2017

Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-3

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \dfrac{1}{x}$. B. $y' = \dfrac{\ln 10}{x}$. C. $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$. D. $y' = \dfrac{1}{10 \ln x}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0$.

A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-1; +\infty)$. C. $S = (-2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x + 1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a = 3; b = 2$. B. $a = 3; b = 2\sqrt{2}$. C. $a = 3; b = \sqrt{2}$. D. $a = 3; b = -2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 3 và $-2\sqrt{2}$. Vậy $a = 3$; $b = -2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tính môđun của số phức z biết $\overline{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

A. $|z| = 25\sqrt{2}$. B. $|z| = 7\sqrt{2}$. C. $|z| = 5\sqrt{2}$. D. $|z| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = (4 - 3i)(1 + i) = 7 + i \Rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7.
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $y_{\text{CĐ}}=5$.
(B) $y_{\text{CT}}=0$.
(C) $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$.
(D) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

- $y_{\text{CĐ}}=5$, $y_{\text{CT}}=4$ chọn A.
- $x_{\text{CT}}=0$, $x_{\text{CĐ}}=1$ nên loại B.
- Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên loại $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$, $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$.

(A) $I(-1;2;-4)$, $R=5\sqrt{2}$.
(B) $I(-1;2;-4)$, $R=2\sqrt{5}$.
(C) $I(1;-2;4)$, $R=20$.
(D) $I(1;-2;4)$, $R=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

- Pt mặt cầu $(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2+(z-z_\circ)^2=R^2$ có tâm là $I(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$, bán kính là: R.
- Do đó mặt cầu $(x-1)^2+(y-(-2))^2+(z-4)^2=(2\sqrt{5})^2$ có tâm $I(1;-2;4)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

chính tắc của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=3t\\ z=-2+t\end{cases}$?

Ⓐ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số ta suy ra d qua $A(1;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;3;1)$ nên suy ra d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$.

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$.

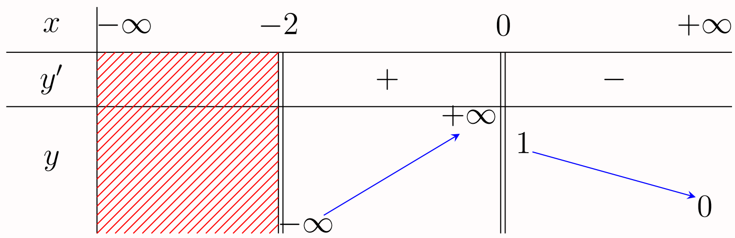
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11.
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu tiệm cận?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.



Lời giải.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Tóm lại, đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$.

Ⓐ $P=1$.

Ⓑ $P=7-4\sqrt{3}$.

Ⓒ $P=7+4\sqrt{3}$.

Ⓓ $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$.

Lời giải.

Ta viết lại $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)\right)^{2016}$. Sử dụng máy tính, tính được $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)=-1$. Suy ra $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)(-1)^{2016}=\left(7+4\sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho a là số thực dương, $a\neq 1$ và $P=\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P=1$. (B) $P=1$. (C) $P=9$. (D) $P=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P=P=\log_{a^{1/3}} a^3=9\log_a a=9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

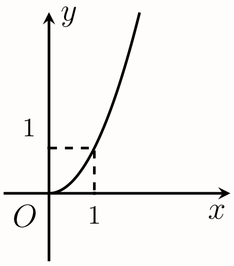
(A) $y=3x^3+3x-2$. (B) $y=2x^3-5x+1$. (C) $y=x^4+3x^2$. (D) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Lời giải.

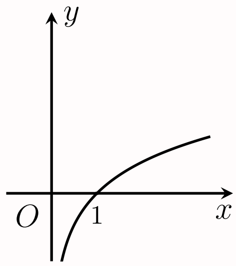
- Xét $y=3x^3+3x-2$ có $y'=9x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên chọn $y=3x^3+3x-2$.
- Xét $y=2x^3-5x+1$ có $y'=6x^2-5, y'=0$ là phương trình bậc 2 có nghiệm nên không thể đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.
- Xét $y=x^4+3x^2$ có $y'=4x^3+6x; y'=0$ có nghiệm $x=0$ nên y' sẽ đổi dấu khi qua $x=0$ nên không thể đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.
- Xét $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ nên không thể đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

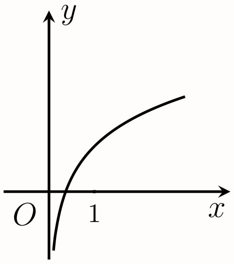
Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó.

(A) 

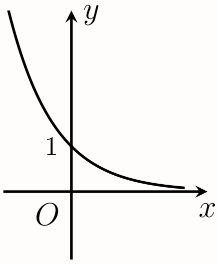
.

(B) 

.

(C) 

.

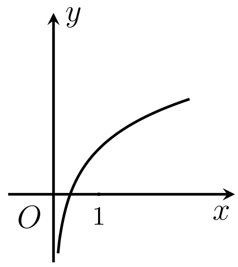
(D) 

.

Lời giải.

Chúng ta có $y = f'(x) = \ln x + 1$ nên

- $y = \ln x + 1$ là hàm số xác định trên $(0; +\infty)$.
- $y(1) = \ln 1 + 1 = 1$, tức là đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$.



Từ đó suy ra, trong bốn đồ thị đã cho ở các phương án A, B, C, D chỉ có đồ thị hình bên là thỏa mãn các tính chất trên của hàm số $y = f'(x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tính thể tích V của khối lặng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $V = B \cdot h = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$. B. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.

C. $D(6; 0; 0)$ hoặc $D(12; 0; 0)$. D. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

Lời giải.

Do $D \in Oy$ nên $D = (d; 0; 0)$.

Khi đó $AD = \sqrt{(d-3)^2 + (16)}$, $BC = 5$.

Theo giả thiết $AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(d-3)^2 + (16)} = 5 \Leftrightarrow (d-3)^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow (d-3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-3 = -3 \\ d-3 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(0; 0; 0) \\ D(6; 0; 0) \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị của $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = -1$. D. $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = (z_1 + z^2)^2 - z_1 z_2$.Theo vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_2 = 1 \end{cases}$.

Suy ra $P = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. B. $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 7$. C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \dfrac{33}{5}$. D. $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{3x^3-8}{x^3}$;$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$. Ta có bảng biến thiên:

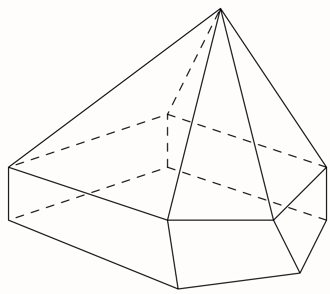
x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$		$+\infty$
y'	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (A) □

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

Câu 20.
Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

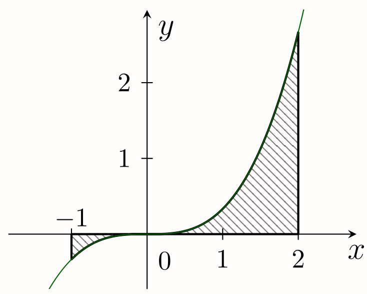
(A) 6.
(B) 10.
(C) 12.
(D) 11.



Câu 21.
Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $S = b - a$.
(B) $S = b + a$.
(C) $S = -b + a$.
(D) $S = -b - a$.

; ;



Lời giải.

Ta có: $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

(A) $S = \{-3; 3\}$.
(B) $S = \{4\}$.
(C) $S = \{3\}$.
(D) $S = \left\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right\}$.

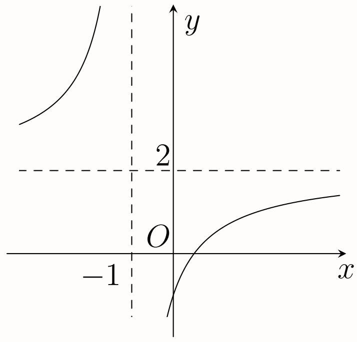
Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.
Ta có

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x-1)(x+1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

So với điều kiện, ta được: $x = 3$.
Vậy phương trình trên có tập nghiệm $S = \{3\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong 4 hàm số được liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
(C) $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $x = 0$ thì $y < 0$ nên loại hai hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ và $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$ không thỏa mãn.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$ nên hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ không thỏa mãn.
Vậy, trong 4 hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ thỏa mãn.
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = 2\displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. (B) $I = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. (C) $I = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. (D) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

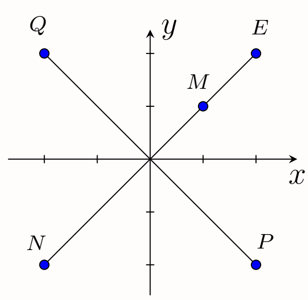
Lời giải.

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$.

Do đó: $I = \displaystyle\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25.
Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



(A) Điểm N. (B) Điểm Q. (C) Điểm E. (D) Điểm P.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a; b)$.
$\Rightarrow 2z = 2a + 2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a; 2b)$.
Ta có $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1 \equiv E$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

(A) $l = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$. (B) $l = 2\sqrt{2}a$. (C) $l = \dfrac{3a}{2}$. (D) $l = 3a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl = \pi al = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

(A) $S = 2$. (B) $S = -2$. (C) $S = 0$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = \int_0^1 \frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(e^x+1)}{e^x+1} = x\Big|_0^1 - \ln|e^x+1|\Big|_0^1 = 1 - \ln\frac{1+e}{2}.$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a^3 + b^3 = 0.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$. (B) $V = \pi a^3$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Vì khối trụ ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng a nên $\begin{cases} R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ h = a \end{cases}$. Do đó $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

(A) $x + y - 3z - 8 = 0$. (B) $x - y - 3z + 3 = 0$.

(C) $x + y + 3z - 9 = 0$. (D) $x + y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

(A) $d = \dfrac{1}{3}$. (B) $d = \dfrac{5}{3}$. (C) $d = \dfrac{2}{3}$. (D) $d = 2$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-2;-1)$.
Ta có $\vec{u}.\vec{n}=2.2+1.(-2)+2.(-1)=0$.
Thế tọa độ $M(1;-2;1)$ vào phương trình của mặt phẳng (P) ta có $2+4-1+1=0$ (vô lý).
Vậy $\Delta \mathbin{/\!/} (P)$.
Suy ra $d\left(\Delta,(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|2.1-2.(-2)-1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=2$.

Chọn đáp án D

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ **không** có cực đại.

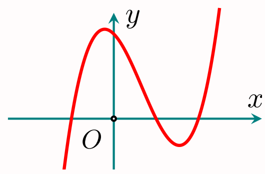
A) $1\le m\le 3$. B) $m\le 1$. C) $m\ge 1$. D) $1<m\le 3$.

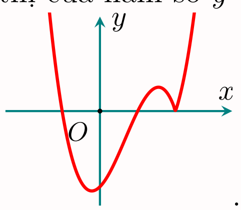
Lời giải.

Ta có $y'=4(m-1)x^3-4(m-3)x=4x\left[(m-1)x^2-(m-3)\right]$
Xét với $m=1$: Khi đó $y=4x^2+1$ hàm số không có cực đại. Vậy $m=1$ thỏa mãn (1)
Xét với $m>1$: Khi đó hàm số là hàm bậc 4 trùng phương với hệ số $a>0$ để hàm số không có cực đại thì $y'=0$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x=0$.
Hay $(m-1)x^2-(m-3)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$.
$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{m-3}{m-1}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m-1}\leqslant 0 \Leftrightarrow 1<m\leqslant 3$ (2)
Xét với $m<1$: Hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a<0$ luôn có cực đại (3)
Kết luận: Từ (1), (2), (3) ta có để hàm số không có cực đại thì $1\leqslant m\leqslant 3$.

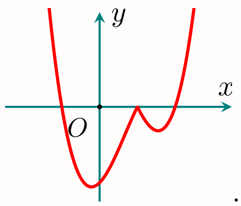
Chọn đáp án A

Câu 32.
Hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=|x-2|(x^2-1)$?

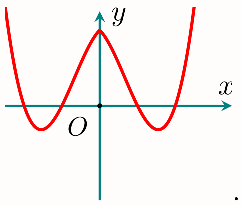


A) 

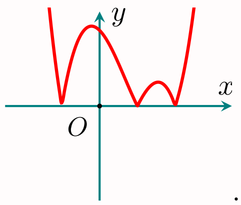
.

B) 

.

C) 

.

D) 

.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ có đồ thị (C)
Ta có $y=|x-2|\left(x^2-1\right)=\begin{cases}(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x\geqslant 2\\ -(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x<2\end{cases}$
Cách vẽ đồ thị hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$ như sau:
• Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với $x\geqslant 2$.
• Lấy đối xứng đồ thị (C) ứng với $x<2$ qua trục Ox. Bỏ đồ thị (C) ứng với $x<2$.
Hợp 2 phần đồ thị trên là đồ thị hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$.

Chọn đáp án A

Câu 33. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

(A) $P = -5 + 3\sqrt{3}$. (B) $P = -1 + \sqrt{3}$. (C) $P = -1 - \sqrt{3}$. (D) $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận.

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.

Chọn $a = 2$, $b = 2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P = -1 - \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1 \leqslant x \leqslant 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

(A) $V = 32 + 2\sqrt{15}$. (B) $V = \frac{124\pi}{3}$.

(C) $V = \frac{124}{3}$. (D) $V = \left(32 + 2\sqrt{15}\right)\pi$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là: $V = \displaystyle\int_1^3 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2}\,\mathrm{d}x$.

Sử dụng MTCT ta được : $V = \frac{124}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$y' = 6(x-1) + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2 - 3}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

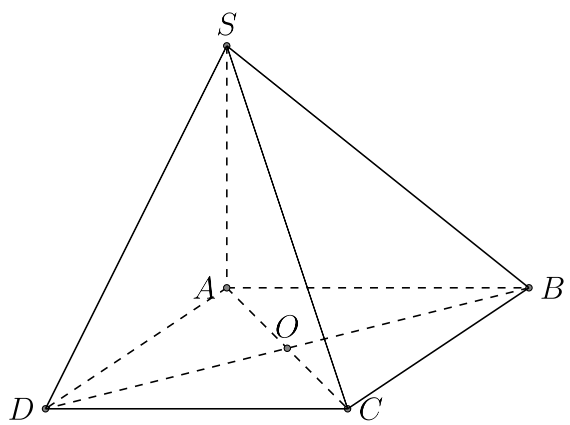
Vì $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **B** $V = \sqrt{3}a^3$. **C** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Góc giữa SD và mp (SAB) là $\widehat{ASD} = 30° \Rightarrow SA = a \cdot \cot 30° = \sqrt{3}a$.

Khi đó $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương hình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2;-1;4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P) : x + 3 = 0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTPT là $[\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (0;4;1)$

$\Rightarrow (Q) : 4y + z + 17 = 0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$\begin{cases} 4y + z + 17 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Cách 2. Trắc nghiệm.

Gọi $I = d \cap (\alpha)$, suy ra $I(-3;-3;-5)$.

Dễ thấy chỉ có đáp án D thỏa mãn

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = -12$. Ⓑ $I = 8$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $I = -8$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -10 + 2 = -8$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
$|z - i| = 5 \Leftrightarrow |x + iy - i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25$.
z^2 là số thuần ảo hay $(x + iy)^2$ là số thuần ảo
$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2$ là số thuần ảo $\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.
Vậy ta có hệ phương trình
$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x = y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x = -y. \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x = y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x = -y. \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 12 = 0 \\ x = y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y^2 - y - 12 = 0 \\ x = -y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = -3 \\ x = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = -3 \\ x = 3. \end{cases}$
Vậy ta có 4 số phức thỏa mãn điều kiện trên.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $2y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Ⓑ $y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$. Ⓒ $y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Ⓓ $2y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Cách 1. $y' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$y'' = \frac{(1-\ln x)' \cdot x^2 - (x^2)'(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4} = -\frac{1+2(1-\ln x)}{x^3}$$
$$= -\frac{3-2\ln x}{x^3}.$$

Suy ra $2y' + xy'' = 2 \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} - x\frac{3-2\ln x}{x^3} = \frac{2-2\ln x - 3 + 2\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy = \ln x$, lấy đạo hàm hai vế theo biến x, ta được $y + xy' = \frac{1}{x}$.

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế theo biến x của biểu thức trên ta được $y' + y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$ hay $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

TH1. $m = 1$. Ta có $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2. $m = -1$. Ta có $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3. $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)^2 + 3(m^2-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)(4m+2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P). Tính OA'.

A $OA' = 3\sqrt{26}$. B $OA' = 5\sqrt{3}$. C $OA' = \sqrt{46}$. D $OA' = \sqrt{186}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với mp (P) nên d có VTCP là $\vec{u_d} = \vec{n_P} = (6; -2; 1)$

PTTS của d: $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t. \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A trên mp (P). Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình:
$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t \\ 6x - 2y + z - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 5 \\ y = 1 \\ z = 7 \end{cases}$ Suy ra $H(5;1;7)$.

Vì A' là điểm đối xứng của A qua (P) nên H là trung điểm của AA'. Suy ra $A'(11;-1;8)$.

Vậy $OA' = \sqrt{186}$.

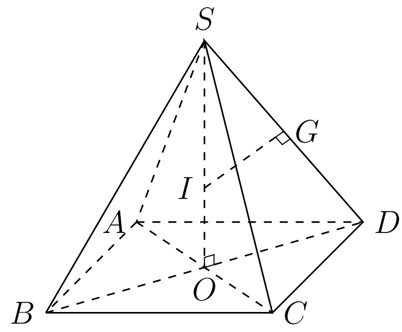
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $R=\sqrt{3}a$. Ⓑ $R=\sqrt{2}a$. Ⓒ $R=\dfrac{25a}{8}$. Ⓓ $R=2a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD,
$GI\perp SD, I\in SO$.
Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD=3\sqrt{2}a.\sqrt{2}=6a$, $OD=3a$.
Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=4a$.
Ta có $\triangle SGI$ đồng dạng với $\triangle SOD$ (g-g), suy ra
$\dfrac{SO}{SG}=\dfrac{SD}{SI}\Rightarrow 4a.R=\dfrac{1}{2}(5a)^2\Rightarrow R=\dfrac{25a}{8}\cdot$



Chọn đáp án Ⓒ

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=-6$. Ⓑ $I=0$. Ⓒ $I=-2$. Ⓓ $I=6$.

Lời giải.

Cách 1. Tự luận.
Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=-\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{3\pi}{2}$. Suy ra $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t$.

Mặt khác $f(t)+f(-t)=\sqrt{2+2\cos 2t}=\sqrt{4\cos^2 t}=2|\cos t|$ (thay $x=t$).

Ta có $2I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

$$I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t.\ \left(\text{Do } |\cos t| \text{ là hàm số chẵn trên đoạn } \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right)$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=2\sin t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$$

Cách 2. Trắc nghiệm.
Ta có: $f(x)+f(-x)=2|\cos x| \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=|\cos x|+|\cos(-x)|$
nên ta có thể chọn $f(x)=|\cos x|$.

Suy ra $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 6$ (bấm máy).

Chọn đáp án (D)

Câu 45. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

(A) 2017. (B) 4014. (C) 2018. (D) 4015.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-1$ và $x\neq 0$.

$\log(mx)=2\log(x+1) \Leftrightarrow mx=(x+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}\ (x>-1, x\neq 0)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1(\text{ loại}) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$0 \searrow -\infty$		||	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow +\infty$	

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Vì $m\in[-2017;2017]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là $m\in\{-2017;-2016;\cdots;-1;4\}$.

Chú ý : Trong, ta đã bỏ qua điều kiện $mx>0$ vì với phương trình $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ với $0<a\neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x)>0$ (hoặc $g(x)>0$)

Chọn đáp án (C)

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) 0. (B) 6. (C) -6. (D) 3.

Lời giải.

$y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x \Rightarrow y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$\Delta'=m^2-(m^2-1)=1$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m+1, \dfrac{m^3-3m-2}{3}\right); B\left(m-1, \dfrac{m^3-3m+2}{3}\right)$

Hai điểm A, B khác phía với đường thẳng d và có khoảng cách tới d bằng nhau tức là trung điểm I của AB thuộc đường thẳng d, ta có:

$I\left(m,\dfrac{m^3-3m}{3}\right)\in(d)\Rightarrow m^3-18m+27=0$

Ta có $(m-3)(m^2+3m-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử điểm $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho cùng phương với $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N là lớn nhất. Tính MN.

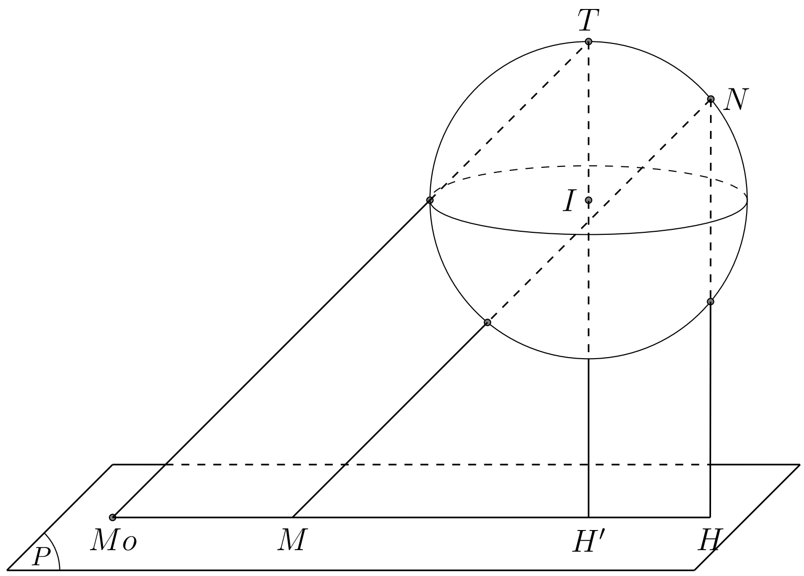
(A) $MN=3$. (B) $MN=1+2\sqrt{2}$. (C) $MN=3\sqrt{2}$. (D) $MN=14$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ bán kính $R=1$.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|-1-4+2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2>R$ nên (P) không cắt (S).

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Gọi T là giao điểm của d và mặt cầu (S) thỏa $d(T;(P))>d(I;(P))$.



Ta có $d(T,(P))=d(I,(P))+R=2+1=3$.

Ta có $\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_{(P)}}\right)=\dfrac{1.1-2.0+1.2}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đường thẳng MN có véctơ chỉ phương là $\vec{u}$ nên ta có

$\sin(MN,(P))=|\cos(\vec{u},\overrightarrow{n_P})|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(MN,(P))=45^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của N lên (P). Ta có $MN=\dfrac{NH}{\sin45^\circ}=NH.\sqrt{2}$.

Do đó MN lớn nhất khi NH lớn nhất.

Điều này xảy ra khi $N\equiv T$ và $H\equiv H'$ với H' là hình chiếu của I lên (P).

Khi đó $NH_{\max}=TH'=3$ và $MN_{\max}=NH_{\max}.\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

(A) $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$.

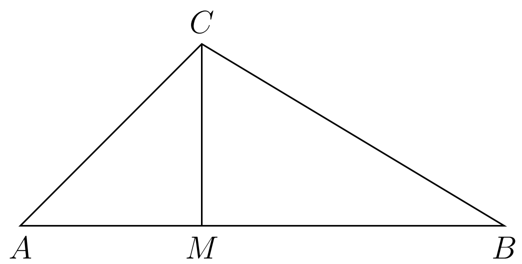
(B) $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

(C) $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$.

(D) $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z. Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.
Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2}\Rightarrow MA+MB=AB$.
Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB.
Phương trình đường thẳng $AB: y=x+3$, với $x\in[-2;4]$.
Ta có $|z-1+i|=MC\Rightarrow |z-1+i|^2=MC^2=(x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(x+4)^2=2x^2+6x+17$
Đặt $f(x)=2x^2+6x+17$, $x\in[-2;4]$.
$f'(x)=4x+6$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ (nhận)
Ta có $f(-2)=13$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$, $f(4)=73$.
Vậy $f(x)_{\max}=f(4)=73$, $f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$.
$\Rightarrow M=\sqrt{73}$, $m=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. $\Rightarrow P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.
Cách 2. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z.
Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.
Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2}\Rightarrow MA+MB=AB$
Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB.

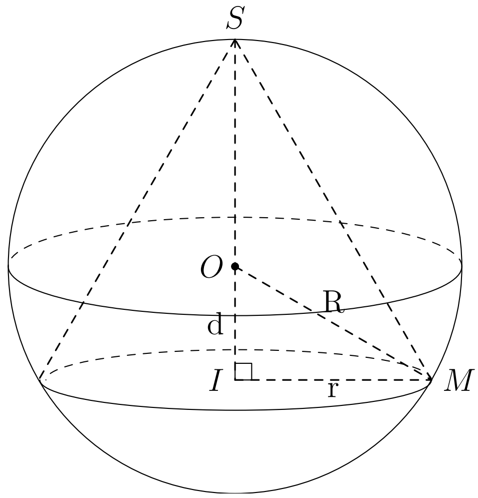


Phương trình đường thẳng $AB: y=x+3$, với $x\in[-2;4]$.
$CM_{\min}=\mathrm{d}(C;AB)=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.
$CB=\sqrt{73}; CA=\sqrt{13}\Rightarrow CM_{\max}=CB=\sqrt{73}$.
Vậy $P=\sqrt{73}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{73}+5\sqrt{2}}{2}$
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là $h(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

(A) $h=\sqrt{3}R$.
(B) $h=\sqrt{2}R$.
(C) $h=\dfrac{4R}{3}$.
(D) $h=\dfrac{3R}{2}$.

Lời giải.



Ta biết rằng khi cho trước đường tròn (C) bất kỳ nằm trên mặt cầu, hình nón (N) có đáy là (C) sẽ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi điểm S thỏa mãn SO vuông góc với mặt phẳng chứa (C). Vậy trong bài toán này ta chỉ xét các hình nón đỉnh S với điểm S thỏa SO vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến (C).
Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là
$V = \frac{1}{3}h.S_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R)$.
Xét hàm $f(h) = -h^3 + 2h^2R, h \in (R, 2R)$, có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.
$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ hoặc $h = \frac{4R}{3}$. Lập bảng biến thiên ta tìm được $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$, tại $h = \frac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V = \frac{1}{3}\pi\frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \frac{4R}{3}$.
C.ách khác:
Gọi O là tâm mặt cầu, I và r là bán kính của đường tròn (C).
Ta có $OI = h - R$ và $r^2 = R^2 - OI^2 = 2Rh - h^2$.
Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là
$V = \frac{1}{3}h.S_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$.
Ta có $h.h.(4R - 2h) \leqslant \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3}\right)^3$
Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$

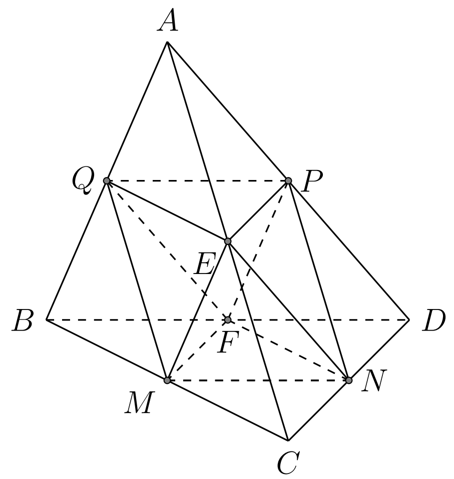
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. B $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. C $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. D $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc là cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\dfrac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4.\dfrac{V}{8} = \dfrac{V}{2}$.

(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$)

Vậy $V' = \dfrac{V}{2} \Leftrightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại.

Suy ra: $V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}V = \dfrac{1}{2}V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

$= 1 - \dfrac{V_{A.QEP}}{V} - \dfrac{V_{B.QMF}}{V} - \dfrac{V_{C.MNE}}{V} - \dfrac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017
Môn: Toán
Năm học: 2016 – 2017
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

(A) $2t^2 - 3 = 0$. (B) $t^2 + t - 3 = 0$. (C) $4t - 3 = 0$. (D) $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$.
Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, ta được: $t^2 + 2t - 3 = 0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

(A) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$.

(B) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

(C) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

(D) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

Lời giải.

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

(A) $z = -2 + 3i$. (B) $z = 3i$. (C) $z = -2$. (D) $z = \sqrt{3} + i$.

Lời giải.

Số phức $0 + bi$, $(b \in \mathbb{R})$ được gọi là số thuần ảo.
Vậy số $z = 3i$ là số thuần ảo.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0				0		

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số có ba điểm cực trị.

(B) Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

(C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. (D) Hàm số có hai điểm cực tiểu.

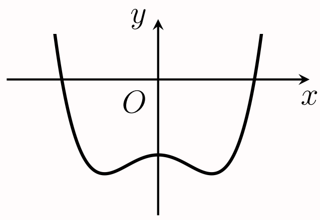
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 3. Suy ra khẳng định **sai** là "Hàm số có giá trị cực đại bằng 0".

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + x^2 - 1$. (B) $y = x^4 - x^2 - 1$.
(C) $y = x^3 - x^2 - 1$. (D) $y = -x^4 + x^2 - 1$.



Lời giải.

Đường cong có hình dạng là đồ thị hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a > 0$. Suy ra nó là đồ thị là của hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

(A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 0$. (C) $I = -2$. (D) $I = 2$.

Lời giải.

$I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = 7 - 4i$. (B) $z = 2 + 5i$. (C) $z = -2 + 5i$. (D) $z = 3 - 10i$.

Lời giải.

$z = z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (2 + 3i) = 7 - 4i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

$y = x^3 + 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

(A) $Q(2; -1; 5)$. (B) $P(0; 0; -5)$. (C) $N(-5; 0; 0)$. (D) $M(1; 1; 6)$.

Lời giải.

Sử dụng chức năng CALC của MTCT tìm được $M(1; 1; 6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i} = (1;0;0)$. B. $\vec{k} = (0;0;1)$. C. $\vec{j} = (0;1;0)$. D. $\vec{m} = (1;1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 128\pi$. B. $V = 64\sqrt{2}\pi$. C. $V = 32\pi$. D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2.h = \pi.4^2.4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 12. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

$y = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$.
$\lim\limits_{x\to -4^+} y = +\infty \Rightarrow x = -4$ là tiệm cận đứng của đồ thị.
$\lim\limits_{x\to 4} y = \dfrac{5}{8} \Rightarrow x = -4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.
Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. B. $(-1;1)$. C. $(-\infty;+\infty)$. D. $(-\infty;0)$.

Lời giải.

$y = \dfrac{2}{x^2+1} \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty;0)$ và $y' < 0, \forall x \in (0;+\infty)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$. B. $V = (\pi-1)\pi$. C. $V = (\pi+1)\pi$. D. $V = \pi + 1$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2+\cos x})^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x)\,dx = \pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi+1)\pi$.

Chọn đáp án C □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 15. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 9\log_a b$. (B) $P = 27\log_a b$. (C) $P = 15\log_a b$. (D) $P = 6\log_a b$.

Lời giải.

$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \dfrac{1}{2}.6\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \dfrac{x-3}{x+2}$.

(A) $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. (B) $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

(C) $D = (-2; 3)$. (D) $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \dfrac{x-3}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Vậy $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

(A) $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$. (B) $S = [2; 16]$.

(C) $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 16 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 4 mặt phẳng. (B) 3 mặt phẳng. (C) 6 mặt phẳng. (D) 9 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật có các mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối $\Rightarrow$ có 3 mặt đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$?

(A) $3x - 2y + z + 12 = 0$. (B) $3x + 2y + z - 8 = 0$.

(C) $3x - 2y + z - 12 = 0$. (D) $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;-2;1)$ làm vtpt $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $3(x-3)-2(y+1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-z+5=0$?

(A) $\begin{cases}x=1+3t\\y=3t\\z=1-t.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=1+t\\y=3t\\z=1-t.\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x=1+t\\y=1+3t\\z=1-t.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=1+3t\\y=3t\\z=1+t.\end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là $\begin{cases}x=2+t\\y=3+3t\\z=-t\end{cases}$.

Lấy $t=-1 \Rightarrow N(1;0;1)$ thuộc đường thẳng $\Rightarrow$ đáp án đúng là: $\begin{cases}x=1+t\\y=3t\\z=1-t\end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

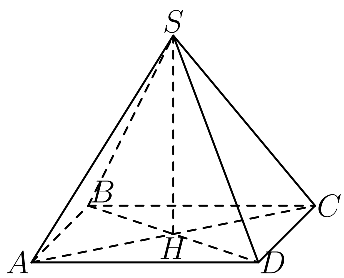
Lời giải.

Cạnh đáy $AB=a \Rightarrow$ diện tích đáy $S_{\text{ABCD}}=a^2$.

Đường chéo $AC=a\sqrt{2} \Rightarrow HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cạnh bên $SA=2AB=2a \Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích $V=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm?

(A) $z^2+2z+3=0$. (B) $z^2-2z-3=0$. (C) $z^2-2z+3=0$. (D) $z^2+2z-3=0$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et ta có tổng hai số phức là 2 và tích của chúng là 3 $\Rightarrow$ hai số phức là nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

Ⓐ $m = 11$. Ⓑ $m = 0$. Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $m = 3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 14x + 11$ có nghiệm $x = 1 \in [0;2]$.
Ta có $y(0) = -2$; $y(1) = 3$; $y(2) = 0 \Rightarrow m = \min\limits_{[0;2]} y = -2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

Ⓐ $D = (-\infty; 1)$. Ⓑ $D = (1; +\infty)$. Ⓒ $D = \mathbb{R}$. Ⓓ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0$ (vì $\frac{1}{3}$ không nguyên) $\Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ tập xác định $D = (1; +\infty)$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 25. Cho $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 6$. Ⓑ $I = 36$. Ⓒ $I = 2$. Ⓓ $I = 4$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^6 f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (với } u = 3x)$$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}.12 = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

Ⓐ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $R = a$. Ⓒ $R = 2\sqrt{3}a$. Ⓓ $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Cạnh hình lập phương bằng $2a \Rightarrow$ đường chéo hình lập phương bằng $2a\sqrt{3} \Rightarrow$ bán kính mặt cầu bằng $a\sqrt{3}$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

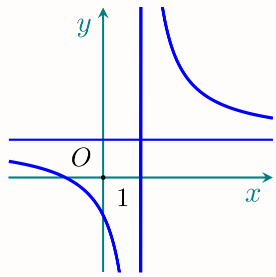
Ⓐ $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. Ⓑ $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.
Ⓒ $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$. Ⓓ $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

Lời giải.

$f(x) = \int (3 - 5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x + 5\cos x + C$.

$f(0) = 10 \Rightarrow 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$. Vậy hàm số cần tìm: $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(B) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(C) $y' > 0, \forall x \neq 1$.
(D) $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
Mặt khác hàm số không xác định tại $x = 1 \Rightarrow y' < 0, \forall x \neq 1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM?

(A) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
(B) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
(C) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.
(D) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của M trên Ox là $I(1; 0; 0)$. Mặt khác $IM = \sqrt{13} \Rightarrow$ phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $Q(1; 2)$. (B) $N(2; 1)$. (C) $M(1; -2)$. (D) $P(-2; 1)$.

Lời giải.

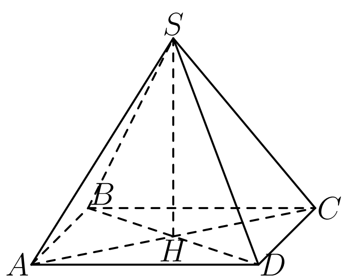
Ta có: $w = iz = i(1-2i) = 2 + i \Rightarrow$ điểm biểu diễn w là $N(2; 1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. (C) $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình nón $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Đường chéo hình vuông $ABCD$ có $AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow HA = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a \Rightarrow$ đường cao hình nón $h = a$.
$\Rightarrow$ thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \dfrac{a^3\pi}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}\,dx = -x^2 + 2x + C$.

B. $\int f'(x)e^{2x}\,dx = -x^2 + x + C$.

C. $\int f'(x)e^{2x}\,dx = x^2 - 2x + C$.

D. $\int f'(x)e^{2x}\,dx = -2x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x} \Rightarrow 2x = f(x)e^{2x}$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int f'(x)e^{2x}\,dx = f(x)e^{2x} - 2\int f(x)e^{2x}\,dx = 2x - 2x^2 + C$.

Chọn đáp án D. □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m < -1$.

B. $3 < m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $1 \leq m < 3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

Với $-1 - m > 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2) \Rightarrow \dfrac{2+m}{1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ loại.

Với $-1 - m < 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) \Rightarrow \dfrac{4+m}{3} = 3 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow m > 4$.

Chọn đáp án C. □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta' : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'?

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Δ và Δ' có các véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u_1} = (3;2;1)$ và $\vec{u_2} = (1;3;-2)$.

Khi đó $[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (-7;7;7) \Rightarrow$ đường thẳng vuông góc với d và Δ có một véc-tơ chỉ phương là

$\vec{u} = (-1;1;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án D. □

Câu 35. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

(A) 13 năm. (B) 14 năm. (C) 12 năm. (D) 11 năm.

Lời giải.

Tổng số tiền lĩnh ra sau n năm bằng $50.(1,06)^n$. Dùng máy tính kiểm tra thấy $n = 12$ thì số tiền lớn hơn 100. Vậy chọn phương án C.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho số phức $z = a+bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i = 0$. Tính $S = a+3b$.

(A) $S = \dfrac{7}{3}$. (B) $S = -5$. (C) $S = 5$. (D) $S = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + 1 + (b + 3)i - \sqrt{a^2 + b^2}.i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy ta có $S = a + 3b = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t, \\ z = 2 \end{cases}$ $d_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

(A) $2x - y + 2z + 22 = 0$. (B) $2x - y + 2z + 13 = 0$.

(C) $2x - y + 2z - 13 = 0$. (D) $2x + y + 2z - 22 = 0$.

Lời giải.

Giao của d_1 và (P) là điểm $M(4; -1; 2)$. Các mặt phẳng trong 4 phương án cùng vuông góc với d_2 nhưng chỉ có mặt phẳng ở phương án C đi qua $M(4; -1; 2)$ nên chọn C.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 7. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$
$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$.

Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

(A) $m = -4$. (B) $m = 4$. (C) $m = 81$. (D) $m = 44$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$ suy ra $\log_3(x_1.x_2) = 4$ hay $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$. Do đó theo định lý Viét ta suy ra $m = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

Ⓐ $P(1;0)$. Ⓑ $M(0;-1)$. Ⓒ $N(1;-10)$. Ⓓ $Q(-1;10)$.

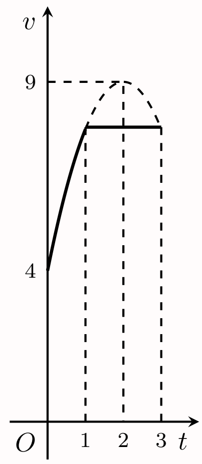
Lời giải.

Dùng máy tính tính được đường thẳng $AB : y = -8x - 2$. Từ đó ta thấy chỉ có $N(1;-10)$ thuộc AB.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 41.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Ⓐ $s = 23,25$ km. Ⓑ $s = 21,58$ km.

Ⓒ $s = 15,50$ km. Ⓓ $s = 13,83$ km.

Lời giải.

Dễ dàng tìm được phương trình của vận tốc trong 1 giờ đầu tiên là $v = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$ còn 2 giờ tiếp theo là $v = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật đi được trong 3 giờ đó là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{31}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{259}{12} \approx 21,58.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

Ⓐ $P = \dfrac{7}{12}$. Ⓑ $P = \dfrac{1}{12}$. Ⓒ $P = 12$. Ⓓ $P = \dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{ab} x = \dfrac{1}{\log_x ab} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

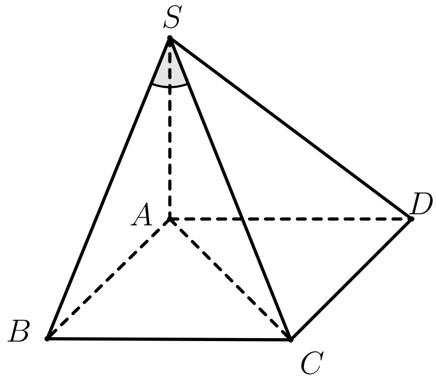
Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. Ⓒ $V = \dfrac{2a^3}{3}$. Ⓓ $V = \sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Từ giả thiết ta có góc $\widehat{BSC} = 30^\circ \Rightarrow SB = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{2}a$.

Từ đó suy ra thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

(A) $V = \dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. (B) $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. (C) $V = \dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

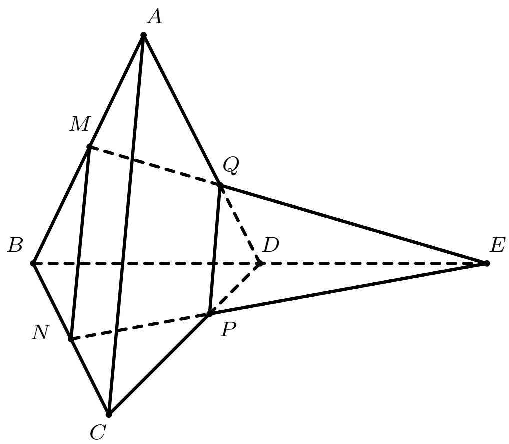
Lời giải.

Ta có thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = X$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của NE với CD và ME với AD. Dễ thấy $AQ = CP = \dfrac{2}{3}a$.

Ta dễ dàng tính được $V_{E.BMN} = \dfrac{1}{2}X$. Áp dụng tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{E.PQD}}{V_{E.BMN}} = \dfrac{2}{9}$. Suy ra $V_{E.PQD} = \dfrac{2}{9}.V_{E.BMN} \Rightarrow$ $V_{BMNEQP} = \dfrac{7}{9}.V_{E.BMN} = \dfrac{7}{18}.X$

Tức là phần khối đa diện không chứa điểm A có thể tích bằng $\dfrac{7}{18}X$, nên phần chứa điểm A có thể tích là $\dfrac{11}{18}X = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; a; b)$. Tính $T = a - b$.

(A) $T = -2$. (B) $T = 1$. (C) $T = -1$. (D) $T = 0$.

Lời giải.

Ta thấy M nằm bên trong mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và $M \in (P)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{4})$ trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (P).

Đường thẳng Δ thoả mãn yêu cầu bài toán khi Δ nằm trong (P) và $\Delta \perp HM$ nên Δ nhận $\left[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM}\right] = (12; -12; 0) = 12(1; -1; 0)$ làm véctơ chỉ phương. Suy ra $\vec{u}(1; -1; 0)$ nên $T = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

Ⓐ 0. Ⓑ Vô số. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ là số phức thoả mãn yêu cầu của bài toán. Từ giả thiết suy ra x,y thoả mãn hệ $\begin{cases} x^2-4y+y^2=0 \\ y\neq 0 \\ x^2+(y-3)^2=25 \end{cases}$, ta thấy hệ có hai nghiệm trong đó nghiệm $(x;y)=(4;0)$ bị loại. Vậy chỉ có một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 47. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

Ⓐ $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$. Ⓑ $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Ⓒ $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$. Ⓓ $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải.

Với giả thiết bài toán ta có $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4 \Leftrightarrow \log_3 3(1-xy)+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+x+2y$

Vì hàm số $f(x)=x+\log_3 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ trên ta suy ra $3(1-xy)=x+2y \Leftrightarrow 11=(3x+2)(3y+1)$.

Dùng bất đẳng thức $AM-GM$ suy ra $3x+2+3y+1\geq 2\sqrt{11}$.

Suy ra $x+y\geq\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 3x+2=3y+1 \\ 3(1-xy)=x+2y \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11}-2}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{11}-1}{3} \end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$.

Ⓐ $m\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. Ⓑ $m\in\mathbb{R}$.

Ⓒ $m\in\left[-\dfrac{5}{4};+\infty\right)$. Ⓓ $m\in(-2;+\infty)$.

Lời giải.

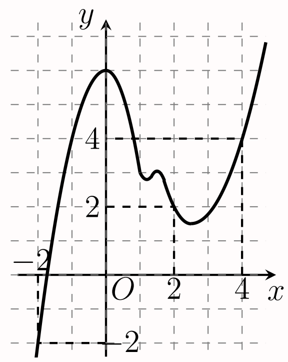
Nhận thấy đường thẳng $y=mx-m+1$ luôn đi qua điểm uốn $B(1;1)$ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$, do vậy nếu nó cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A,B,C thì luôn thoả mãn $AB=BC$.

Thử $m=-3$ thì đường thẳng không cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án A, B.

Thử $m=-\dfrac{3}{2}$ thì đường thẳng cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án C.

Chọn đáp án Ⓓ □

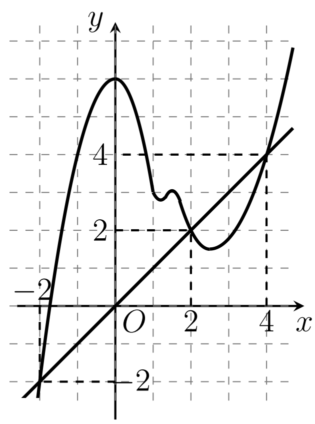
Câu 49.
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Lời giải.

Ta có $h(x) = 2f(x) - x^2$ nên $h'(x) = 2\left(f'(x) - x\right)$.
Dựa vào hình vẽ bên và tính chất của tích phân ta thấy $h(2) - h(-2) = \int\limits_{-2}^{2} h'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-2}^{2} \left(f'(x) - x\right)\,\mathrm{d}x > 0$ nên $h(2) > h(-2)$.
Tương tự ta có $h(4) > h(-2), h(2) > h(4)$, từ đó chọn phương án C.



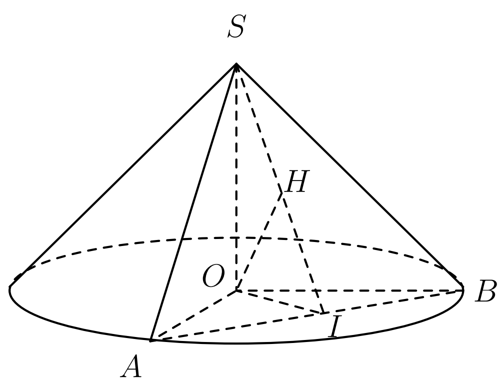
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
B. $d = a$.
C. $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.
D. $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy hình nón, I là trung điểm của AB, H là chân đường cao của tam giác SOI. Khi đó ta có $d = OH$.
Dễ dàng tính được $OS = OI = a$ nên $d = OH = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.



Chọn đáp án D □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017
Môn: Toán
Năm học: 2016 – 2017
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = -2$.
B. $y_{\text{CĐ}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
C. $y_{\text{CĐ}} = -2$ và $y_{\text{CT}} = 2$.
D. $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = 3$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.
B. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2}\ln(5x-2) + C$.
C. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-2} = 5\ln|5x-2| + C$.
D. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-2} = \int \frac{1}{5(5x-2)}\,d(5x-2) = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \dfrac{x+1}{x+3}$.
B. $y = x^3 + 3x$.
C. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.
D. $y = -x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có

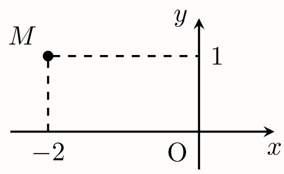
$$\left(\frac{x+1}{x+3}\right)' = \frac{2}{(x+3)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -3.$$
$$(x^3 + 3x)' = 3(x^2 + 1) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\ .$$

$$\left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 2.$$
$$(-x^3 - 3x)' = -3(x^2+1) < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



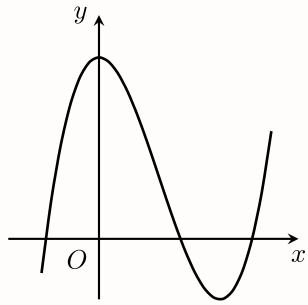
(A) $z_4 = 2 + i$.
(B) $z_2 = 1 + 2i$.
(C) $z_3 = -2 + i$.
(D) $z_1 = 1 - 2i$.

Lời giải.

Điểm M có tọa độ là $(-2, 1)$ do đó M biểu diễn số phức $z_3 = -2 + i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(B) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Lời giải.

Đây là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hơn nữa ta thấy khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$ do đó $a > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y?

(A) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
(B) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$.
(D) $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức sách giáo khoa $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

(A) $OA = 3$.
(B) $OA = 9$.
(C) $OA = \sqrt{5}$.
(D) $OA = 5$.

Lời giải.

Ta có $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $z = 11$. B. $z = 3 + 6i$. C. $z = -1 - 10i$. D. $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

$z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = (4 - 7) + (-3i - 3i) = -3 - 6i$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1 - x) = 2$.

A. $x = -4$. B. $x = -3$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x < 1$. Ta có

$$\log_2(1 - x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y = 0$. B. $x = 0$. C. $y - z = 0$. D. $z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) vuông góc với trục Ox do đó nó nhận $(1, 0, 0)$ là véc-tơ pháp tuyến, hơn nữa (Oyz) đi qua điểm $O(0, 0, 0)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Oyz) là $1(x - 0) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0$ hay $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0. \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	∞	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0, 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I=F(\mathrm{e})-F(1)$.

A. $I=\mathrm{e}$. B. $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. C. $I=\dfrac{1}{2}$. D. $I=1$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$. B. $P=x^2$. C. $P=\sqrt{x}$. D. $P=x^{\frac{2}{3}}$.

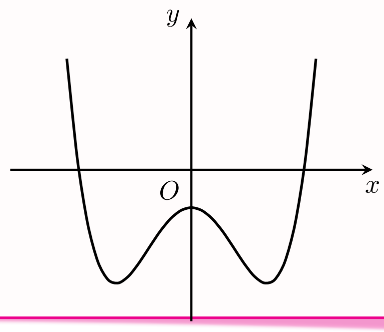
Lời giải.

Ta có: $P=x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14.
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Phương trình $y'=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.
B. Phương trình $y'=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
C. Phương trình $y'=0$ vô nghiệm trên tập số thực.
D. Phương trình $y'=0$ có đúng một nghiệm thực.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có ba điểm cực trị. Do đó phương trình $y'=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$ do đó đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có:

$$\lim_{x\to1^+}y=-\frac{3}{2};\ \lim_{x\to1^-}y=-\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to-1^+}y=+\infty;\ \lim_{x\to-1^-}y=-\infty$$

Do đó đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m>6$. B. $m\geq 6$. C. $m\leq 6$. D. $m<6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi $1+1+4-m>0\Leftrightarrow m<6$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

Ⓐ $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $P=\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $P=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $3z^2-z+1=0$ có nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{11}}{6}$.

Do đó $|z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{1+11}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Ⓐ $V=a^3$. Ⓑ $V=\dfrac{a^3}{3}$. Ⓒ $V=\dfrac{a^3}{6}$. Ⓓ $V=\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$ do đó $AB=BC=a$.

Thể tích khối lăng trụ là $V=BB'.S_{ABC}=a.\dfrac{1}{2}.a.a=\dfrac{a^3}{2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19. Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

Ⓐ $V=\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $V=4\pi$. Ⓒ $V=16\pi\sqrt{3}$. Ⓓ $V=12\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối nón đã cho là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2.h=\dfrac{1}{3}\pi.3.4=4\pi$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 20. Cho hình phẳng $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathcal{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V=2(\pi+1)$. Ⓑ $V=2\pi(\pi+1)$. Ⓒ $V=2\pi^2$. Ⓓ $V=2\pi$.

Lời giải.

Ta có

$-1\le \sin x\le 1$

$\Leftrightarrow 1\le 2+\sin x\le 3$

$\Leftrightarrow 1\le y\le \sqrt{3}$

Do vậy đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$ không cắt trục hoành. Vậy, ta có

$$V=\pi\int_0^{\pi}(2+\sin x)\,\mathrm{d}x=(2x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 21. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{5}{2}$.   B $I = \dfrac{7}{2}$.   C $I = \dfrac{17}{2}$.   D $I = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

$\int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2.2 - 3.(-1) = \dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a = 2\sqrt{3}R$.   B $a = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$.   C $a = 2R$.   D $a = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Lời giải.

Hình lập phương có độ dài đường chéo là $a\sqrt{3}$. Từ đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do vậy $a = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$ và $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

A $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ B $x - 2y + z = 0$.

C $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.   D $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}\,(-2;1;1)$. Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng BC nên ta chọn $\overrightarrow{u}\,(-2;1;1)$ làm một véc-tơ chỉ phương của nó.

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

A $M = 9$.   B $M = 8\sqrt{3}$.   C $M = 1$.   D $M = 6$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(0) = 3,\ f(1) = 2,\ f(\sqrt{3}) = 6$.

Vậy $M = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

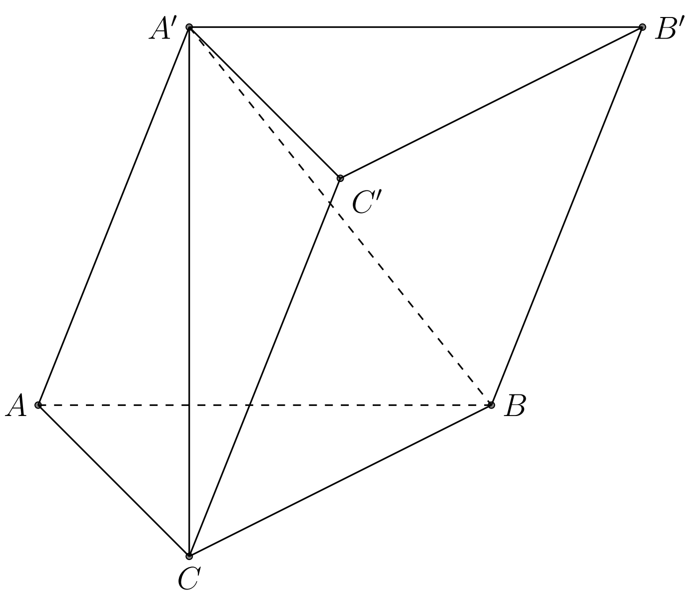
(A) Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

(B) Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

(C) Hai khối chóp tam giác.

(D) Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

(A) $3x - y - z = 0$.

(B) $3x + y + z - 6 = 0$.

(C) $3x - y - z + 1 = 0$.

(D) $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-6;2;2)$, trung điểm của AB là $I(1;1;2)$.

Mặt phẳng trung trực của AB nhận véc-tơ $\vec{n}(3;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua điểm $I(1;1;2)$. Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

$$3(x-1) - (y-1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a = 0,\ b = 1$. B. $a = -2,\ b = 1$. C. $a = 1,\ b = 0$. D. $a = 1,\ b = -2$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - i + i^3 = 1 - 2i$. Vậy phần thực của z là 1, phần ảo của z là -2.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

A. $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. B. $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. C. $y' = \dfrac{2}{2x+1}$. D. $y' = \dfrac{1}{2x+1}$.

Câu 29. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2c^3)$.

A. $P = 31$. B. $P = 13$. C. $P = 30$. D. $P = 108$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a(b^2c^3) = 2\log_a b + 3\log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.
Chọn đáp án B □

Câu 30. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

A. $S = \left\{2 + \sqrt{5}\right\}$. B. $S = \left\{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\right\}$.

C. $S = \{3\}$. D. $S = \left\{\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = (1; +\infty)$.
Với $x \in D$, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-1)^2}{(x+1)} = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{5} \text{ (chọn)} \\ x = 2 - \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (-\infty; 1)$. B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (0; 1]$. D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$.
Đặt $2^x = t > 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + m = 0$.
Ta có $\Delta' = 1 - m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt khi phương trình $t^2 - 2t + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m = 5$. **D** $m = -7$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 4$.

Điều kiện cần để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ là

$$\begin{aligned} & f'(3) = 0 \\ \Leftrightarrow & 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & m^2 - 6m + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$ và $f'(x) = x^2 - 2x - 3$. Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số không đạt cực đại tại $x = 3$.

Khi $m = 5$, hàm số trở thành $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 3$, $f'(x) = x^2 - 10x + 21$, Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	30	$\searrow$	$\frac{58}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$. Do đó điều kiện để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ là $m = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 =$

2 và hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A $x+z+1=0$. B $x+y+1=0$. C $y+z+3=0$. D $x+z-1=0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1;1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.
d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1;2;-1)$, Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(1;1;-1)$.
Ta có $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-1;0;-1)$. Vì mặt phẳng (P) cần tìm song song với d và Δ nên nó nhận $\vec{n}(1;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Phương trình (P) có dạng $x+z+d=0$.
Vì (S) tiếp xúc với (P) nên

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|d-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=1 \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai mặt phẳng là $x+z+1=0$ và $x+z+5=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, $(Q): x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t. \end{cases}$ B $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t. \end{cases}$ C $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t. \end{cases}$ D $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t. \end{cases}$

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$, (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$.
Ta có $[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(2;0;-2)$.
Đường thẳng cần tìm nhận véc-tơ $\vec{u}(1;0;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t. \end{cases}$
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m \leq 0$. B $m>4$. C $0<m \leq 2$. D $2<m \leq 4$.

Lời giải.

- Do hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục và đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ nên ta có $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{2+m}{3}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓐ $V = \dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. Ⓒ $V = a^3$. Ⓓ $V = 3a^3$.

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^\circ$ suy ra $SH = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Vậy, $V = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = a^3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 37. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

Ⓐ $M = \dfrac{1}{4}$. Ⓑ $M = 1$. Ⓒ $M = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $M = \dfrac{1}{3}$.

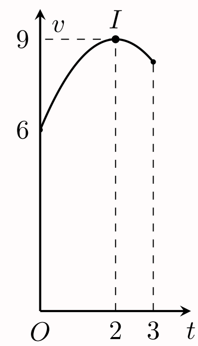
Lời giải.

- Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x + 3y)^2 = 12xy$ nên $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)} = \dfrac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x + 3y)^2} = 1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 38.

Một vật chuyển động trong 3 giờ đầu với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



Ⓐ $s = 24,25$ km. Ⓑ $s = 26,75$ km.

Ⓒ $s = 24,75$ km. Ⓓ $s = 25,25$ km.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = -\dfrac{3}{4}t^2 + 3t + 6$.

- Quãng đường đi được $s = \displaystyle\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = 24,75$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.

Ⓐ $S = 4$. Ⓑ $S = 2$. Ⓒ $S = -2$. Ⓓ $S = -4$.

Lời giải.

- Ta có $\begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được $b = -1, a = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Cho $F(x) = (x - 1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Ⓐ $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = (4 - 2x)\mathrm{e}^x + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2 - x}{2}\mathrm{e}^x + C$.

(C) $\int f'(x)e^{2x}\,dx = (2-x)e^x + C$.
(D) $\int f'(x)e^{2x}\,dx = (x-2)e^x + C$.

Lời giải.

- Ta có $f(x)e^{2x} = F'(x) = xe^x$.
- Suy ra $\int f'(x)e^{2x}\,dx = e^{2x}.f(x) - 2\int f(x)e^{2x}\,dx = xe^x - 2(x-1)e^x = (2-x)e^x + C$

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

(A) Năm 2023. (B) Năm 2022. (C) Năm 2021. (D) Năm 2020.

Lời giải.

- Áp dụng công thức $(1+0,15)^m > 2 \Leftrightarrow m > 4,9594$. Vậy sau 5 năm tức là năm 2021.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

(A) $S_{xq} = 6\pi a^2$. (B) $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$. (C) $S_{xq} = 12\pi a^2$. (D) $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

- Bán kính đáy $R = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
- Suy ra diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{3}.3a = \pi a^2 3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

(A) 0. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

- Ta có hệ $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8\\(x-1)^2-y^2=0\end{cases}$. Giải ra ta được 3 cặp nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

(A) $m\in(-\infty;3)$. (B) $m\in(-\infty;-1)$. (C) $m\in(-\infty;+\infty)$. (D) $m\in(1;+\infty)$.

Lời giải.

- Để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt là phương trình hoành độ giao điểm $(x-1)(x^2-2x-2+m)=0$ có ba nghiệm phân biệt, giải ra ra được $m<3$.
- Nhận thấy (C) có điểm uốn $U(1;-m)$ luôn thuộc đường thẳng $y=-mx$ nên để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m<3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

(A) $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. (B) $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$. (C) $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$. (D) $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Lời giải.

- Giả thiết tương đương với $\log_2(2-2ab)+(2-2ab)=\log_2(a+b)+(a+b)\Leftrightarrow 2-2ab=a+b$ do hàm $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên tập xác định.
- Rút a theo b thay vào P, khi đó $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$, $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

(A) $R=\sqrt{6}$. (B) $R=2$. (C) $R=1$. (D) $R=\sqrt{3}$.

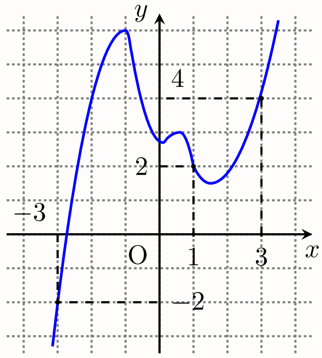
Lời giải.

- Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18}$.
- H luôn thuộc mặt phẳng (P) và mặt cầu đường kính AB.
- Khoảng cách từ I đến (P) là $d=2\sqrt{3}$. Từ đó suy ra $R=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3) > g(3) > g(1)$. B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.
C. $g(3) > g(-3) > g(1)$. D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Lời giải.

- Ta có $g'(x) = 2\left(f'(x) - (x+1)\right)$.
- Từ $g(3) - g(1) = \int\limits_1^3 g'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)\mathrm{d}x < 0$ suy ra $g(3) < g(1)$.
- Tương tự $g(3) - g(-3) = \int\limits_{-3}^3 g'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)\mathrm{d}x > 0$ suy ra $g(-3) < g(3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = \sqrt{14}$. C. $x = 3\sqrt{2}$. D. $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Khi đó ta tính được $AM = BM = 3$, suy ra $MN = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}$.
- Gọi h là chiều cao của khối chóp hạ từ đỉnh A, ta có $h = \dfrac{x.\sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}}{3}$ và $h_{\max}$ khi $x = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{16}$. B. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$. C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{16}$. D. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $V_2 = \dfrac{256\pi}{3}$.
- Bán kính đáy của trụ $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, suy ra $V_1 = 4.\pi(2\sqrt{3})^2 = 48\pi$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017
Môn: Toán
Năm học: 2016 – 2017
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.
B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) không cắt trục hoành.
D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải.

$(C) \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không**thuộc (α)?

A. $N(2;2;2)$.
B. $Q(3;3;0)$.
C. $P(1;2;3)$.
D. $M(1;-1;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của M vào phương trình mặt phẳng (α) ta được $1-1+1-6=-5 \neq 0 \Rightarrow M \notin (\alpha)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $f'(x) = x^2+1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \dfrac{1}{2}$.

A. $x = -6$.
B. $x = 6$.
C. $x = 4$.
D. $x = \dfrac{23}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình tương đương với $x+1 = 25^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow x = 4$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	5	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số có bốn điểm cực trị.
(B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(C) Hàm số không có cực đại.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta dễ dàng thấy được hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S).

(A) $R = 3$.
(B) $R = 18$.
(C) $R = 9$.
(D) $R = 6$.

Lời giải.

Bán kính $R = \sqrt{9} = 3$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = -2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

(A) $b = -2$.
(B) $b = 2$.
(C) $b = 3$.
(D) $b = -3$.

Lời giải.

$z = z_1 - z_2 = 1 - 3i - (-2 - 5i) = 3 + 2i \Rightarrow b = 2$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x$.

(A) $\displaystyle\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = 2\cos x + C$.
(B) $\displaystyle\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$.
(C) $\displaystyle\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$.
(D) $\displaystyle\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = -2\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,\mathrm{d}x = -2\cos x + C$

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z.

(A) $a = 2$.
(B) $a = 3$.
(C) $a = -3$.
(D) $a = -2$.

Lời giải.

$a = 2$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\dfrac{a^2}{4}\right)$.

Ⓐ $I=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $I=2$. Ⓒ $I=-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $I=-2$.

Lời giải.

$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\dfrac{a}{2}\right)=2$ (vì $a\neq 2$)

Chọn đáp án B □

Câu 11. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

Ⓐ $S=\{4\}$. Ⓑ $S=\{3\}$. Ⓒ $S=\{-2\}$. Ⓓ $S=\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>1$.

Phương trình tương đương với $\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}=1\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{x-1}=3\Leftrightarrow 2x+1=3x-3\Rightarrow x=4$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB=5a$, $BC=3a$ và $CD=4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ⓐ $R=\dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ $R=\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $R=\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $R=\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Có $DB=5a\Rightarrow R=\sqrt{\left(\dfrac{DB}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AB^2}{2}\right)}=\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

Ⓐ $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $F(x)=2\mathrm{e}^x+x^2-\dfrac{1}{2}$.

Ⓒ $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+2x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x^2+C\Rightarrow F(0)=1+C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

Ⓐ $x=-\sqrt{2}$, $y=2$. Ⓑ $x=\sqrt{2}$, $y=2$. Ⓒ $x=0$, $y=2$. Ⓓ $x=\sqrt{2}$, $y=-2$.

Lời giải.

Có $x^2-1+yi=-1+2i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=-1\\ y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A $m = \dfrac{51}{4}$. B $m = \dfrac{49}{4}$. C $m = 13$. D $m = \dfrac{51}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = 4x^3 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \min y = \dfrac{51}{4}$ tại $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = 40$. B $V = 192$. C $V = 32$. D $V = 24$.

Lời giải.

Nửa chu vi của tam giác ABC là $p = 12 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-6)(p-10)(p-8)} = 24 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.24.4 = 32$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

A $P = \dfrac{1}{6}$. B $P = \dfrac{1}{12}$. C $P = -\dfrac{1}{6}$. D $P = 6$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - z + 6 = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{23}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{6}$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho $\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a + b = 2$. B $a - 2b = 0$. C $a + b = -2$. D $a + 2b = 0$.

Lời giải.

$$\int_0^1 \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d?

(A) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.
(B) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.
(C) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Trung điểm của đoạn AB là $M(0;1;-1)$, xét d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng qua M và song song với d là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)

(A) $3x+y-2z-14=0$.
(B) $3x-y+2z+6=0$.
(C) $3x-y+2z-6=0$.
(D) $3x-y-2z+6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (α) và qua điểm M là $3x-y+2z-6=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=\dfrac{\pi e^2}{2}$.
(B) $V=\dfrac{\pi(e^2+1)}{2}$.
(C) $V=\dfrac{e^2-1}{2}$.
(D) $V=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$.

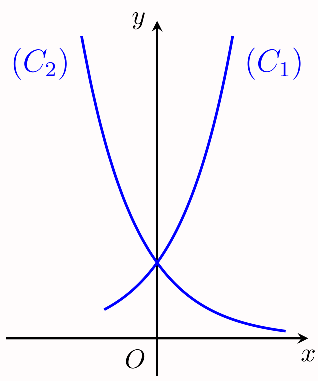
Lời giải.

$$V=\pi\int_0^1 (e^x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hai hàm số $y=a^x$, $y=b^x$
với a,b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $0<a<b<1$.
(B) $0<b<1<a$.
(C) $0<a<1<b$.
(D) $0<b<a<1$.



Lời giải.

Theo hình vẽ ta có hàm $y=a^x$ đồng biến $\Rightarrow a>1$ và hàm số $y=b^x$ nghịch biến $\Rightarrow b<1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

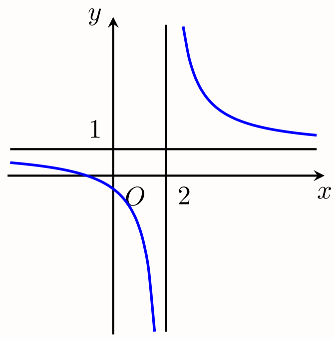
(A) 4 mặt phẳng. (B) 1 mặt phẳng. (C) 2 mặt phẳng. (D) 3 mặt phẳng.

Lời giải.

4 mặt phẳng

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' < 0, \forall x \neq 2$. (B) $y' < 0, \forall x \neq 1$.

(C) $y' > 0, \forall x \neq 2$. (D) $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

Theo hình vẽ ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định và có tiệm cận đứng là $x = 2 \Rightarrow y' < 0, \forall x \neq 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

(A) $r = \dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$. (B) $r = 5$. (C) $r = 5\sqrt{\pi}$. (D) $r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.r.2r = 50\pi \Rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

(A) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{2}{25}$. (B) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\dfrac{2}{5}$.

(C) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\dfrac{2}{25}$. (D) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{2.(-1) + 1.0 + 0.(-2)}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

(A) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. (B) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$. (C) $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$. (D) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có mẫu thức có nghiệm $x = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \dfrac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3[\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

(A) $I = \dfrac{5}{4}$. (B) $I = 4$. (C) $I = 0$. (D) $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = 2\log_3[\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2\log_3(\log_3 3 + \log_3 a) + \log_{2^{-2}} b^2$

$\Rightarrow I = 2\log_3(1+2) - \dfrac{1}{2}.2\log_2 b = 2\log_3 3 - \log_2 b = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^2$. (B) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (C) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. (D) $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.

Xét hàm số có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) \Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

(A) 5. (B) 4. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{mx-2m-3}{x-m} \Rightarrow y' = \dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1;3) \Rightarrow m = -2; -1; 0 \Rightarrow$ Tập S có 3 phần tử nguyên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $m \geq 0$. (B) $m < 0$. (C) $m \leq 2$. (D) $m > 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log\left(x^2 - 2x - m + 1\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0$
Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bất phương trình $x^2 - 2x - m + 1 > 0$ xảy ra với mọi x
$\Leftrightarrow \Delta = 4 + 4(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án B

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) : $2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A $H(-1;4;4)$. B $H(-3;0;-2)$. C $H(3;0;2)$. D $H(1;-1;0)$.

Lời giải.

H là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P). Xét (P) có một vtpt là $\vec{n} = (2;-2;-1)$
Phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với (P) là $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$

Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;0;2)$

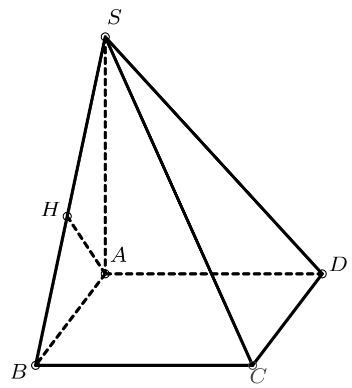
Chọn đáp án C

Câu 34. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A $V = \dfrac{a^3}{2}$. B $V = a^3$. C $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường vuông góc của A lên cạnh SB
Ta có $SA \perp BC$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$
Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
Xét ΔSAB vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2/2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = a$



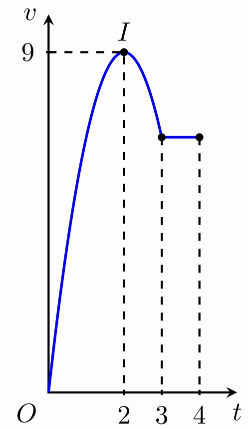
Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow$ thể tích khối chóp $S.ABCD$ $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án D

Câu 35. Một vật chuyển động trong 4 giờ

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Ⓐ $s = 26,5$ km. Ⓑ $s = 28,5$ km. Ⓒ $s = 27$ km. Ⓓ $s = 24$ km.

Lời giải.

Theo giả thiết, đỉnh của parabol là $I(2;9)$ nên phương trình của nó có dạng $y = 9 - a(x-2)^2$. Và do parabol đi qua gốc tọa độ nên $a = \dfrac{9}{4}$. Phần đoạn thẳng trong đồ thị có phương trình $y = \dfrac{27}{4}$ $(3 \leq x \leq 4)$. Quãng đường mà vật di chuyển được trong 4 giờ là $s = \displaystyle\int_0^3 \left(-\dfrac{9}{4}x^2 + 9x\right) \mathrm{d}x + \int_3^4 \dfrac{27}{4} \mathrm{d}x = 27$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36 (2H3K3). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3+t \\ z = 4-2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó?

Ⓐ $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$.
Ⓑ $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.
Ⓒ $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.
Ⓓ $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, d song song với d', d đi qua điểm $A(2;-3;4)$ và d' đi qua điểm $B(4;-1;0)$. Đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng song song với d và đi qua trung điểm $M(3;-2;2)$ của AB.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 37. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

Ⓐ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + C$.
Ⓑ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + C$.
Ⓒ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.
Ⓓ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải.

Từ giả thiết, $\dfrac{f(x)}{x} = (F(x))' = \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)' = \dfrac{1}{x^4}$. Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Để tính $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, dùng tích phân từng phần với $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

(A) $|z|=17$. (B) $|z|=\sqrt{17}$. (C) $|z|=\sqrt{10}$. (D) $|z|=10$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Dùng công thức tính mô-đun của số phức biến đổi giả thiết đã cho thành hệ phương trình, giải hệ phương trình ta thu được a,b và tính được $|z|$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $S=9$. (B) $S=\dfrac{10}{3}$. (C) $S=5$. (D) $S=10$.

Lời giải.

Hai điểm cực tiểu và cực đại lần lượt là $A(0;5)$ và $B(2;9)$. Diện tích $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 5=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $\widehat{ACB}=30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

(A) $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. (B) $V=\sqrt{3}\pi a^3$. (C) $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. (D) $V=\pi a^3$.

Lời giải.

Khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC có bán kính đáy là $AB=a$, đường cao là $AC=\sqrt{3}a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 24 m/s. (B) 108 m/s. (C) 18 m/s. (D) 64 m/s.

Lời giải.

Vận tốc $v=v(t)=s'=-\dfrac{3}{2}t^2+12t$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $v(t)$ với $t\in[0;6]$. Dễ tính được giá trị lớn nhất đó bằng 24 m/s, đạt được tại thời điểm $t=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

(A) $m<1$. (B) $m<\dfrac{2}{3}$. (C) $m<0$. (D) $m\le 1$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$. Với mỗi giá trị của t, luôn có một giá trị x tương ứng. Bất phương trình đã cho trở thành $t^2-2t+3m-2<0$; $\Delta'=3-3m$.

Vì hệ số $a=1>0$, bất phương trình $t^2-2t+3m-2<0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m<1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.
(B) $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.
(C) $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.
(D) $\log(a+b)=\frac{1}{2}+\log a+\log b$.

Lời giải.

$a^2+b^2=8ab \Leftrightarrow (a+b)^2=10ab \Leftrightarrow \log(a+b)^2=\log(10ab) \Leftrightarrow \log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

(A) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.
(B) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
(C) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(D) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC và H là chân đường cao kẻ từ A xuống SI, theo giả thiết ta có $AH=3$ và $\widehat{SIA}=\alpha$. Xét các tam giác vuông AHI, SAI (tương ứng vuông tại H và A), có $AI=\frac{AH}{\sin\alpha}=\frac{3}{\sin\alpha}$, $HI=\frac{AH}{\tan\alpha}=\frac{3}{\tan\alpha}$. Suy ra $SI=\frac{AI^2}{HI}=\frac{3}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$. Diện tích tam giác SBC là $\frac{1}{2}SI\cdot BC=\frac{1}{2}SI\cdot 2AI=\frac{9}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$.
Để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất thì $S_{\triangle SBC}$ phải nhỏ nhất, tức là $\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$ lớn nhất. Đặt $t=\cos\alpha$, với $0\le t\le 1$, khi đó $\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=t-t^3=f(t)$. Khảo sát hàm số $f(t)$ trên $[0;1]$, ta tìm được $\max\limits_{[0;1]} f(t)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

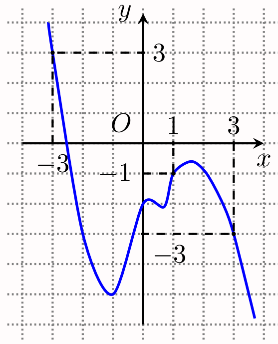
(A) $m>0$.
(B) $m<1$.
(C) $0<m<\sqrt[3]{4}$.
(D) $0<m<1$.

Lời giải.

$y'=4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-m)=0$.
Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.
Tìm được ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A(\sqrt{m};-m^2)$, $B(-\sqrt{m};-m^2)$.
Gọi H là trung điểm AB thì diện tích tam giác OAB là $\frac{1}{2}OH\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{m}\cdot m^2$. Diện tích tam giác phải lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 theo yêu cầu bài toán, suy ra $0<m<1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$.

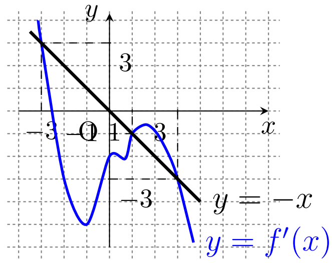
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.
Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $g(3) < g(-3) < g(1)$.
Ⓑ $g(1) < g(3) < g(-3)$.
Ⓒ $g(1) < g(-3) < g(3)$.
Ⓓ $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.
Từ hình bên suy ra $g'(x) = 0$ tại $x = -3$, $x = 1$ hoặc $x = 3$.
Hơn nữa, trong khoảng $(-3; 1)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới đồ thị $y = -x$ nên $g'(x)$ âm trong khoảng $(-3; 1)$. Xét tương tự trong khoảng $(1; 3)$, ta được bảng biến thiên của $g(x)$ như sau.



x	-3		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$

Cần so sánh $g(-3)$ với $g(3)$. Ta có:
$$g(3) - g(-3) = \int_{-3}^{3} g'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{3} [f'(x) + x]\,\mathrm{d}x =$$
$$= -2\int_{-3}^{1} [(-x) - f'(x)]\,\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{3} [f'(x) - (-x)]\,\mathrm{d}x = 2(-S_1 + S_2) < 0 \Rightarrow g(3) < g(-3),$$
trong đó S_1, S_2 là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = -x$, tương ứng khi $-3 < x < 1$ và $1 < x < 3$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 47. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc 60°. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

Ⓐ $V = 9\sqrt{3}\pi$.
Ⓑ $V = 9\pi$.
Ⓒ $V = 3\sqrt{3}\pi$.
Ⓓ $V = 3\pi$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của (N) là tam giác cân ở đỉnh, đường sinh tạo với đáy một góc 60° suy ra thiết diện tam giác đều.
Tam giác đều có tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm, từ đó tính được cạnh của tam giác thiết diện là $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ và đường cao là 3. $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 3 = 3\pi$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 48. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

Ⓐ Vô số. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. $|z+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2+(b+3)^2=13$.

Do đó, $\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{a^2+b^2+2a+2bi}{(a+2)^2-b^2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2a=0 \\ z\neq -2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a^2+(b+3)^2=13 \\ a^2+b^2+2a=0 \end{cases}$ ta được $z=-2$(loại) và $z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

Ⓐ $T=3$. Ⓑ $T=5$. Ⓒ $T=2$. Ⓓ $T=4$.

Lời giải.

Điểm A nằm bên ngoài mặt cầu (S) và điểm B nằm bên trong mặt cầu (S).

Do đó để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến (P) phải lớn nhất, tức là $\overrightarrow{IM}$ phải là véctơ pháp tuyến của (P), với M là trung điểm của đoạn thẳng CD, với C và D là giao điểm của đường thẳng AB với mặt cầu (S).

Viết phương trình đường thẳng AB, tìm giao điểm với mặt cầu, sau đó ta tìm được $M(1;0;2)$ suy ra $\overrightarrow{IM}=(0;-2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $B(0;1;0)$ là $0(x-0)-2(y-1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow 2y+z-2=0$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 50. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ Vô số. Ⓓ 2.

Lời giải.

$e^{x+y}\le e(x+y)\Leftrightarrow e^{x+y-1}\le x+y\Leftrightarrow e^{x+y-1}-1\le x+y-1$

Xét $g(t)=e^t-t-1$ với $t\in\mathbb{R}$

$g'(t)=e^t-1=0\Leftrightarrow t=0$. Bảng biến thiên của $g(t)$ như sau.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $g(t)\ge 0\quad \forall t\in\mathbb{R}$, tức là $e^{x+y-1}-1\ge x+y-1$, kết hợp với giả thiết suy ra $e^{x+y-1}=x+y\Leftrightarrow x+y=1$. Từ đó, với $x+y=1$, $f(x)+f(y)=f(x)+f(1-x)=$ $\dfrac{9^x}{9^x+m^2}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+m^2}==\dfrac{9^x}{9^x+m^2}+\dfrac{9}{9+9^x\cdot m^2}=\dfrac{m^2u^2+18u+9m^2}{m^2u^2+(m^4+9)u+9m^2}$ với $u=9^x>0$.

$f(x)+f(1-x)=1\ \forall x\Leftrightarrow m^4+9=18\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2017
Môn: Toán
Năm học: 2016 – 2017
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;0)$, $(0;2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = 8$. Tìm bán kính R của (S).

(A) $R = 8$. (B) $R = 4$. (C) $R = 2\sqrt{2}$. (D) $R = 64$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng AB?

(A) $\vec{b} = (-1;0;2)$. (B) $\vec{c} = (1;2;2)$. (C) $\vec{d} = (-1;1;2)$. (D) $\vec{a} = (-1;0;-2)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-1;0;2)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho số phức $z = 2+i$. Tính $|z|$.

(A) $|z| = 3$. (B) $|z| = 5$. (C) $|z| = 2$. (D) $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

$|z| = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

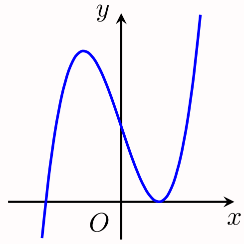
Ⓐ $x=21$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=11$. Ⓓ $x=13$.

Lời giải.

Điều kiện: $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$.
Pt $\Leftrightarrow x-5=2^4 \Leftrightarrow x=21$ (thỏa điều kiện).
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 6. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

Ⓐ $y=x^3-3x+2$. Ⓑ $y=x^4-x^2+1$.
Ⓒ $y=x^4+x^2+1$. Ⓓ $y=-x^3+3x+2$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 và hệ số $a>0$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$, với mọi $x\neq 1$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log_2 a=\log_a 2$. Ⓑ $\log_2 a=\dfrac{1}{\log_2 a}$. Ⓒ $\log_2 a=\dfrac{1}{\log_a 2}$. Ⓓ $\log_2 a=-\log_a 2$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

Ⓐ $\displaystyle\int 7^x\,\mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$. Ⓑ $\displaystyle\int 7^x\,\mathrm{d}x=\frac{7^x}{\ln 7}+C$.
Ⓒ $\displaystyle\int 7^x\,\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$. Ⓓ $\displaystyle\int 7^x\,\mathrm{d}x=\frac{7^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

Ⓐ $z=1-5i$. Ⓑ $z=1+i$. Ⓒ $z=5-5i$. Ⓓ $z=1-i$.

Lời giải.

Ta có $z+2-3i=3-2i \Leftrightarrow z=1+i$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A $D = \mathbb{R}$.
B $D = (0; +\infty)$.
C $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
D $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 2$.
Chọn đáp án D

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A $m = -6$.
B $m = 0$.
C $m = -4$.
D $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2)$ và $\overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1)$.
Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Chọn đáp án B

Câu 13. Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A $N(4; -3)$.
B $M(2; -5)$.
C $P(-2; -1)$.
D $Q(-1; 7)$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 + z_2 = -2 - i$.
Chọn đáp án C

Câu 14. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = \dfrac{4\pi}{3}$.
B $V = 2\pi$.
C $V = \dfrac{4}{3}$.
D $V = 2$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{4\pi}{3}$.
Chọn đáp án A

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy. Véctơ nào dưới đây là véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A $\vec{u_2} = (1; 2; 0)$.
B $\vec{u_3} = (1; 0; 0)$.
C $\vec{u_4} = (-1; 2; 0)$.
D $\vec{u_1} = (0; 2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1; 0; 0)$ và $M_2(0; 2; 0)$. Do đó, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 2; 0)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2.
Chọn đáp án C

Câu 16. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A 0.
B 3.
C 1.
D 2.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$. Do đó, đồ thị của hàm số này có một đường tiệm cận đứng $x=-2$ và một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

(A) $T=2\sqrt{2}$. (B) $T=2$. (C) $T=8$. (D) $T=4$.

Lời giải.

Giả sử $z_1=2i$ và $z_2=-2i$, ta có $M\left(0;2\right)$ và $N\left(0;-2\right)$. Do đó, $T=OM+ON=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l=4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

(A) $S_{xq}=12\pi$. (B) $S_{xq}=4\sqrt{3}\pi$. (C) $S_{xq}=\sqrt{39}\pi$. (D) $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq}=\pi rl=4\sqrt{3}\pi$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

(A) $m\geq 1$. (B) $m\geq 0$. (C) $m>0$. (D) $m\neq 0$.

Lời giải.

Vì $3^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực khi $m>0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

(A) $m=\dfrac{17}{4}$. (B) $m=10$. (C) $m=5$. (D) $m=3$.

Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ta có $y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$. Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$?
(A) $x-2y+3z-12=0$.
(B) $x-2y-3z+6=0$.
(C) $x-2y+3z+12=0$.
(D) $x-2y-3z-6=0$.

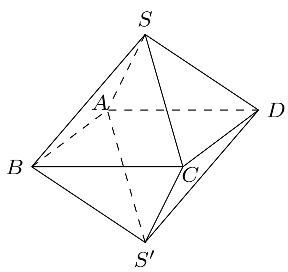
Lời giải.

Áp dụng công thức $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ta được:
$(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
(A) $S=4\sqrt{3}a^2$.
(B) $S=\sqrt{3}a^2$.
(C) $S=2\sqrt{3}a^2$.
(D) $S=8a^2$.

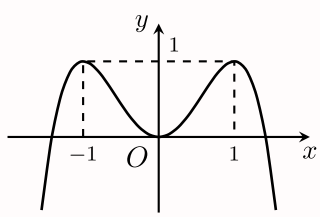
Lời giải.

Hình bát diện đều có 8 mặt đều là các tam giác đều cạnh a nên diện tích
$S=8.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}a^2$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.
(A) $m>0$.
(B) $0\le m\le 1$.
(C) $0<m<1$.
(D) $m<1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0<m<1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,dx$.

(A) 7. (B) $5 + \frac{\pi}{2}$. (C) 3. (D) $5 + \pi$.

Lời giải.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx = 5 - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

(A) $\mathcal{D} = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$.
(B) $\mathcal{D} = (1; 3)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
(D) $\mathcal{D} = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. (B) $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. (C) $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. (D) $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

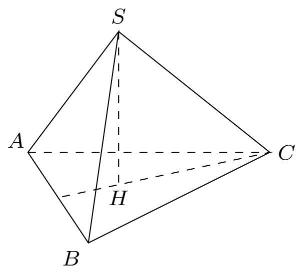
Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó SH là chiều cao của khối chóp.

Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}$.

Do đó $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

(A) $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.
(B) $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
(C) $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
(D) $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x)\,dx = -\cos x + \sin x + C$. Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ nên $C = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $x = 3a + 5b$. (B) $x = 5a + 3b$. (C) $x = a^5 + b^3$. (D) $x = a^5b^3$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2(a^5b^3) \Rightarrow x = a^5b^3$.

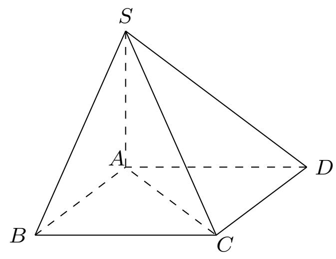
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $R = \dfrac{5a}{2}$. Ⓑ $R = \dfrac{17a}{2}$. Ⓒ $R = \dfrac{13a}{2}$. Ⓓ $R = 6a$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta suy ra $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90°$.
Do đó mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có đường kính là SC.
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$.
Vậy $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{13a}{2}$



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

Ⓐ $m = 6$. Ⓑ $m = -3$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ $m = 1$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 6t + m = 0$ (*).

Phương trình (*) có hai nghiệm dương khi $\begin{cases} \Delta' & \geq 0 \\ S & > 0 \\ P & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m & \leq 9 \\ m & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9$ (**).

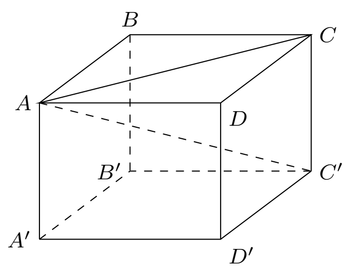
Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của (*). Ta có: $x_1 = \log_3 t_1$; $x_2 = \log_3 t_2$.
Mà $x_1 + x_2 = 1$ nên $\log_3 t_1 + \log_3 t_2 = 1 \Rightarrow t_1.t_2 = 3 \Rightarrow m = 3$ (thỏa (**)).
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 32. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 8$, $CD = 6$, $AC' = 12$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ⓐ $S_{tp} = 576\pi$. Ⓑ $S_{tp} = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.
Ⓒ $S_{tp} = 26\pi$. Ⓓ $S_{tp} = 5(4\sqrt{11} + 5)\pi$.

Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$,
$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2\sqrt{11}$.
Do đó hình trụ có bán kính đáy là $r = \dfrac{AC}{2} = 5$,
đường sinh $l = CC' = 2\sqrt{11}$.
Vậy $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

Ⓐ $M(-1;0;-3)$. Ⓑ $M(2;3;3)$.
Ⓒ $M\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};-\frac{2}{3}\right)$. Ⓓ $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{7}{6};-\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(1+t;2+t;1+2t)$.
Ta có $MA^2 + MB^2 = 28 \Leftrightarrow t^2 + (t+3)^2 + (2t-1)^2 + (t+2)^2 + t^2 + (2t-2)^2 = 28$
$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -\frac{5}{6}$.
Với $t = 1 \Rightarrow M(2;3;3)$ loại vì $c < 0$.
Với $t = -\frac{5}{6} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};-\frac{2}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 144 m/s. Ⓑ 36 m/s. Ⓒ 243 m/s. Ⓓ 27 m/s.

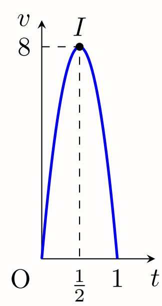
Lời giải.

Vận tốc của vật được tính bởi: $v(t) = -t^2 + 12t$. Ta có $v'(t) = -2t + 12$. Bảng biến thiên:

t	0		6		9
v'		+	0	−	
v	0	↗	36	↘	27

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36 m/s.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng s đường người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



Ⓐ $s = 4,0$ km. Ⓑ $s = 2,3$ km. Ⓒ $s = 4,5$ km. Ⓓ $s = 5,3$ km.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hàm vận tốc là $v(t) = -32t^2 + 32t$. Vậy $s = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-32t^2 + 32t\right) \mathrm{d}t = 4,5$ km.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z+3| = |z+3-10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ $|z+3| = |z+3-10i|$, ta có $y = 5$, suy ra $x = 0$. Vậy $w = -4 + 8i$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Phương trình d' qua hai cực trị là $y = -2x + 1$. Để d, d' vuông góc với nhau thì $-2(2m-1) = -1 \iff m = \frac{3}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Lời giải.

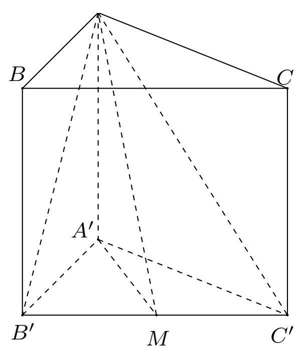
$I(2;-1;3) \in (\alpha); IM = IN = IP = 4$. Vậy mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2 = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$.Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Gọi M là trung điểm $B'C'$.
Khi đó, $\widehat{AMA'} = 60°$, $A'M = \frac{a}{2}$.
Suy ra $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $V = \frac{3a^3}{8}$.



Chọn đáp án A □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $0 < m < 3$.
Ⓒ $m < -1$ hoặc $m > 0$. Ⓓ $m > 0$.

Lời giải.

$x^2 - 2x + m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \Delta' = 1 - m - 1 < 0 \Longleftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyêncủa m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ Vô số. Ⓓ 3.

Lời giải.

$y' < 0 \Longleftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Longleftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy S có 3 phần tử.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 42. Cho $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

Ⓐ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.
Ⓒ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. Ⓓ $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}f(x) = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = f(x)\ln x - \frac{1}{2x^2} + C$. Mặt khác, $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{1}{2x^2}\right)' \Longrightarrow f(x)\ln x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$. Vậy $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 43. Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log_{27}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = 9\left(\dfrac{\alpha}{2} - \beta\right)$. Ⓑ $\log_{27}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.
Ⓒ $\log_{27}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = 9\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)$. Ⓓ $\log_{27}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = \dfrac{\alpha}{2} - \beta$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 44. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm (H). Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

Ⓐ $V = \dfrac{32\pi}{3}$. Ⓑ $V = 16\pi$. Ⓒ $V = \dfrac{16\pi}{3}$. Ⓓ $V = 32\pi$.

Lời giải.

Ta có $SH = 4, r = \sqrt{R^2 - HO^2} = 2\sqrt{2}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}.4.\pi.8 = \dfrac{32\pi}{3}$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

(A) $m = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
(B) $m = -1; m = 1$.
(C) $m = 1$.
(D) $m \neq 0$.

Lời giải.

Ta có $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$. Suy ra OA vuông góc với OB. Do đó $S_{\Delta OAB} = 4m^4 = 4$. Vậy $m = 1; m = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

(A) $S_{\min} = 30$.
(B) $S_{\min} = 25$.
(C) $S_{\min} = 33$.
(D) $S_{\min} = 17$.

Lời giải.

Xét hai phương trình $at^2 + bt + 5 = 0$ (1) và $5t^2 + bt + a = 0$ (2). (1) có hai nghiệm t_1, t_2 và (2) có hai nghiệm t_3, t_4. Để hai phương trình có nghiệm thì $\Delta > 0 \iff b^2 > 20a$. Giả sử $t_1 = \ln x_1; t_2 = \ln x_2; t_3 = \log x_3; t_4 = \log x_4$. Theo giả thiết $x_1 x_2 > x_3 x_4 \iff e^{t_1 + t_2} > 10^{t_3 + t_4}$, theo Viet ta có $e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$, dẫn đến $a > \dfrac{5}{\ln 10} > 2$. Vì a nguyên, nên giá trị nhỏ nhất của $a = 3$, suy ra giá trị nhỏ nhất của $b = 8$. Vậy $S_{\min} = 30$.

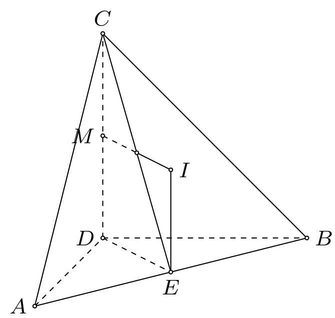
Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0), B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = -4$.
(B) $S = -1$.
(C) $S = -2$.
(D) $S = -3$.

Lời giải.

Nhận xét $OA = OB = OC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc.
Do đó ta có thể xét trường hợp D là điểm đối xứng với O qua ABC.
Khi đó $D\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.
Từ $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{DE}$,
dẫn đến $I\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.
Vậy $S = -1$.



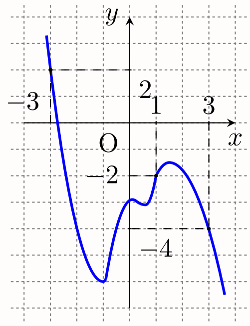
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

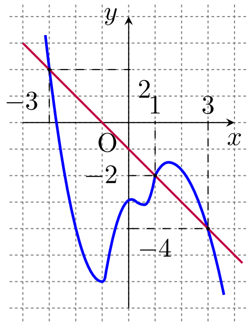
Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.
Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $g(1) < g(3) < g(-3)$.
B $g(1) < g(-3) < g(3)$.
C $g(3) = g(-3) < g(1)$.
D $g(3) = g(-3) > g(1)$.



Lời giải.

$g'(x) = 2f(x)' + 2(x+1)$.
Từ đồ thị ta có $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm là $-3; 1; 3$
và có $g(1) < g(3), g(-3)$.
Mặt khác cũng từ đồ thị ta có $\int_{-3}^{1} (-g'(x))\,\mathrm{d}x > \int_{1}^{3} (-g'(x))\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $g(3) < g(-3)$.
Vậy ta có $g(1) < g(3) < g(-3)$.



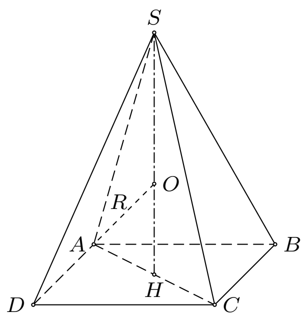
Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A $V = 144$.
B $V = 576$.
C $V = 576\sqrt{2}$.
D $V = 144\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi $OH = x$.
Khi đó độ dài cạnh đáy của chóp là $\sqrt{2(81 - x^2)}$.
Vậy $V = f(x) = \dfrac{2}{3}(9 + x)(81 - x^2)$.
$f'(x) = \dfrac{2}{3}(x+9)(9-3x)$.
Vậy thể tích lớn nhất khi $x = 3$, với $V = 576$



Chọn đáp án B □

Câu 50. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}$ và $\left|z - \sqrt{3} + i\right| = m$. Tìm số phần tử của S.

A 2.
B 4.
C 1.
D 3.

Lời giải.

Tập hợp z là giao hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $(x - \sqrt{3})^2 + (y+1)^2 = m^2 (m \geq 0)$. Để có duy nhất một số phức z, nghĩa là hai đường tròn tiếp xúc $\Longleftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 2 \\ |m - 1| = 2 \end{cases}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2018

Môn: Toán

Năm học: 2017–2018

Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

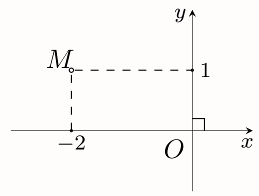
MÃ ĐỀ: MH-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

Ⓐ $z=-2+i$. Ⓑ $z=1-2i$. Ⓒ $z=2+i$. Ⓓ $z=1+2i$.



Lời giải.

Theo hình vẽ tọa độ điểm M là $M(-2;1)$ nên M là điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ 1 . Ⓒ 2 . Ⓓ -3 .

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

Ⓐ A_{10}^{8}. Ⓑ A_{10}^{2}. Ⓒ C_{10}^{2}. Ⓓ 10^2.

Lời giải.

Mỗi tập con gồm 2 phần tử của tập M có 10 phần tử là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử. Do đó số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^{2}.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

Ⓐ $V=\dfrac{1}{3}Bh$. Ⓑ $V=\dfrac{1}{6}Bh$. Ⓒ $V=Bh$. Ⓓ $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Theo lý thuyết (sách giáo khoa Hình học 12 - Cơ bản - trang 23) ta có thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là $V=\frac{1}{3}Bh$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		-2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	∞

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2; 0)$. **B** $(-\infty; -2)$. **C** $(0; 2)$. **D** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$; hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$. □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B** $V = 2\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C $V = \pi^2 \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D** $V = \pi^2 \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh trục hoành ta có $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A $x = 1$. **B** $x = 0$. **C** $x = 5$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log(3a) = 3\log a$. Ⓑ $\log(a^3) = \dfrac{1}{3}\log a$. Ⓒ $\log(a^3) = 3\log a$. Ⓓ $\log(3a) = \dfrac{1}{3}\log a$.

Lời giải.

Ta có $\log(a^3) = 3\log a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

Ⓐ $x^3 + C$. Ⓑ $\dfrac{x^3}{3} + x + C$. Ⓒ $6x + C$. Ⓓ $x^3 + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$, với C là hằng số.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(3;0;0)$. Ⓑ $N(0;-1;1)$. Ⓒ $P(0;-1;0)$. Ⓓ $Q(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

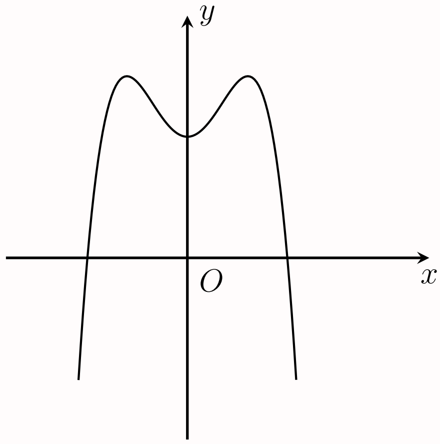
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11.

Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = -x^4 + 2x^2 + 2$. Ⓑ $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho là đồ thị của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\overrightarrow{u_1} = (-1;2;1)$. Ⓑ $\overrightarrow{u_2} = (2;1;0)$. Ⓒ $\overrightarrow{u_3} = (2;1;1)$. Ⓓ $\overrightarrow{u_4} = (-1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (-1;2;1)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0;6)$. B. $(-\infty;6)$. C. $(0;64)$. D. $(6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án B

Câu 14. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r \ell \Rightarrow \ell = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.

Chọn đáp án B

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 0$. B. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = -1$.

C. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1$. D. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được: $(MNP): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

Chọn đáp án D

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. B. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. C. $y = \sqrt{x^2-1}$. D. $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải.

- Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$ vì $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ xác định trên $\mathscr{D} = (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, nhưng không có tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên không có tiệm cận.
- Hàm số $y = \sqrt{x^2-1}$ xác định trên $\mathscr{D} = (-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ và
$$\lim_{x\to -1^-} \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$$
nên không có tiệm cận.

Chọn đáp án D

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$. Vì $-2 < 2 < 4$ nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

(A) 50. (B) 5. (C) 1. (D) 122.

Lời giải.

Hàm xác định và liên tục trên $[-2; 3]$. Ta có:

$$y' = 4x^3 - 8x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 5, f(-2) = 5, f(3) = 50, f(\pm\sqrt{2}) = 1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = 50$ tại $x = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

(A) $\dfrac{16}{225}$. (B) $\log\dfrac{5}{3}$. (C) $\ln\dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

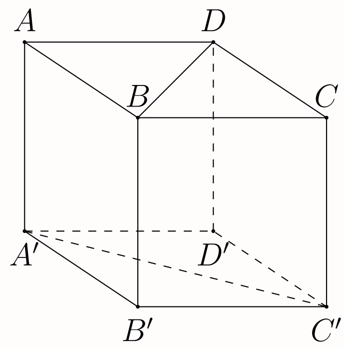
Ta có $\Delta' = 4 - 12 = -8 < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 21.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



Ⓐ $\sqrt{3}a$. Ⓑ a. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Ⓓ $\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Do BD và $A'C'$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau nên $d(A'C', BD) = d((ABCD), (A'B'C'D'))$. Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có $d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$. Vậy $d(A'C', BD) = a$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Ⓐ 102.424.000 đồng. Ⓑ 102.423.000 đồng. Ⓒ 102.016.000 đồng. Ⓓ 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính lãi kép thì số tiền được lĩnh là

$$T = 100 \cdot (1 + 0,4\%)^6 \approx 102.424.128,4 \text{ (đồng)}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả từ hộp đó. Xác suất để hai quả cầu chọn ra cùng màu bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{22}$. Ⓑ $\dfrac{6}{11}$. Ⓒ $\dfrac{5}{11}$. Ⓓ $\dfrac{8}{11}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{11}^2 = 55$.
Số cách chọn ra 2 quả cùng màu là $\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^2 = 25$.
Vậy xác suất cần tính bằng $\dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

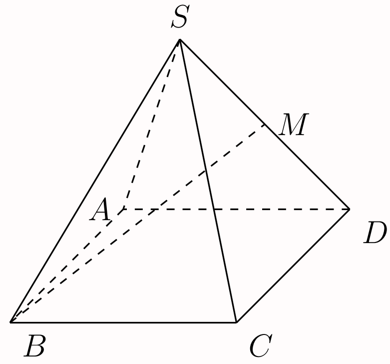
Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

Ⓐ $3x - y - z - 6 = 0$. Ⓑ $3x - y - z + 6 = 0$.
Ⓒ $x + 3y + z - 5 = 0$. Ⓓ $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(-1;2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$ nên có phương trình $3(x+1) - (y-2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 25.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

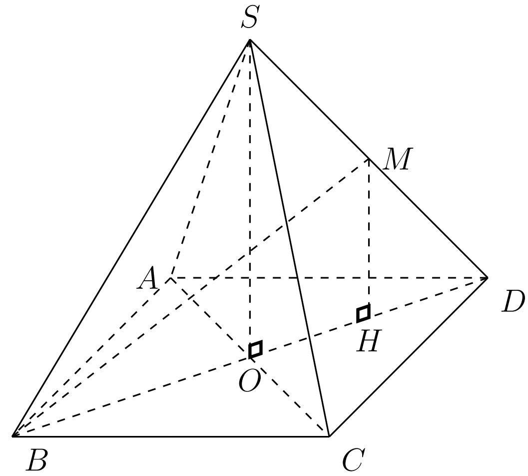


Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm OD.
Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $MH \parallel SO$.
Suy ra $MH \perp (ABCD) \Rightarrow (BM, (ABCD)) = \widehat{MBH}$.
$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ và
$BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

Ⓐ 322560. Ⓑ 3360. Ⓒ 80640. Ⓓ 13440.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Ta có $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$ thì $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là: $\mathrm{C}_{10}^k (x^3)^{10-k} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^k x^{30-5k}$. Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Suy ra số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^6 = 13440$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 27. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \dfrac{2}{3}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{82}{9}$. Ⓑ $\dfrac{80}{9}$. Ⓒ 9. Ⓓ 0.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó:

$$\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)(\log_3 x)^4 = \frac{2}{3}$$

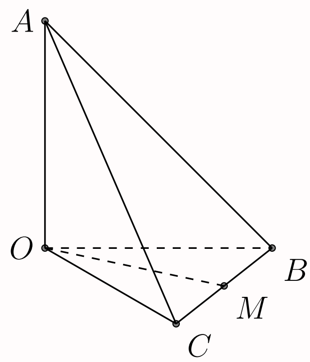
$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm là $9 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{82}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

(A) $90°$. (B) $30°$. (C) $60°$. (D) $45°$.



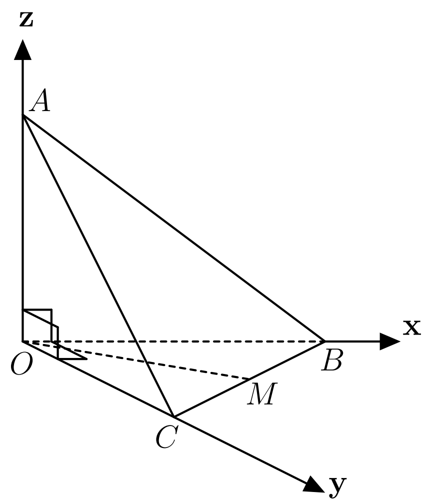
Lời giải.

Giả sử $OA = OB = OC = 1$. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ sao cho tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với tia OB, OC, OA. Khi đó ta có $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$.

Do đó $\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$.

Ta có $\cos(OM, AB) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{(OM, AB)} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1\colon \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2\colon \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

(B) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

(C) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

(D) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường thẳng cần viết là Δ, A là giao của Δ và d_1, B là giao của Δ và d_2. Khi đó $A(3-t; 3-2t; -2+t)$ và $B(5-3u; -1+2u; 2+u)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (2+t-3u; -4+2u+2t; 4+u-t).$$

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n} = (1; 2; 3)$. Ta có $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Do đó:

$$\frac{2+t-3u}{1} = \frac{-4+2u+2t}{2} = \frac{4+u-t}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ u = 1. \end{cases}$$

Suy ra $A(1; -1; 0)$, phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x^3 + mx - \dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. 5. B. 3. C. 0. D. 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}$. Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6} = g(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq \min_{x>0} g(x).$$

Mà $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \dfrac{1}{x^6}} = 4 \Rightarrow \min\limits_{x>0} g(x) = 4$ khi $x = 1$.

Do đó $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$, suy ra có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn.

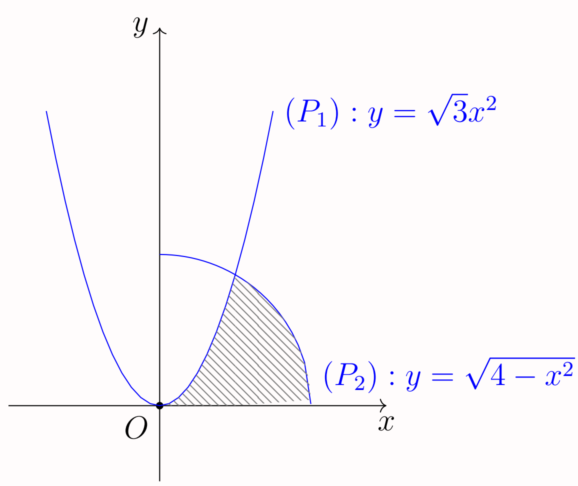
Chọn đáp án D □

Câu 31.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình (H) bằng

A. $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. B. $\dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. D. $\dfrac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } 0 \leq x \leq 2).$$

Khi đó

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = I + J.$$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Tính $I=\int\limits_0^1 \sqrt{3}x^2dx=\left.\dfrac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính $J=\int\limits_1^2 \sqrt{4-x^2}dx$: Đặt $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos tdt$ và $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt=2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ (đvdt).

Chọn đáp án B

Câu 32. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$, với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. B. $P=12$. C. $P=18$. D. $P=46$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}.\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Do đó

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int\limits_2^2\left(x^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Suy ra $a=32$, $b=12$, $c=2$. Vậy $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Chọn đáp án D

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. C. $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. D. $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Ta tính được bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BCD là $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, chiều cao tứ diện là $h=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Từ đó $S_{xq}=2\pi\cdot r\cdot h=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình sau có nghiệm dương $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $t^2 - 2t - 2 + m = 0$ với $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m nguyên dương để phương trình $t^2 - 2t - 2 + m = 0$ có nghiệm lớn hơn 1. Bằng cách khảo sát sự tương giao của hai đồ thị các hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t - 2$ và $g(x) = -m$ ta được $0 < m < 3$. Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là $m = 1$ hoặc $m = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực.

(A) 5. (B) 7. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{m + 3\sin x}$ ta có hệ

$$\begin{cases} t^3 = m + 3\sin x \\ \sin^3 x = m + 3t. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & t^3 - \sin^3 x + 3(t - \sin x) = 0 \Leftrightarrow (t - \sin x)\left(t^2 + t\sin x + \sin^2 x + 3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & t = \sin x \Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x = m. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u,\ u \in [-1; 1]$ ta có $f'(u) = 3u^2 - 3, f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	-1		1
f'	0	$-$	0
f	2	$\searrow$	-2

Từ đó, ta suy ra phương trình $\sin^3 x - 3\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \le m \le 2$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 6.

Lời giải.

Ta có với mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$ thì $-2 \le x^3 - 3x \le 2 \Rightarrow m - 2 \le x^3 - 3x + m \le m + 2$ với mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$.
Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m-2|; |m+2|\}$.

- $m \ge 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.
- $m < 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thoả mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

Ⓐ $4 + \ln 15$. Ⓑ $2 + \ln 15$. Ⓒ $3 + \ln 15$. Ⓓ $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có với $x > \dfrac{1}{2}$ ta có $f(x) = \ln(2x-1) + 2$. Khi $x < \dfrac{1}{2}$, ta có $f(x) = \ln(1-2x) + 1$.
Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 38. Cho số thức $z = a + bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$

Ⓐ $P = -1$. Ⓑ $P = -5$. Ⓒ $P = 3$. Ⓓ $P = 7$.

Lời giải.

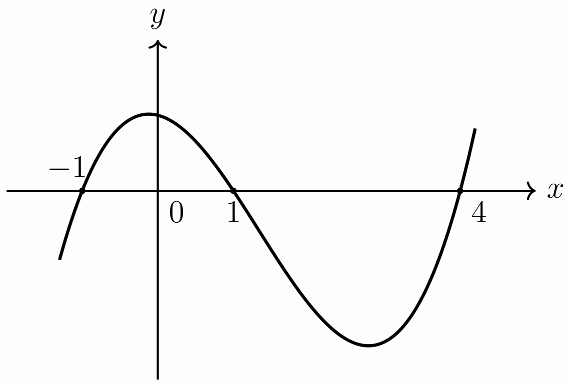
Ta có:

$$\begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow b = a + 1 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ (loại)} \\ b = 4. \end{array}\right.$$

Vậy $a + b = 7$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(1; 3)$. Ⓑ $(2; +\infty)$.
Ⓒ $(-2; 1)$. Ⓓ $(-\infty; -2)$.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(2-x)$. Hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = -f'(2-x)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0.$$

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có

$$f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ $\frac{5}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$. Phương trình của d là

$$y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}.$$

Đường thẳng d đi qua $A(a;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & 1 = -\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \\ \Leftrightarrow & (x_0-1)^2 = x_0 - a + (-x_0+2)(x_0-1) \\ \Leftrightarrow & 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0. (1) \end{aligned}$$

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A thì phương trình (1) phải có đúng một nghiệm, hay

$$\Delta' = 9 - 2(3+a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

hoặc

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2 - 6 + 3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Lời giải.

Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $OA = OB = OC$ nên ta có $|a| = |b| = |c|$. Suy ra $b = \pm a, c = \pm a$.

- Nếu $b = a$ và $c = a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 4.$$

  Ta có $(P): x + y + z - 4 = 0$.

- Nếu $b = a$ và $c = -a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{-a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{0}{a} = 1 \text{ (vô nghiệm)}.$$

- Nếu $b = -a$ và $c = a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} + \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

  Ta có $(P): x - y + z - 2 = 0$.

Nếu $b = -a$ và $c = -a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$

Ta có $(P) : x - y - z + 2 = 0$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

(A) 247. (B) 248. (C) 229. (D) 290.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1.2^{n-1}$ nên $u_{10} = u_1.2^9$.
Đặt $t = \log u_1$, ta có

$$t + \sqrt{2 + t - 2t - 18\log 2} = 18\log 2 + 2t \Leftrightarrow 18 + t = \sqrt{2 - t - 18\log 2} \Leftrightarrow t = -18\log 2 + 1 \Leftrightarrow u_1 = 2^{-17}.5.$$

Suy ra
$$u_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18}.5 > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18 + 99.\log_2 5.$$

Từ đó ta có $n_{\min} = 248$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ta có

$$f'(x) = 12x\left(x^2 - x - 2\right), \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 2.$$

Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

Ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x) + m$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt, hay $0 < m < 5$ nên ta có 4 số nguyên m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2,2,1)$, $B\left(-\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

Ⓐ $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$.
Ⓑ $\frac{x+1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z-4}{2}$.
Ⓒ $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.
Ⓓ $\frac{x+\frac{2}{9}}{1}=\frac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $OA=3, OB=4, AB=5$ suy ra tam giác OAB vuông tại O. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Khi đó ta có

$$OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IO}=\vec{0}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{OB.x_A+BA.x_O+AO.x_B}{OA+OB+AB}=0\\ y_I=\dfrac{OB.y_A+BA.y_O+AO.y_B}{OA+OB+AB}=1\\ z_I=\dfrac{OB.z_A+BA.z_O+AO.z_B}{OA+OB+AB}=1.\end{cases}$$

Do đó $I(0,1,1)$. Lại có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=4(1,-2,2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm. Thay tọa độ I vào phương án A thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

Ⓐ $\frac{7}{6}$. Ⓑ $\frac{11}{12}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;1)$, $E(1;1;0)$, $F(0;1;0)$. Khi đó ta có $S\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. Suy ra thể tích cần tính

$$V=V_{S.ABCD}+V_{S.ABEF}=\frac{1}{3}.\frac{4}{3}.1+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.1=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $T=|z+1-3i|+|z-1+i|$ lớn nhất.

Ⓐ $P=10$. Ⓑ $P=4$. Ⓒ $P=6$. Ⓓ $P=8$.

Lời giải.

Gọi $M(z)$ và $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $I(4;3)$. Khi đó $M\in(I,\sqrt{5})$ và $T=MA+MB$. Gọi E là trung điểm AB, ta có $E=(\frac{5}{2};1)$ và $ME\leq EI+R$. Dấu "=" có khi $M(6;4)$. Khi đó

$$k=4(EI+R)^2+AB^2\leq 4ME^2+AB^2=2(MA^2+MB^2)\geq(MA+MB)^2.$$

Suy ra $T\leq\sqrt{k}$. Đẳng thức xảy ra khi $M(6;4)$ hay $P=10$.

Chọn đáp án Ⓐ □

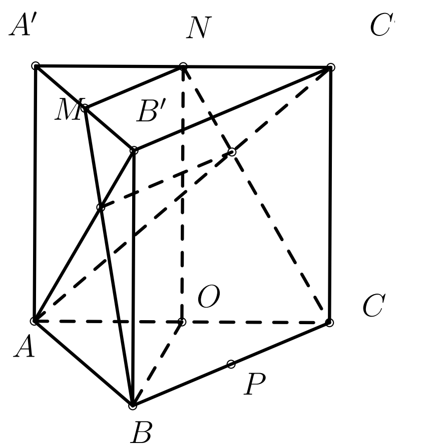
Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $BC = 2\sqrt{3}$, $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'C$ và BC. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(AB'C')$ bằng

Ⓐ $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. Ⓒ $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao ch O là trung điểm cạnh AC, B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, N thuộc tia Oz. Khi đó $A(0;-\sqrt{3};0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $C'(0;\sqrt{3};2)$, $B(3;0;0)$, $B'(3;0;2)$ và $N(0;0;2)$. Ta có $\overrightarrow{AB'} = \left(3;\sqrt{3};2\right)$, $\overrightarrow{AC'} = \left(0;2\sqrt{3};2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AC'} = \left(-2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3}\right)$. Ta chọn $\vec{n} = \left(1;\sqrt{3};-3\right)$ là VTPT của $(AB'C')$. Ta có:
$\overrightarrow{NB} = (3;0;-2)$, $\overrightarrow{NC}\left(0;\sqrt{3};-2\right) \Rightarrow \overrightarrow{NB}\wedge\overrightarrow{NC} = \left(2\sqrt{3};6;3\sqrt{3}\right)$
nên ta cho $\vec{u} = \left(2;2\sqrt{3};3\right)$ là VTPT của (MNP).

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2) và (S_3)

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Lời giải.

Xét (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Ta có $AB = AC = \sqrt{13}$, $BC = 4$. Gọi I là trung điểm BC; J, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ta có $I(1;-1;1)$, $J\left(\dfrac{7}{3};0;1\right)$, $K\left(-\dfrac{1}{3};0;1\right)$.

Ta có các trường hợp sau

- Các điểm A, B, C nằm cùng phía so với (P): Có 2 mặt phẳng.
- Hai điểm B, C nằm cùng phía so với (P) và A, B nằm khác phía so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua hai điểm J, K. Khi đó mặt phẳng $(P): by + c(z-1) = 0$.
  Ta có $d(B,(P)) = 1$ nên $\dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+c^2}} = 1 \Rightarrow c = 0$ nên $(P): y = 0$.
- Hai điểm A, C nằm cùng phía và khác phía điểm B so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua I, J. là tương tự như trên ta có 2 mặt phẳng.
- Hai điểm A, B nằm cùng phía và khác phía điểm C so với (P). Ta có 2 mặt phẳng.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

(A) $\frac{11}{630}$. (B) $\frac{1}{126}$. (C) $\frac{1}{105}$. (D) $\frac{1}{42}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 10!$.
Số cách xếp 5 bạn lớp 12C là 5!. Với mỗi cách xếp 5 bạn đó ta có hai trường hợp

- Đứng đầu hàng tính từ trái sang phải là một bạn lớp 12C và đứng cuối không phải là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXCX$, trong đó X là hs lớp A hoặc B. Khi đó ta có 5! các xếp 5 học sinh còn lại.
- Đứng đầu hàng từ trái sang phải không là hs lớp 12 C và đứng cuối là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $XCXCXCXCXC$. Khi đó ta cũng có 5! cách xếp 5 học sinh còn lại.
- Có 2 học sinh lớp C đứng hai đầu hàng, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXYC$. Khi đó ta gép một học sinh lớp B với một học sinh lớp C và xem đó như một phần tử, khi đó còn lại 4 hs nên ta có 4! cách xếp. Do đó trường hợp này có 2.6.4!

Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{(2.5! + 12.4!).5!}{10!} = \dfrac{11}{630}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0,\ \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 7,\ \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{7}{5}$. (B) 1. (C) $\frac{7}{4}$. (D) 4.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{1}{3} = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{3} f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1.$ (1)

Mặt khác, do $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 7$ nên

$$\int\limits_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right]\,\mathrm{d}x = 0 = 7 - 14 + 7 = 0.$$

Hay $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(f'(x)+7x^3\right)^2\,\mathrm{d}x = 0.$ (2)

Suy ra $f'(x)+7x^3=0 \Rightarrow f'(x)=-7x^3 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{7}{4}x^4+C.$

Mà $f(1)=0$ nên $C=\dfrac{7}{4}$, suy ra $f(x)=\dfrac{7}{4}(1-x^4)$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{5}$.

Lưu ý. Có thể giải thích vì sao từ (2) suy ra $f'(x)+7x^3=0$, $\forall x\in[0;1]$ như sau: Theo giả thiết ta có hàm số $y=\left(f'(x)+7x^3\right)^2$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;1]$ (do đó, đồ thị hàm số này là một đường nét liền trên đoạn $[0;1]$ và không có điểm nào nằm bên dưới trục Ox). Tích phân ở (2) có giá trị bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(f'(x)+7x^3\right)^2$, trục hoành, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=1$. Mà theo (2) thì hình phẳng này có diện tích bằng 0 nên $f'(x)+7x^3=0$, $\forall x\in[0;1]$.

Cách 2 (tiếp nối từ (1)). Ta có bất đẳng thức Bunhiacovski đối với tích phân: Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta luôn có

$$\left[\int\limits_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right).\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $g(x)=kf(x)$, $\forall x\in[a;b]$. Trở lại bài toán. Từ (1), ta có:

$$1=\left(\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x\cdot\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\cdot 7=1.$$

Như vậy dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x)=kx^3$. Thay trở lại vào (1), ta được:

$$k\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\frac{k}{7}=-1\Rightarrow k=-7.$$

Vậy $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\dfrac{7}{4}x^4+C \overset{\text{do } f(1)=0}{\Rightarrow} f(x)=-\dfrac{7}{4}x^4+\dfrac{7}{4}$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018
Môn: Toán
Năm học: 2017 – 2018
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

(A) 2^{34}. (B) A^2_{34}. (C) 34^2. (D) C^2_{34}.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử nên số cách chọn là C^2_{34}.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}_1=(3;2;1)$. (B) $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. (C) $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. (D) $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

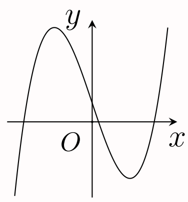
Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. B. $S = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. C. $S = \pi \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. D. $S = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ được tính theo công thức $S = \int\limits_0^2 |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln\dfrac{5}{3}$. D. $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\dfrac{5a}{3a} = \ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$. B. $3x^2 + 1 + C$. C. $x^3 + x + C$. D. $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3 = (2;1;3)$. B. $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$. C. $\vec{u}_2 = (2;1;1)$. D. $\vec{u}_1 = (-1;2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. 3. B. -7. C. -3. D. 7.

Lời giải.

Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

(A) $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. (B) $2\pi R^2$. (C) $4\pi R^2$. (D) πR^2.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$.

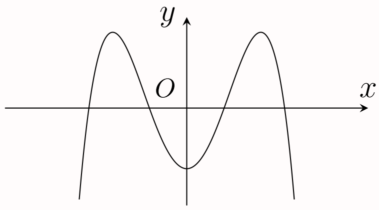
Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^4 - 3x^2 - 1$. (B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. (D) $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.



Lời giải.

Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên không thể là đồ thị hàm số bậc ba.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty$ nên chọn $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

(A) $(1;3;2)$. (B) $(2;6;4)$. (C) $(2;-1;5)$. (D) $(4;-2;10)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $+\infty$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+3} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

(A) $x = \dfrac{5}{2}$. (B) $x = 2$. (C) $x = \dfrac{3}{2}$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 15. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $4a^3$. Ⓑ $\frac{2}{3}a^3$. Ⓒ $2a^3$. Ⓓ a.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{\text{đáy}} = a^2$.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \times h = \frac{1}{3}a^2 \times 2a = \frac{2}{3}a^3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Ⓐ 11 năm. Ⓑ 9 năm. Ⓒ 10 năm. Ⓓ 12 năm.

Lời giải.

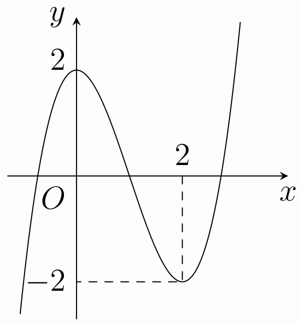
Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9,6$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Lời giải.

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 18. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \dfrac{1}{6}$ nên $x = 0$ không phải là một tiệm cận đứng.

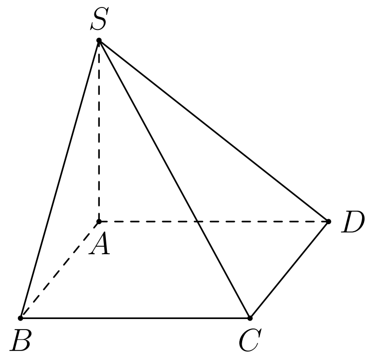
Chọn đáp án (D)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A 60°. **B** 90°. **C** 30°. **D** 45°.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.
Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.
Tam giác SAB vuông tại A, $\cos\widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (A)

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

A $2x - y + 3z - 9 = 0$. **B** $2x - y + 3z + 11 = 0$.
C $2x - y - 3z + 11 = 0$. **D** $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có dạng $2x-y+3z+D = 0\,(D \neq 2)$.
$A(2;-1;2) \in (Q) \Rightarrow D = -11$.
Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 3z - 11 = 0$.
Chọn đáp án (D)

Câu 21. Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A $\dfrac{4}{455}$. **B** $\dfrac{24}{455}$. **C** $\dfrac{4}{165}$. **D** $\dfrac{33}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 455$ (phần tử).
Gọi A là biến cố: "lấy được 3 quả cầu màu xanh".
Khi đó, $n(A) = \mathrm{C}_4^3 = 4$ (phần tử).
Xác suất $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{455}$.
Chọn đáp án (A)

Câu 22. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$. **B** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$. **C** $\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$. **D** $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^2)$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ta có $\int\limits_1^2 e^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

(A) 201. (B) 2. (C) 9. (D) 54.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2;3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2;3]. \end{array}\right.$

Ta có $f(-2) = 9,\ f(3) = 54,\ f(0) = 9,\ f\left(-\sqrt{2}\right) = 5,\ f\left(\sqrt{2}\right) = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng $f(3) = 54$.

Chọn đáp án (D)

Câu 24. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$, với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -1;\ y = -3$. (B) $x = -1;\ y = -1$. (C) $x = 1;\ y = -1$. (D) $x = 1;\ y = -3$.

Lời giải.

Ta có $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i \Leftrightarrow x + 1 - (3y + 9)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án (A)

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

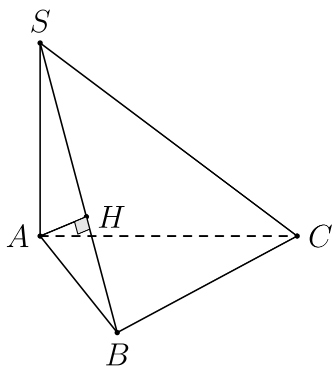
(A) $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$.

Do đó khoảng cách cần tìm là AH.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{5}{4a^2}$ suy ra $AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (A)

Câu 26. Cho $\int\limits_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a - b = -c$. (B) $a + b = c$. (C) $a + b = 3c$. (D) $a - b = -3c$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x + 9 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.
Đổi cận: $x = 16 \Rightarrow t = 5$; $x = 55 \Rightarrow t = 8$.

$$\text{Ta có } \int_{16}^{55} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}} = \int_5^8 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-9)t} = 2\int_5^8 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-9} = \frac{1}{3}\left(\int_5^8 \frac{\mathrm{d}t}{t-3} - \int_5^8 \frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right).$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x-3| - \ln|x+3|\right)\Big|_5^8 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a - b = -c$ đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

(A) $9{,}7a$ (đồng). (B) $97{,}03a$ (đồng). (C) $90{,}7a$ (đồng). (D) $9{,}07a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0{,}2) = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:

$$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 8a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 9{,}07 \cdot 10^{-6} a \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6 + (3x-1)^8$ bằng

(A) -13368. (B) 13368. (C) -13848. (D) 13848.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 = x\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$$

$$= x\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} + \mathrm{C}_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^{6-5} = -13368$.

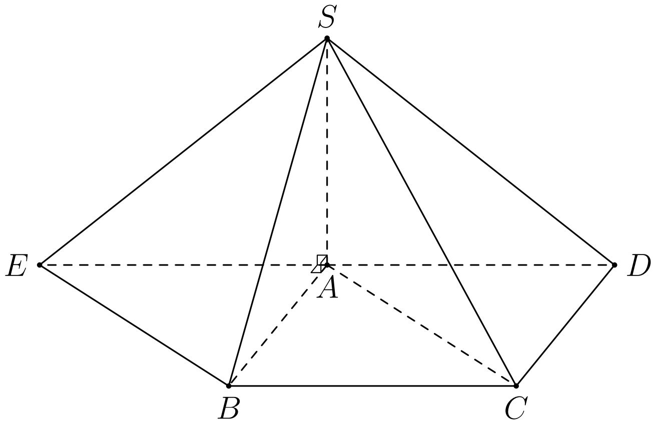
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2a}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC \parallel (SBE)$ nên $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(A, (SBE)) = h$.

Do AS, AB, AE đôi một vuông góc nhau nên $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{9}{4a^2}$.

Như vậy $\mathrm{d}(A, (SBE)) = h = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{5}{4}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(\overline{z} + i)(z + 2) = (x - yi + i)(x + yi + 2) = (x^2 + 2x + y^2 - y) + (x - 2y + 2)i$

Vì $(\overline{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên ta có: $x^2 + 2x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.

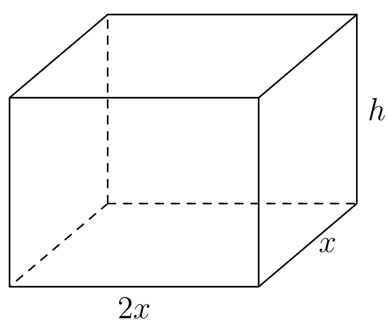
Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Ông A dự định sử dụng hết $6{,}5\ \mathrm{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Ⓐ $2{,}26\ \mathrm{m}^3$. Ⓑ $1{,}61\ \mathrm{m}^3$. Ⓒ $1{,}33\ \mathrm{m}^3$. Ⓓ $1{,}50\ \mathrm{m}^3$.

Lời giải.



Đặt chiều rồng là x (m); chiều cao là h (m) (với $x, h > 0$).

Ta có $2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \dfrac{6{,}5 - 2x^2}{6x}$.

Do $h > 0$, $x > 0$ nên $6{,}5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V = 2x^2h = \dfrac{6{,}5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{13}{6} - 2x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

x	0		$\frac{\sqrt{39}}{6}$		$\frac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	$\searrow$	

Vậy $V \leqslant f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right) = \dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1{,}50\ \text{m}^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

(A) 22 m/s. (B) 15 m/s. (C) 10 m/s. (D) 7 m/s.

Lời giải.

+ Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.
+ Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng
$v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.
+ Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{10} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \dfrac{3}{2}\cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B = \Delta \cap Ox \Rightarrow B(b;0;0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1-b;2;3)$.
Do $\Delta \perp d$, Δ qua A nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(1-b) + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Từ đó Δ qua $B(-1;0;0)$, có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (2;2;3)$ nên $\Delta\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 13. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$. $\quad (*)$
Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình $(*)$ sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; 6\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

(A) 2. (B) Vô số. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.
$y' = \dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \geqslant -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < m \leqslant 2.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$.
Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$. Có 2 trường hợp cần xét liên quan $(m^2 - 4)$:

- Trường hợp 1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

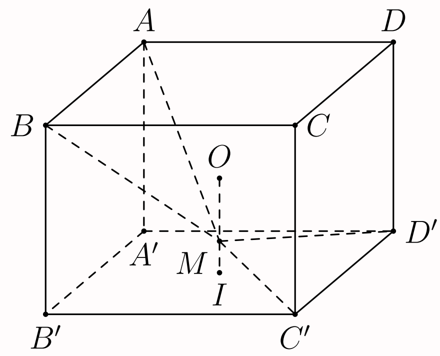
  + Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

  + Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

- Trường hợp 2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.
  Ta có x^3 đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0$, do đó
  $y' = x^3 \cdot g(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0$.

Kết hợp các trường hợp giải được ta nhận $m \in \{2; 1; 0; -1\}$.
Chọn đáp án (C) □

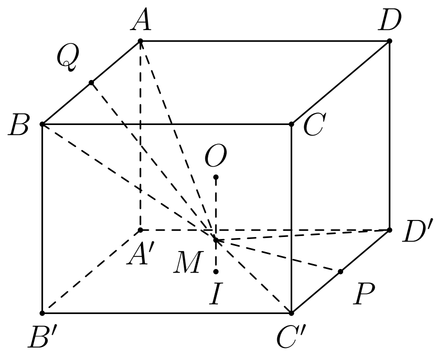
Câu 37.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



Ⓐ $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. Ⓒ $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB. Khi đó ta có $MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.
Áp dụng định lí cô-sin ta được
$\cos\widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \dfrac{-14}{\sqrt{340}}$.
Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có
$\cos\alpha = \dfrac{14}{\sqrt{340}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 38. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z-4-i)+2i = (5-i)z$?
Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có
$|z|(z-4-i)+2i = (5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i) = 4|z| + (|z|-2)i$.
Lấy môđun 2 vế ta được
$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z|-2)^2}$.
Đặt $t = |z|, t \geqslant 0$ ta được
$t\sqrt{(t-5)^2+1} = \sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4) = 0$.
Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geqslant 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình
Ⓐ $6x+8y+11=0$. Ⓑ $3x+4y+2=0$. Ⓒ $3x+4y-2=0$. Ⓓ $6x+8y-11=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính $R=3$.
* Ta tính được $AI = 5$, $AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = 4$.
* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2;3;-1)$, bán kính $AM = 4$ là
$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 16$.
* M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x+4y-2=0$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

* Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7}. \end{array}\right.$

* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\frac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

* Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3 (\text{loại}). \end{array}\right.$

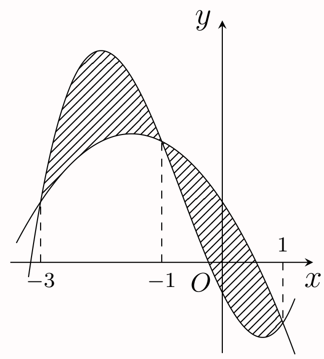
Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 41.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$. B. 8. C. 4. D. 5.



Lời giải.

Do $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3; -1$ và 1 nên

$$f(x) - g(x) = A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0) - g(0) = -\frac{3}{2}$ nên $-3A = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \mathrm{d}x = 2 - (-2) = 4.$$

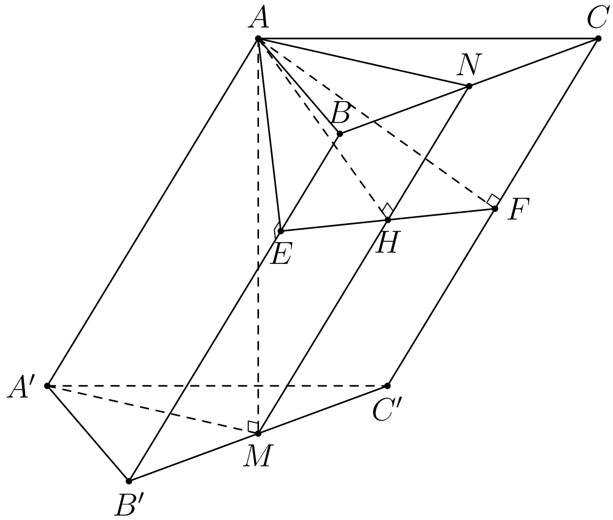
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 2. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Dựng $\triangle AEF$ như hình vẽ sao cho $AA' \perp (AEF)$.
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'}$ bằng với thể tích của lăng trụ (T) có mặt đáy AEF và cạnh bên AA'
Tức là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA'$.
Từ cách dựng ta suy ra $AE = 1, AF = \sqrt{3}$ và $EF = 2$. Suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A.
Từ đó $S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2} AE \cdot AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi N là trung điểm BC và $H = EF \cap MN$ thì $MN \parallel AA'$; H là trung điểm EF và $AH \perp MN$
Từ đó $AH = \dfrac{1}{2} EF = 1$.



$\triangle AMN$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AM = 2$.
Cuối cùng $AA' = MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

(A) $\dfrac{1728}{4913}$. (B) $\dfrac{1079}{4913}$. (C) $\dfrac{23}{68}$. (D) $\dfrac{1637}{4913}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3 = 4913$.
Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau:
$*$ Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập $\{3; 6; 9; 12; 15\}$.
$*$ Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập $\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$.
$*$ Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.
Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau:
- TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.
- TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.
- TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.
- TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3! = 1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{125 + 216 + 216 + 1080}{4913} = \dfrac{1637}{4913}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 9. Ⓒ $\dfrac{7}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $a>0, b>0$ nên ta có $\begin{cases}(9a^2+b^2)+1\geqslant 6ab+1 \text{ (bất đẳng thức AM-GM)}\\ 3a+2b+1>1.\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)\geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)$$

Từ đó $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)\geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)$
$\geqslant 2$ (bất đẳng thức AM-GM).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a=b>0\\ 3a+2b+1=6ab+1\end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ và $b=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

Ⓐ $\sqrt{6}$. Ⓑ $2\sqrt{3}$. Ⓒ 2. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon y=\dfrac{x-1}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$ có $I(-2;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Xét $\begin{cases}A\left(a-2;1-\dfrac{3}{a}\right)\in(C)\\ B\left(b-2;1-\dfrac{3}{b}\right)\in(C)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}=\left(a;-\dfrac{3}{a}\right)\\ \overrightarrow{IB}=\left(b;-\dfrac{3}{b}\right)\end{cases}$ và $\begin{cases}IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}\\ IB=\sqrt{b^2+\dfrac{9}{b^2}}.\end{cases}$

Tam giác ABI đều khi và chỉ khi $\begin{cases}IA^2=IB^2\\ \cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\cos 60^\circ\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2}\\ \dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}}{IA\cdot IB}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2} & (1)\\ \dfrac{ab+\dfrac{9}{ab}}{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=\dfrac{1}{2}. & (2)\end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra $ab>0$ và $a^2\neq b^2$ (do $A\not\equiv B$).

Từ (1) ta suy ra $(a^2-b^2)\left(1-\dfrac{9}{a^2b^2}\right)=0\Rightarrow ab=3$.

Với $ab=3$, thay vào (2) ta tìm được $a^2+\dfrac{9}{a^2}=12$. Vậy $AB=IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 46. Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

Ⓐ 20. Ⓑ 19. Ⓒ 9. Ⓓ 21.

Lời giải.

Điều kiện: $x > m$.
Ta có $5^x + m = \log_5(x-m) \Leftrightarrow 5^x + x = x - m + \log_5(x-m)$. (1)
Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Do đó từ (1) suy ra $x = \log_5(x-m) \Leftrightarrow m = x - 5^x$.
Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$, $g'(x) = 1 - 5^x \cdot \ln 5$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \dfrac{1}{\ln 5} = -\log_5 \ln 5 = x_0$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5 \ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

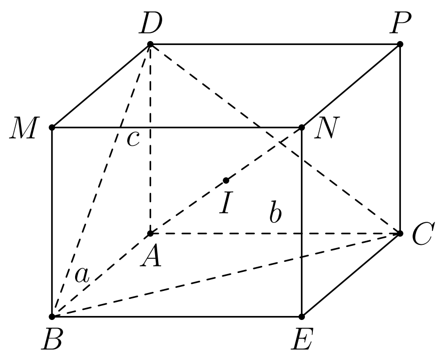
Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \leqslant g(x_0) \approx -0,92$.
Các giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ là $\{-19; -18; \ldots; -1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72. B. 216. C. 108. D. 36.

Lời giải.

Đặt $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).
Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.
Xét $V = V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.



Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geqslant a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3 \geqslant 36 \cdot V^2 \Leftrightarrow V \leqslant R^3 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.
Với $R = IA = 3\sqrt{3}$.
Vậy $V_{\max} = 36$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{35}{36}$. B. $-\dfrac{2}{3}$. C. $-\dfrac{19}{36}$. D. $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^2 + C.$

Từ $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ suy ra $C = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(1) = \dfrac{1}{-1^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t'. \end{cases}$

Chọn điểm $B(0;3;-1) \in \Delta$ ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-2)$ và $AB = 3$.

Chọn điểm $C(4;5;1) \in d$ ta có $\overrightarrow{AC} = (3;4;0)$ và $AC = 5$.

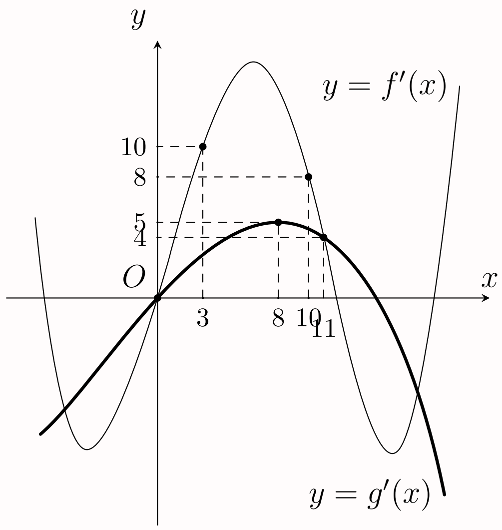
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 > 0 \Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ$. Phân giác của góc nhọn $\widehat{BAC}$ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC} = (4;22;-10).$$

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có một véc-tơ chỉ phương cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC} = (4;22;-10)$. Xét phương án $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t. \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;11;-5)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC} = (4;22;-10)$ và đi qua đi qua điểm $A(1;1;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5; \dfrac{31}{5}\right)$.　　B. $\left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$.　　C. $\left(\dfrac{31}{5}; +\infty\right)$.　　D. $\left(6; \dfrac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$, $a \in (8; 10)$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} f(x+4) > 10 & \text{khi } 3 < x+4 < a \\ g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 5 & \text{khi } 0 \leqslant 2x - \dfrac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10 & \text{khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 5 & \text{khi } \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{25}{4}. \end{cases}$$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$ khi $\dfrac{3}{4} \leqslant x < 4$.

Kiểu đánh giá khác:

Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\dfrac{25}{4} < x + 4 < 7$, $f(x+4) > f(3) = 10$;

$3 < 2x - \dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{2}$, do đó $g\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) < f(8) = 5$.

Suy ra $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{9}{4}; 3\right)$.

Chọn đáp án B □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018
Môn: Toán
Năm học: 2017 – 2018
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. $\lim \dfrac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. B. 0. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \displaystyle\int_0^2 2^x \mathrm{d}x$. B. $S = \pi \displaystyle\int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. C. $S = \displaystyle\int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. D. $S = \pi \displaystyle\int_0^2 2^x \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là $S = \displaystyle\int\limits_0^2 2^x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1) = 3$ là

A. $\{-3; 3\}$. B. $\{-3\}$. C. $\{3\}$. D. $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3; 3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$. B. $4x^3 + 1 + C$. C. $x^5 + x^2 + C$. D. $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

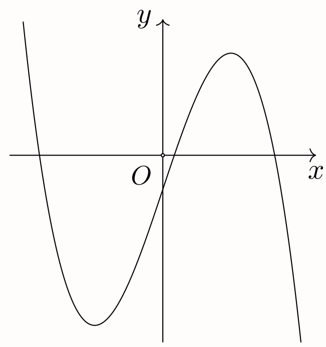
Ta có $\displaystyle\int \left(x^4 + x\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 5.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.



Lời giải.

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

Ⓐ $3 + 4i$. Ⓑ $4 - 3i$. Ⓒ $3 - 4i$. Ⓓ $4 + 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là $z = 3 + 4i$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\frac{4}{3}a^3$. Ⓑ $\frac{16}{3}a^3$. Ⓒ $4a^3$. Ⓓ $16a^3$.

Lời giải.

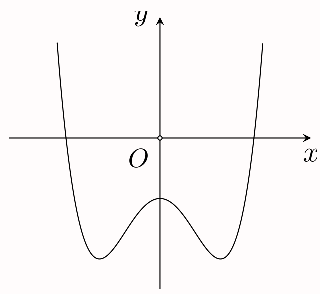
Diện tích đáy là $S = a^2$.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 4a = \frac{4a^3}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Ⓑ $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
Ⓒ $y = x^3 - x^2 - 1$. Ⓓ $y = -x^3 + x^2 - 1$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị ta suy ra hàm số là hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có

- "Đuôi thăng thiên" nên $a > 0$.
- Cắt trục tung tại điểm nằm phía dưới trục hoành nên $c < 0$.
- Có 3 cực trị nên $a \cdot b < 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9. Thể tích khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. B. $4\pi R^3$. C. $2\pi R^3$. D. $\frac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(3;3;-1)$. B. $(-1;-1;-3)$. C. $(3;1;1)$. D. $(1;1;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;2-1;1-(-2)) = (1;1;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3\log_3 a$. B. $3+\log_3 a$. C. $1+\log_3 a$. D. $1-\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(-1;1)$. D. $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh?

A. A_{38}^2. B. 2^{38}. C. C_{38}^2. D. 38^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 38, số cách chọn là C_{38}^2.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (3;-1;5)$. B. $\vec{u}_4 = (1;-1;2)$. C. $\vec{u}_2 = (-3;1;5)$. D. $\vec{u}_3 = (1;-1;-2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;-1;2)$.

Chọn đáp án B □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $3x + 2y + z - 4 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. (B) $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. (C) $\vec{n}_2 = (3; 2; 1)$. (D) $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$.

Lời giải.

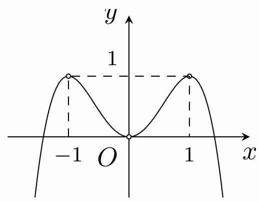
Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; 2; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

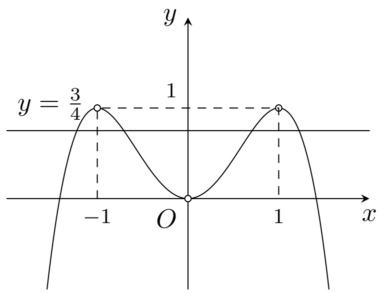


Lời giải.

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{4}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{4}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra số nghiệm phương trình là 4.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Từ một hộp chứa 7 quả cầu mà đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

(A) $\dfrac{5}{12}$. (B) $\dfrac{7}{44}$. (C) $\dfrac{1}{22}$. (D) $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 quả cầu từ hộp là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.

Gọi A: "lấy được 3 viên bi xanh". Ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^3$.

Xác suất cần tìm $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{1}{22}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

(A) -259. (B) 68. (C) 0. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 7$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\dfrac{7}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Mà $y(0) = 0$, $y(1) = -4$, $y(4) = 68$.

Vậy $\min\limits_{[0;4]} y = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 30°. Ⓓ 90°.

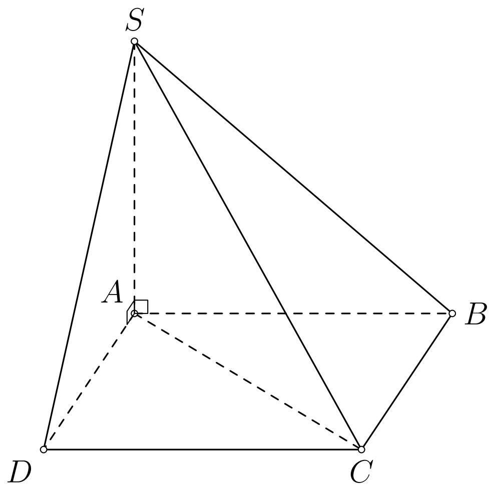
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SA \perp (ABCD) \text{ tại } A \end{cases}$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$. Ⓑ $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$. Ⓒ $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e})$. Ⓓ $\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ có phương trình là

Ⓐ $3x + 2y + z - 5 = 0$. Ⓑ $2x + y + 3z + 2 = 0$.

Ⓒ $x + 2y + 3z + 1 = 0$. Ⓓ $2x + y + 3z - 2 = 0$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (2;1;3)$.

Vì mặt phẳng cần tìm vuông góc với đường thẳng Δ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{u} = (2;1;3)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $2(x-1) + 1(y-2) + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z + 2 = 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Tập xác định hàm số $\mathscr{D} = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = 1$.

Suy ra đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên SB.

Ta có

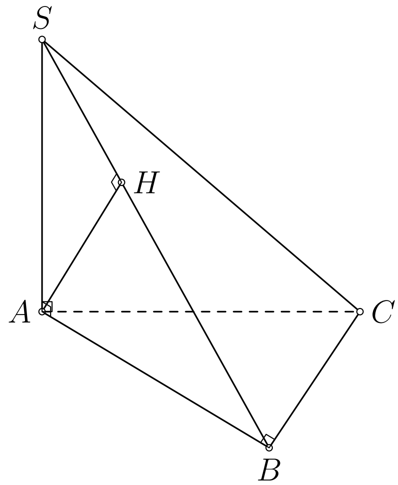
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \end{cases}$$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

(A) 11 năm. (B) 12 năm. (C) 9 năm. (D) 10 năm.

Lời giải.

Giả sử người ấy gửi số tiền M_0 vào ngân hàng. Khi đó, sau n năm số tiền của người ấy được tính bằng công thức $M = M_0(1 + 7{,}2\%)^n = M_0 \cdot 1,072^n$.

Theo đề bài, ta tìm n thỏa mãn $M \geq 2M_0 \Leftrightarrow M_0 \cdot 1{,}072^n \geq 2M_0 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}072} 2 \approx 9{,}969602105$.

Vậy sau ít nhất 10 năm người ấy mới thu được số tiền nhiều gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -2$; $y = -2$. (B) $x = -2$; $y = -1$. (C) $x = 2$; $y = -2$. (D) $x = 2$; $y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i \Leftrightarrow (3x + 2) + (2y + 1)i = 2x - 3i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 2x \\ 2y + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Ông A dự định sử dụng hết 6,7 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

(A) $1{,}57\ m^3$. (B) $1{,}11\ m^3$. (C) $1{,}23\ m^3$. (D) $2{,}48\ m^3$.

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể cá $(a, b, c > 0)$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} a = 2b \\ 2ac + 2bc + ab = 6{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \dfrac{6{,}7 - 2b^2}{6b} \end{cases}$.

Thể tích bể cá là $V = abc = \dfrac{2b^2(6{,}7 - 2b^2)}{6b} = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3} = f(b)$.

Xét hàm số $f(b) = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3}$ với $b > 0$.

Ta có $f'(b) = \dfrac{6{,}7 - 6b^2}{3}$, $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{\dfrac{67}{60}}$, $f(b) \approx 1{,}57$.

Bảng biến thiên

b	0		$\sqrt{\dfrac{67}{60}}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$	$1{,}57$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, dung tích lớn nhất của bể cá gần bằng 1,57.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho $\displaystyle\int_5^{21} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + b = -2c$. (B) $a + b = c$. (C) $a - b = -c$. (D) $a - b = -2c$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 4 \\ dx = 2t\,dt. \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 5 \Rightarrow t = 3 \\ x = 21 \Rightarrow t = 5. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_3^5 \dfrac{2\,dt}{(t-2)(t+2)} = \dfrac{1}{2}\int_3^5 \left(\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+2}\right) dt \\ &= \dfrac{1}{2}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2|\right)\Big|_3^5 \\ &= \dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 7 + \ln 5). \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}, c = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó $a + b = -2c$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

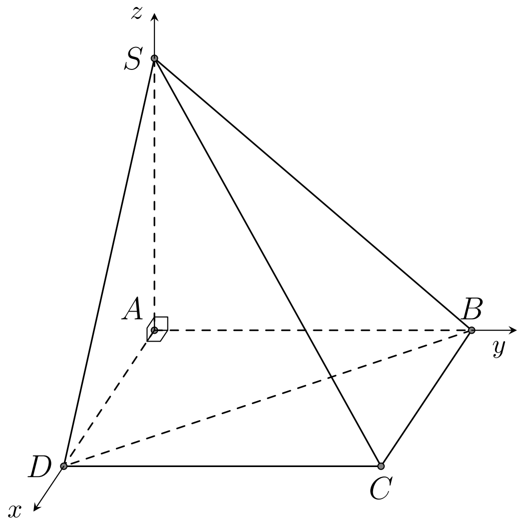
Ⓐ $\dfrac{\sqrt{30}a}{6}$. Ⓑ $\dfrac{4\sqrt{21}a}{21}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{30}a}{12}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D(2a;0;0)$, $C(2a;a;0)$ và $S(0;0;a)$.

Ta có

- $\overrightarrow{BD} = (2a;-a;0)$.
- $\overrightarrow{SC} = (2a;a;-a)$.
- $\overrightarrow{SB} = (0;a;-a)$.
- $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}] = (a^2;2a^2;4a^2)$
  $\Rightarrow \left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}]\right| = a^2\sqrt{21}$.
- $\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SB}\right| = 2a^3$.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là

$$\mathrm{d}(SC, BD) = \frac{\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SB}\right|}{\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}]\right|} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 3+3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+3t \\ z = 3+2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ có VTCP là $\vec{u} = (1;-2;2)$.

Gọi $M(0;m;0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;m-1;-3)$.

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2-2(m-1)-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Do đó, Δ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

trên khoảng $(10;+\infty)$?

Ⓐ 3. Ⓑ Vô số. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi chỉ khi $\begin{cases} y'<0,\ \forall x\in\mathscr{D}\\ -5m\notin(10;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5m-6<0\\ -5m\leq 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{6}{5}\\ m\geq -2.\end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1mm. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá $6a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ $84{,}5a$ (đồng). Ⓑ $78{,}2a$ (đồng). Ⓒ $8{,}45a$ (đồng). Ⓓ $7{,}82a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì là

$$V_r=\pi\cdot(10^{-3})^2\cdot 0{,}2=0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\ \text{m}^3.$$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều là

$$V=B\cdot h=\frac{3\sqrt{3}}{2}(3\cdot 10^{-3})^2\cdot 0{,}2=\frac{27\sqrt{3}}{10}\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ là

$$V_t=V-V_r=\frac{27\sqrt{3}}{10}\cdot 10^{-6}-0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\ \text{m}^3.$$

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì là

$$0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\cdot 6a+\left(\frac{27\sqrt{3}}{10}\cdot 10^{-6}-0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\right)a\approx 7{,}82\cdot 10^{-6}a\ \text{(triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Ⓐ 20 (m/s). Ⓑ 16 (m/s). Ⓒ 13 (m/s). Ⓓ 15 (m/s).

Lời giải.

Từ đề bài, ta suy ra từ lúc chất điểm A chuyển động đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = a\cdot t + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau, nghĩa là

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{12} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 96 = 72a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Do đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12) = \dfrac{4}{3}\cdot 12 = 16$ (m/s).

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $\dfrac{9}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(\overline{z}+3i)(z-3) = x^2 + y^2 - 3x - 3y + (3x + 3y - 9)i$.

Số phức $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo khi chỉ khi $x^2+y^2-3x-3y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^6 + (2x-1)^8$ bằng

(A) -3007. (B) -577. (C) 3007. (D) 577.

Lời giải.

Ta có $(3x-1)^6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 3^k x^k (-1)^{6-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_6^4 3^4 (-1)^{6-4} = 1215$.

Ta lại có $(2x-1)^8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 2^k x^k (-1)^{8-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^5 2^5 (-1)^{8-5} = -1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x-1)^6 + (2x-1)^8$ là $1215 - 1792 = -577$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m\cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 7. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = 5^x$, điều kiện $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ $(*)$.

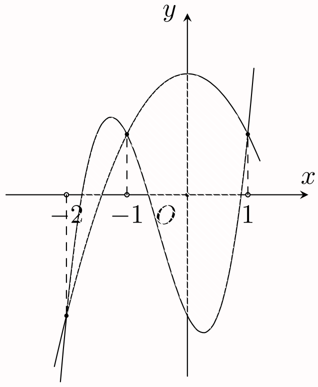
Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 28 > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{28}{3}} < m < \sqrt{\dfrac{28}{3}} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{\dfrac{28}{3}}.$$

Suy ra $S = \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 36.
Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A $\dfrac{37}{6}$. B $\dfrac{13}{2}$. C $\dfrac{9}{2}$. D $\dfrac{37}{12}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - g(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4$ (1).

Mặt khác phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ nên

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x) - g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^{-1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2.$$

Giá trị của $a + 2b$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. B 6. C 22. D $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thuyết bài toán, ta suy ra $25a^2 + b^2 + 1 > 1$, $10a + 3b + 1 > 1$ và $10ab + 1 > 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{25a^2b^2} + 1 = 10ab + 1$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} & \log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \\ \geq\; & \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \\ \geq\; & 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) \cdot \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)} = 2. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi

$$\begin{cases}5a=b\\ \log_{10a+3b+1}(10ab+1)=\log_{10ab+1}(10a+3b+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=5a\\ 10ab+1=10a+3b+1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=5a\\ 50a^2-25a=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=5a\\ \left[\begin{array}{l}a=0 \text{ (loại)}\\ a=\dfrac{1}{2} \text{ (nhận)}\end{array}\right.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{5}{2}\\ a=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$\Rightarrow a+2b=\dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y=x^8+(m-1)x^5-(m^2-1)x^4+1$$

đạt cực tiểu tại $x=0$?

(A) 3. (B) 2. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y'=8x^7+5(m-1)x^4-4(m^2-1)x^3+1=x^3\left[8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)\right]$,

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)=0 \quad (*)\end{array}\right.$$

- Nếu $m=1$ thì $y'=8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
- Nếu $m=-1$ thì $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4-10x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \text{ (nghiệm kép)}\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\end{array}\right. \Rightarrow x=0$ không phải là cực trị.
- Nếu $m\neq\pm1$ thì $x=0$ là nghiệm đơn.
  Đặt $g(x)=8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$ khi chỉ khi

  $$\lim_{x\to0^-} g(x)>0\Leftrightarrow -4(m^2-1)>0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m<1.$$

  Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

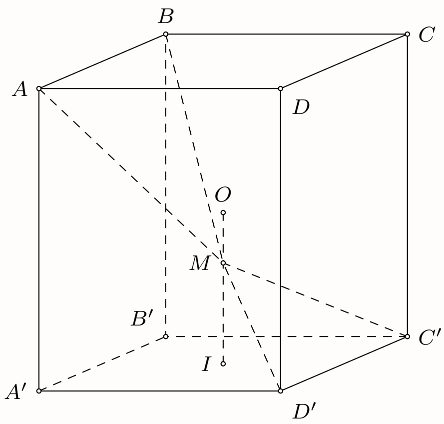
Vậy giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=0$, $m=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39.

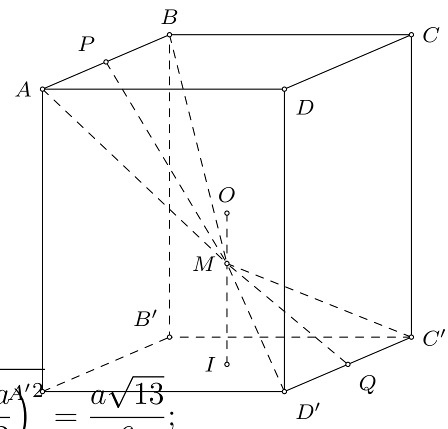
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cô-sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

Ⓐ $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. Ⓑ $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. Ⓒ $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. Ⓓ $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Giả sử hình lập phương có độ dài cạnh bằng a.
Hai mặt phẳng $(MC'D')$, (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D'$, AB và $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$. Các tam giác $MC'D'$, MAB cân ở M nên $MP \perp C'D'$, $MQ \perp AB$.
Do đó, nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}|$ (1)
Ta có



$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6};$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \frac{5a}{6}; PQ = AD' = a\sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \left|\frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2\cdot MP\cdot MQ}\right| = \left|\frac{\frac{25a^2}{36} + \frac{13a^2}{36} - 2a^2}{2\cdot\frac{5a}{6}\cdot\frac{a\sqrt{13}}{6}}\right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x\,[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Ⓐ $-\frac{11}{6}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}$. Ⓒ $-\frac{2}{9}$. Ⓓ $-\frac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x\,[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x$.

Do đó,

$$\begin{aligned} &\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}. \end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $f(2) = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$.

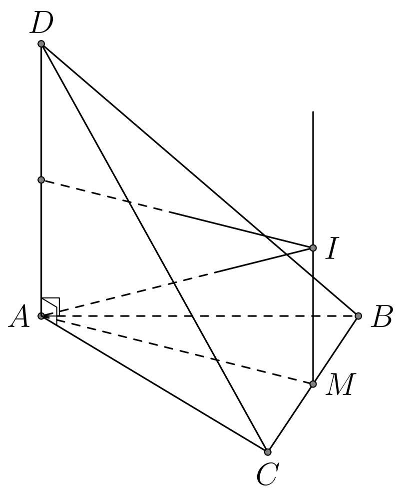
Suy ra $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{64}{3}$. (B) 32. (C) 64. (D) $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.



Đặt $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Khi đó, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \dfrac{1}{6}abc$.

Ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = 2\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó, $AM = \dfrac{b^2 + c^2}{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (S) nên ta có $IM \parallel AD$ và $IM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}a$.

Xét tam giác AIM vuông tại M, ta có

$$AI^2 = AM^2 + IM^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 48$$

Suy ra $V_{ABCD}^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2 \le \dfrac{1}{36}\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27} = \dfrac{1024}{9}$ hay $V_{ABCD} \le \dfrac{32}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

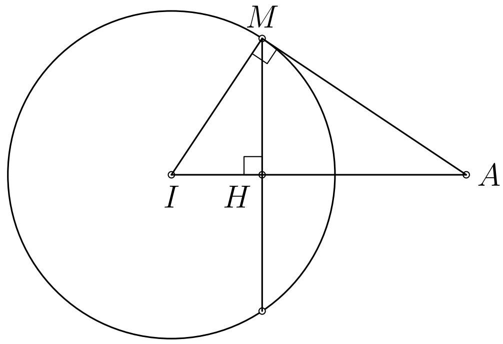
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

(A) $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. (B) $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

(C) $x + y + z + 7 = 0$. (D) $x + y + z - 7 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)\Rightarrow IA=\sqrt{3}$.
Suy ra điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
Do đó tập hợp tất cả các điểm M nằm trên mặt phẳng cố định (α). Mặt phẳng cố định (α) đi qua điểm H là hình chiếu của điểm M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên suy ra



$$IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.
Mặt phẳng cần tìm có phương trình là $-\left(x-\frac{4}{3}\right)-\left(y-\frac{7}{3}\right)-\left(z-\frac{10}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+y+z-7=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{1027}{6859}$. B. $\frac{2539}{6859}$. C. $\frac{2287}{6859}$. D. $\frac{109}{323}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega)=19^3$.
Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$ có 6 số chia hết cho 3, đó là $\{3;6;9;12;15;18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1, đó là $\{1;4;7;10;13;16;19\}$ và có 6 số chia cho 3 dư 2, đó là $\{2;5;8;11;14;17\}$.
Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 2.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 1: có 7^3 cách viết.
- **Trường hợp 3.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 2: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 4.** Trong ba số viết ra có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1 và 1 chia cho 3 dư 2: có $6\cdot 7\cdot 6\cdot 3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là $p=\dfrac{6^3+7^3+6^3+6\cdot 7\cdot 6\cdot 3!}{19^3}=\dfrac{2287}{6859}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;2;-2)$. Đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d và Δ là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=1+7t\\y=3-5t\\z=5+t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d nên A là giao điểm của d và Δ.
Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}=(-3;0;-4)$.
Đặt $\vec{u'}=\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{v'}=\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}=\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{4}{5}\right)$. Ta có $\vec{u'}\cdot\vec{v'}>0$ nên góc tạo bởi hai véc-tơ $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.
Suy ra $\vec{w}=\vec{u'}+\vec{v'}=\left(-\dfrac{4}{15};\dfrac{10}{15};-\dfrac{22}{15}\right)=-\dfrac{2}{15}(2;-5;11)$ là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Phương trình đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=-3-5t\\ z=5+11t.\end{cases}$$

Chọn $t=-2$ suy ra điểm $M(-1;2;-6)$ thuộc đường phân giác. Khi đó, đường phân giác có phương trình

$$\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2-5t\\ z=-6+11t.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16. B. 9. C. 14. D. 15.

Lời giải.

Ta có $3^x+m=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m$ $(*)$.
Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác, phương trình $(*)$ có dạng $f(x)=f(\log_3(x-m))$. Do đó,

$$f(x)=f(\log_3(x-m))\Leftrightarrow x=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x=x-m\Leftrightarrow 3^x-x=-m\ (**)$$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)=a$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

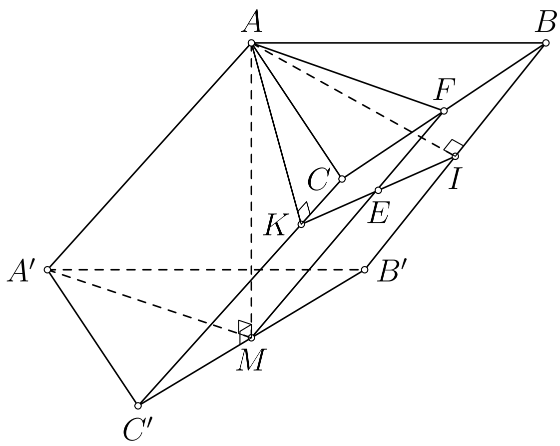
Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $(**)$ có nghiệm khi chỉ khi $m\in(-\infty;-g(a))$.
Mặt khác, $m\in\mathbb{Z}\cap(-15;15)$ nên $m\in\{-14;-13;-12;\ldots;-1\}$ (vì $-g(a)\approx-0{,}9958452485$).
Do đó, có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$. Khoảng cách từ A đến BB', CC' lần lượt là 1; 2 nên $AI = 1$, $AK = 2$.



Gọi F là trung điểm của BC.

Vì $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AIK)$

$\Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB'$ nên

$$\mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(K, BB') = IK = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Mà $AM \perp (ABC)$ nên $((ABC), (AIK)) = \left(\widehat{EF, AM}\right) = \widehat{AME} = \widehat{FAE}$ ($\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AM}$ là véc-tơ pháp tuyến của của (AKI), (ABC)).

Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$ (AE là đường trung tuyến của tam giác AKI vuông tại A).

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là tam giác AIK nên

$$S_{\triangle AIK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\widehat{EAF} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AIK}}{\cos\widehat{EAF}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

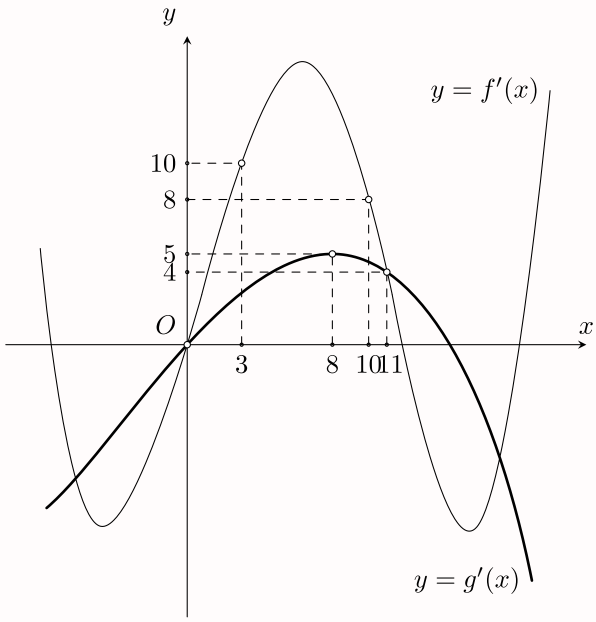
Xét tam giác AMF vuông tại A, ta có $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{AF}{\tan\widehat{AMF}} = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $\left(2; \dfrac{16}{5}\right)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

Ⓒ $\left(\dfrac{16}{5}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(3; \dfrac{13}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$ với $a \in (8; 10)$. Khi đó,

$$\begin{cases} f'(x+7) > 10 \text{ khi } 3 < x+7 < a \\ g'\left(2x + \dfrac{9}{2}\right) \leq 5 \text{ khi } 0 \leq 2x + \dfrac{9}{2} \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x+7) > 10 \text{ khi } -4 < x < 1 \\ g'\left(2x + \dfrac{9}{2}\right) \leq 5 \text{ khi } -\dfrac{9}{4} \leq x \leq \dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

Do đó, $h'(x) = f'(x+7) - 2g'\left(2x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$ khi $-\dfrac{9}{4} \leq x < 1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn AB có độ dài bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ $2\sqrt{2}$. Ⓓ $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giao điểm hai đường tiệm cận của (C) là $I(-1; 1)$. Hàm số đã cho được viết lại $y = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

Giả sử $A\left(a; 1 - \dfrac{2}{a+1}\right) \in (C)$, $A\left(b; 1 - \dfrac{2}{b+1}\right) \in (C)$. Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(a+1; -\dfrac{2}{a+1}\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(b+1; -\dfrac{2}{b+1}\right)$.

Đặt $a_1 = a+1$, $b_1 = b+1$ (hiển nhiên $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ và $a_1 \neq b_1$).

Tam giác ABI đều khi chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \dfrac{4}{b_1^2} \\ \dfrac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{IA \cdot IB} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1^2 - b_1^2)\left(1 - \dfrac{4}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 & (1) \\ \dfrac{a_1 b_1 + \frac{4}{a_1 b_1}}{a_1^2 + \frac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = b_1, \text{ loại vì } A \equiv B. \\ a_1 = -b_1, \text{ loại vì không thỏa mãn (2).} \\ a_1 b_1 = -2, \text{ loại vì không thỏa mãn (2).} \\ a_1 b_1 = 2. \end{array}\right.$

Với $a_1b_1 = 2$, thay vào (2), ta được $\dfrac{2+\frac{4}{2}}{a_1^2+\frac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = 8$.

Vậy $AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z$?

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z \Leftrightarrow z(4-|z|-i) = -3|z| + (2-|z|)i$.
Đặt $t = |z|$, điều kiện $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$t|4-t-i| = |-3t+(2-t)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(4-t)^2+1} = \sqrt{9t^2+(2-t)^2}$$
$$\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 7t^2 - t + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \approx 7{,}081 \\ t \approx 0{,}61146 \\ t \approx -0{,}6928. \end{array}\right.$$

Do đó, có 3 giá trị t thỏa mãn.
Mặt khác, với mỗi $t \geq 0$, ta có $z = \dfrac{-3t+(2-t)i}{4-t-i}$ nên có duy nhất một số phức z thỏa mãn.
Vậy có 3 số phức thõa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{7}{4}x^2$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là $k = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 3$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại $A\left(x_0; \dfrac{1}{8}x_0^4 - \dfrac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc bằng 3. Suy ra

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = -1$, ta có $A\left(-1; \dfrac{13}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + \dfrac{11}{8}$.

  Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1+\sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(-1; \frac{13}{8}\right) \text{ thỏa yêu cầu bài toán.}$$

- Với $x_0 = 3$ ta có $A\left(3; -\dfrac{171}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \dfrac{195}{8}$.
  Xét phương trình hoành độ giao điểm
  $$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right) \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

- Với $x_0 = -2$, ta có $A(-2; -5)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + 1$.
  Xét phương trình hoành độ giao điểm
  $$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow A(-2; -5) \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Vậy có 2 điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 11

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018
Môn: Toán
Năm học: 2017 – 2018
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$. Ⓑ $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$. Ⓒ $\ln\dfrac{7}{3}$. Ⓓ $\ln(4a)$.

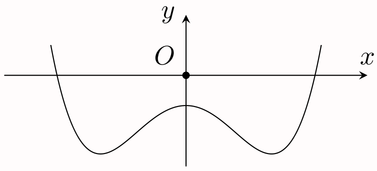
Lời giải.

Ta có $\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\dfrac{7a}{3a}\right) = \ln\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2.
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a,\, b,\, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.



Lời giải.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Ⓑ $2\pi r h$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. Ⓓ $\pi r^2 h$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V = \displaystyle\int_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V = \displaystyle\int_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 5. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

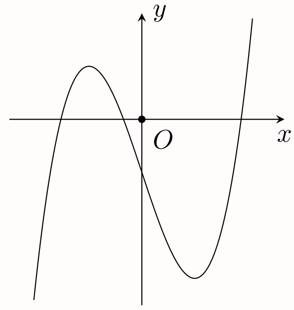
A) C_7^2. B) 2^7. C) 7^2. D) A_7^2.

Lời giải.

Số các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau được lấy ra từ 7 chữ số trên là A_7^2.
Chọn đáp án D □

Câu 6.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A) $y = -x^4 + x^2 - 1$. B) $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
C) $y = -x^3 - 3x - 1$. D) $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Đường cong trên hình là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$ nên chỉ có $y = x^3 - 3x - 1$ là đúng.
Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A) $(-1; 0)$. B) $(1; +\infty)$. C) $(-\infty; 1)$. D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A) $4a^3$. B) $\dfrac{16}{3}a^3$. C) $\dfrac{4}{3}a^3$. D) $16a^3$.

Lời giải.

Mặt đáy của lăng trụ là hình vuông cạnh a nên có diện tích $S_{\text{đáy}} = a^2$.
Và do lăng trụ có chiều cao $h = 4a$ nên có thể tích $V = S_{\text{đáy}} \times h = a^2 \times 4a = 4a^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(3;1;-1)$. B. $(3;-1;1)$. C. $(-3;-1;1)$. D. $(-3;1;-1)$.

Lời giải.

Tâm của $(S)\colon (x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$ có tọa độ là $(-3;-1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. $\lim \dfrac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{7}$. B. $+\infty$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{2n+7}=\lim \dfrac{\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n}}=\dfrac{0}{2}=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Số phức $5+6i$ có phần thực bằng

A. -5. B. 5. C. -6. D. 6.

Lời giải.

Số phức $5+6i$ có phần thực bằng 5.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(2;3;-1)$. B. $\vec{n}_3=(1;3;2)$. C. $\vec{n}_4=(2;3;1)$. D. $\vec{n}_2=(-1;3;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7)=2$ là

A. $\left\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\right\}$. B. $\{-4;4\}$. C. $\{4\}$. D. $\{-4\}$.

Lời giải.

Với điều kiện $x^2-7>0$ ta có $\log_3(x^2-7)=2 \Leftrightarrow x^2-7=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4. \end{array}\right.$

So với điều kiện ta nhận cả 2 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $4x^3+2x+C$. B. $\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3+C$. C. x^4+x^2+C. D. x^5+x^3+C.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x^4+x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$?

Ⓐ $P(1;1;2)$. Ⓑ $N(2;-1;2)$. Ⓒ $Q(-2;1;-2)$. Ⓓ $M(-2;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ đi qua điểm $Q(-2;1;-2)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16. Từ một hộp chứa 9 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

Ⓐ $\dfrac{12}{65}$. Ⓑ $\dfrac{5}{21}$. Ⓒ $\dfrac{24}{91}$. Ⓓ $\dfrac{4}{91}$.

Lời giải.

Phép thử "lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ 15 quả cầu" có $n(\Omega)=\mathrm{C}_{15}^3$.
Biến cố A: "lấy được 3 quả cầu màu xanh từ 6 quả cầu xanh" có $n(A)=\mathrm{C}_6^3$.
Vậy xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{15}^3}=\dfrac{4}{91}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

Ⓐ $x+2y-2z+1=0$. Ⓑ $x+2y-2z-1=0$.
Ⓒ $3x+2z-1=0$. Ⓓ $3x+2z+1=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.
$\Rightarrow \vec{n}=-\overrightarrow{BC}=(1;2;-2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $1(x+1)+2(y-1)-2(z-1)\Leftrightarrow x+2y-2z+1=0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 18. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=[-25;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=\dfrac{1}{10}$: hữu hạn.

Và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

Ⓐ $2\ln 2$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}\ln 2$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}\ln 2$. Ⓓ $\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3}\ln 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ $60°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $45°$.

Lời giải.

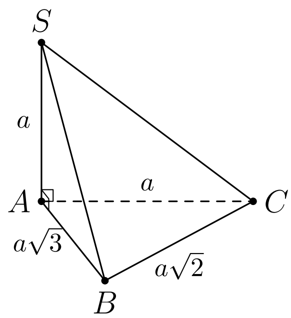
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow (SB,(ABC)) = (SB,AB) = \widehat{SBA}$.

Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $(SB,(ABC)) = 30°$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

Ⓐ -4. Ⓑ -16. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \notin [-4;-1] \\ x = -2 & \in [-4;-1]. \end{array}\right.$

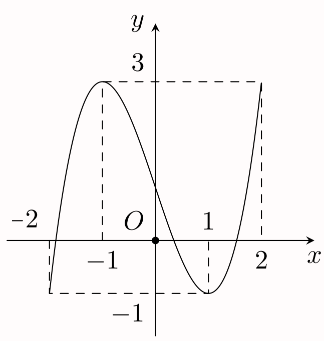
Khi đó $y(-4) = -16$; $y(-2) = 4$; $y(-1) = 2$ nên $\min\limits_{[-4;-1]} y = -16$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.



Lời giải.

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -2$; $y = 4$. (B) $x = 2$; $y = 4$. (C) $x = -2$; $y = 0$. (D) $x = 2$; $y = 0$.

Lời giải.

Ta có $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i \Leftrightarrow 2x - 4 + (4 - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải.

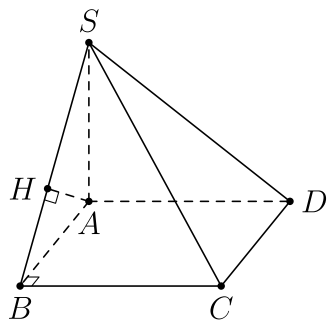
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$ tại $B \in SB$ thì

$AH \perp (SBC)$. Suy ra $AH = \mathrm{d}(A; (SBC))$.

$\triangle SAB$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

(A) 11 năm. (B) 10 năm. (C) 13 năm. (D) 12 năm.

Lời giải.

Với số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất cố định là r/năm, sau n năm gửi tiền, số tiền có được là:

$$T_n = A(1 + r)^n.$$

Theo giả thiết: $T_n = 2A$ nên $(1 + r)^n = 2$.

Thay số ta được: $(1 + 0{,}066)^n = 2 \Rightarrow n = \log_{1{,}066} 2 \Rightarrow n \approx 10{,}85$.

Vậy sau ít nhất 11 năm gửi tiền số tiền của người gửi đạt gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (1 + x \ln x)\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + b = c$. (B) $a + b = -c$. (C) $a - b = c$. (D) $a - b = -c$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^e (1+x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e 1\,\mathrm{d}x + \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1+\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases}$, ta chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4}.$

Suy ra $\displaystyle\int_1^e (1+x\ln x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1+\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4}+\mathrm{e}-\frac{3}{4}$ nên $a=\dfrac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

(A) 15 (m/s). (B) 9 (m/s). (C) 42 (m/s). (D) 25 (m/s).

Lời giải.

Ta có $v_B(t)=\displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at+C$. Do $v_B(0)=0$ nên $C=0 \Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Bigg|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15} at\,\mathrm{d}t=\frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\dfrac{375}{2}=\dfrac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\dfrac{5}{3}\cdot 15=25$ (m/s).

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 4. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$ với $x,\,y\in\mathbb{R}$.

Đặt $Z=(\overline{z}+2i)(z-2)=[x+(2-y)i][(x-2)+yi]=[x(x-2)-y(2-y)]+[xy+(x-2)(2-y)]i$.

Vì Z là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó

$$x(x-2)-y(2-y)=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(x-3)^8$ bằng

(A) -1272. (B) 1272. (C) -1752. (D) 1752.

Lời giải.

Ta có $x(2x-1)^6+(x-3)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k 2^k x^k(-1)^{6-k}+\sum\limits_{l=0}^{8}\mathrm{C}_8^l x^l(-3)^{8-l}$

$$=\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k 2^k(-1)^{6-k}x^{k+1}+\sum_{h=0}^{8}\mathrm{C}_8^h(-3)^{8-h}x^h.$$

Vì số hạng chứa x^5 nên ta chọn $\begin{cases}k=4\\h=5.\end{cases}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $\mathrm{C}_6^4\cdot 2^4+\mathrm{C}_8^5\cdot(-3)^3=-1272$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

(A) 1,01 m^3. (B) 0,96 m^3. (C) 1,33 m^3. (D) 1,51 m^3.

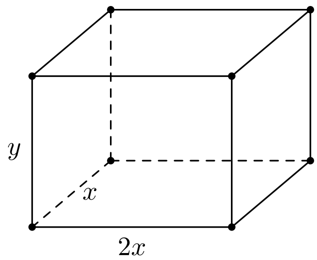
Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,\ y>0$).

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là $V=2x^2y$.

Tổng diện tích các mặt kính: $S=2xy+2\cdot 2xy+2x^2=5$.

$$\Leftrightarrow 6xy+2x^2=5\Leftrightarrow y=\frac{5-2x^2}{6x}.$$



Do $x,\ y>0$ nên $x>0$ và $5-2x^2>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Như vậy $V=2x^2y=\dfrac{5x-2x^3}{3}\Rightarrow V'=\dfrac{5-6x^2}{3}$.

Cho $V'=0\Leftrightarrow 5-6x^2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

Vậy dung tích lớn nhất của bể cá là $\max V=\dfrac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1{,}01$ m^3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

(A) 3. (B) Vô số. (C) 0. (D) 6.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$; $y' = \dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6;+\infty) \subset \mathscr{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -3m \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{3} \\ m \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant m < \dfrac{1}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, và $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (D) $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Lấy điểm B' đối xứng với B qua O ta có ngay $OM \parallel AB'$.

Suy ra $OM \parallel (AB'C)$.

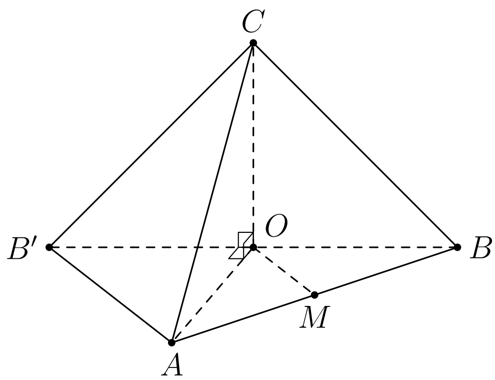
$\Rightarrow \mathrm{d}(OM, AC) = \mathrm{d}(OM, (AB'C)) = \mathrm{d}(O, (AB'C)) = h$.

Dễ thấy OA, OB', OC đôi một vuông góc với nhau do đó

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}.$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9}.$$

Vậy $\mathrm{d}(OM, AC) = h = \dfrac{2a}{3}$.



Lưu ý:

Với tứ diện $O.ABC$ ban đầu có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, việc giải bài toán này bằng phương pháp toạ độ hoá cũng là một lựa chọn dễ dàng thực hiện được với học sinh.

Tóm tắt: gắn hệ toạ độ để $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0), C(0;0;2a) \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Dùng công thức $\mathrm{d}(OM, AC) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{OA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}$ sẽ được đáp số $\dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0$. (1)

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m \cdot t + 2m^2 - 5 = 0$. (2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\dfrac{5}{2}} \vee m > \sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do m là số nguyên nên $m = 2$.

Vậy S chỉ có một phần tử duy nhất.

Chọn đáp án (D) □

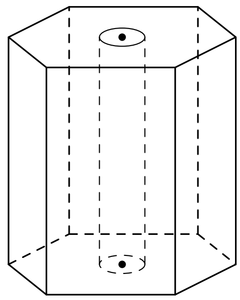
Câu 34. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng); 1 m^3 than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

(A) $97{,}03a$ đồng. (B) $10{,}33a$ đồng. (C) $9{,}7a$ đồng. (D) $103{,}3a$ đồng.

Lời giải.

Tính theo đơn vị đo chiều dài là mm, ta có:

Diện tích lục giác đều có cạnh bằng 3 là $6\cdot\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.



Lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 và chiều cao bằng 200 có thể tích

$$V_1=\frac{27\sqrt{3}}{2}\cdot 200=2700\sqrt{3}.$$

Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng 200 và bán kính $r=1$ có thể tích

$$V_2=\pi\cdot 1^2\cdot 200=200\pi.$$

Thể tích phần thân bút chì làm bằng gỗ là

$$V_3=V_1-V_2=\left(2700\sqrt{3}-200\pi\right)\ \text{mm}^3.$$

Khi đó giá nguyên vật liệu làm 1 chiếc bút chì là $V_3\cdot a\cdot 10^{-9}+V_2\cdot 9a\cdot 10^{-9}\approx 9{,}703a$ (đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=-1+t\\ y=-4t\\ z=-3t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=3+t\\ y=-2+4t\\ z=2+t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=3+t\\ y=-2-4t\\ z=2-3t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+6t\\ z=2+t\end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-t\\ z=-2+2t.\end{cases}$

Giải phương trình $-1+2t-t-(-2+2t)+1=0$ ta được $t=2$.

Suy ra giao điểm của Δ và (P) là $I(3;-2;2)$.

Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;2)$; (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Ta có $[\vec{n},\vec{u}]=(1;-4;-3)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ sẽ đi qua I đồng thời nhận $[\vec{n},\vec{u}]$ làm một véc-tơ chỉ phương, do đó d có phương trình là $\begin{cases}x=3+t\\ y=-2-4t\\ z=2-3t.\end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $|z|\,(z-6-i)+2i=(7-i)z\Leftrightarrow(|z|-7+i)\,z=6|z|+(|z|-2)\,i.$ (*)

$\Rightarrow\left|(|z|-7+i)\,z\right|=\left|6|z|+(|z|-2)\,i\right|\Leftrightarrow\left[(|z|-7)^2+1\right]|z|^2=36|z|^2+(|z|-2)^2$ (**)

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đặt $t = |z|$ thì $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ và (**) trở thành $t^4 - 14t^3 + 13t^2 + 4t - 4 = 0$.

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 13t^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \approx 12{,}96 \\ t \approx 0{,}56 \\ t \approx -0{,}5 \end{array}\right. \text{(chỉ nhận 3 giá trị } t \geqslant 0\text{).}$$

Thay vào (*) ta được 3 số phức z.

Lưu ý:

Để chứng minh phương trình cuối cùng theo t có 3 nghiệm $t \geqslant 0$ ta cần dùng đến phương pháp hàm số: chứng minh $f(t) = t^3 - 13t^2 + 4 = 0$ có 2 nghiệm không âm đều khác 1.

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên nửa khoảng $[0; \infty)$ như sau:

t	0	1	$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	-8	$-\frac{8680}{27}$		$+\infty$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

(A) 9. (B) 6. (C) $\frac{27}{4}$. (D) $\frac{20}{3}$.

Lời giải.

Do a, $b > 0$ nên $\begin{cases} 16a^2 + b^2 \geqslant 2\sqrt{16a^2b^2} \\ 4a + 5b + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \geqslant \log_{4a+5b+1}(8ab + 1)$.

Do đó $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geqslant \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$

$\geqslant 2$ (áp dụng BĐT Cô-si).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 = b^2 \,;\, a > 0, b > 0 \\ 8ab + 1 = 4a + 5b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = b > 0 \\ 2b^2 + 1 = 6b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3. \end{cases}$

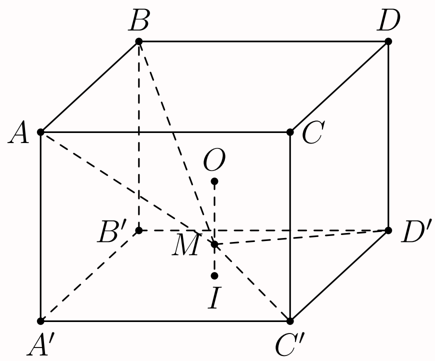
Vậy $a + 2b = \frac{27}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

(A) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. (B) $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. (C) $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. (D) $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.



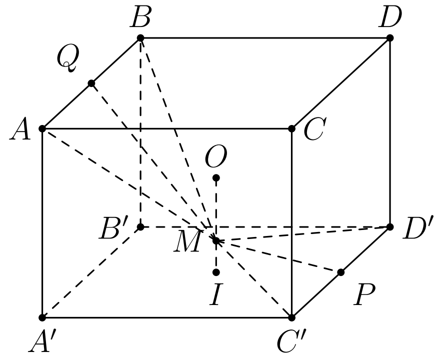
Lời giải.

Do $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $\Delta \parallel AB \parallel C'D'$.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB ta có $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MP \perp \Delta \\ MQ \perp \Delta. \end{cases}$

Như vậy góc giữa (MAB) và $(MC'D')$ là góc giữa MP và MQ.

Không mất tính tổng quát, ta cho cạnh hình lập phương là 6.



Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10} \\ MQ = \sqrt{34}, PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle MPQ$ ta được

$$\cos \widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -7; -1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có 1 véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 0) \Rightarrow |\vec{u}_d| = \sqrt{2}$.

Đường thẳng Δ có 1 véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (0; -7; -1) \Rightarrow |\vec{u}_\Delta| = 5\sqrt{2}$.

Ta có $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta = -7 < 0 \Rightarrow (\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta) > 90^\circ$.

Đường phân giác p của góc nhọn tạo bởi d và Δ có véc-tơ chỉ phương:

$$\vec{a} = |\vec{u}_d| \cdot \vec{u}_\Delta - |\vec{u}_\Delta| \cdot \vec{u}_d = \left(-5\sqrt{2}; -12\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) \text{ hay } \vec{a'} = (5; 12; 1).$$

Vì d và Δ cùng đi qua $A(1; 2; 3)$ nên đường phân giác p đi qua A.

Trong 4 phương án, chỉ có đường thẳng $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a'} = (5; 12; 1)$ và đi qua điểm $A(1; 2; 3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x + 2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A $2\sqrt{2}$. B 4. C 2. D $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đồ thị (C): $y = \dfrac{x - 2}{x + 2} = 1 - \dfrac{4}{x + 2}$ có $I(-2; 1)$ là giao điểm của 2 đường tiệm cận.

Xét $\begin{cases} A\left(a - 2; 1 - \dfrac{4}{a}\right) \in (C) \\ B\left(b - 2; 1 - \dfrac{4}{b}\right) \in (C) \end{cases}$ $(a \neq b)$ ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = \left(a; -\dfrac{4}{a}\right) \\ \overrightarrow{IB} = \left(b; -\dfrac{4}{b}\right) \end{cases}$ và $\begin{cases} IA^2 = a^2 + \dfrac{16}{a^2} \\ IB^2 = b^2 + \dfrac{16}{b^2}. \end{cases}$

Tam giác IAB đều $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB & (1) \\ IA^2 = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}. & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{16}{a^2} = 2ab + \dfrac{32}{ab} \Rightarrow ab > 0.$

$(1) \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{16}{a^2} = b^2 + \dfrac{16}{b^2} \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2b^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow ab = 4$ (do $a \neq b$ và $ab > 0$).

Như vậy $IA^2 = a^2 + \dfrac{16}{a^2} = 2ab + \dfrac{32}{ab} = 16 \Rightarrow AB = IA = 4.$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A $-\dfrac{41}{400}$. B $-\dfrac{1}{10}$. C $-\dfrac{391}{400}$. D $-\dfrac{1}{40}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2 \Rightarrow -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -4x^3 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^4 + C.$

Do $f(2) = -\dfrac{1}{25}$ nên ta có $C = -9$. Do đó $f(x) = -\dfrac{1}{x^4+9} \Rightarrow f(1) = -\dfrac{1}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A 9. B 25. C 24. D 26.

Lời giải.

Điều kiện: $x > m$.

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t. \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Tức là

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7) = x_0$.
Bảng biến thiên:

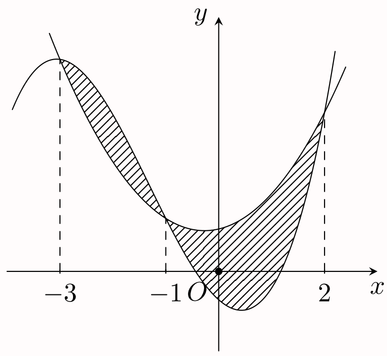
x	$-\infty$		$-\log_7(\ln 7)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leqslant g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0{,}856$.
(các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)
Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$ nên $m \in \{-24; -16; \ldots; -1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.

Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



Ⓐ $\dfrac{253}{12}$. Ⓑ $\dfrac{125}{12}$. Ⓒ $\dfrac{253}{48}$. Ⓓ $\dfrac{125}{48}$.

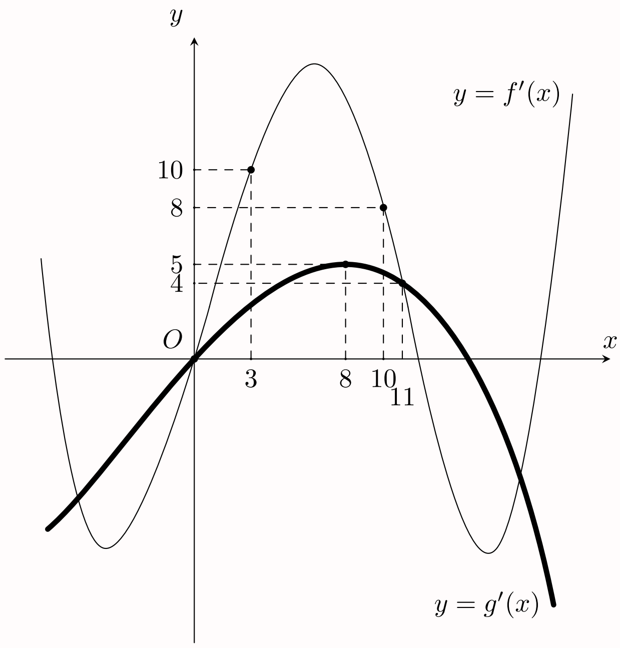
Lời giải.

Do $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3; -1; 2$ nên
$$f(x) - g(x) = A(x+3)(x+1)(x-2).$$
Do $f(0) - g(0) = -\frac{3}{2}$ nên $-6A = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$.

Từ đó $f(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) = \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là
$$S = \left|\int_{-3}^{-1} \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{253}{48}.$$
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 44. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+3) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $\left(\frac{13}{4}; 4\right)$. Ⓑ $\left(7; \frac{29}{4}\right)$. Ⓒ $\left(6; \frac{36}{5}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{36}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ta có $h'(x) = f'(x+3) - 2g'\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ (chú ý: $h'(x)$ có dạng $f'(X) - 2g'(Y)$).

Nhận xét:

Ta cần tìm điều kiện đủ của x để $h'(x) > 0$, tức là $f'(X) > 2g'(Y)$.
Dựa trên đồ thị thì $g'(Y)$ lớn nhất bằng 5 nên $2g'(Y)$ lớn nhất bằng 10.
Như vậy với các X mà $f'(X) > 10$ ta có ngay $f'(X) > 2g'(Y)$.
Dựa vào đồ thị thì với $3 < X < 8$ ta có $f'(X) > 10$,

tức là với $3 < x + 3 < 8 \Leftrightarrow 0 < x < 5$ ta có $h'(x) > 0$.

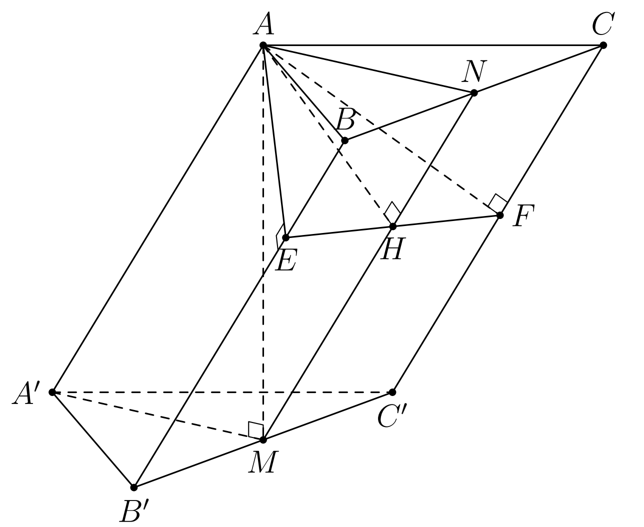
Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến ít nhất trên khoảng $(0;5)$ nên đồng biến trên khoảng $\left(\frac{13}{4};4\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) 1.

Lời giải.



Dựng $\triangle AEF$ như hình vẽ sao cho $AA' \perp (AEF)$.
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'}$ bằng với thể tích của lăng trụ (T) có mặt đáy AEF và cạnh bên AA'.
Tức là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA'$.
Từ cách dựng ta suy ra $AE = 1, AF = \sqrt{3}$ và $EF = 2$. Suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A.
Từ đó $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi N là trung điểm BC và $H = EF \cap MN$ thì $MN \parallel AA'$; H là trung điểm EF và $AH \perp MN$.
Từ đó $AH = \frac{1}{2}EF = 1$.

$\triangle AMN$ vuông tại A có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow AM = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Cuối cùng $AA' = MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle AEF} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

(A) $2x + 2y + 2z - 15 = 0$. (B) $x + y + z - 7 = 0$.
(C) $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. (D) $x + y + z + 7 = 0$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $I(1;2;3)$ là tâm của mặt cầu (S); điểm $A(2;3;4)$ nằm ngoài (S).
Do IA tiếp xúc với (S) tại M nên $IM \perp AM$.

Lấy $M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$ ta có $\overrightarrow{IM} = (x_0 - 1; y_0 - 2; z_0 - 3)$; $\overrightarrow{AM} = (x_0 - 2; y_0 - 3; z_0 - 4)$.

Do $\begin{cases} M \in (S) \\ IM \perp AM \end{cases}$ nên $\begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-3)^2 = 1 \\ (x_0-1)(x_0-2) + (y_0-2)(y_0-3) + (z_0-3)(z_0-4) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-3)^2 = 1 \\ (x_0-1)^2 - (x_0-1) + (y_0-2)^2 - (y_0-2) + (z_0-3)^2 - (z_0-3) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta có $x_0 - 1 + y_0 - 2 + z_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 7 = 0$.

Vậy $M \in (P)\colon x + y + z - 7 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A 8. B Vô số. C 7. D 9.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3$.

Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$. Có 2 trường hợp cần xét liên quan $(m^2 - 16)$:

- Trường hợp 1: $m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.
  - + Khi $m = 4$ ta có $y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.
  - + Khi $m = -4$ ta có $y' = x^4(8x^4 - 40) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.
- Trường hợp 2: $m^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.
  Ta có x^3 đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0$, do đó
  $y' = x^3 \cdot g(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0$.

Kết hợp các trường hợp giải được ta nhận $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(5;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

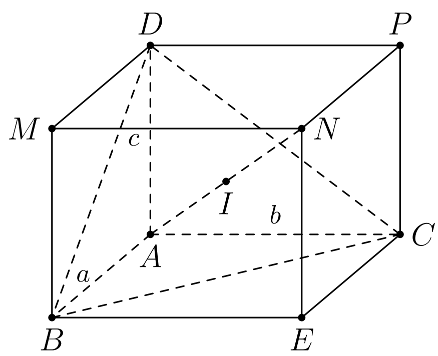
A 256. B 128. C $\dfrac{256}{3}$. D $\dfrac{128}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S) bán kính R.

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AN là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

Xét $V = V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.



Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geqslant a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3 \geqslant 36V^2 \Leftrightarrow V \leqslant R^3 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

Do $R = IA = 4\sqrt{3}$ nên ta có $V \leqslant \dfrac{256}{3}$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 8$).

Vậy $\max V_{ABCD} = \dfrac{256}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Ba bạn A, B, C viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A $\dfrac{457}{1372}$. B $\dfrac{307}{1372}$. C $\dfrac{207}{1372}$. D $\dfrac{31}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 14^3$.
Trong 14 số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$ có:

(i).5 số chia cho 3 dư 1. (i).5 số chia cho 3 dư 2. (i).4 số chia hết cho 3.

Để tổng 3 số chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 chữ số đều chia hết cho 3 có: 4^3 (cách).

TH2: Cả 3 số chia cho 3 dư 1 có: 5^3 (cách).

TH3: Cả 3 số chia cho 3 dư 2 có: 5^3 (cách).

TH4: Trong 3 số có một số chia hết cho 3; một số chia cho 3 dư 1; một số chia 3 dư 2 được ba người viết lên bảng nên có: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3!$ (cách).

Gọi biến cố E: "Tổng 3 số chia hết cho 3".
Ta có $n(E) = 4^3 + 5^3 + 5^3 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3! = 914$.
Vậy xác suất cần tìm: $\mathrm{P}(E) = \dfrac{914}{14^3} = \dfrac{457}{1372}$.
Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A 1. B 2. C 0. D 3.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{14}{3}x^2$ có $y' = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{28}{3}x^2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7}. \end{array}\right.$

Do $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 8$ nên tiếp tuyến của (C) tại A có hệ số góc $k = 8$.

Cho $y'(x_A) = 8$ ta được $\dfrac{4}{3}x_A^3 - \dfrac{28}{3}x_A^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 3 \\ x_A = -1 \text{ (đến đây có 3 điểm } A \text{ cần xét).} \\ x_A = -2 \end{array}\right.$

Tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm A tìm được có dạng $d\colon y = 8x + b$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến d:
$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2 = 8x + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2 - 8x = g(x).$$
Cho $g'(x) = 0$ ta được $x = 3 \vee x = -1 \vee x = -2$.
Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{8}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{3}$	$\searrow$	-39	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy (C) và d có 3 điểm chung khi $b = \dfrac{8}{3}$ hoặc $b = \dfrac{11}{3}$ ứng với $x_A = -2$ hoặc $x_A = -1$.
Vậy có 2 điểm A thoả mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

—— HẾT ——

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 12

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2018
Môn: Toán
Năm học: 2017 – 2018
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

Ⓐ 2^8. Ⓑ C_8^2. Ⓒ A_8^2. Ⓓ 8^2.

Lời giải.

Số các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau được lập từ 8 số đã cho là số các chỉnh hợp chập 2 của 8 phần tử là A_8^2.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

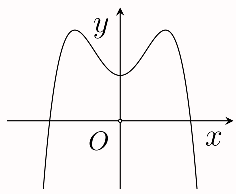
Ⓐ $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$. Ⓑ $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$. Ⓒ $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. Ⓓ $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_3} = (2; 1; 3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 3.
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

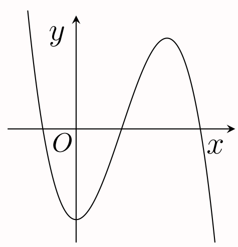


Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 4.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Ⓑ $y = x^4 - x^2 - 2$.
Ⓒ $y = -x^4 + x^2 - 2$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



Lời giải.

Quan sát hình vẽ ta thấy đồ thị là của hàm bậc ba và có hệ số $a < 0$.
Suy ra đồ thị hàm số đã cho là của hàm $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng

(A) $1-\log_3 a$. (B) $3-\log_3 a$. (C) $\dfrac{1}{\log_3 a}$. (D) $1+\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)=\log_3 3-\log_3 a=1-\log_3 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

(A) x^4+x^3+C. (B) $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+C$. (C) $3x^2+2x+C$. (D) x^3+x^2+C.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^3+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;+\infty)$. (B) $(-2;3)$. (C) $(3;+\infty)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):\ (x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ có bán kính bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

(A) $-1-3i$. (B) $1-3i$. (C) $-1+3i$. (D) $1+3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là $1+3i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

(A) $P(1;2;5)$. (B) $N(1;5;2)$. (C) $Q(-1;1;3)$. (D) $M(1;1;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(1;5;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\frac{2}{3}a^3$. (B) $\frac{4}{3}a^3$. (C) $2a^3$. (D) $4a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = a^2 \cdot 2a = 2a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

(A) πrl. (B) $4\pi rl$. (C) $2\pi rl$. (D) $\frac{4}{3}\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay $S_{xq} = 2\pi rl$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \pi \int\limits_1^2 (x^2+2)^2\,dx$. (B) $V = \int\limits_1^2 (x^2+2)^2\,dx$.

(C) $V = \pi \int\limits_1^2 (x^2+2)\,dx$. (D) $V = \int\limits_1^2 (x^2+2)\,dx$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Ox là $V = \pi \int\limits_1^2 (x^2+2)^2\,dx$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{3}{2}$. (B) $x = \frac{5}{2}$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Phương trình $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 2x + 1 = \log_5 125 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Giá trị của $\lim \dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{2n+5} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{5}{n}} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 13 năm. B. 10 năm. C. 11 năm. D. 12 năm.

Lời giải.

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi là A_0.
Số tiền người đó thu được sau n năm gửi là $A_n = A_0 \cdot (1+6{,}1\%)^n$.
Số tiền người đó thu được gấp đôi số tiền gửi ban đầu khi và chỉ khi

$$A_n = 2A_0 \Leftrightarrow A_0 \cdot (1+6{,}1\%)^n = 2A_0 \Leftrightarrow n = \log_{(1+6{,}1\%)} 2 \approx 11{,}7.$$

Vì n là số tự nhiên nên $n = 12$.
Chọn đáp án D □

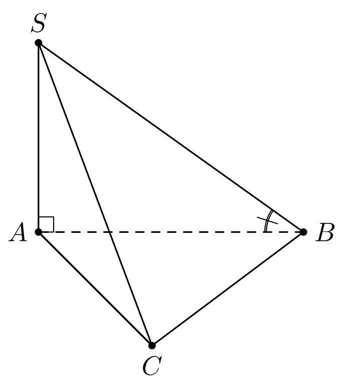
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. B. 45°. C. 30°. D. 90°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.
Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SBA}$.
Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$. B. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

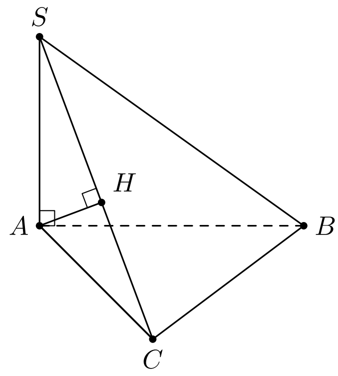
Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC.

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AB \perp (SBC)$ tại H.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH.

Ta có $AC = BC = a$, $SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

Suy ra $AH = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Khi đó

- $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = \dfrac{1}{8}$.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^{+}} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = +\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. $\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{2x+3}$ bằng

(A) $2\ln\dfrac{7}{5}$. (B) $\dfrac{1}{2}\ln 35$. (C) $\ln\dfrac{7}{5}$. (D) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{2x+3} = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

(A) $\dfrac{2}{91}$. (B) $\dfrac{12}{91}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{24}{91}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố lấy được ba quả cầu màu xanh.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3$.
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^3$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{91}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

(A) 25. (B) $\dfrac{51}{4}$. (C) 13. (D) 85.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-1) = 13$; $y(2) = 25$; $y(0) = 13$; $y\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{51}{4}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ là 25.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

(A) $2x - 3y - z + 8 = 0$. (B) $3x - y + 3z - 13 = 0$.
(C) $2x - 3y - z - 20 = 0$. (D) $3x - y + 3z - 25 = 0$.

Lời giải.

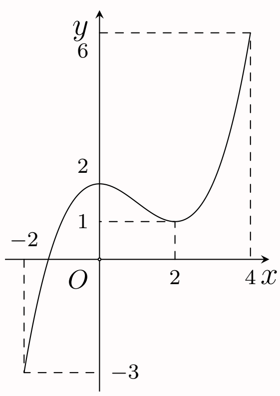
Có $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 2)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là

$$-4(x-5) + 6(y+4) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - z - 20 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

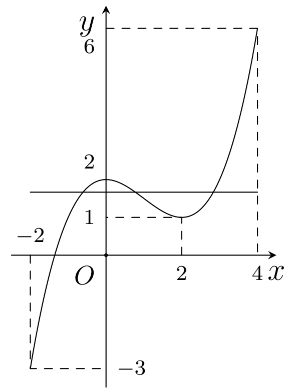


Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Phương trình $f(x) = \frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình này là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{5}{3}$. Quan sát hình bên ta thấy có 3 giao điểm do đó phương trình đã cho có ba nghiệm.



Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -1;\ y = -1$. (B) $x = -1;\ y = 1$. (C) $x = 1;\ y = -1$. (D) $x = 1;\ y = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i \Leftrightarrow 3x - 3 + (3y - 3)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

(A) 2. (B) 6. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3m$.

Có $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^3}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3m - 2 > 0 \\ -3m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2.$$

Suy ra có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

(A) 25 (m/s). (B) 36 (m/s). (C) 30 (m/s). (D) 21 (m/s).

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at + C$ mà $v_B(0) = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm bằng nhau do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{15} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30$ (m/s).

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8. B. 4. C. 19. D. 5.

Lời giải.

Phương trình $9^x - m3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m \cdot 3^x + 3m^2 - 75 = 0$. Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0$ (1). Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10.$$

Do m nguyên nên $S = \{6; 7; 8; 9\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(\overline{z} - 2i)(z + 2) = a^2 + 2a + b^2 + 2b - 2(a + b + 2)i$. Vì $(\overline{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên $a^2 + 2a + b^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các số điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá α (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá 7α (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84{,}5 \cdot \alpha$ (đồng). B. $9{,}07 \cdot \alpha$ (đồng). C. $8{,}45 \cdot \alpha$ (đồng). D. $90{,}07 \cdot \alpha$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi than chì $V_1 = \pi \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}2 = 2\pi \cdot 10^{-7}$ m^3.
Số tiền làm lõi than chì $T_1 = V_1 \cdot 7\alpha \cdot 10^6 = 1{,}4\pi a$ (đồng).
Thể tích phần thân bằng gỗ của bút chì là

$$V_2 = 6 \cdot \frac{0{,}003^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}2 - 2\pi \cdot 10^{-7} = (\sqrt{3} \cdot 27 \cdot 10^{-7} - 2\pi \cdot 10^{-7})\text{m}^3.$$

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút chì $T_2 = V_2 \cdot \alpha \cdot 10^6 = (2{,}7\sqrt{3} - \pi \cdot 0{,}2)\alpha$ (đồng).
Giá vật liệu làm bút trì $T = T_1 + T_2 \approx 8{,}45\alpha$ (đồng).
Chọn đáp án C □

Câu 31. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x\,(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng
A 13548. B 13668. C -13668. D -13548.

Lời giải.

Hệ số của x^4 trong khai triển $(x-2)^6$ là $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^2 = 60$.
Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $\mathrm{C}_8^5 \cdot (-3)^5 = -13608$.
Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x\,(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng $-13608 + 60 = -13548$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Ông A dự định sử dụng hết $5{,}5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?
A 1,17 m^3. B 1,01 m^3. C 1,51 m^3. D 1,40 m^3.

Lời giải.

Gọi x; $2x$; h lần lượt là chiều rộng, dài và cao của bể cá.
Ta có diện tích toàn phần của bể cá là $2x^2 + 2(xh + 2xh) = 5{,}5 \Leftrightarrow h = \dfrac{5{,}5 - 2x^2}{6x}$.
Điều kiện $0 < x < \sqrt{\dfrac{5{,}5}{2}}$.
Thể tích bể cá $V(x) = 2x^2 \cdot \dfrac{5{,}5 - 2x^2}{6x} = \dfrac{1}{3}(5{,}5x - 2x^3)$.
Khi đó $V'(x) = \dfrac{1}{3}(5{,}5 - 6x^2) \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5{,}5}{6}}$.
Do đó $V_{\max} = \dfrac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1{,}17$ m^3.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b \cdot \mathrm{e} + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A $a + b = -c$. B $a + b = c$. C $a - b = c$. D $a - b = -c$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 2\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^{\mathrm{e}} + I = 2\mathrm{e} - 2 + I$ với $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e} - \displaystyle\int_1^{e}\dfrac{x}{2}\,dx = \dfrac{e^2+1}{4}$.

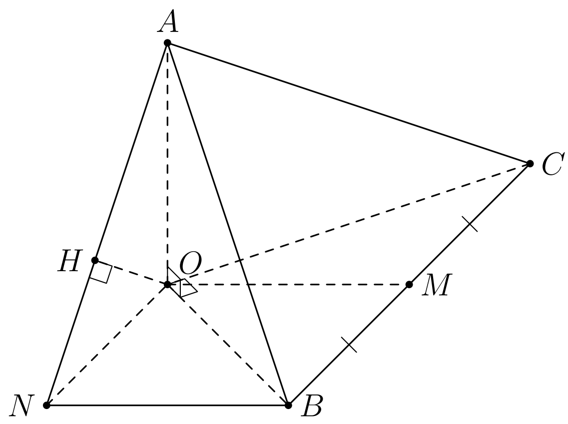
Suy ra $\displaystyle\int_1^{e}(2+x\ln x)\,dx = \dfrac{1}{4}e^2 + 2e - \dfrac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = 2 \\ c = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = c.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\triangle OBC$ vuông cân tại O, M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC$.

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM \parallel BN \\ BC \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (ABN)$.

Suy ra

$$\mathrm{d}(AB, OM) = \mathrm{d}(OM, (ABN)) = \mathrm{d}(O, (ABN)).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AN ta có

$$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN) \Rightarrow OH \perp BN.$$

Mà $OH \perp AN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (ABN)) = OH$.

Tam giác OAN vuông tại O, đường cao OH.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2 + OC^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2a^2} \\ \Rightarrow OH &= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(AB, OM) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Gọi $M = \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t - 1; t + 1)$.
Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t - 1) - (t + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$.
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.
Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{n}, \vec{u}] = (0; -2; 4)$ hay $\dfrac{1}{2}\vec{u}_d = (0; -1; 2)$.

Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

(A) $\dfrac{683}{2048}$. (B) $\dfrac{1457}{4096}$. (C) $\dfrac{19}{56}$. (D) $\dfrac{77}{512}$.

Lời giải.

Gọi 3 số cần viết ra là a, b, c. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 16^3$.
Chia các số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$ thành ba tập

- $X = \{3; 6; 9; 12; 15\}$ là những số chia hết cho 3 có 5 số.
- $Y = \{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$ là những số chia cho 3 dư 1, có 6 số.
- $Z = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ là những số chia cho 3 dư 2, có 5 số.

Ta thấy ba số a, b, c do A, B, C viết ra có tổng chia hết cho 3 ứng với hai trường hợp sau

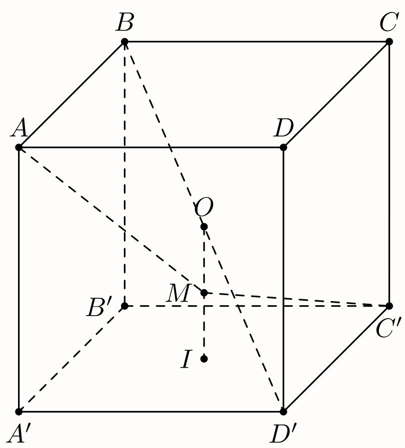
- Cả ba số a, b, c thuộc cùng một tập, số cách chọn là $5^3 + 5^3 + 6^3 = 466$.
- Cả ba số a, b, c thuộc ba tập khác nhau, số cách chọn là $3! \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 900$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{466 + 900}{16^3} = \dfrac{683}{2048}$.

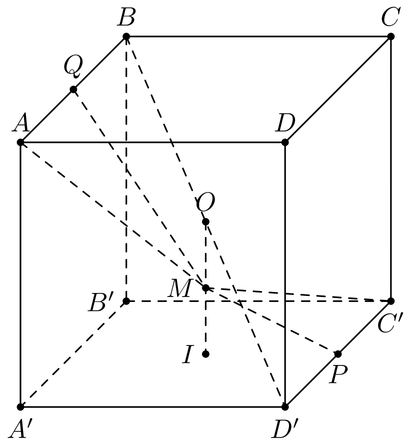
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

(A) $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. (B) $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. (D) $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.



Không mất tính tổng quát ta chọn cạnh của hình lập phương bằng 6. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB.

Suy ra $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow ((MC'D');(MAB)) = (MH;MK) = \alpha$.

Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{MI^2 + IP^2} = \sqrt{13} \\ MQ = 5;\ PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Suy ra $\cos\widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = -\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.

Khi đó α là góc giữa $(MC'D')$ và (MAB): $\sin\alpha = \dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;1;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Dễ thấy $A = d \cap \Delta$. Chọn $B(-1;2;3) \in \Delta \Rightarrow AB = 3$.

Gọi $C \in d$ thỏa mãn $AB = AC \Rightarrow C\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{17}{5};1\right)$ hoặc $C\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5};1\right)$.

Ta thấy với $C\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5};1\right)$ thì $\widehat{BAC}$ nhọn.

Trung điểm của đoạn BC là $I\left(-\dfrac{9}{10};\dfrac{3}{10};1\right)$. Đường phân giác cần tìm là IA có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (19;7;-10)$.

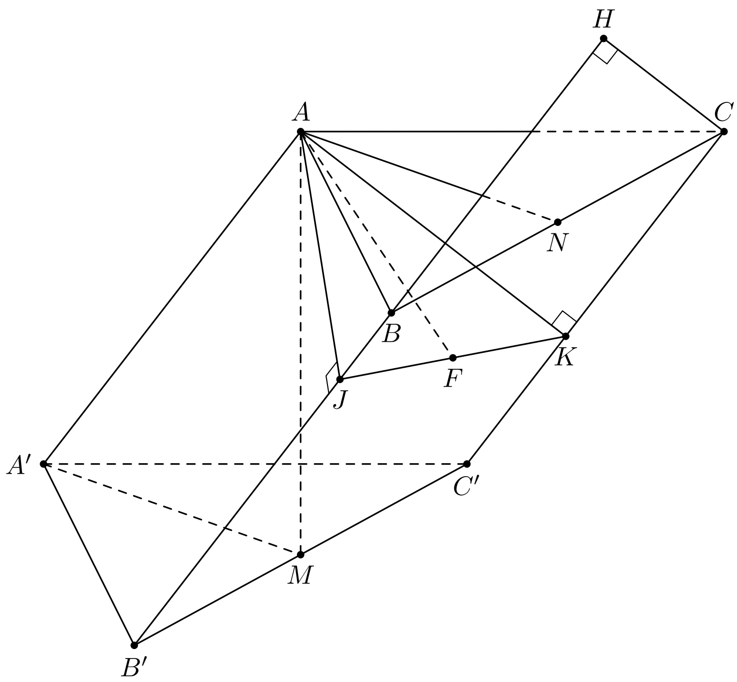
Suy ra đường phân giác có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 19t \\ y = 1 + 7t \\ z = 1 - 10t \end{cases}$ dễ thấy đường thẳng này trùng với đường thẳng $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A nên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'.
Ta có $AJ \perp BB'$ và $AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB' \Rightarrow BB' \perp (AJK)$.
Suy ra $BB' \perp JK \Rightarrow JK \parallel CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$.
Xét $\triangle AJK$ có $JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5 \Rightarrow \triangle AJK$ vuông tại A.
Gọi F là trung điểm JK khi đó $AF = JF = FK = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Gọi N là trung điểm BC, khi đó $A'M = AN = \sqrt{5}$. Xét tam giác vuông ANF

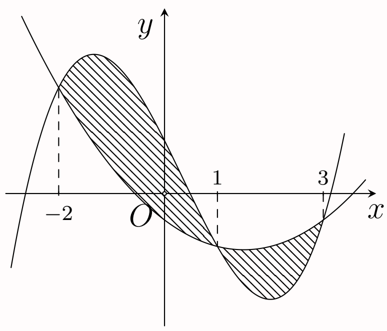
$$\cos\widehat{NAF} = \frac{AF}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NAF} = 60^\circ.$$

Vậy ta có $S_{\triangle AJK} = \dfrac{1}{2}AJ \cdot AK = 1 \Rightarrow S_{\triangle AJK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{S_{\triangle AJK}}{\cos 60^\circ} = 2$.
Xét $\triangle AMA'$ vuông tại M có $\widehat{MAA'} = \widehat{AMF} = 30^\circ$ hay $AM = A'M \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AM \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.

Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \dfrac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \dfrac{3}{4}$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A $\dfrac{253}{48}$. **B** $\dfrac{125}{24}$. **C** $\dfrac{125}{48}$. **D** $\dfrac{253}{24}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + \dfrac{3}{4} = dx^2 + ex - \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \dfrac{3}{2} = 0$.

Đặt $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -2$; $x = 1$; $x = 3$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\dfrac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = -\dfrac{3}{2} \\ 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b - d = -\dfrac{1}{2} \\ c - e = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-2}^{3} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} \left|\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} \left|\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}\right| \mathrm{d}x \\ &= \frac{63}{16} + \frac{4}{3} = \frac{253}{48}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A $\dfrac{8}{3}$. **B** 4. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** 8.

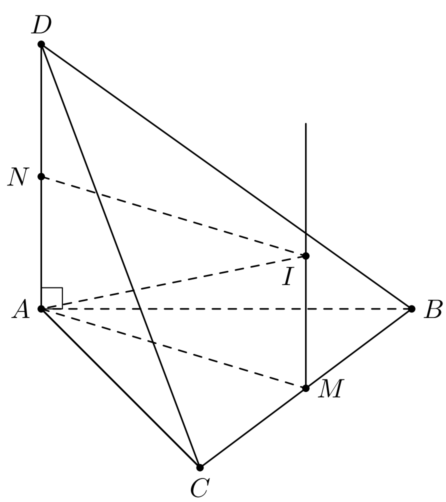
Lời giải.

Đặt $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD. Qua M kẻ đường thẳng d song song với AD, qua N dựng đường thẳng vuông góc với AD cắt d tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

- $R = IA = \sqrt{3}$.
- $AM = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$; $IM = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow R^2 = IA^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = 3.$



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 8$.
Suy ra $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \leq \dfrac{1}{6}\cdot 8 = \dfrac{4}{3}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)\,x^5 - (m^2-9)\,x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

(A) 4. (B) 7. (C) 6. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3$.

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0. \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$.
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

- Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$.
  Với $m = 3$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 3$ thỏa mãn.
  Với $m = -3$ thì $g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}. \end{array}\right.$
  Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

  Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ không là điểm cực tiểu do đó $m = -3$ không thỏa mãn.

- Nếu $g(0) \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 3$.
  Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.
  Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Tịnh tiến hệ trục theo véc-tơ $\overrightarrow{OI} = (-1;1) \Rightarrow I(0;0)$ và $(C)\colon Y = \dfrac{-3}{X}$.

Gọi $A\left(a; \dfrac{-3}{a}\right)$, $B\left(b; \dfrac{-3}{b}\right) \in (C)$, điều kiện $a \neq b$.

Tam giác IAB đều

$$\begin{cases} IA = IB \\ \cos(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \dfrac{9}{a^2} = b^2 + \dfrac{9}{b^2} \quad (1) \\ \dfrac{ab + \dfrac{9}{ab}}{\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}\cdot\sqrt{b^2+\dfrac{9}{b^2}}} = \dfrac{1}{2} \quad (2). \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow ab > 0$ do đó (1) $\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2b^2-9) = 0 \Rightarrow ab = 3$.
Suy ra $AB^2 = 2\left(3+\dfrac{9}{3}\right) = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\dfrac{4}{35}$. (B) $-\dfrac{71}{20}$. (C) $-\dfrac{79}{20}$. (D) $-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = x^3[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \int_1^2 x^3\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{7}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 = 4(x_1 - x_2)$?

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Đường thẳng MN có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (x_1-x_2; y_1-y_2) = (x_1-x_2; 4(x_1-x_2))$.
Chọn véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (1;4) \Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (4;-1)$.
Phương trình đường thẳng MN: $4(x-x_1) - (y-y_1) = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 4x_1 + \dfrac{1}{6}x_1^4 - \dfrac{7}{3}x_1^2$.
Đường thẳng MN tiếp xúc với (C) tại điểm A. Như vậy, nếu A có hoành độ là x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{14}{3}x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 3. \end{array}\right.$

- Với $x = -1 \Rightarrow A\left(-1; -\dfrac{13}{6}\right)$. Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên ta có

$$-\frac{13}{6} = -4 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1+1)^2(x_1^2 - 2x_1 - 11) = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có nghiệm kép và hai nghiệm đơn phân biệt nên đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A và cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt M, N khác A.

- Với $x = -2 \Rightarrow A\left(-2; -\dfrac{20}{3}\right)$. Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên ta có

$$-\frac{20}{3} = -8 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1+2)^2(x_1^2 - 4x_1 - 4) = 0 \quad (2).$$

Phương trình (2) có một nghiệm kép và hai nghiệm đơn nên đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A và cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt M, N khác A.

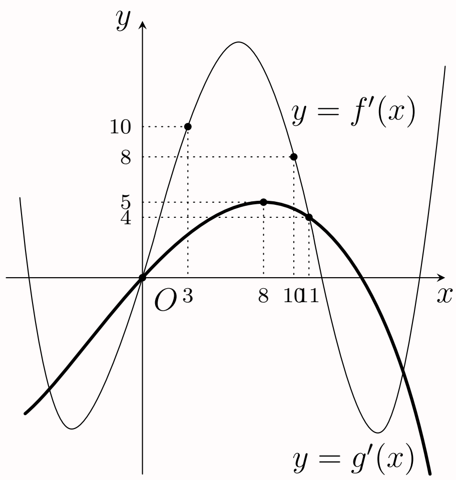
- Với $x = 3 \Rightarrow A\left(3; -\dfrac{15}{2}\right)$. Vì MN tiếp xúc với (C) tại A nên ta có

$$-\frac{15}{2} = 12 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1-3)^2(x_1^2 + 6x_1 + 13) = 0 \quad (3).$$

Phương trình (3) chỉ có một nghiệm kép nên đường thẳng MN chỉ tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên trường hợp này loại.

Vậy có hai điểm A thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \dfrac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(\dfrac{21}{5}; +\infty\right)$. (B) $\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.
(C) $\left(3; \dfrac{21}{5}\right)$. (D) $\left(4; \dfrac{17}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $h'(x) = f'(x+6) - 2g'\left(2x + \dfrac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3; 8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$ do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

Suy ra $g'\left(2x + \dfrac{5}{2}\right) < 5$ nếu $3 < 2x + \dfrac{5}{2} < 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{11}{4}$.

$f'(x+6) > 10$ nếu $3 < x + 6 < 8 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$ thì $g'\left(2x + \dfrac{5}{2}\right) < 5$ và $f'(x+6) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Do đó hàm số $h(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z = 5|z|+(|z|-2)i \quad (1)$.
Lấy mô-đun hai vế của (1) ta có $\sqrt{(|z|-6)^2+1}\cdot|z| = \sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$.
Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\|z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\|z|\approx 10{,}967\\|z|\approx 0{,}62\\|z|\approx -0{,}587.\end{array}\right.$$

Mà $|z|\,(z-5-i)+2i=(6-i)\,z \Leftrightarrow z=\dfrac{(5+i)|z|+2i}{|z|-6+i}$.
Do $|z|\geq 0$ nên ta có ba số phức thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

(A) 9. (B) 19. (C) 17. (D) 18.

Lời giải.

Điều kiện $x>m$.
Đặt $t=\log_2(x-m)$ ta có $\begin{cases}2^x+m=t\\2^t+m=x\end{cases} \Rightarrow 2^x+x=2^t+t \quad (1)$.
Do hàm số $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $(1)\Leftrightarrow x=t$.
Khi đó $2^x+m=x \Leftrightarrow m=x-2^x$.
Xét hàm $g(x)=x-2^x \Rightarrow g'(x)=1-2^x\ln 2=0 \Leftrightarrow x=-\log_2(\ln 2)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\leq g(-\log_2(\ln 2))\approx -0{,}914$.
Do m nguyên thuộc khoảng $(-18;18)$ nên $m\in\{-17;-16;\ldots;-1\}$.
Chọn đáp án (C) □

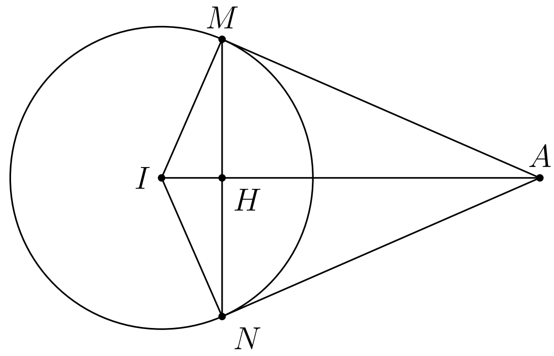
Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

(A) $3x+4y-2=0$. (B) $3x+4y+2=0$. (C) $6x+8y+11=0$. (D) $6x+8y-11=0$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ bán kính $R=4$.
Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)\Rightarrow IA=5$.
Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc-tơ pháp tuyến
Do hai $\triangle MHI$ và $\triangle AMI$ đồng dạng nên $IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\dfrac{IM^2}{IA}=\dfrac{16}{5}$.
Suy ra $\overrightarrow{IH}=\dfrac{16}{25}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{25};\dfrac{11}{25};-1\right)$.



Mặt phẳng cần tìm có phương trình $-3\left(x-\dfrac{2}{25}\right)-4\left(y-\dfrac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1)+\log_{4ab+1}(2a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A $\dfrac{15}{4}$.
B 5.
C 4.
D $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $4a^2+b^2\geq 4ab$, với mọi $a,b>0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=2a$ (1).
Khi đó

$$2=\log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1)+\log_{4ab+1}(2a+2b+1)\geq\log_{2a+2b+1}(4ab+1)+\log_{4ab+1}(2a+2b+1).$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\log_{2a+2b+1}(4ab+1)+\log_{4ab+1}(2a+2b+1)\geq 2$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\log_{2a+2b+1}(4ab+1)=1\Leftrightarrow 4ab+1=2a+2b+1$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $8a^2-6a=0\Rightarrow a=\dfrac{3}{4}\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a+2b=\dfrac{15}{4}$.
Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 13

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2019
Môn: Toán
Năm học: 2018–2019
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

(A) $8a^3$. (B) $2a^3$. (C) a^3. (D) $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng $(2a)^3 = 8a^3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 5.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

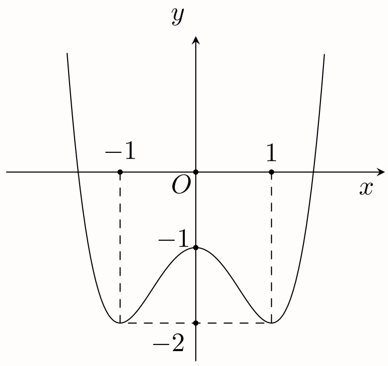
(A) $(1;2;3)$. (B) $(-1;-2;3)$. (C) $(3;5;1)$. (D) $(3;4;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;2+1) = (1;2;3)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$.
Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên khoảng nào thì đồ thị có hướng đi lên trên khoảng đó.
Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

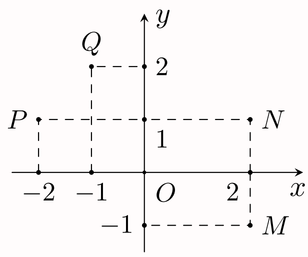
Ⓐ 22. Ⓑ 17. Ⓒ 12. Ⓓ 250.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6.
Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1+2i$?

Ⓐ N. Ⓑ P. Ⓒ M. Ⓓ Q.

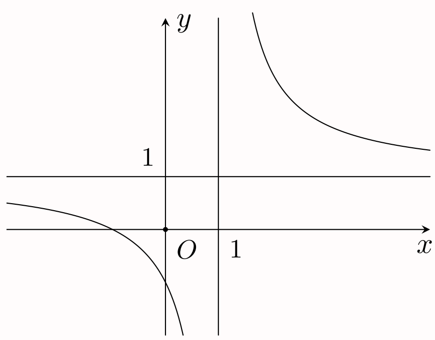


Lời giải.

Vì $z = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1;2)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y = x^4 + x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Đường cong có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên nó không thể là đồ thị của hàm đa thức. Ta xét các trường hợp sau:

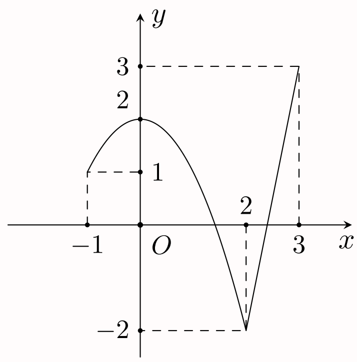
a) Xét $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, có
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Do đó đường cong trên không thể là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

b) Xét $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, có
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Do đó đường cong trên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án B

Câu 8.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tên đoạn $[-1;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A 0. B 1. C 4. D 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $M = 3$, $m = -2$. Do đó $M - m = 5$.
Chọn đáp án D

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 3. B 2. C 5. D 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có ba điểm cực trị.
Chọn đáp án A

Câu 10. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $a = 0,\ b = 2$. (B) $a = \dfrac{1}{2},\ b = 1$. (C) $a = 0,\ b = 1$. (D) $a = 1,\ b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2a + (b + i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow 2a - 1 + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

(A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29$. (B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.

(C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$. (D) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ có phương trình là

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đặt $\log_3 2 = a$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{3}{4a}$. (C) $\dfrac{4}{3a}$. (D) $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \dfrac{3}{4} \log_2 3 = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) 10.

Lời giải.

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3 + \sqrt{11}i}{2} \\ z = \dfrac{3 - \sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q)\colon x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

(A) $\dfrac{8}{3}$. (B) $\dfrac{7}{3}$. (C) 3. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét thấy $(P) \parallel (Q)$.

Trên (P) lấy $M(0; 0; 5)$. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\mathrm{d}\left((P), (Q)\right) = \mathrm{d}\left(M, (Q)\right) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

Ⓐ $(-\infty;-1)$.
Ⓑ $(3;+\infty)$.
Ⓒ $(-1;3)$.
Ⓓ $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

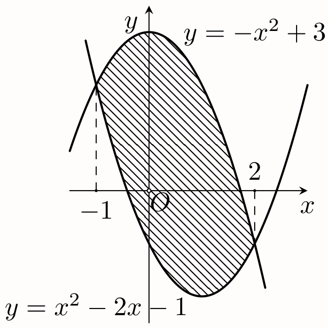
$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2-2x<3 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow -1<x<3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\,dx$.
Ⓑ $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,dx$.
Ⓒ $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,dx$.
Ⓓ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,dx$.



Lời giải.

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\,dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,dx.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

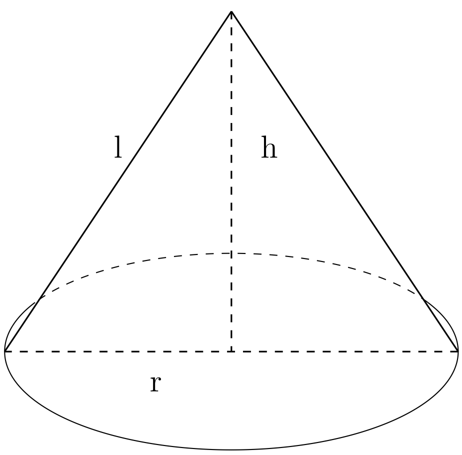
Câu 17. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.
Ⓓ $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $l=2a; r=a$, suy ra $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}a$.

Thể tích của khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 5$ suy ra $y = 5$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số tổng cộng có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

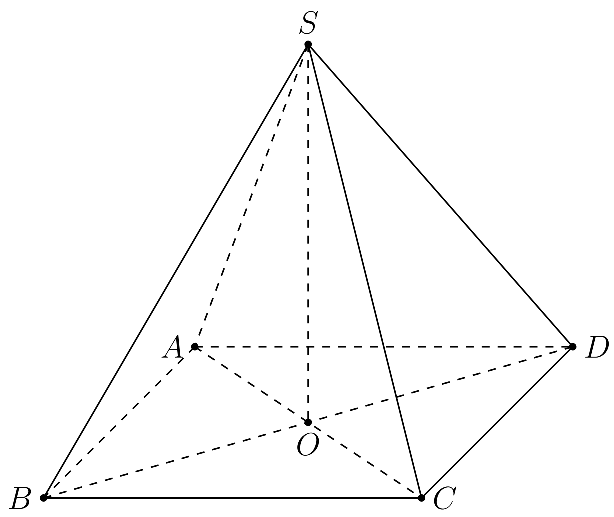
(A) $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{8a^3}{3}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Do chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = BD = 2a\sqrt{2}$. Suy ra $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm là

(A) $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. (B) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

(C) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$. (D) $f'(x) = \dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

$2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Mà $-2 < -\dfrac{3}{2} < 1$ nên số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

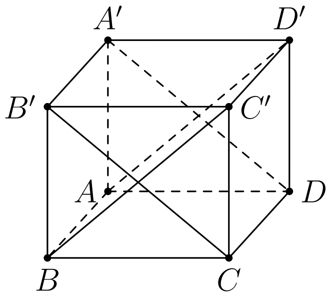
(A) 30°. (B) 60°. (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là 90°.



Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x) = 2 - x$ bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 7. (D) 3.

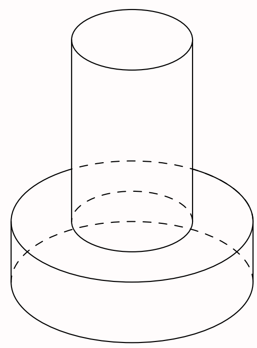
Lời giải.

$\log_3(7-3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \dfrac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7\cdot 3^x + 9 = 0. \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 7 \\ 3^{x_1}\cdot 3^{x_2} = 9 \end{cases} \Rightarrow 3^{x_1+x_2} = 3^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.
Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30\,\text{cm}^3$, thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. $24\,\text{cm}^3$. B. $15\,\text{cm}^3$. C. $20\,\text{cm}^3$. D. $10\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối trụ (H_1), (H_2).
Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\frac{1}{4}r_1^2 = \frac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \frac{1}{2}V_1$. Mà $V_1 + \frac{1}{2}V_1 = 30$ nên $V_1 = 20$.
Chọn đáp án C □

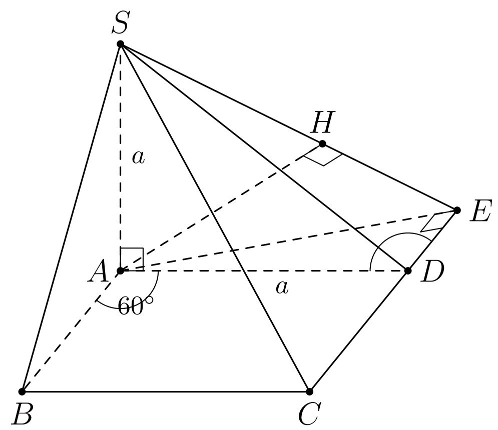
Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$ là
A. $2x^2\ln x + 3x^2$. B. $2x^2\ln x + x^2$.
C. $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2\ln x + x^2 + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 1+\ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$
Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - \int 2x\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - x^2 + C = 2x^2\ln x + x^2 + C$.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{15}a}{7}$. C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.
Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp CD$ tại E.
Trong (SAE), kẻ $AH \perp SE$ tại H (1).
Ta có $\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.
Xét tam giác AED vuông tại E
$\Rightarrow AE = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle SAE$ vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2}$
$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.

B $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

D $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t. \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow$ $t+(-1+2t)+(2-t)-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(1;1;1)$.

Ta có đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(3;-2;-1)$.

Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;4;-5)$.

Vậy hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A $(-\infty;0]$. **B** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$$\Leftrightarrow -3x^2-12x+4m-9\le 0 \Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9,\ \forall x\in(-\infty;-1).$$

Đặt $g(x)=3x^2+12x+9 \Rightarrow g'(x)=6x+12$. Giải $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty;-1)$.

x	$-\infty$		-2		-1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $4m\le g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow 4m\le -3\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Xét số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

A $(1;-1)$. **B** $(1;1)$. **C** $(-1;1)$. **D** $(-1;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$, ta có

$$(z+2i)(\overline{z}+2)=[a+(b+2)i][(a+2)-bi]=[a(a+2)+b(b+2)]+[(a+2)(b+2)-ab]i.$$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a+2)+b(b+2)=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ có tâm $I(-1;-1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A -2. **B** -1. **C** 2. **D** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A $m\geq f(1)-\mathrm{e}$. **B** $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C** $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D** $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

$f(x)<\mathrm{e}^x+m \Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m$.
Xét $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x, \forall x\in(-1;1)$.
$h'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0, \forall x\in(-1;1)$ (Vì $f'(x)<0, \forall x\in(-1;1)$ và $\mathrm{e}^x>0, \forall x\in(-1;1)$).
$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1) \Rightarrow h(-1)>h(x)>h(1), \forall x\in(-1;1)$.
Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1) \Leftrightarrow m\geq h(-1) \Leftrightarrow m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

Ⓐ $\frac{2}{5}$. Ⓑ $\frac{1}{20}$. Ⓒ $\frac{3}{5}$. Ⓓ $\frac{1}{10}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $6!$.

Xếp học sinh nam thứ nhất có 6 cách, học sinh nam thứ nhì có 4 cách, học sinh nam thứ ba có 2 cách.

Xếp 3 học sinh nữ vào 3 ghế còn lại có $3!$ cách.

Vậy xác suất là $\dfrac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!}{6!} = \dfrac{288}{720} = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

Ⓐ 135. Ⓑ 105. Ⓒ 108. Ⓓ 145.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x_I-2)+3(x_I+3)=0 \\ 2(y_I+2)+3(y_I-3)=0 \\ 2(z_I-4)+3(z_I+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1+5=0 \\ 5y_1-5=0 \\ 5z_1-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=1 \\ z_1=1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;1;1).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2+3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &= 5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB})+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2. \end{aligned}$$

Vì A, B, I cố định nên $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{IM} = k\vec{n}_{(P)} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2k-1 \\ y_M = -k+1 \\ z_M = 2k+1. \end{cases}$$

Mà $M \in (P) \Rightarrow 2(2k-1)-(-k+1)+2(2k+1)-8=0 \Leftrightarrow 9k-9=0 \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow M(1;0;3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2 = 135$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 34. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i| = |z-3+3i|$?

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Gọi $z = x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$$|z|^2 = 2|z+\bar{z}|+4 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4|x|+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2-4x-4=0,\ x\ge 0 & (1) \\ x^2+y^2+4x-4=0,\ x<0 & (2). \end{array}\right.$$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Theo đề ta có

$$\begin{aligned}|z-1-i|=|z-3+3i| &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2\\ &\Leftrightarrow 4x=8y+16\\ &\Leftrightarrow x=2y+4 \quad (3).\end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$(2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+8y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{5} \Rightarrow x=\dfrac{24}{5} \text{ (nhận)}\\ y=-2 \Rightarrow x=0 \text{ (nhận).}\end{array}\right.$$

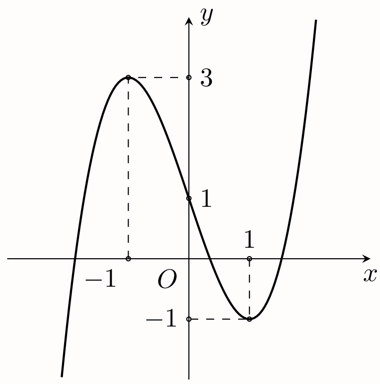
+ Thay (3) vào (2) ta được

$$(2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+24y+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=0 \text{ (loại)}\\ y=-\dfrac{14}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{8}{5} \text{ (nhận).}\end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.
Chọn đáp án (B) □

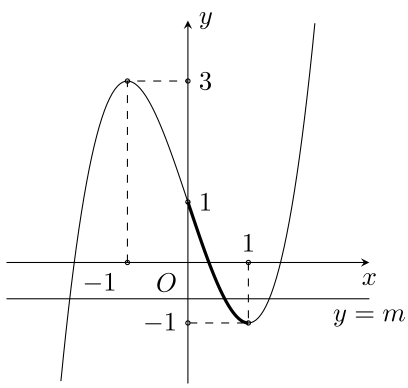
Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

(A) $[-1;3)$. (B) $(-1;3)$. (C) $(-1;3)$. (D) $[-1;1)$.



Lời giải.

Đặt $t=\sin x$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(0;1]$.
Do đó phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.
Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[-1;1)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

(A) 2,22 triệu đồng. (B) 3,03 triệu đồng. (C) 2,25 triệu đồng. (D) 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1+r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r) - m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r) - m](1+r) = M(1+r)^2 - m(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1+r)^2 - m(1+r) - m\right](1+r) = M(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \ldots - m(1+r) - m = M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^{n-1} - 1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

(A) $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

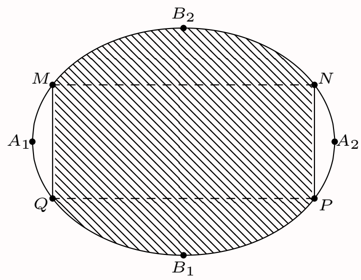
Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.
$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R$, suy ra điểm E nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).
Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(J, \Delta)$ lớn nhất (với J là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S)), mà $\mathrm{d}(J, \Delta) \leq EJ$.
Do đó AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.
Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5(1;-1;0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

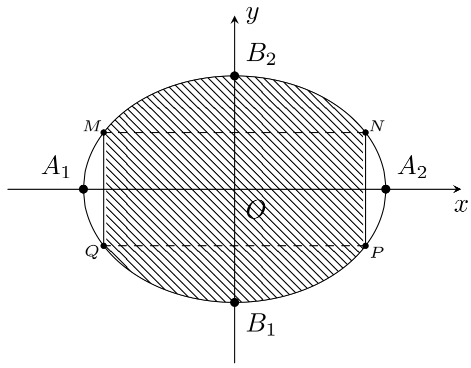
Câu 38. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.
Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?



(A) 7.322.000 đồng. (B) 7.213.000 đồng. (C) 5.526.000 đồng. (D) 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành trùng với trục lớn, trục tung trùng với trục bé của biển quảng cáo.
Khi đó, đường viền của biển quảng cáo có phương trình của dạng elip sau $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow$
$(E) : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d \colon y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.
Do Elip nhận trục Ox và Oy làm trục đối xứng nên diện tích phần tô màu gấp 4 diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ và các đường thẳng $x = 2\sqrt{3}$, trục tung, trục hoành, chính là

$$S = 4\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right) \mathrm{d}x = 3\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16 - x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

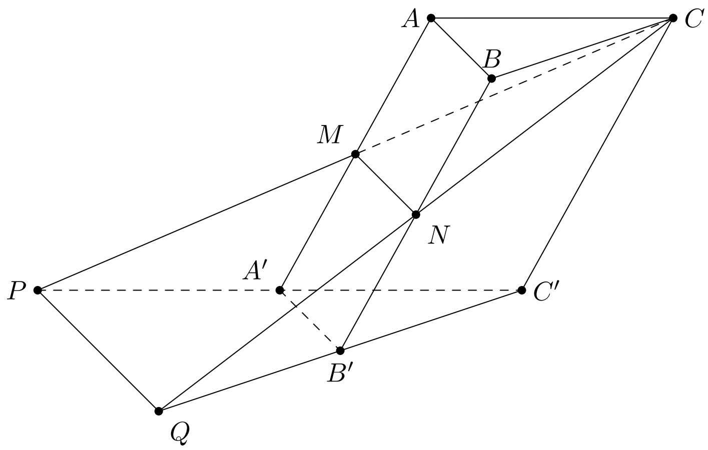
Đặt $x = 4\sin t$, khi đó $\mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$. Và với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; với $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$.

$$S = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{16 - 16\sin^2 t} \cdot 4 \cdot \cos t\right) \mathrm{d}t = 48\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 t\right) \mathrm{d}t = 24\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t = (24t + 12\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$
$8\pi + 6\sqrt{3}$ m^2.
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là $T = 100.000 \times \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right) + 200.000 \times \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right) \approx 7.322.000$ đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABNM} = \dfrac{1}{2}V_{C.A'B'BA} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{CMNA'B'C'} = \dfrac{2}{3}$.
Do M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên A', B' lần lượt là trung điểm của các đoạn $C'P$, $C'Q$. Do vậy, tam giác $C'QP$ đồng dạng với tam giác $C'B'A'$ với tỉ số 2 nên $S_{\triangle C'QP} = 4 \cdot S_{\triangle A'B'C'}$.
Suy ra

$$V_{C.CQP} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle C'QP} = 4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle A'B'C} = 4\cdot V_{C.A'B'C} = \frac{4}{3}.$$

Khi đó

$$V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CMNA'B'C} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?
A $(1;+\infty)$. B $(-\infty;-1)$. C $(-1;0)$. D $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\cdot\left[f'(x+2) + (1-x^2)\right]$.
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

$$f'(x+2) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 \le x+2 \le 3\\ x+2 \ge 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 \le x \le 1\\ x \ge 2.\end{array}\right.$$

Xét trên khoảng $(-1;1)$, ta có

$$\begin{cases} f'(x+2) \ge 0\\ 1 - x^2 > 0\end{cases} \Rightarrow f'(x+2) + (1-x^2) > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1;1).$$

Do đó, hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-1\right) + m\left(x^2-1\right) - 6\left(x-1\right) \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S

bằng

Ⓐ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} & m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6(x-1)\geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m(x+1)-6\right]\geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $f(x)=(x-1)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m(x+1)-6\right]$.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m(x+1)-6=0 \quad (1). \end{array}\right.$

Nếu $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x=1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x)=0$.
Do vậy $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x=1$.
Suy ra mệnh đề $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là mệnh đề sai.
Do đó điều kiện cần để $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có $4m^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

- Với $m=1$, ta có $f(x)=(x-1)^2\left(x^2+2x+4\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

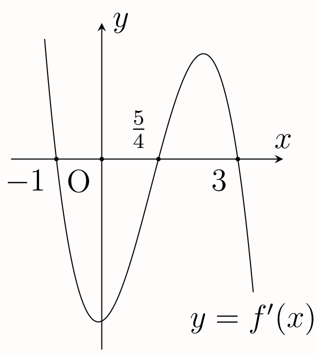
- Với $m=-\dfrac{3}{2}$, ta có $f(x)=\dfrac{3}{4}(x-1)^2\left(3x^2+6x+7\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=-\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}\Rightarrow$ Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$.
Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Lời giải.

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là $-1,\ \dfrac{5}{4},\ 3$.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$ hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\dfrac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) = r &\Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\dfrac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2\log a + \log b$. B. $\log a + 2\log b$. C. $2(\log a + \log b)$. D. $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. B. 12. C. -8. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. B. $4\pi a^3$. C. $\dfrac{\pi a^3}{3}$. D. $2\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính a là $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

A. $\{0\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{-1; 0\}$. D. $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - x + 2 > 0$, đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $z = 0$. Ⓑ $x + y + z = 0$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $x = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{j} = (0;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

Ⓐ $\mathrm{e}^x + x^2 + C$. Ⓑ $\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Ⓒ $\frac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. Ⓓ $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C,\ \text{với } C \text{ là hằng số.}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

Ⓐ $Q(2;-1;2)$. Ⓑ $M(-1;-2;-3)$. Ⓒ $P(1;2;3)$. Ⓓ $N(-2;1;-2)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm đã cho vào phương trình của đường thẳng d, ta có

- Với $M(-1;-2;-3)$ thì $\frac{-1-1}{2} \neq \frac{-2-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm M.
- Với $N(-2;1;-2)$ thì $\frac{-2-1}{2} \neq \frac{1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm N.
- Với $P(1;2;3)$ thì $\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{-1} = \frac{3-3}{2} = 0$, suy ra d đi qua điểm P.
- Với $Q(2;-1;2)$ thì $\frac{2-1}{2} \neq \frac{-1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm Q.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 50. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ⓑ $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!}$. Ⓒ $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Ⓓ $\mathrm{C}_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

Lời giải.

Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$, số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k và $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 14

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019
Môn: Toán
Năm học: 2018 – 2019
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n}_3=(1;2;-1)$. **B** $\vec{n}_4=(1;2;3)$. **C** $\vec{n}_1=(1;3;-1)$. **D** $\vec{n}_2=(2;3;-1)$.

Lời giải.

Từ phương trình mặt phẳng (P) suy ra một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}_4=(1;2;3)$.
Chọn đáp án B □

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

A $2\log_5 a$. **B** $2+\log_5 a$. **C** $\dfrac{1}{2}+\log_5 a$. **D** $\dfrac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2=2\log_5 a$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2;0)$. **B** $(2;+\infty)$. **C** $(0;2)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $f'(x)<0,\ \forall x\in(0;2)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=27$ là

A $x=5$. **B** $x=1$. **C** $x=2$. **D** $x=4$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1}=27\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) -6. (B) 3. (C) 12. (D) 6.

Lời giải.

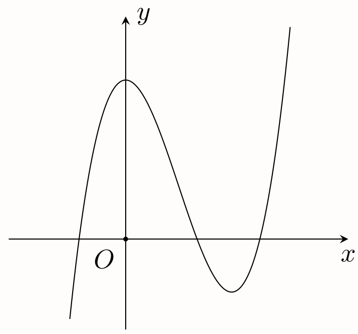
Ta có $d = u_2 - u_1 = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3$. (B) $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

(C) $y = x^4 - 2x^2 + 3$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.



Lời giải.

Đường cong đã cho là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$.

Vậy hàm số thỏa mãn là $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u}_2 = (2;1;1)$. (B) $\vec{u}_4 = (1;2;-3)$. (C) $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$. (D) $\vec{u}_1 = (2;1;-3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

(A) $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. (B) $\pi r^2 h$. (C) $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. (D) $2\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

(A) 2^7. (B) A_7^2. (C) C_7^2. (D) 7^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 7 phần tử.

Vậy số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là C_7^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

(A) $(2;1;0)$. (B) $(0;0;-1)$. (C) $(2;0;0)$. (D) $(0;1;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên trục Oz là $M'(0;0;z_0)$.
Suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz là $(0;0;-1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -5. (B) 5. (C) -1. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2-3=-5$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

(A) $3Bh$. (B) Bh. (C) $\dfrac{4}{3}Bh$. (D) $\dfrac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là $V = Bh$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

(A) $-3-4i$. (B) $-3+4i$. (C) $3+4i$. (D) $-4+3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $a+bi$ là số phức $a-bi$.
Vậy số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là số phức $3+4i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

(A) $x=2$. (B) $x=1$. (C) $x=-1$. (D) $x=-3$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x=-1$.
Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

(A) $x^2 + 5x + C$. (B) $2x^2 + 5x + C$. (C) $2x^2 + C$. (D) $x^2 + C$.

Lời giải.

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là $F(x) = x^2 + 5x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

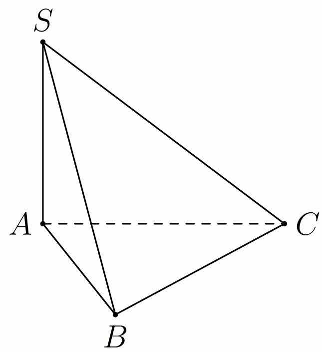
Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ là 4. Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) 90°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 60°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

(A) 16. (B) 56. (C) 20. (D) 26.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình trên ta được $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1z_2=10. \end{cases}$

Khi đó ta có $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=36-20=16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

(A) $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$. (B) $2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.

(C) $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}$. (D) $(x^2-3x)\cdot 2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(2^{x^2-3x}\right)'=(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

(A) -16. (B) 20. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ có tập xác định $\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-3$.
Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1\in[-3;3]$.
Ta có $f(1)=0; f(-1)=4; f(3)=20; f(-3)=-16$.
Từ đó suy ra $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(3)=20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

(A) $\sqrt{7}$. (B) 9. (C) 3. (D) $\sqrt{15}$.

Lời giải.

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\cdot(-1)\cdot x+2\cdot 0\cdot y-2\cdot 1\cdot z-7=0.$$

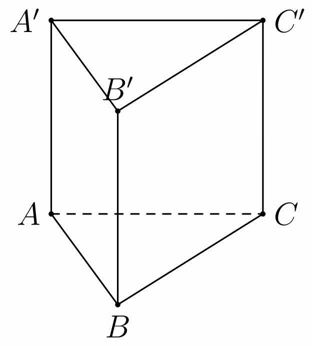
Suy ra $a=-1, b=0, c=1, d=-7$.
Vậy tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+7}=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



Ⓐ $\frac{3a^3}{4}$.
Ⓑ $\frac{3a^3}{2}$.
Ⓒ $\frac{a^3}{4}$.
Ⓓ $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA' = a\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra $V = a\sqrt{3} \cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			f_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x = 0$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 24. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 16. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có $4\log_2 a + \log_2 b = \log_2 a^4 + \log_2 b = \log_2(a^4b) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

Ⓐ $(4;-1)$. Ⓑ $(-1;4)$. Ⓒ $(4;1)$. Ⓓ $(1;4)$.

Lời giải.

Ta có $3z_1 + z_2 = 3(1-i) + (1+2i) = 4 - i$. Suy ra, tọa độ điểm biểu diễn là $(4;-1)$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ là

(A) $x=3$. (B) $x=-3$. (C) $x=4$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{4}$. Ta có

$$\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{-1}{4}\\3(x+1)=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{-1}{4}\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,2 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

(A) 1,8 m. (B) 1,4 m. (C) 2,2 m. (D) 1,6 m.

Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm, ta có

$$V=V_1+V_2=\pi R^2h\Leftrightarrow\pi R_1^2h+\pi R_2^2h\Leftrightarrow R^2=R_1^2+R_2^2$$
$$\Rightarrow\quad R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}=\sqrt{1^2+(1{,}2)^2}\approx1{,}56\ (\mathtt{m}).$$

Vậy giá trị cần tìm là 1,6 m.
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	2	↘	-4 ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

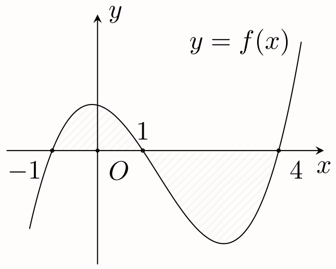
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Ta có
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ suy ra không tồn tại tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$.
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-4$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.
Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên dưới). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có hàm số $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1;1]$; $f(x) \leq 0 \forall x \in [1;4]$, nên

$$S = \int\limits_{-1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

Ⓐ $2x - y - z + 5 = 0$.

Ⓑ $2x - y - z - 5 = 0$.

Ⓒ $x + y + 2z - 3 = 0$.

Ⓓ $3x + 2y - z - 14 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, do đó (P) đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$ của AB, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2;-1;-1)$.

Suy ra $(P)\colon 2(x-3) - 1(y-2) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 5 = 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng$(-1;+\infty)$ là

Ⓐ $2\ln(x+1) + \dfrac{2}{x+1} + C$.

Ⓑ $2\ln(x+1) + \dfrac{3}{x+1} + C$.

Ⓒ $2\ln(x+1) - \dfrac{2}{x+1} + C$.

Ⓓ $2\ln(x+1) - \dfrac{3}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. (B) $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. (C) $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. (D) $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x+4$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{4}cos2x+x^2+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=-2-4t\\y=-2-3t\\z=2-t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=2+4t\\y=-1+3t\\z=3-t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-4+3t\\z=2+t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=4+2t\\y=3-t\\z=1+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1)$.

Đường thẳng qua $C(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình

$\begin{cases}x=2+4t\\y=-4+3t\\z=2+t.\end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $3\left(\overline{z}+i\right)-(2-i)z=3+10i$. Mô-đun của z bằng

(A) 3. (B) 5. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $(x,\ y\in\mathbb{R})$

$3\left(\overline{z}+i\right)-(2-i)z=3+10i$

$\Leftrightarrow 3(x-yi+i)-(2-i)(x+yi)=3+10i$

$\Leftrightarrow x-y+(x-5y+3)i=3+10i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\x-5y+3=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Do đó $z=2-i$

Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(4; +\infty)$. **B** $(-2; 1)$. **C** $(2; 4)$. **D** $(1; 2)$.

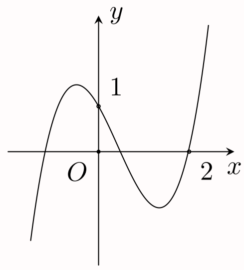
Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3-2x)$.
Hàm số nghịch biến khi

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f'(3-2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leq 3-2x \leq -1 \\ 3-2x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3 \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ nên nghịch biến trên $(-2; 1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 36.
Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



A $m \geq f(2) - 2$. **B** $m \geq f(0)$.
C $m > f(2) - 2$. **D** $m > f(0)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m$.
Đặt $g(x) = f(x) - x$ xét trên khoảng $(0; 2)$. Do đó $g'(x) = f'(x) - 1$.
Từ đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$. Suy ra hàm số $g(x) = f(x) - x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq \lim\limits_{x \to 0} g(x) = f(0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{13}{25}$. **C** $\dfrac{12}{25}$. **D** $\dfrac{313}{625}$.

Lời giải.

Số cách chọn hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên là $C_{25}^2 = 300 \Rightarrow n(\Omega) = 300$.
Gọi A là biến cố "Tổng hai số được chọn là một số chẵn". Ta có hai trường hợp

- Trường hợp 1: Chọn 2 số chẵn từ 12 số chẵn có $C_{12}^2 = 66$ cách.
- Trường hợp 2: Chọn 2 số lẻ từ 13 số lẻ có $C_{13}^2 = 78$ cách.

Do đó $n(A) = 66 + 78 = 144$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{144}{300} = \dfrac{12}{25}$.
Chọn đáp án C □

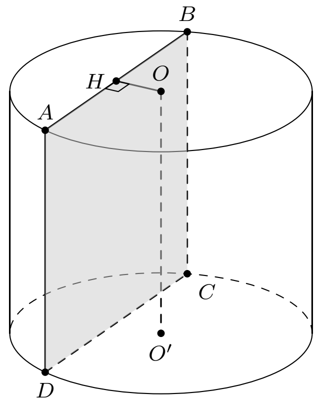
Câu 38. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $10\sqrt{3}\pi$. **B** $5\sqrt{39}\pi$. **C** $20\sqrt{3}\pi$. **D** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A,\ B \in (O)$; $C,\ D \in (O')$.
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = \mathrm{d}(OO', (ABCD)) = 1$.
Vì $S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB \cdot BC = 30$.
Suy ra $AB = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.
Bán kính của đáy là $r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.
Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi.$$



Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$ và $m > 0$.

Phương trình đã cho tương đương: $\log_3 x - \log_3(3x-1) = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{m}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$.

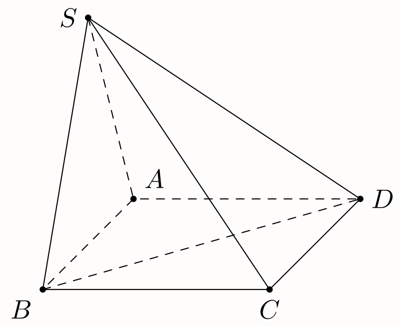
Có $f'(x) = -\dfrac{1}{(3x-1)^2} < 0, \forall x > \dfrac{1}{3}$

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1, 2\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 40.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



Ⓐ $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

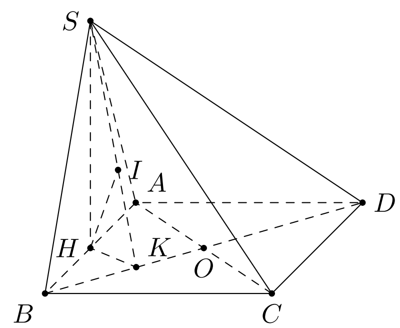
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).
Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\displaystyle\int_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{31}{2}$. Ⓑ -16. Ⓒ 8. Ⓓ 14.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x = 1$. Đặt $t = 4x \Rightarrow \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4}t\cdot f(t)\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow \int_0^4 t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 16 \Rightarrow \int_0^4 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Xét $I = \displaystyle\int_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^2\mathrm{d}f(x)$

Suy ra: $I = x^2\cdot f(x)\Big|_0^4 - \displaystyle\int_0^4 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 4^2 f(4) - 2\cdot 16 = -16$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

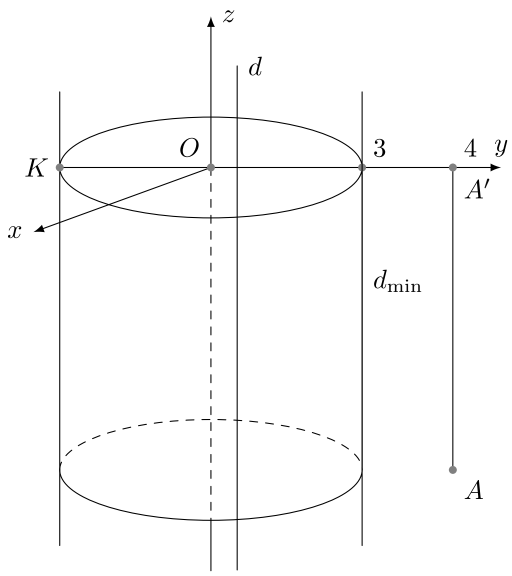
Ⓐ $P(-3;0;-3)$. Ⓑ $M(0;-3;-5)$. Ⓒ $N(0;3;-5)$. Ⓓ $Q(0;5;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.
Gọi I là hình chiếu của A lên Oy, khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi d đi qua giao điểm của Oy với mặt trụ là điểm $I(0;3;0)$

Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = t. \end{cases}$

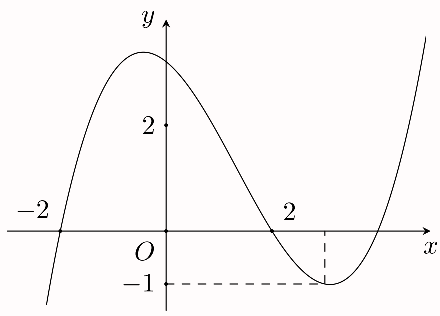
Nên d đi qua điểm $N(0;3;-5)$



Chọn đáp án (C)

Câu 43.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ là

(A) 3. (B) 8. (C) 7. (D) 4.



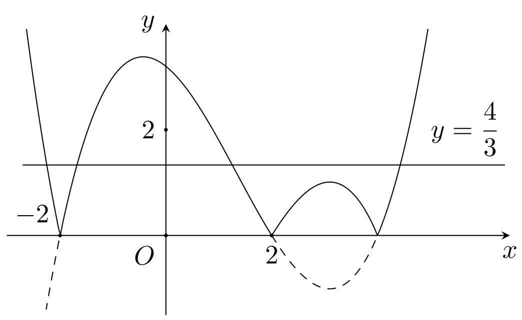
Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(t)| = \dfrac{4}{3}$ (1). Đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ được vẽ thành 2 phần

- Phần 1 giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía trên trục Ox khi $f(x) \geq 0$.
- Phần 2 lấy đối xứng của phần còn lại qua trục Ox.



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.
Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x. Khi đó

- $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
- $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$. B. 26. C. 34. D. $\sqrt{26}$.

Lời giải.

$$w = \frac{4+iz}{1+z} \Leftrightarrow (1+z)w = 4 + iz \Leftrightarrow z(w-i) = 4 - w$$
$$\Leftrightarrow \quad |z|\cdot|w-i| = |4-w| \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot|w-i| = |4-w|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ khi đó thay vào $(*)$ ta có:

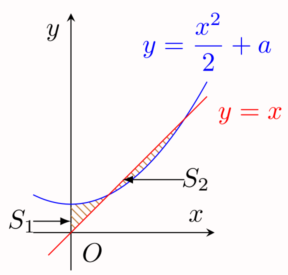
$$\sqrt{2}\cdot|x+yi-i| = |4-x-yi| \Leftrightarrow 2[x^2 + (y-1)^2] = (x-4)^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45.
Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{1}{2}\right)$. B. $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. C. $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$. D. $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{7}\right)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:
$\dfrac{1}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0$ (1)

Phương trình trên có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a > 0 \\ 2 > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Khi $0 < a < \dfrac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2 + a - x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{1}{2}x^2 - a + x\right)\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + 6a - 3x_2 = 0. \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $2a = -x_2^2 + 2x_2$

Thế vào (2) ta được: $2x_2^2 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_2 = 0 & \text{(loại)} \\ x_2 = \dfrac{3}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow a = \dfrac{3}{8} = 0,375 \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

(A) 9. (B) 3. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 2(x-1)\cdot f'(x^2 - 2x)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x - a = 0,\ a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x - b = 0,\ b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x - c = 0,\ c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x - d = 0,\ d \in (1; +\infty) & (4). \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm đơn phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt.
Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.
Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $27\sqrt{3}$. (B) $21\sqrt{3}$. (C) $30\sqrt{3}$. (D) $36\sqrt{3}$.

Lời giải.

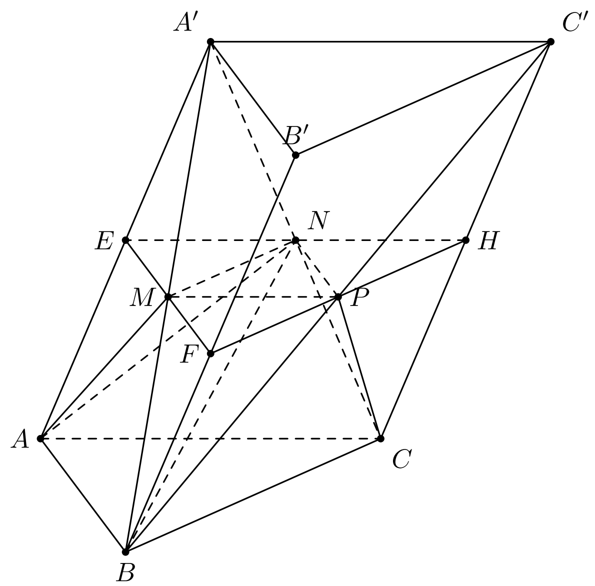
Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Vì $\triangle ABC$ đều có độ dài cạnh bằng 6 nên

$$S_{\triangle ABC} = 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Thể tích lặng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = h \cdot S_{\triangle ABC} = 8 \cdot 9\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'.
Thể tích khối chóp $A.EMN$ là



$$V_{A.EMN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(EMN)) \cdot S_{\triangle EMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{24}V.$$

Tương tự, ta có $V_{B.FMP} = V_{C.HNP} = \dfrac{1}{24}V$.
Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ là

$$V_{ABCMNP} = \frac{1}{2}V - 3V_{A.EMN} = \frac{1}{2}V - 3 \cdot \frac{1}{24}V = \frac{3}{8}V = 27\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

(A) 12. (B) 8. (C) 16. (D) 4.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 3$ có tâm $I\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.
Ta có $A(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.
Dễ thấy (S) cắt mặt phẳng (Oxy) nên từ một điểm A bất kỳ thuộc mặt phẳng (Oxy) và nằm ngoài (S) kẻ tiếp tuyến tới (S) thì các tiếp tuyến đó nằm trên một mặt nón đỉnh A, các tiếp điểm nằm trên một đường tròn được xác định. Còn nếu A thuộc (S) thì ta kẻ các tiếp tuyến đó sẽ thuộc một mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm A. Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi

- Hoặc A thuộc $(S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.
- Hoặc các tiếp tuyến tạo thành mặt nón và góc ở đỉnh của mặt nón là $\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \geq 45^\circ$.
  Suy ra $\sin\widehat{MAI} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{6}$.

Vậy điều kiện bài toán là $\sqrt{3} \leq IA \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \leq IA^2 \leq 6$.
Ta có $3 \leq IA^2 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$ (*).
Do $A(a; b; 0)$ có tọa độ nguyên nên ta có điểm thỏa mãn $(*)$ là
$(0; 2; 0)$, $(0; -2; 0)$, $(2; 0; 0)$, $(-2; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; -1; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(-1; 0; 0)$, $(1; 1; 0)$, $(1; -1; 0)$, $(-1; 1; 0)$, $(-1; -1; 0)$.
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A $(-\infty; 2]$. **B** $[2; +\infty)$. **C** $(-\infty; 2)$. **D** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$\begin{aligned} &\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = m \quad (1)\end{aligned}$$

Hàm số $g(x) = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - |x+2| + x$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - 2 & \text{nếu } x \geq -2 \\ \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + 2x + 2 & \text{nếu } x < -2. \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in (-2; +\infty) \setminus \{-1; 0; 1; 2\} \\ \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + 2 > 0,\ \forall x < -2. \end{cases}$

Nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.
Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$+$	$+$	‖ $+$	‖ $+$	‖ $+$	‖ $+$	
y	$-\infty \nearrow$	$\frac{49}{12}$	$\nearrow +\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A 49. **B** 47. **C** Vô số. **D** 48.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 7^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m. \end{cases}$

Với m nguyên dương ta có

$$\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ \sqrt{7^x - m} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ x = \log_7 m. \end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt có hai trường hợp

- $2 > \log_7 m \geq 2^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}} \leq m < 7^2$.
  Trường hợp này $m \in \{3; 4; 5; \ldots; 48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m.
- $\log_7 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Trường hợp này có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 47 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án B □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 15

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019
Môn: Toán
Năm học: 2018 – 2019
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + 6x + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 6x + C$. D. $x^2 + C$.

Lời giải.

$$\int (2x + 6)\,\mathrm{d}x = x^2 + 6x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; -3)$. B. $\overrightarrow{n_4} = (2; 1; 3)$. C. $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 3)$. D. $\overrightarrow{n_3} = (2; 3; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\pi r^2 h$. B. $2\pi r^2 h$. C. $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

A. $-5 + 3i$. B. $-3 + 5i$. C. $-5 - 3i$. D. $5 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là $5 + 3i$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\log_5 a$. B. $\dfrac{1}{3} + \log_5 a$. C. $3 + \log_5 a$. D. $3\log_5 a$.

Lời giải.

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$.
Chọn đáp án D □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(3;0;0)$. Ⓑ $(3;-1;0)$. Ⓒ $(0;0;1)$. Ⓓ $(0;-1;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;1)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7. Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

Ⓐ 5^2. Ⓑ 2^5. Ⓒ C_5^2. Ⓓ A_5^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có C_5^2 cách.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Biết tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -7. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+(-4) = -1.$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z+2}{3}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d

Ⓐ $\vec{u} = (2;5;3)$. Ⓑ $\vec{u} = (2;-5;3)$. Ⓒ $\vec{u} = (1;3;2)$. Ⓓ $\vec{u} = (1;3;-2)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;-5;3)$.

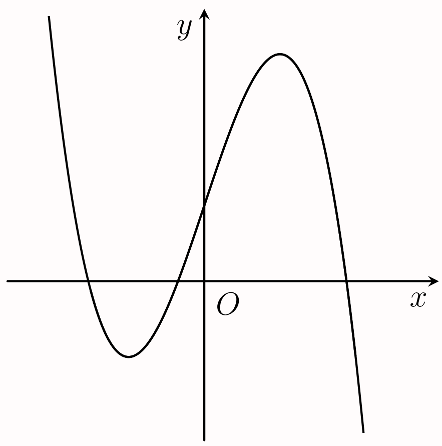
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên

Ⓐ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x + 1$.

Ⓒ $y = x^3 - 3x + 1$. Ⓓ $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -6. Ⓒ 10. Ⓓ 6.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên ta có $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 8 - 2 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

Ⓐ $V = 3Bh$. Ⓑ $V = Bh$. Ⓒ $V = \frac{4}{3}Bh$. Ⓓ $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

Ⓐ $(0; +\infty)$. Ⓑ $(0; 2)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2; 0)$ hàm số đồng biến.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Hàm số đạt cực đại tại

(A) $x = 2$. (B) $x = -2$. (C) $x = 3$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là

(A) $x = 1$. (B) $x = -2$. (C) $x = 3$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_2\left[2\cdot(x-1)\right] \Leftrightarrow x+1 = 2x-2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

(A) 20. (B) 4. (C) 0. (D) -16.

Lời giải.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3;3]$.

Ta có $f(-3) = -16$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} f(x) = -16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,4m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây

(A) 1,7m. (B) 1,5m. (C) 1,9m. (D) 2,4m.

Lời giải.

Gọi chiều cao của các hình trụ là h.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ có bán kính đáy $R_1 = 1$m, $R_2 = 1{,}4$m.

Gọi V là thể tích của hình trụ dự định làm và có bán kính đáy là R.

Ta có $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h = \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{2,96} \approx 1{,}72$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 36. (B) 8. (C) 28. (D) 18.

Lời giải.

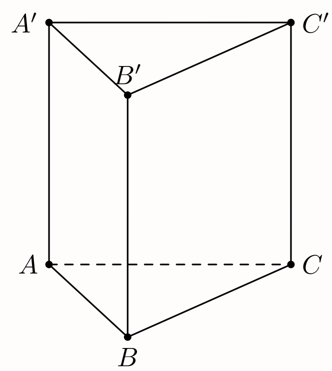
Ta có $z^2 - 6z + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + \sqrt{5}i \\ z = 3 - \sqrt{5}i \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2 + \left(3 - \sqrt{5}i\right)^2 = 8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.
Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

(C) $\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.



Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA' = 2a$
Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

(A) 3. (B) 9. (C) $\sqrt{15}$. (D) $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$
Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = \dfrac{5}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho ta có

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

(A) 5. (B) 2. (C) 32. (D) 4.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}$.
B. $3^{x^2-3x}\cdot \ln 3$.
C. $(x^2-3x)\cdot 3^{x^2-3x-1}$.
D. $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot \ln 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \left(3^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot \ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+y+z-4=0$.
B. $2x-y+z-2=0$.
C. $x+y+z-3=0$.
D. $2x-y+z+2=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2;2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên có phương trình là $(\alpha)\colon 2x-y+z-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = -2+i$ và $z_2 = 1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(3;-3)$.
B. $(2;-3)$.
C. $(-3;3)$.
D. $(-3;2)$.

Lời giải.

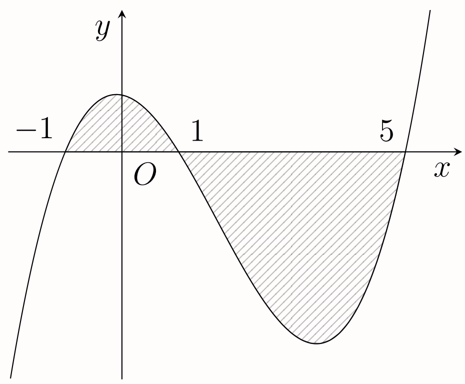
Ta có: $2z_1+z_2 = -4+2i+1+i = -3+3i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ sau). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

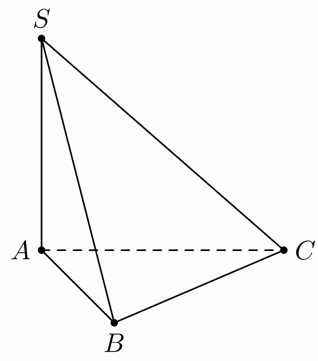


Lời giải.

Ta có: $S = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $90°$.
B. $30°$.
C. $60°$.
D. $45°$.

Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA}$.

Mà $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}} = 1$. Vậy $\widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho số phức z thoả mãn $3(\overline{z} - i) - (2+3i)z = 7 - 16i$. Mô-đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$.
B. 5.
C. $\sqrt{3}$.
D. 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\ (a; b \in \mathbb{R})$. Theo đề ta có

$$\begin{aligned}
& 3(a - bi - i) - (2+3i)(a+bi) = 7 - 16i \\
\Leftrightarrow\ & 3a - 3bi - 3i - 2a - 2bi - 3ai + 3b = 7 - 16i \\
\Leftrightarrow\ & (a+3b) + (-3a - 5b - 3) = 7 - 16i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a + 3b = 7 \\ -3a - 5b - 3 = -16 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a + 3b = 7 \\ -3a - 5b = -13 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(1;2;1)$, $C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;0;-1)$, $\overrightarrow{BD} = (0;-1;2)$ và $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-1;-4;-2)$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) thì vuông góc với hai đường thẳng BC, BD nên nhận véc-tơ $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-1;-4;-2)$ là véc-tơ chỉ phương.

Có 2 phương án bị loại. Thay điểm $A(1;0;2)$ vào phương trình của một trong hai phương án còn lại, chẳng hạn thay vào phương trình $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+4t \\ z = 4+2t \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 1 = 2+t \\ 0 = 4+4t \\ 2 = 4+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+4t \\ z = 4+2t \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng?

(A) $\dfrac{\pi^2+2}{8}$. (B) $\dfrac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. (C) $\dfrac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. (D) $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(2\cos^2 x + 3\right)\,\mathrm{d}x = \int (1+\cos 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \int (\cos 2x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + 4x + C.$$

Nên $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 4x + C$.

Lại có $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$. Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 4x + 4$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + 4x + 4\right)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2+8\pi+2}{8}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

(A) $3\ln(x-1) - \dfrac{2}{x-1} + C$. (B) $3\ln(x-1) + \dfrac{1}{x-1} + C$.

(C) $3\ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1} + C$. (D) $3\ln(x-1) + \dfrac{2}{x-1} + C$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

Với $x > 1$ ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right)\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2} = 3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; 3)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(3; 5)$. (D) $(5; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy rằng hàm số $y = f(x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $y = f(5 - 2x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y = f(5 - 2x)$ có $y' = -2f'(5 - 2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

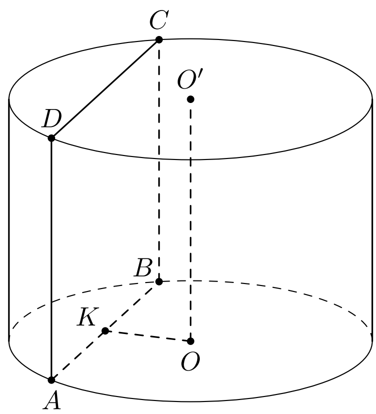
$$y' \leq 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leq 5 - 2x \leq -1 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 4 \\ x \leq 2. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(3; 4)$. Suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) $24\sqrt{2}\pi$. (B) $8\sqrt{2}\pi$. (C) $12\sqrt{2}\pi$. (D) $16\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và tâm O'. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).
Do hình trụ có chiều cao là $h = OO' = 4\sqrt{2} \Rightarrow$ nên có độ dài đường sinh $\ell = AD = 4\sqrt{2}$.
Theo bài ra, diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 16 nên

$$AB \cdot CD = 16 \Leftrightarrow AB = \frac{16}{AD} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK \perp AB$, mà $OK \perp AD$ nên $OK \perp (ABCD)$.
Suy ra khoảng cách giữa OO' và $(ABCD)$ là $OK = \sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông AOK có

$$R = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi R\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

(A) 6. (B) 5. (C) Vô số. (D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ m > 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1) \\ \Leftrightarrow\ & mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1 \qquad (1) \end{aligned}$$

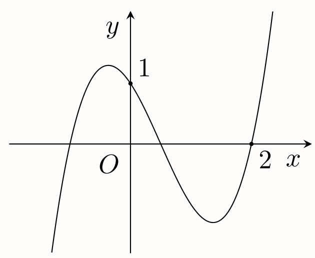
- Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).
- Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{6-m}$ nên

$$\frac{1}{6-m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6-m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6 \text{ (thỏa mãn).}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

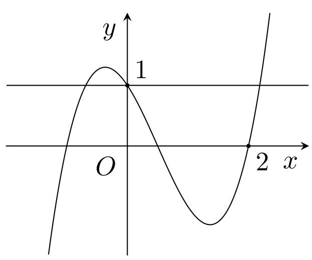
Câu 38.
Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



A $m \leq f(2) - 2$.
B $m < f(2) - 2$.
C $m \leq f(0)$.
D $m < f(0)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.
Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.
Từ đồ thị ta thấy trên $(0; 2)$ đường thẳng $y = 1$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên $f'(x) < 1, \forall x \in (0; 2)$ hay $g'(x) < 0, \forall x \in (0; 2)$.

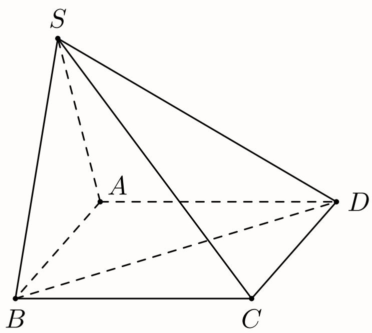


Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	2
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$g(0)$ ↘	$g(2)$

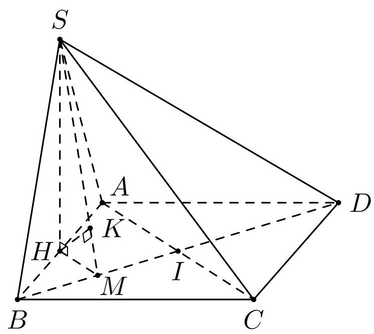
Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình $f(x) > x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m < g(x)$ với $\forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 39.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



Ⓐ $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BI. Ta có $HM \perp BD$.
Mà $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$
Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$)
$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBD)) = HK$.
Ta có $HM = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{21}a}{14} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

Ⓐ $\dfrac{13}{27}$. Ⓑ $\dfrac{14}{27}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{365}{729}$.

Lời giải.

Gọi A là tập hợp 27 số nguyên dương đầu tiên, ta có $A = \{1; 2; 3; \ldots; 26; 27\}$.
Phép thẻ chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ A có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{27}^2 = 351$.
Tổng hai số chọn được là số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ. Do đó ta có các khả năng sau:

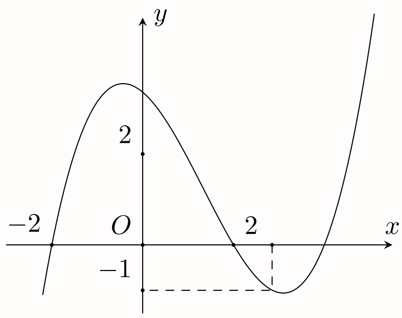
- Hai số lấy được từ A là hai số chẵn, có $\mathrm{C}_{13}^2 = 78$ khả năng.
- Hai số lấy được tà A là hai số lẻ, có $\mathrm{C}_{14}^2 = 91$ khả năng.

Do đó khả năng để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là $78 + 91 = 169$.
Xác suất cần tìm là $\mathrm{p}(A) = \dfrac{169}{351} = \dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 41.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ là

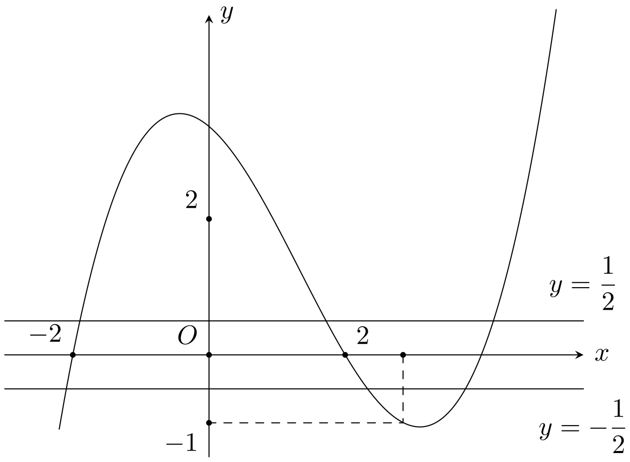


Ⓐ 6. Ⓑ 10. Ⓒ 12. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $|f(x^3-3x)| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^3-3x) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ f(x^3-3x) = -\dfrac{1}{2} & (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có



- $(1) \Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x = \alpha_1 & (-2<\alpha_1<0) \\ x^3-3x = \alpha_2 & (0<\alpha_2<2) \\ x^3-3x = \alpha_3 & (\alpha_3>2)\,. \end{array}\right.$
- $(2) \Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x = \alpha_4 & (\alpha_4<-2) \\ x^3-3x = \alpha_5 & (\alpha_5>2) \\ x^3-3x = \alpha_6 & (\alpha_6>2)\,. \end{array}\right.$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $y' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- Phương trình $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.
- Phương trình $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3$, $x^3-3x=\alpha_4$, $x^3-3x=\alpha_5$, $x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án B

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. B. 23. C. $\dfrac{123}{5}$. D. -25.

Lời giải.

Biến đổi tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 x^2 d\left(f(x)\right)=x^2\cdot f(x)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}\left(x^2\right)\\ &= 25\cdot f(5)-0\cdot f(x)-\int_0^5 f(x)\cdot 2x\,\mathrm{d}x=25-2\int_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $5x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}x\Rightarrow 1=\displaystyle\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5\frac{t}{5}f(t)\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{25}\int_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t=25$.

Vậy $I=25-2\times 25=-25$.

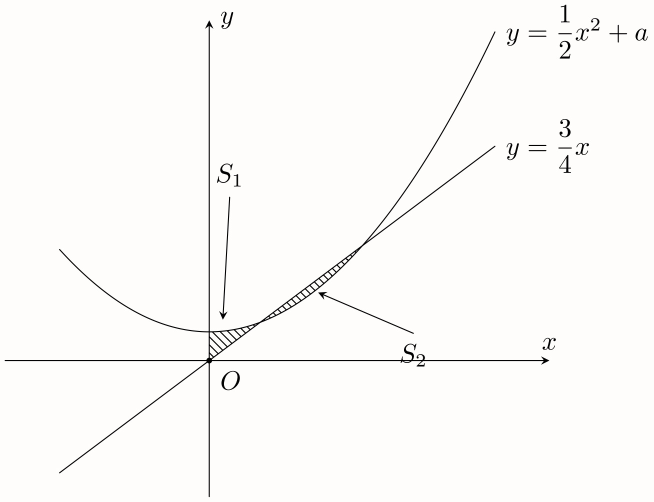
Chọn đáp án D

Câu 43.

Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}x$ và parabol $y=\dfrac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{32}\right)$. B. $\left(\dfrac{3}{16};\dfrac{7}{32}\right)$.

C. $\left(0;\dfrac{3}{16}\right)$. D. $\left(\dfrac{7}{32};\dfrac{1}{4}\right)$.



Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0\Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0.$$

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2 = 2a & (**). \end{cases}$

Từ đồ thị đề bài, ta có

$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax\right)\Bigg|_0^{x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8}. \quad (***)$$

Từ $(*)$ ta suy ra $x_1 = \dfrac{3}{2} - x_2$, thay vào $(**)$ ta được

$$\left(\frac{3}{2} - x_2\right) x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{27}{128}.$$

Vậy $a \in \left(\dfrac{3}{16}; \dfrac{7}{32}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{3 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 20. (C) 12. (D) $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $w = \dfrac{3 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow w + wz = 3 + iz \Leftrightarrow w - 3 = (i - w)z$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|w - 3| = |(i - w)z| \Leftrightarrow |w - 3| = |(i - w)||z|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Leftrightarrow \quad |w - 3| = |(i - w)||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \cdot \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0. \end{aligned}$$

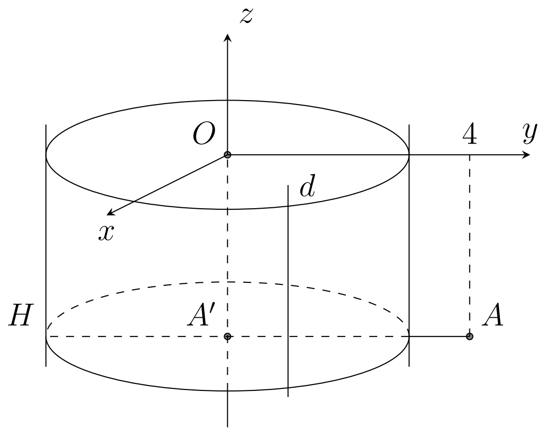
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3; 2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây ?

(A) $P(-3; 0; -3)$. (B) $Q(0; 11; -3)$. (C) $N(0; 3; -5)$. (D) $M(0; -3; -5)$.

Lời giải.



Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của hình trụ có trục là Oz và có bán kính đáy $r = 3$.
Gọi A' là hình chiếu của A lên trục Oz, dễ thấy $A'(0; 0; -3)$ và $AA' = 4$.
Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của A lên d.
AH lớn nhất khi A, A', H thẳng hàng và $AH = AA' + A'H = AA' + r = 4 + 3 = 7$.

Khi đó $\overrightarrow{AH} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x; y-4; z+3) = \dfrac{7}{4}(0; -4; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow H(0; -3; -3)$.

Vậy d qua $H(0; -3; -3)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 + t \end{cases}$ suy ra d đi qua điểm $M(0; -3; -5)$.

Chọn đáp án D

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ $(a, b, c$ là các số nguyên$)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ?

A. 12. B. 4. C. 8. D. 16.

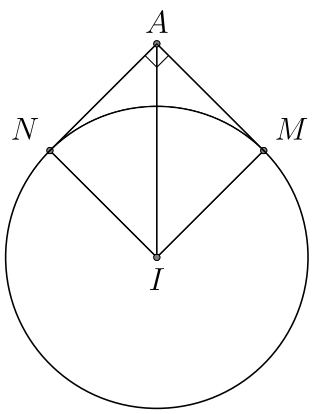
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0; 0; \sqrt{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$.
Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán thì ta có hai trường hợp

- **TH1:** $A \in (S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.

- **TH2:** $A \notin (S)$, khi đó để tồn tại hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì hình nón sinh ra bởi các tiếp tuyến vẽ từ A phải có góc ở đỉnh không nhỏ hơn 90°. Tức là

$$\begin{aligned} &\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \geq 45^\circ \\ \Leftrightarrow\ &\sin\widehat{MAI} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{IM}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{6}. \end{aligned}$$



Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{3} \le IA \le \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \le IA^2 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le a^2 + b^2 + 2 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le a^2 + b^2 \le 4.$$

Do a, $b \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a = 0$ thì $b \in \{\pm 1, \pm 2\}$
- Nếu $b = 0$ thì $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$
- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$

Vậy có 12 điểm A thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. B. 80. C. vô số. D. 81.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x \ge m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge \log_3 m \end{cases}.$

- **TH1:** Với $m = 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Vậy nhận giá trị $m = 1$.

- **TH2:** Với $m > 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m. \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le m < 3^4$.
Mà $m > 1$ nên ta có $m \in \{3, 4, \ldots, 80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2+2x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 9. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x+2)f'\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ x^2+2x=a, \quad a<-1 \\ x^2+2x=b, \quad -1<b<0 \\ x^2+2x=c, \quad 0<c<1 \\ x^2+2x=d, \quad d>1. \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = x^2+2x$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = 2x+2$, ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $y'=0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích V của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

Ⓐ $V = 12\sqrt{3}$. Ⓑ $V = 16\sqrt{3}$. Ⓒ $V = \dfrac{28\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $V = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

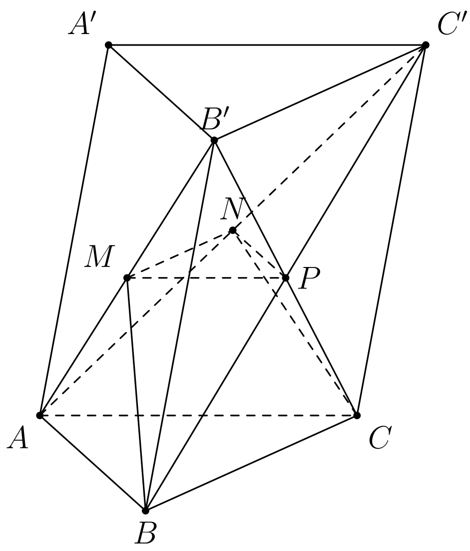
Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 8 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$.

Và ta cũng có $V_{C'.ABC} = V_{A.BC'B'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Khối đa diện cần tìm $V = V_{C.ABPN} + V_{M.ANPB}$.

Do N, P là trung điểm của AC' và BC' nên

$$S_{ANPB} = \frac{3}{4}S_{ABC'}$$



Từ đó ta suy ra

$$V_{C.ABPN} = \frac{3}{4}V_{C'.ABC} = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$V_{M.ANPB} = \frac{1}{2}V_{B'ANPB} = \frac{3}{8}V_{B'.ABC'} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}.$$

Vậy thể tích khối cần tìm

$$V = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

(A) $(3;+\infty)$. (B) $(-\infty;3]$. (C) $(-\infty;3)$. (D) $[3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -3 \\ x \neq -4. \end{cases}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} = |x+1| - x + m$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+4}\right) = |x-1| - x + m$$

$$\Leftrightarrow x - |x+1| + 4 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) = m \quad (*).$$

Đặt $\mathscr{D}_1 = (-1;+\infty)$ và $\mathscr{D}_2 = (-\infty;-4) \cup (-4;-3) \cup (-3;-2) \cup (-2;-1)$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4}\right) = m & \text{khi } x \in \mathscr{D}_1 \\ 2x + 5 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4}\right) = m & \text{khi } x \in \mathscr{D}_2. \end{array}\right.$$

Đặt $f(x) = \begin{cases} 3 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x \in \mathscr{D}_1 \\ 2x + 5 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x \in \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x \in \mathscr{D}_1 \\ 2 + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x \in \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, ta có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 3$	

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m \geq 3 \Rightarrow m \in [3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 16

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019
Môn: Toán
Năm học: 2018 – 2019
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 3y + z - 2 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P).

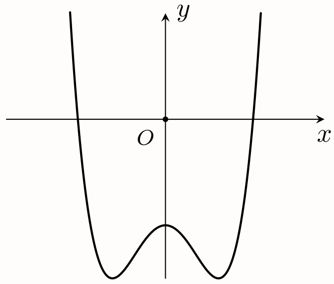
A. $\vec{n}_3 = (-3; 1; -2)$. B. $\vec{n}_2 = (2; -3; -2)$. C. $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (2; 1; -2)$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án C □

Câu 2.
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị có dạng bậc 4 và $a > 0$ nên $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

A. A_6^2. B. C_6^2. C. 2^6. D. 6^2.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là C_6^2.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Biết $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\displaystyle\int_1^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. B. -8. C. 8. D. -4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 6 = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

A $x = \dfrac{3}{2}$. B $x = 2$. C $x = \dfrac{5}{2}$. D $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là

A $\pi r^2 h$. B $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. C $2\pi r^2 h$. D $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

A $-1 - 2i$. B $1 + 2i$. C $-2 + i$. D $-1 + 2i$.

Lời giải.

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là số phức $1 + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A $\dfrac{4}{3}Bh$. B $3Bh$. C $\dfrac{1}{3}Bh$. D Bh.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích lăng trụ là Bh.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A $x = 2$. B $x = -2$. C $x = 3$. D $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua $x = 1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

(A) $(0;0;-1)$. (B) $(2;0;-1)$. (C) $(0;1;0)$. (D) $(2;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 3. (B) -4. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $u_2 = 6 \Leftrightarrow u_1 + d = 6 \Leftrightarrow 2 + d = 4 \Leftrightarrow d = 4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

(A) $2x^2 + C$. (B) $x^2 + 3x + C$. (C) $2x^2 + 3x + C$. (D) $x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$. Vec-tơ nào dưới đây là một vec-tơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u_2} = (1;-3;2)$. (B) $\vec{u_3} = (-2;1;3)$. (C) $\vec{u_1} = (-2;1;2)$. (D) $\vec{u_4} = (1;3;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u_2} = (1;-3;2)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

(A) $3\log_2 a$. (B) $\dfrac{1}{3}\log_2 a$. (C) $\dfrac{1}{3} + \log_2 a$. (D) $3 + \log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(-1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(0;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là
Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}(1)$.
Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.
Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.
Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là
Ⓐ $(2;5)$. Ⓑ $(3;5)$. Ⓒ $(5;2)$. Ⓓ $(5;3)$.

Lời giải.

Ta có $z_1+2z_2=(1+i)+2(2+i)=5+3i$.
Do đó điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là $(5;3)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 18. Hàm số $y=2^{x^2-x}$ có đạo hàm là
Ⓐ $(x^2-x)\cdot 2^{x^2-x-1}$. Ⓑ $(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}$.
Ⓒ $2^{x^2-x}\cdot \ln 2$. Ⓓ $(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y'=(x^2-x)'\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2=(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng
Ⓐ 18. Ⓑ 2. Ⓒ -18. Ⓓ -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in (-3;3)$
$f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3;3]$ là 18.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Xét dấu của đạo hàm

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

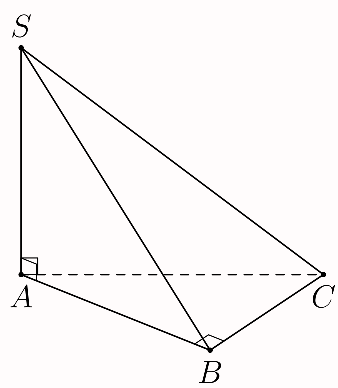
(A) 8. (B) 16. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $2\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2(a^2b^3) = \log_2 16 = 4.$
Chọn đáp án (C) □

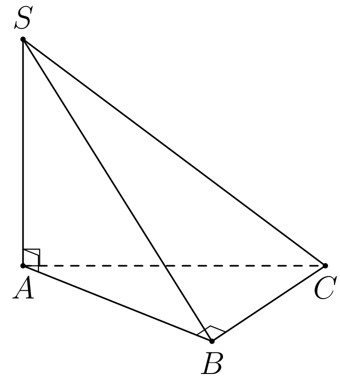
Câu 22.
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) 45°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 90°.



Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).
Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.
Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,8m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây ?

(A) $2,8m$. (B) $2,6m$. (C) $2,1m$. (D) $2,3m$.

Lời giải.

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2, thể tích là V_1, V_2.
Ta có một bể nước mới có chiều cao h, $V = V_1 + V_2$.
$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,8^2 \cdot h \Leftrightarrow r = \sqrt{1 + 1,8^2} \approx 2,1m$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

(A) $x = 3$. (B) $x = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

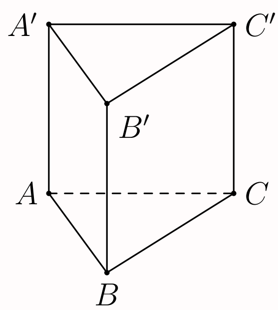
Điều kiện phương trình $x > \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
& \log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1) \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left[(x+1)\cdot 2\right] = \log_2(3x-1) \\
\Leftrightarrow\ & 2(x+1) = 3x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \text{ (Thỏa mãn điều kiện phương trình).}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 25.
Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $2\sqrt{3}a^3$. (B) $\sqrt{3}a^3$. (C) $6\sqrt{3}a^3$. (D) $3\sqrt{3}a^3$.



Lời giải.

Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích đáy là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA' = 3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = 3\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

(A) 9. (B) $\sqrt{15}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) 3.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ có bán kính là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 7} = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $2x + 2y - 3z - 17 = 0$. (B) $4x + 3y - z - 26 = 0$.

(C) $2x + 2y - 3z + 17 = 0$. (D) $2x + 2y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB là $M(4;3;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (4;4;-6)$ nên có phương trình là

$$\begin{aligned} & 4(x-4) + 4(y-3) - 6(z+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x-4) + 2(y-3) - 3(z+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 2y - 3z - 17 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || 2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

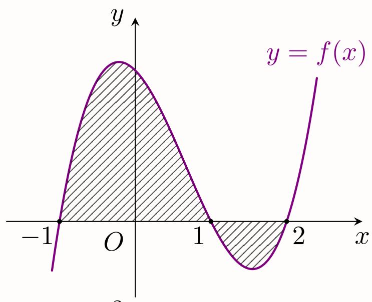
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là TCN của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(B) $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(C) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(D) $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

$S = \int\limits_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$

nên $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$

nên $\int\limits_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Vậy $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 16. (D) 26.

Lời giải.

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 5 = -1.$
Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i.$
Nên $z_1^2 + z_2^2 = (-2+i)^2 + (-2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 + 4 + 4i + i^2 = 8 + 2i^2 = 8 - 2 = 6.$
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}.$ (B) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$ (C) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}.$ (D) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}.$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD).
Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1;1;-1)$; $\overrightarrow{BD} = (0;-1;-2)$.
Mặt phẳng (BCD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right] = (3;2;-1)$.
Gọi $\vec{u}_d$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.
Vì $d \perp (BCD)$ nên $\vec{u_d} = \vec{n}_{(BCD)} = (3;2;-1)$.

Đáp án $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ có vec-tơ chỉ phương không cùng phương với vec-tơ $\vec{u_d} = (3;2;-1)$ nên loại.

Ta thấy điểm $A(0;0;2)$ không thỏa hệ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ nên loại đáp án $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho số z thỏa mãn $(2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i$. Mô-đun của z bằng

(A) 13. (B) 5. (C) $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi; \overline{z} = a - bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned}
& (2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i \\
\Leftrightarrow & (2+i)(a+bi) - 4(a - bi - i) = -8 + 19i \\
\Leftrightarrow & -2a - b + (a + 6b + 4) = -8 + 19i \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -2a - b = -8 \\ a + 6b + 4 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy $z = 3 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(3;4)$. (B) $(2;3)$. (C) $(-\infty;-3)$. (D) $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - 2x \leq -3 \\ -1 \leq 3 - 2x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

Ⓐ $2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C$.

Ⓑ $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$.

Ⓒ $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$.

Ⓓ $2\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{2x+4-3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left[\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x=2\ln|x+2|+\dfrac{3}{x+2}+C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$.

Ⓑ $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Ⓒ $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.

Ⓓ $\dfrac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\left(2\sin^2x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{1}{4}\cos 2x+4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{16}+\pi-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(5x-1)=-\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

Ⓐ Vô số.

Ⓑ 5.

Ⓒ 4.

Ⓓ 6.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{5}\\ m>0.\end{cases}$

Xét phương trình: $\log_9 x^2-\log_3(5x-1)=-\log_3 m \quad (1)$.

Cách 1.

$(1)\Leftrightarrow \log_3 x-\log_3(5x-1)=-\log_3 m\Leftrightarrow \log_3\dfrac{5x-1}{x}=\log_3 m\Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x}=m\Leftrightarrow 5-\dfrac{1}{x}=m \quad (2)$.

Xét $f(x)=5-\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$, $\forall x\in\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$ và $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{1}{x}\right)=5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x > \frac{1}{5}$.
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m$$
$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m$$
$$\Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2).$$

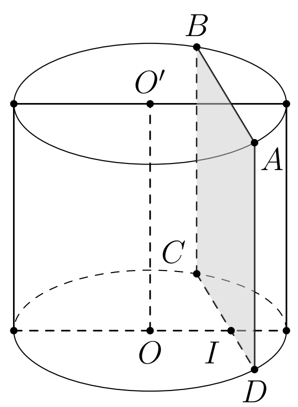
Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0 \cdot x = 1$ (vô nghiệm).
Với $m \neq 5$, (2) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5-m}$.
Xét $x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5-m} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{m}{5 \cdot (5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $6\sqrt{10}\pi$. **B** $6\sqrt{34}\pi$. **C** $3\sqrt{10}\pi$. **D** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải.

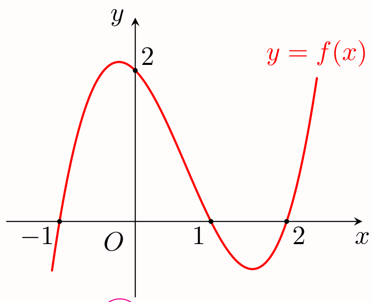
Ta có: $S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot CD$
$\Rightarrow CD = 4$
$\Rightarrow CI = 2$
$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$.
Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$.



Chọn đáp án A □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



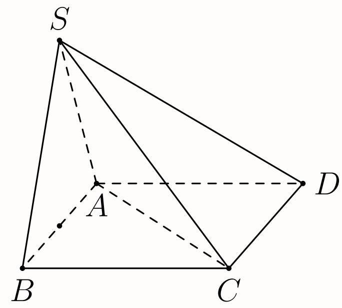
A) $m > f(0)$. B) $m > f(2) - 4$. C) $m \geq f(0)$. D) $m \geq f(2) - 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x \quad (1)$.
Đặt $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in (0; 2)$.
$\forall x \in (0; 2), g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
Do đó (1) đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq g(0) = f(0)$.
Chọn đáp án C □

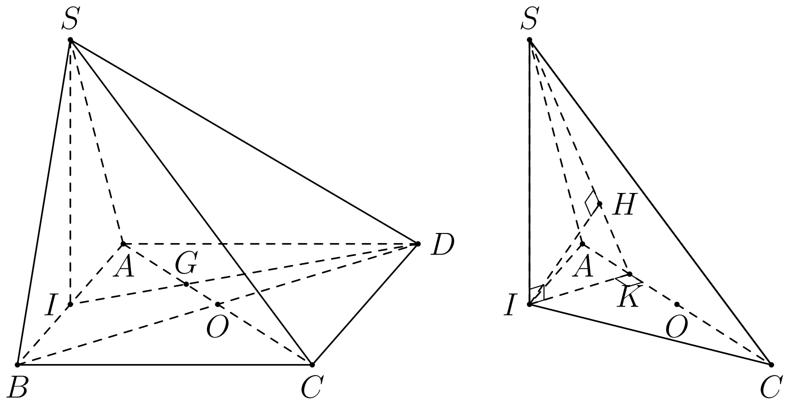
Câu 39.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



A) $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. B) $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$. C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB.
Ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{\mathrm{d}(D; (SAC))}{\mathrm{d}(I; (SAC))} = \dfrac{DG}{IG} = 2$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(D; (SAC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I; (SAC))$.
* Gọi K là trung điểm của AO suy ra $IK \parallel BO$.
* Do $BO \perp AC$ nên $IK \perp AC$.
* Ta lại có $AC \perp SI$ nên $AC \perp (SIK)$. Do đó $(SAC) \perp (SIK)$.
* Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có $IH \perp SK$.
* Do $(SIK) \cap (SAC) = SK \Rightarrow IH = \mathrm{d}(I, (SAC))$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2\cdot \mathrm{d}(I;(SAC)) = 2\cdot IH.$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có

$SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}.$

$\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{16}{2a^2} = \dfrac{28}{3a^2}.$

$\Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2\cdot IH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

(A) $\dfrac{11}{21}$. (B) $\dfrac{221}{441}$. (C) $\dfrac{10}{21}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

* Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{21}^2 = 210$.
* Gọi biến cố A: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 11 số lẻ và 10 số chẵn.

Để hai số chọn được có tổng là một số chẵn điều kiện là cả hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{11}^2 = 100$.

* Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$.

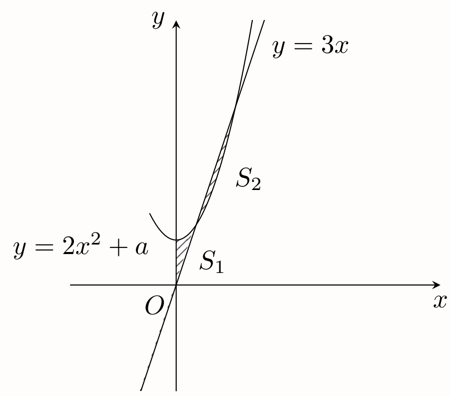
Chọn đáp án (C) □

Câu 41.

Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{9}{10}\right)$. (B) $\left(0; \dfrac{4}{5}\right)$.

(C) $\left(1; \dfrac{9}{8}\right)$. (D) $\left(\dfrac{9}{10}; 1\right)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ P = \dfrac{a}{2} > 0 \\ S = \dfrac{3}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8a}}{4}$.

Gọi $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{9-8a}}{4}$; $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có

$$S_1 = S_2.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} (2x^2 + a - 3x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_2} (2x^2 - 3x + a)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Bigg|_0^{x_2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x_2)^3 - \frac{2}{3}(x_2)^2 + a(x_2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x_2)^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2 + a = 0 \text{ (} do\ x_2 \neq 0 \text{)}.$$

Ta lại có x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên x_2 là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x_2)^2 - \frac{3}{2}x_2 + a = 0 \\ 2(x_2)^2 - 3x_2 + a = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(x_2)^2 - \frac{3}{2}x_2 - 2(x_2)^2 + 3x_2 = 0 \\ a = -2(x_2)^2 + 3x_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4}{3}(x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2 = 0 \\ a = -2(x_2)^2 + 3x_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{9}{8} \\ a = \frac{27}{32}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

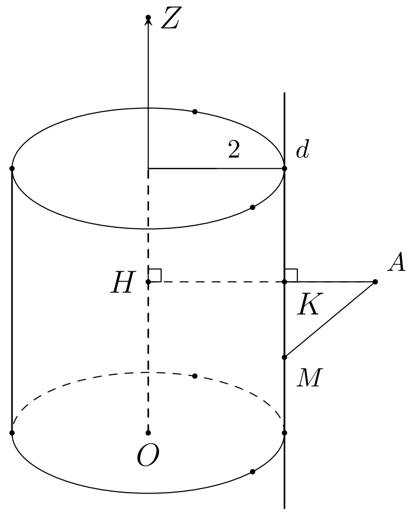
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d đi qua điểm nào dưới đây?

A $P(-2; 0; -2)$. **B** $N(0; -2; -5)$. **C** $Q(0; 2; -5)$. **D** $M(0; 4; -2)$.

Lời giải.

Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.
Có $H(0;0;-2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0;3;-2)$ trên Oz.
Có $\overrightarrow{HA} = (0;3;0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.
Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz.
M là điểm trên d.
Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).
Dễ thấy $AM \geq AK; AK = AH - \mathrm{d}(OZ;d) = 1 = \mathrm{d}(A;d)$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0;2;-2)$.

$$\Rightarrow d\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



Với $t = -3$ ta thấy d đi qua điểm Q.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi số phức $w = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & w = \frac{2+iz}{1+z}. \\ \Leftrightarrow\ & w(1+z) = 2 + iz. \\ \Leftrightarrow\ & w - 2 = z(i - w). \\ \Rightarrow\ & |w-2| = |z(i-w)|. \\ \Leftrightarrow\ & |w-2| = |z| \cdot |z(i-w)|. \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + y^2 = 2(x^2 + (1-y)^2). \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 + (y-2)^2 = 10 \quad (*). \end{aligned}$$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6) = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\displaystyle\int_0^6 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{107}{3}$. B. 34. C. 24. D. -36.

Lời giải.

Theo bài ra $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $t = 6x \Rightarrow \mathrm{d}t = 6\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 6$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 \frac{1}{6}t \cdot f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}\int_0^6 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 36.$

Tính $I = \displaystyle\int_0^6 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

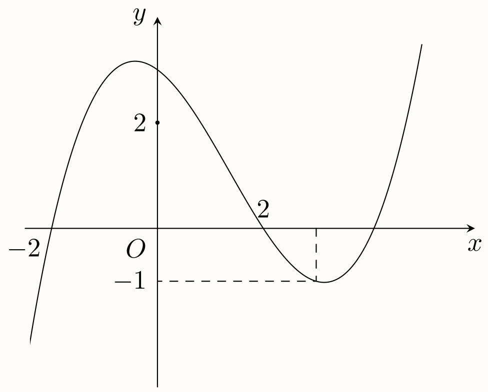
$$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^6 - \int_0^6 2xf(x)\,\mathrm{d}x = 36f(6) - 2\int_0^6 xf(x)\,\mathrm{d}x = 36 \cdot 1 - 2 \cdot 36 = -36.$$

Chọn đáp án D □

Câu 45.

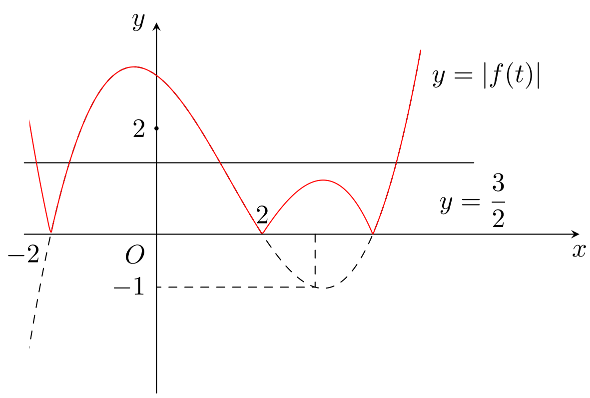
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{3}{2}$ là

A 8. B 4. C 7. D 3.



Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $|f(t)| = \dfrac{3}{2}$ (*).



Từ đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ ta suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < 0 < t_3 < 2 < t_4$.

Xét hàm $t = x^3 - 3x$. Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		0		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Với $t_1 < -2$ phương trình: $t_1 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.
- Với $-2 < t_2 < 0$ phương trình: $t_2 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- Với $0 < t_3 < 2$ phương trình: $t_3 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- Với $2 < t_4$ phương trình: $t_4 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

(A) 123. (B) 125. (C) Vô số. (D) 124.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 5^x - m \geq 0\,(m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m. \end{cases}$

$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_5 m. \end{array}\right.$

TH 1. Nếu $m = 1$ thì $x = \log_5 m = 0$ (loại) nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

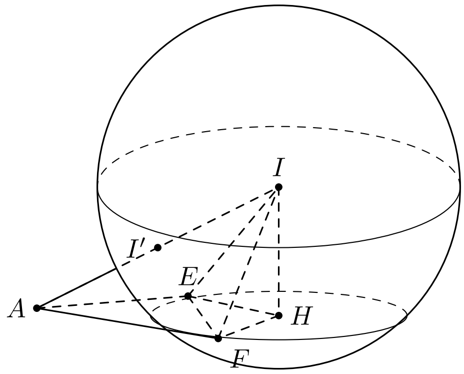
TH 2. Nếu $m > 1$ thì phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_5 m < 3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 125$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; \ldots; 124\}$. Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S)\colon x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$(a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

(A) 20. (B) 8. (C) 12. (D) 16.

Lời giải.



Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+1)^2=5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R=\sqrt{5}$

$A(a;b;0)\in(Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Gọi E,F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE\perp AF$.

Ta có: E,F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R'=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$.

Để tồn tại E,F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R-R'|\le II'\le|R+R'|$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\le\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$

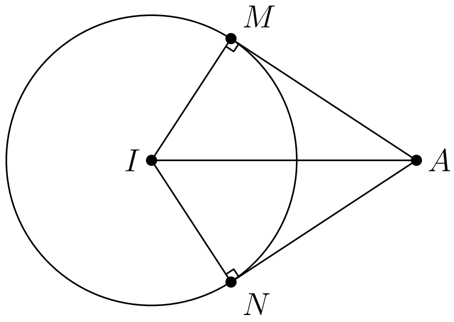
$\Leftrightarrow \sqrt{5}\le\sqrt{a^2+b^2+1}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 4(1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE=HF=\sqrt{AI^2-5}$.

Ta có $IH^2=R^2-HF^2=5-(AI^2-5)=10-AI^2\ge0\Leftrightarrow a^2+b^2+1\le10\Leftrightarrow a^2+b^2\le9(2)$

Từ (1) và (2) ta có $4\le a^2+b^2\le9$ mà $a,b,c\in\mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

Cách khác:



Mặt cầu (S) có tâm $I(0,0,-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))}=1<R\Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng(Oxy). Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A\Leftrightarrow AI\ge R(1)$.

Có $A(a,b,c)\in(Oxy)\Rightarrow A(a,b,0), IA=a^2+b^2+1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI>R$ và là một mặt phẳng nếu $AI=R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM,AN là hai tiếp tuyến sao cho A,M,I,N đồng phẳng.

Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAN}\ge90^\circ\Leftrightarrow IA\le R\sqrt{2}(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow 4\le a^2+b^2\le9$. Vì $a,b\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2=0\\b^2=9\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=9\\b^2=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=0\\b^2=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=1\\b^2=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=4.\end{cases}$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4\cdot2+3\cdot4=20$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A 9. **B** 5. **C** 7. **D** 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right.$.

Với $y = f(4x^2 - 4x)$, ta có $y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1)(1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0)(2) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1)(3) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty)(4) \end{array}\right..$$

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 - 4x$, ta có $g'(x) = 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có

- Vì $a \in (-\infty; -1)$ nên (1) vô nghiệm.
- Vì $b \in (-1; 0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- Vì $c \in (0; 1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.

- Vì $d \in (1; +\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ có 7 điểm cực trị
Cách khác
Ta có: $y' = (8x - 4) \cdot f'(4x^2 - 4x)$.
$y' = 0 \Leftrightarrow (8x - 4) \cdot f'(4x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0. \end{array}\right.$

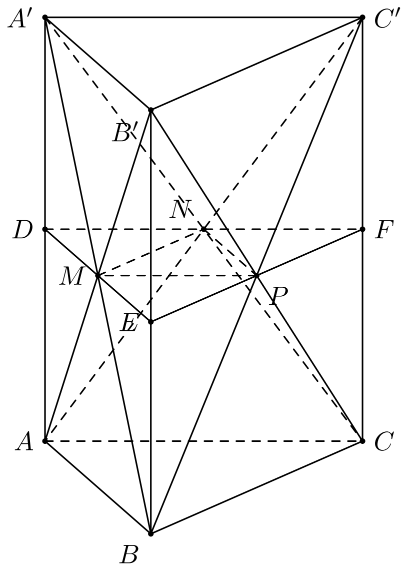
- $8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
- $f'(4x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 4x = a\,(a < -1)\,(1) \\ 4x^2 - 4x = b\,(-1 < b < 0)\,(2) \\ 4x^2 - 4x = c\,(0 < c < 1)\,(3) \\ 4x^2 - 4x = \mathrm{d}\,(d > 1)\,(4). \end{array}\right.$
- Phương trình $4x^2 - 4x = m \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - m = 0$ có nghiệm khi $\Delta' = 4 - 4m \geq 0$ hay $m \leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.
Phương trình (4) vô nghiệm.
Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $9\sqrt{3}$. (B) $10\sqrt{3}$. (C) $7\sqrt{3}$. (D) $12\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).
Dễ chứng minh được $(DEF) \mathbin{/\!/} (ABC)$ và D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF} = \dfrac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.
Ta có $V_{ABCPNM} = V_{ABC.DEF} - V_{ADMN} - V_{BMPE} - V_{CPMF}$.
Mặt khác $V_{ADMN} = V_{BMPE} = V_{CPMF} = \dfrac{1}{12} V_{ABC.DEF} \Rightarrow V_{ABCPNM} = \dfrac{3}{4} V_{ABC.DEF} = 9\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3} = |x+2|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x = -m (1)$$

Xét $f(x) = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in \mathscr{D}_2. \end{cases}$

Dễ thấy $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Chọn đáp án D □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 17

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2019
Môn: Toán
Năm học: 2018 – 2019
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

(A) C_8^2. (B) 8^2. (C) A_8^2. (D) 2^8.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là: C_8^2.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+z-1=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_4=(3;1;-1)$. (B) $\vec{n}_3=(4;3;1)$. (C) $\vec{n}_2=(4;-1;1)$. (D) $\vec{n}_1=(4;3;-1)$.

Lời giải.

$(P)\colon 4x+3y+z-1=0$.
Véc-tơ $\vec{n}_3=(4;3;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=32$ là

(A) $x=3$. (B) $x=\dfrac{17}{2}$. (C) $x=\dfrac{5}{2}$. (D) $x=2$.

Lời giải.

$2^{2x-1}=32 \Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^5 \Leftrightarrow 2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

(A) $\dfrac{4}{3}Bh$. (B) $\dfrac{1}{3}Bh$. (C) $3Bh$. (D) Bh.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trục là $V=B\cdot h$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Số phức liên hợp của số phức $3-2i$ là

(A) $-3+2i$. (B) $3+2i$. (C) $-3-2i$. (D) $-2+3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $3-2i$ là số phức $3+2i$.
Chọn đáp án (B) □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A $(0;1;0)$. **B** $(3;0;0)$. **C** $(0;0;-1)$. **D** $(3;0;-1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A 5. **B** 4. **C** -3. **D** 3.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A $2x^2 + 4x + C$. **B** $x^2 + 4x + C$. **C** $x^2 + C$. **D** $2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+4)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

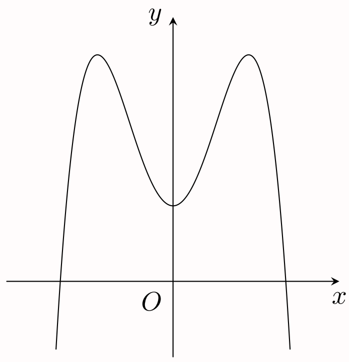
Chọn đáp án B □

Câu 9.

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

A $y = 2x^3 - 3x + 1$. **B** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. **D** $y = -2x^3 + 3x + 1$.



Lời giải.

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.

Do đó, chỉ có đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{3}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

Ⓐ $\vec{u_1}=(3;-1;5)$. Ⓑ $\vec{u_3}=(2;6;-4)$. Ⓒ $\vec{u_4}=(-2;-4;6)$. Ⓓ $\vec{u_2}=(1;-2;3)$.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ $\vec{u_2}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

Ⓐ $2\log_2 a$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}+\log_2 a$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}\log_2 a$. Ⓓ $2+\log_2 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2=2\log_2 a$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

Ⓐ $2\pi r^2h$. Ⓑ πr^2h. Ⓒ $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. Ⓓ $\dfrac{4}{3}\pi r^2h$.

Lời giải.

Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

Ⓐ $x=-2$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $x=2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15. Biết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. B. -6. C. -2. D. 2.

Lời giải.

$$\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2+(-4) = -2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(5;-1)$. B. $(-1;5)$. C. $(5;0)$. D. $(0;5)$.

Lời giải.

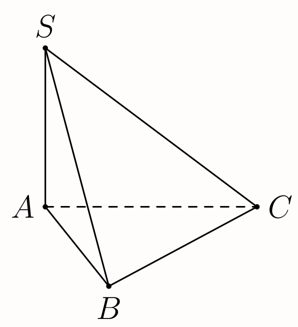
Ta có $2z_1+z_2 = 5-i$ nên điểm biểu diễn là $(5;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$. (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. B. $45°$. C. $30°$. D. $90°$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$.

Mà $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{2a^2+2a^2} = 2a = SA$ nên ΔSAC vuông cân tại A.

Vậy $\widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. B. 3. C. 15. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $R = \sqrt{1^2+(-1)^2-(-7)} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $6x-2y-2z-1=0$. B. $3x+y+z-6=0$.

C. $x+y+2z-6=0$. D. $3x-y-z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2)$ và đi qua trung điểm $I(1; 1; 2)$ của đoạn thẳng AB. Do đó, phương trình mặt phẳng đó là

$$-6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A 10. B 8. C 16. D 2.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 4 - 7 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = \left(2 + \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A 18. B -18. C -2. D 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3]. \end{array}\right.$

Ta lại có $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng -18.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A 1,6 m. B 2,5 m. C 1,8 m. D 2,1 m.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{13}{4}$.

Suy ra $r = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$ m.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		-4 ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	3

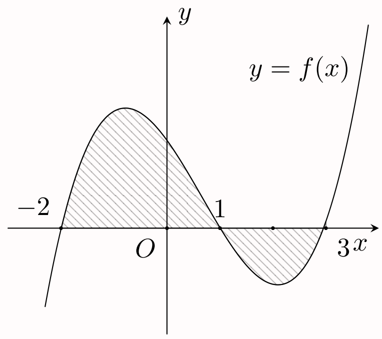
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 3$ và $y = 0$.
Ta lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.
Vậy hàm số có ba tiệm cận.
Chọn đáp án C □

Câu 24.
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

B $S = -\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

C $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

D $S = -\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_{-2}^{3} |f(x)|\,dx = \int\limits_{-2}^{1} |f(x)|\,dx + \int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,dx$.

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2;1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1;3]$ nên $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. **B** $(2x-1)\cdot 3^{x^2-x}$.
C $(x^2-x)\cdot 3^{x^2-x-1}$. **D** $(2x-1)\cdot 3^{x^2-x}\cdot \ln 3$.

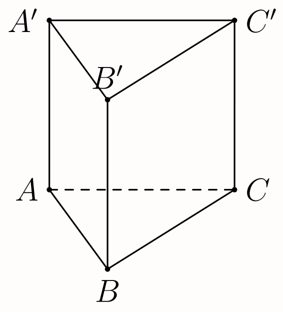
Lời giải.

Ta có: $(a^u)' = u'\cdot a^u \cdot \ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)' = (2x-1)\cdot 3^{x^2-x}\cdot \ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$ là

Ⓐ $x = 4$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(2x+1) = \log_3[3(x-1)] \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1 = 3x-3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2(ab^3) = \log_2 8 = 3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
							$y=-\frac{3}{2}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có ba nghiệm
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số đã cho có một cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2\left(\overline{z}+i\right)$. Mô-đun của z bằng

A $\sqrt{5}$. **B** 13. **C** $\sqrt{13}$. **D** 5.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$. Ta có

$$\begin{aligned} & (2-i)z+3+16i=2\left(\overline{z}+i\right) \\ \Leftrightarrow\ & (2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i) \\ \Leftrightarrow\ & 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x+y+3=2x \\ 2y-x+16=-2y+2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} y+3=0 \\ -x+4y=-14 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. Ⓑ $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. Ⓒ $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. Ⓓ $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int\left(2\sin^2 x+3\right)\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\cos 2x+3\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left(4-\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

Ta có $f(0)=4$ nên $4\cdot 0-\dfrac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$ nên $f(x)=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$ và $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=-1-2t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=1-2t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-2-3t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-3+2t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)$; $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-2)$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là:

$\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;-2)$ vậy phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-3-2t.\end{cases}$

Đường thẳng này cũng chính là $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=-1-2t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-3)$. Ⓑ $(4;5)$. Ⓒ $(3;4)$. Ⓓ $(1;3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(5-2x) = -2f'(5-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x=-3 \\ 5-2x=-1 \\ 5-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=3 \\ x=2. \end{array}\right.$$

$$f'(5-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x<-3 \\ -1<5-2x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$$

$$f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x>1 \\ -3<5-2x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

(A) $3\ln(x-2) + \dfrac{4}{x-2} + C$.

(B) $3\ln(x-2) + \dfrac{2}{x-2} + C$.

(C) $3\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2} + C$.

(D) $3\ln(x-2) - \dfrac{4}{x-2} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

Do đó

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

(A) 5.
(B) 3.
(C) Vô số.
(D) 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ m > 0. \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{x}{4x-1} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{4x-1}$, ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{(4x-1)^2} < 0$, $\forall x > \dfrac{1}{4}$.

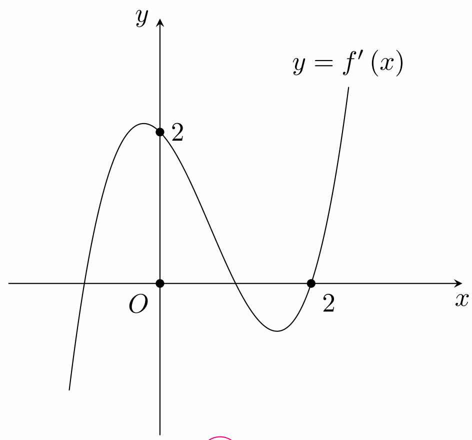
Suy ra bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	
y	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{4}$

Do đó phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m < 4$. Vậy $m \in \{1, 2, 3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



(A) $m \leq f(2) - 4$. (B) $m \leq f(0)$. (C) $m < f(0)$. (D) $m < f(2) - 4$.

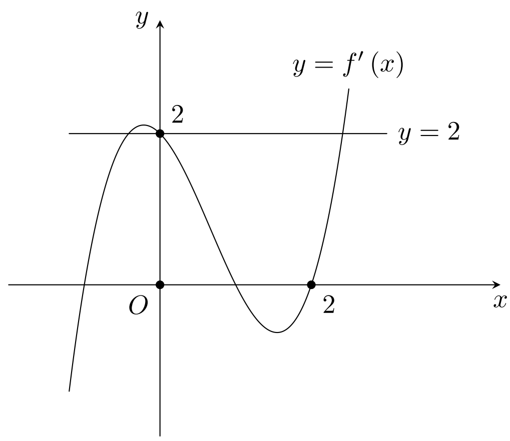
Lời giải.

Hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ vì $g'(x) = f'(x) - 2 < 0$, $\forall x \in (0; 2)$ (quan sát trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$).

Suy ra $g(2) < g(x) < g(0)$, $\forall x \in (0; 2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

$$m < g(x),\ \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 4.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

(A) $\dfrac{11}{23}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{265}{529}$. (D) $\dfrac{12}{23}$.

Lời giải.

Trong 23 số nguyên dương đầu tiên, có 12 số lẻ và 11 số chẵn.

Chọn 2 số khác nhau từ 23 số, có C_{23}^2 cách chọn nên số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{23}^2$.

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Để hai số được chọn có tổng là một số chẵn thì hai số đó phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: Chọn hai số chẵn khác nhau từ 11 số chẵn, có C_{11}^2 cách chọn.

+ Trường hợp 2: Chọn hai số lẻ khác nhau từ 12 số lẻ, có C_{12}^2 cách chọn.
Do đó $n(A) = C_{11}^2 + C_{12}^2$.
Xác suất cần tính là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{11}^2 + C_{12}^2}{C_{23}^2} = \dfrac{11}{23}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

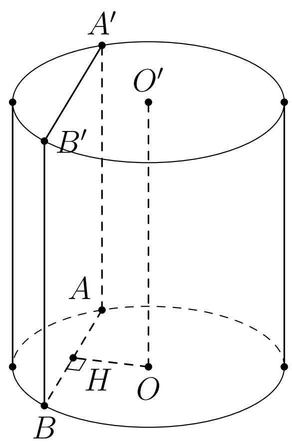
(A) $6\sqrt{3}\pi$. (B) $6\sqrt{39}\pi$. (C) $3\sqrt{39}\pi$. (D) $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của hình trụ là h.
Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng song song với trục là hình chữ nhật $ABB'A'$.
Gọi H là hình chiếu của O trên AB thì OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(ABB'A')$ nên $OH = 1$.
Diện tích thiết diện là: $S_{td} = AB \cdot AA'$ trong đó $AA' = h = 3\sqrt{3}$ nên $AB = \dfrac{S_{td}}{AA'} = \dfrac{18}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.
Do tam giác OAB cân nên
$OH^2 = OB^2 - HB^2 = OB^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow OB^2 = OH^2 + \dfrac{AB^2}{4} = 1 + \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 4$

$\Rightarrow OB = 2$

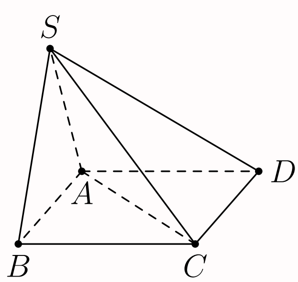


Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\pi.$$

Chọn đáp án (D) □

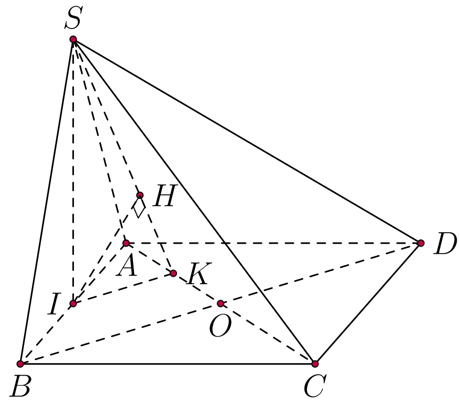
Câu 40.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh hoạ như hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của AB.
Kẻ $IK \parallel BD, K \in AC$; kẻ $IH \perp SK, H \in SK$ (1).
Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$.
Lại có $IK \perp AC$, suy ra $AC \perp (SIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (SAC)$.
Suy ra IH là khoảng cách từ I đến đến mặt phẳng (SAC).
Ta có $IK = \dfrac{1}{2}BO = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, tam giác SIK vuông tại I nên



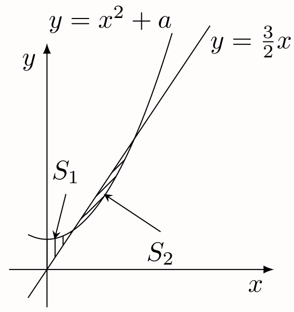
$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}.$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng hai lần khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $d = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41.
Cho đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{16}\right)$. B $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{9}{20}\right)$. C $\left(\dfrac{9}{20}; \dfrac{1}{2}\right)$. D $\left(0; \dfrac{2}{5}\right)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$.

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \dfrac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$.

Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi

$$\int_0^{x_1} \left|x^2 + a - \frac{3}{2}x\right| \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left|x^2 + a - \frac{3}{2}x\right| \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Ta có

$$\int_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x_2^2-\frac{9}{4}x_2+3a\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_2-a-\frac{9}{4}x_2+3a=0 \Leftrightarrow -3x_2+8a=0$$

$$\Leftrightarrow 8a=3\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4} \Leftrightarrow 3\sqrt{9-16a}=32a-9 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{32}<a<\frac{9}{16}\\ 1024a^2-432a=0\end{cases}$$

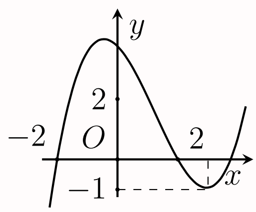
$$\Leftrightarrow a=\frac{27}{64}\in\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right).$$

Có thể giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $a=0{,}421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3-3x)|=\frac{2}{3}$ là



(A) 6. (B) 10. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Đặt $t=g(x)=x^3-3x$ (1).
Ta có $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x\pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $t\in(-2;2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t\in\{-2;2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3-3x)|=\frac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=\frac{2}{3}\\ f(t)=-\frac{2}{3}.\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có:

- Phương trình $f(t)=\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3$. Suy ra có 7 nghiệm của phương trình (2).

- Phương trình $f(t) = -\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6$. Suy ra có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) 52. (B) $2\sqrt{13}$. (C) $2\sqrt{11}$. (D) 44.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ với x, y là các số thực.
Ta có $w = \dfrac{5+iz}{1+z} \Leftrightarrow z = \dfrac{w-5}{i-w}$.
Lại có

$$\begin{aligned} & |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w-5}{i-w}\right| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & |w-5| = \sqrt{2}|w-i| \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y-1)^2] \\ \Leftrightarrow\ & (x+5)^2 + (y-4)^2 = 52. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(3x)\,dx = 1$, khi đó $\displaystyle\int_0^3 x^2 f'(x)\,dx$ bằng

(A) 3. (B) 7. (C) -9. (D) $\dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{3}dt$.

Suy ra $1 = \displaystyle\int_0^1 xf(3x)\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t)\,dt = 9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ dv = t\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t)\,dt \\ v = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int_0^3 tf(t)\,dt = \frac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2}f'(t)\,dt = \frac{9}{2}f(3) - \frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\,dt$.

$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 t^2 f'(t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)\,dt = -9$.

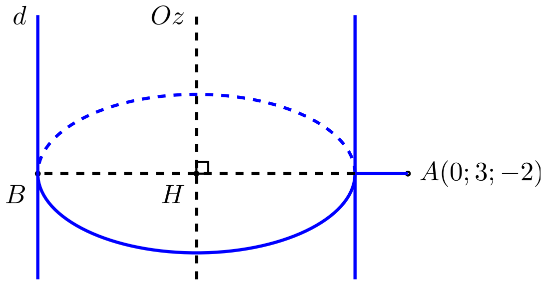
Vậy $\displaystyle\int_0^3 x^2 f'(x)\,dx = -9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $Q(-2;0;-3)$. (B) $M(0;8;-5)$. (C) $N(0;2;-5)$. (D) $P(0;-2;-5)$.

Lời giải.



Do đường thẳng $d \parallel Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R = 2$.
Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz, suy ra tọa độ $H(0;0;-2)$.
Do đó $d(A, Oz) = AH = 3$.
Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Suy ra $B(0;-2;-2)$.
Vậy $\mathrm{d}(A, d)_{\max} = 5 \Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz.
Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -2 + t. \end{cases}$
Kết luận: d đi qua điểm $P(0;-2;-5)$.

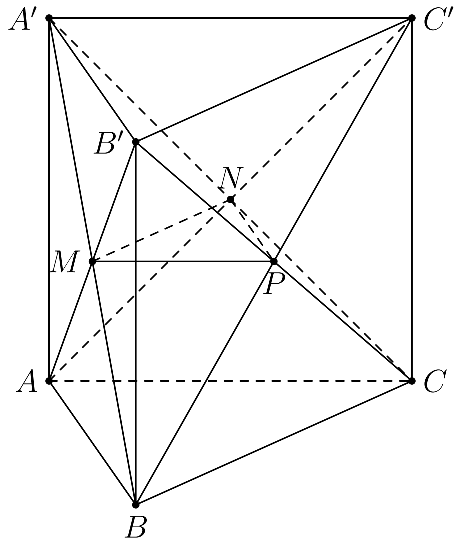
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$. (B) $8\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = 4\cdot\frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1.
Ta có: $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC}$.
Dễ thấy $V_{A'ABC} = \dfrac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB} = \dfrac{3}{4}V_{A'ABC}$.
Suy ra $V_{AMNCB} = \dfrac{1}{4}V$.
$V_{BA'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$ và $V_{BMNP} = \dfrac{1}{8}V_{BA'B'C'}$.
Suy ra $V_{BMNP} = \dfrac{1}{24}V$.
$V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'} = \dfrac{1}{3}V$ và $V_{BNPC} = \dfrac{1}{4}V_{BA'B'C}$.
Suy ra $V_{BNPC} = \dfrac{1}{12}V$.
Vậy $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC} = \dfrac{3}{8}V = 6\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-3;+\infty)$. B. $(-\infty;-3)$. C. $[-3;+\infty)$. D. $(-\infty;-3]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1).$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} - 1, & x > -1 \\ \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & x < -1. \end{cases}$$

Ta có $F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}, & x \in (-1;+\infty) \setminus \{0;1\} \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + 2, & x \in (-\infty;-1) \setminus \{-2\}. \end{cases}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 3$.
$\lim\limits_{x\to-2^+} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} F(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} F(x) = +\infty$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \le 3 \Leftrightarrow m \ge -3$.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. B. 62. C. 63. D. 64.

Lời giải.

Ta có điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \ge \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).
Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{4^x - m} = 0 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 & (2) \\ 4^x = m & (3). \end{array}\right.$$

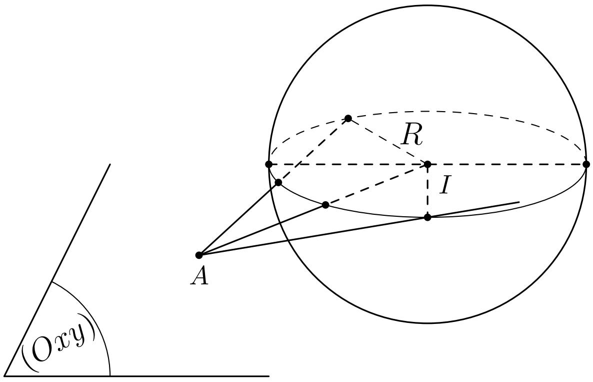
Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x = \log_4 m$.
Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:
TH 1: $m = 1$ thì $\log_4 m = 0$. Khi đó điều kiện (*) trở thành $x > 0$.
Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).
Do đó nhận giá trị $m = 1$.
TH 2: $m \ge 2$, khi đó điều kiện (*) trở thành $x \ge \log_4 m$ (vì $\log_4 m \ge \dfrac{1}{2}$).
Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} \le \log_4 m < 3$
$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \le m < 4^3$
Suy ra $m \in \{3; 4; 5; \ldots; 63\}$.
Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63 - 3 + 1 + 1 = 62$ giá trị nguyên dương m.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12. B. 16. C. 20. D. 8.

Lời giải.



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.
Vì $A\in(Oxy)$ nên $c=0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA>R$) tạo nên một mặt nón tâm A, để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA\leq R\sqrt{2}$.
Vậy $R\leq IA\leq R\sqrt{2}\Leftrightarrow 5\leq a^2+b^2+1\leq 10\Leftrightarrow 4\leq a^2+b^2\leq 9$
Ta có các bộ số thỏa mãn $(0;\pm2);(0;\pm3);(\pm1;\pm2);(\pm2;\pm2);(\pm2;\pm1);(\pm2;0);(\pm3;0)$, 20 bộ số.
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(4x^2+4x)$ là

A 5. B 9. C 7. D 3.

Lời giải.

Có $(f(4x^2+4x))'=(8x+4)f'(4x^2+4x)$, $(f(4x^2+4x))'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ f'(4x^2+4x)=0.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$ a_1	-3	a_2 $\nearrow$	2	$\searrow$ a_3	-1	a_4 $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có $f'(4x^2+4x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)\\4x^2+4x=a_2\in(-1;0)\\4x^2+4x=a_3\in(0;1)\\4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty)\end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- Phương trình $4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.
- Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (0; 1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (1; +\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 18

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019–2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

(A) 14. (B) 48. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Cách 1: Tổng số học sinh của nhóm là: $6+8=14$.
Chọn ra một học sinh, ta có: $C_{14}^1=14$(cách).

Cách 2: Để chọn một học sinh, ta có:
6 cách chọn một học sinh nam và 8 cách chọn một học sinh nữ.
Vậy có: $6+8=14$ (cách).

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công bội của cấp số đã cho bằng

(A) 3. (B) -4. (C) 4. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Trong một cấp số nhân, ta có: $u_2=u_1.q \Rightarrow q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{6}{2}=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

(A) $4\pi rl$. (B) $2\pi rl$. (C) πrl. (D) $\dfrac{1}{3}\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r là: $S_{xq}=\pi rl$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(-1;\,0)$. (C) $(-1\,;\,1)$. (D) $(0\,;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng$(-\infty\,;\,-1)$và$(0\,;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

(A) 216. (B) 18. (C) 36. (D) 72.

Lời giải.

Ta có thể tích khối lập phương đã cho bằng: $6^3=216$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là

(A) $x=3$. (B) $x=5$. (C) $x=\dfrac{9}{2}$. (D) $x=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

$$\log_3(2x-1)=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\2x-1=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\x=5\quad(TM)\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Nếu $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ và $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ thì $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-2+1=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-4		$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) -4.

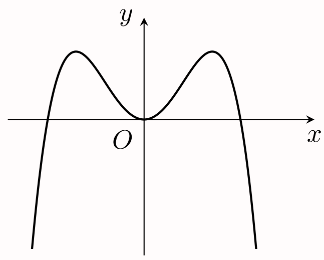
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4.

Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 9.
Đồ thị của hàm số nào sau đây có dạng như hình cong trong hình bên?



(A) $y = -x^4 + 2x^2$.
(B) $y = x^4 - 2x^2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2$.

Lời giải.

Dựa vào hình dạng của đồ thị đã cho trong hình vẽ, ta thấy đó là hình dạng đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ với hệ số $a < 0$.
Trong bốn hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

(A) $2 + \log_2 a$.
(B) $\frac{1}{2} + \log_2 a$.
(C) $2\log_2 a$.
(D) $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải.

Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log_2(a^2) = 2\log_2 a$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

(A) $\sin x + 3x^2 + C$.
(B) $-\sin x + 3x^2 + C$.
(C) $\sin x + 6x^2 + C$.
(D) $-\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\cos x + 6x)\ \mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Môđun của số phức $1 + 2i$ bằng

(A) 5.
(B) $\sqrt{3}$.
(C) $\sqrt{5}$.
(D) 3.

Lời giải.

Ta có: $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
Vậy môđun của số phức $1 + 2i$ bằng$\sqrt{5}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2;\,-2;\,1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

(A) $(2;\,0;\,1)$.
(B) $(2;\,-2;\,0)$.
(C) $(0;\,-2;\,1)$.
(D) $(0;\,0;\,1)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_o;\,y_o;\,z_o)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_o;\,y_o;\,0)$.
Do đóhình chiếu của điểm $M(2;\,-2;\,1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2;\,-2;\,0)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A $(-1;-2;-3)$. B $(1;2;3)$. C $(-1;2;-3)$. D $(1;-2;3)$.

Lời giải.

Từ phương trình của mặt cầu (S), suy ra tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;-2;3)$.

Chọn đáp án D

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A $\overrightarrow{n_2}=(3\,;\,2\,;\,4)$. B $\overrightarrow{n_3}=(2\,;\,-4\,;\,1)$. C $\overrightarrow{n_1}=(3\,;\,-4\,;\,1)$. D $\overrightarrow{n_4}=(3\,;\,2\,;\,-4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha):\ 3x+2y-4z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_4}(3\,;\,2\,;\,-4)$.

Chọn đáp án D

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

A $P(-1;2;1)$. B $Q(1;-2;-1)$. C $N(-1;3;2)$. D $M(1;2;1)$.

Lời giải.

Cách 1 : Vì phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $P(x_o;y_o;z_0)$và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)$ là $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z-z_o}{c}$nên dễ dàng thấy điểm $P(-1;2;1)$thuộc đường thẳng d .

Cách 2 : Thay tọa độ 4 điểm M,N,P,Qvào phương trình đường thẳng d ta thấy điểm Pthỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A $45°$. B $30°$. C $60°$. D $90°$.

Lời giải.

Ta có: $SA\perp(ABCD)$nên AClà hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$là góc $\widehat{SCA}$.

Xét ΔSCA vuông tại A: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SCA}=30°$.

Chọn đáp án B

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 0. B 2. C 1. D 3.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ta thấy $f'(x)$đổi dấu 2lần tại $x=-1$và $x=1$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án B

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A) 1. B) 37. C) 33. D) 12.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

$f'(x) = -4x^3 + 24x = 4x(-x^2+6)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1;2) \\ x = -\sqrt{6} \notin (-1;2) \\ x = \sqrt{6} \notin (-1;2) \end{array}\right.$$

$f(-1) = 12$; $f(2) = 33$; $f(0) = 1$.

Vậy $\underset{[-1;2]}{\text{Max}} f(x) = 33$.

Chọn đáp án C

Câu 20. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) $a = b^2$. B) $a^3 = b$. C) $a = b$. D) $a^2 = b$.

Lời giải.

$\log_2 a = \log_8(ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \log_{2^3}(ab)$

$\Leftrightarrow \log_2 a = \dfrac{1}{3}\log_2(ab) \Leftrightarrow 3\log_2 a = \log_2(ab)$

$\Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2(ab)$

$\Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b$.

Chọn đáp án D

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

A) $[-2;4]$. B) $[-4;2]$.

C) $(-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$. D) $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải.

$5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-2;4]$.

Chọn đáp án A

Câu 22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A) 18π. B) 36π. C) 54π. D) 27π.

Lời giải.

Theo giả thiết mặt phẳng đi qua trục OO' cắt hình trụ theo thiết diện một hình vuông.

Do đó: $AD = AB = 2R = 6$.

Hình trụ đã cho có $R = 3$, chiều cao $h = 6$, do đó có diện tích xung quanh là:

$S_{xq} = 2\pi.R.h = 36\pi$ (đvdt).

Chọn đáp án B

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1				$+\infty$
	$-\infty$				0		

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-2=0$là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Phương trình $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $3f(x)-2=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

Ⓐ $x+3\ln(x-1)+C$. Ⓑ $x-3\ln(x-1)+C$.

Ⓒ $x-\dfrac{3}{(x-1)^2}+C$. Ⓓ $x-\dfrac{3}{(x-1)^2}+C$.

Lời giải.

Ta có:

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x=\int\frac{x+2}{x-1}\ \mathrm{d}x=\int\frac{x-1+3}{x-1}\ \mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\ \mathrm{d}x$

$=x+3\ln|x-1|+C\xrightarrow{x\in(1;+\infty)}F(x)=x+3\ln(x-1)+C$.

Vậy $F(x)=x+3\ln(x-1)+C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám Thống kê năm 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$ dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

Ⓐ 109.256.100. Ⓑ 108.374.700. Ⓒ 107.500.500. Ⓓ 108.311.100.

Lời giải.

Ta có: $S=Ae^{nr}=93671600.e^{(2035-2017).\frac{0,81}{100}}=108.374.741,3\approx108.374.700$.

Vậy cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm 2035 dân số nước ta khoảng 108.374.700 người.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$, $AA' = 4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $2\sqrt{3}a^3$. (B) $4\sqrt{3}a^3$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác ta có:

$\cos\widehat{BAD} = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB.AD} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^o$

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = 4a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a^3.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$

Trên D ta có, $y = \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{5x+1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{5x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5x+1}{x+1} = 5 \Rightarrow y = 5$là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.

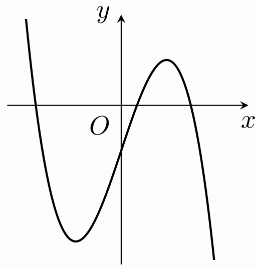
Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ $(a,\ d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a > 0;\ d > 0$.

(B) $a < 0;\ d > 0$.

(C) $a > 0;\ d < 0$.

(D) $a < 0;\ d < 0$.



Lời giải.

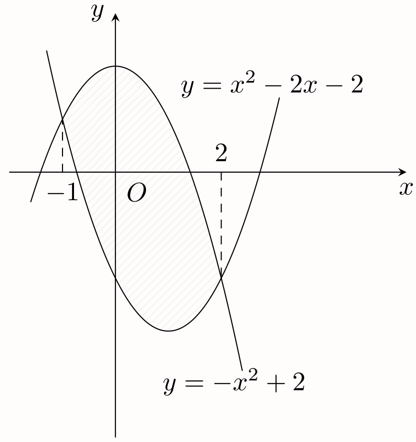
Do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (ax^3 + 3x + d) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Vì giao điểm của ĐTHS $y = ax^3 + 3x + d$ với trục tung $Oy : x = 0$ nằm phía dưới trục hoành $Ox : y = 0$ nên $d < 0$.

Suy ra: $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong bình bên bằng



(A) $\int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.
(B) $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.
(C) $\int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.
(D) $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy: Ứng với phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên thì đồ thị hai hàm số $y = -x^2 + 2$ (C_1) và đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ (C_2) cắt nhau tại hai điểm có hoành độ là $x = -1$ và $x = 2$, đồng thời đồ thị (C_1) nằm trên đồ thị (C_2) nên ta được phần diện tích hình phẳng gạch chéo là:

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left[-x^2 + 2 - \left(x^2 - 2x - 2\right)\right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z}_2$ bằng
(A) -2. (B) $2i$. (C) 2. (D) $-2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + \overline{z}_2 = (-3 + i) + (1 + i) = -2 + 2i$
Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z}_2$ bằng 2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?
(A) $P(-3; 4)$. (B) $Q(5; 4)$. (C) $N(4; -3)$. (D) $M(4; 5)$.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3; 4)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng
(A) 25. (B) 23. (C) 27. (D) 29.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8)$.
Suy ra $\vec{a}.\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 1.(-1) + 0.2 + 3.8 = 23$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I\,(0\,;\,0\,;\,-3)$ và đi qua điểm $M\,(4\,;\,0\,;\,0)$. Phương trình của (S) là

(A) $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. (B) $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

(C) $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. (D) $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải.

Ta có: $IM=5$.
Mặt cầu (S) có tâm $I\,(0\,;\,0\,;\,-3)$ đi qua điểm $M\,(4\,;\,0\,;\,0)$ có bán kính là $R=IM=5$
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

(A) $2x+2y+z+3=0$. (B) $x-2y-z=0$.

(C) $2x+2y+z-3=0$. (D) $x-2y-z-2=0$.

Lời giải.

Gọi (α)là mặt phẳng cần tìm.
Vì (α) vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$nên (α)nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}\,(2;2;1)$của Δlà véc tơ pháp tuyến.
Lại có, (α)đi qua $M\,(1;1-1)$.
Do đó, phương trình (α)có dạng:
$2\,(x-1)+2\,(y-1)+(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-3=0$
Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M\,(2;3;-1)$ và $N\,(4;5;3)$?

(A) $\vec{u_4}\,(1;1;1)$. (B) $\vec{u_3}\,(1;1;2)$. (C) $\vec{u_1}\,(3;4;1)$. (D) $\vec{u_2}\,(3;4;2)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MN}\,(2;2;4)=2\,(1;1;2)\Rightarrow \vec{u_3}\,(1;1;2)$là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M\,(2;3;-1)$ và $N\,(4;5;3)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

(A) $\dfrac{41}{81}$. (B) $\dfrac{4}{9}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{16}{81}$.

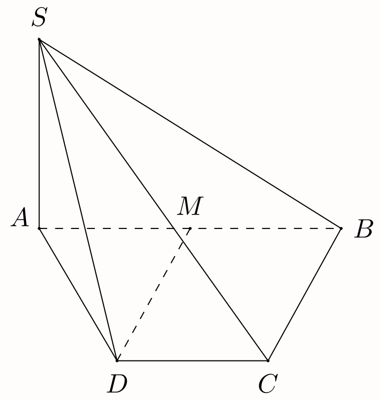
Lời giải.

Không gian mẫu: $n\,(\Omega)=A_{10}^3-A_9^2=648$
Gọi A là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số là chẵn."; $\overline{abc}$ là số cần thành lập thỏa tổng ba chữ số là số chẵn.
TH1: Ba chữ số chẵn chọn từ $\{0;2;4;6;8\}$: $A_5^3-A_4^2=48$ (số).
TH2: Chọn chữ số 0 và 2 chữ số lẻ từ $\{1;3;5;7;9\}$
Xếp số 0: 2 cách
Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách
Suy ra có 40 số.

TH3: Chọn 1 chữ số chẵn từ $\{2; 4; 6; 8\}$ và 2 chữ số lẻ từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$
Chọn một chữ số chẵn: 4 cách
Xếp chữ số chẵn vừa chọn: 3 cách
Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách
Suy ra có 240 số.
Vậy $n(A) = 328$
Suy ra xác suất: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{328}{648} = \dfrac{41}{81}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



(A) $\dfrac{3a}{4}$.

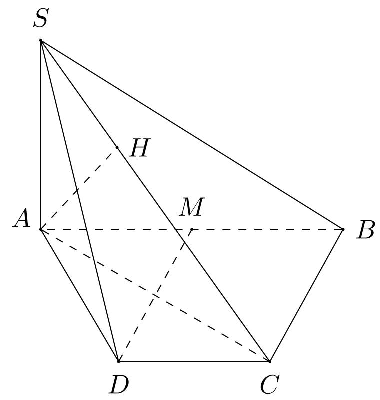
(B) $\dfrac{3a}{2}$.

(C) $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$.

(D) $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải.

Ta có $DC//MB$ và $DC = BC = MB = a$ suy ra tứ giác $DMBC$ là hình thoi$\Rightarrow DM//BC$, lại có $BC \subset (SBC)$ và $DM \not\subset (SBC)$, do đó: $DM//(SBC)$
$\Rightarrow d(SB, DM) = d(M, (SBC))$.
Vì M là trung điểm của AB nên
$d(M, (SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A, (SBC))$.
Từ giả thiết ta được $\widehat{ADC} = 120^\circ$.
Áp dụng định lí Côsin vào tam giác ADC ta được:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos\widehat{ADC}$
$\Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.cos120^\circ = 3a^2$
$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.



Ta nhận thấy $AB^2 = AC^2 + BC^2$ do đó ΔACB vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$ (1) mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).
Từ (1)và (2) ta được: $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$.
Trong tam giác SAC dựng AH vuông góc với AC, mà $AC = (SAC) \cap (SBC)$ do đó: $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$. Tam giác SAC vuông tại A và có AH là đường cao nên $AH = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \dfrac{3a}{2}$.
Vậy $d(M, (SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A, (SBC)) = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x>0$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_3^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 7. Ⓑ $\dfrac{197}{6}$. Ⓒ $\dfrac{29}{2}$. Ⓓ $\dfrac{181}{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=x+2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(3)=3\Rightarrow C=-4$

Vậy $\displaystyle\int\limits_3^8 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\frac{197}{6}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ x\neq m\quad\forall x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-2;2)\\ m\in(-\infty;0]\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-2;0]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m là -1 và 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. Ⓑ 32π. Ⓒ $32\sqrt{5}\pi$. Ⓓ 96π.

Lời giải.

ΔABC đều, đặt $AB=BC=CA=x$.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow x=6$.

$AI=\dfrac{6.\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ (ΔABC đều).

ΔAOI vuông tại O: $OI=\sqrt{AI^2-AO^2}=\sqrt{7}$.

ΔOIB vuông tại I: $R=OB=\sqrt{OI^2+BI^2}=4$.

Vậy thể tích khối nón: $V=\dfrac{1}{3}.\pi R^2.h=\dfrac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\dfrac{32\pi\sqrt{5}}{3}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓓ $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases}$

Khi đó ta có: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{9^t}{6^t} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t$ và $2.9^t + 6^t = 4^t$ (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = -1 \quad (loai) \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{1}{2} \quad (t/man) \end{array}\right.$

Vậy $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ -16. Ⓑ 16. Ⓒ -12. Ⓓ -2.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Ta xét các trường hợp sau:

+) $m + 18 \le 0 \Leftrightarrow m \le -18$. Khi đó $m - 2 < m < m + 18 \le 0$, nên

$\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = |m-2| = 2 - m$.

Vậy $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow 2 - m = 16 \Leftrightarrow m = -14$ (loại).

+) $m < 0 < m + 18 \Leftrightarrow -18 < m < 0$. Khi đó $m - 2 < m < 0 < m + 18$,

nên $\begin{cases} \underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, -m, m+18\} \\ = \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, m+18\} = \begin{cases} 2-m, -18 < m < -8 \\ m+18, 0 > m \ge -8 \end{cases} \end{cases}$

Vậy $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m = 16, -18 < m < -8 \\ m + 18 = 16, -8 \le m < 0 \end{cases}$ .Như vậy $\left[\begin{array}{l} m = -14 \\ m = -2 \end{array}\right.$

+) $m = 0$: $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 18 \neq 16$ (loại).

+) $m - 2 < 0 < m < m + 18$

Ta có $\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, m, m+18\} = m + 18$,

Do đó$\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow m + 18 = 16 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

+) $0 \le m - 2 < m < m + 18$.

Ta có $\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \underset{[0;3]}{Max}\ \{m-2, m, m+18\} = m + 18$.

Do đó $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow m + 18 = 16 \Leftrightarrow m = -2$ (loại).

Suy ra $S = \{-14; -2\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-14 + (-2) = -16$.

Chọn đáp án (A)

Câu 43. Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;\,2]$ là

(A) $(1;\,2)$. (B) $[1;\,2]$. (C) $[1;\,2)$. (D) $[2;\,+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 - m\log_2 x - 2\log_2 x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 1 - m\log_2 x + m = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) - m(\log_2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1 - m) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = m-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2 \in [1;\,2]\\ x = 2^{m-1}\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;\,2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases}1 \le 2^{m-1} \le 2\\ 2^{m-1} \ne 2\end{cases} \Leftrightarrow 1 \le 2^{m-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \le m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \le m < 2$

Hay $m \in [1;\,2)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

(A) $-\sin 2x + \cos 2x + C$. (B) $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

(C) $-2\sin 2x - \cos 2x + C$. (D) $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải.

Vì $cos2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$ nên

$f(x)e^x = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Ta có $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x = \int e^x d(f(x)) = f(x)e^x - \int f(x)d(e^x) = f(x)e^x - \int f(x)e^x\,\mathrm{d}x$.

Mà $f(x)e^x = -2\sin 2x$do đó $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + \int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x - cos2x + C$.

Chọn đáp án (C)

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi\,;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 6. (C) 3. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $2f(\sin x)+3=0 \Leftrightarrow f(\sin x)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

Ta có: $f(x)=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=a & \text{với } a<-1 \\ x=b & \text{với } -1<b<0 \\ x=c & \text{với } 0<c<1 \\ x=d & \text{với } d>1 \end{array}\right.$

Do đó: $f(\sin x)=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x=a & \text{với } a<-1 \\ \sin x=b & \text{với } -1<b<0 \\ \sin x=c & \text{với } 0<c<1 \\ \sin x=d & \text{với } d>1 \end{array}\right.$.

+) Các trường hợp: $\sin x=a$, $\sin x=d$ vô nghiệm do $a<-1, d>1$.

+) Do $-1<b<0$ nên tồn tại góc α với $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ sao cho $\sin\alpha=b$.

Khi đó: $\sin x=b \Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+m2\pi \end{array}\right. (k,m\in\mathbb{Z})$.

Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x\in[-\pi\,;2\pi]$ nên $-\pi\le\alpha+k2\pi\le 2\pi$ hoặc $-\pi\le\pi-\alpha+m2\pi\le 2\pi$, với $k,m\in\mathbb{Z}$ và $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$. Suy ra $k=0, k=1$; $m=-1, m=0$.

Do đó, $\sin x=b$ có 4 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi\,;2\pi]$.

+) Tương tự, do $0<c<1$ nên tồn tại góc β với $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ sao cho $\sin\beta=x_3$.

Khi đó: $\sin x=c \Leftrightarrow \sin x=\sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\beta+n2\pi \\ x=\pi-\beta+l2\pi \end{array}\right. (n,l\in\mathbb{Z})$.

Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x\in[-\pi\,;2\pi]$ nên $-\pi\le\beta+n2\pi\le 2\pi$ hoặc $-\pi\le\pi-\beta+l2\pi\le 2\pi$ với $n,l\in\mathbb{Z}$ và $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Suy ra $n=0$; $l=0$.

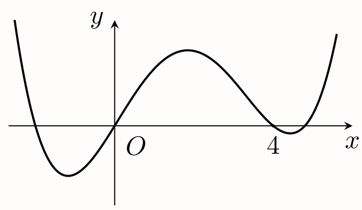
Do đó, $\sin x=c$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi\,;2\pi]$.

Vậy, phương trình $2f(\sin x)+3=0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi\,;2\pi]$.

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên . Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A 5.

B 3.

C 7.

D 11.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;\,0) \\ x=b\in(0;\,4) \\ x=c\in(4\,;\,+\infty) \end{array}\right.$

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=-2 & \\ x^3+3x^2=a\in(-\infty;\,0) & (1) \\ x^3+3x^2=b\in(0;\,4) & (2) \\ x^3+3x^2=c\in(4;\,+\infty) & (3) \end{array}\right..$$

Xét hàm số : $h(x)=x^3+3x^2$

Ta có $h'(x)=3x^2+6x, h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có Phương trình (1)có một nghiệm .
Phương trình (2)có ba nghiệm phân biệt .
Phương trình (3)có một nghiệm .
Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A 2019. B 6. C 2020. D 4.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow [1+\log_3(x+1)]+x=2y+3^{2y}$
$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y} \Leftrightarrow \log_3(x+1)+3^{\log_3(x+1)}=2y+3^{2y}$ (*).
Xét hàm $f(t)=t+3^t$.
Ta có $f'(t)=1+3^t\ln 3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Khi đó,
(*) $\Leftrightarrow f[\log_3(x+1)]=f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y$ (**).
Vì $0\le x\le 2020$ nên $1\le 9^y\le 2021 \Rightarrow 0\le y\le \log_9 2021\approx 3,464$.
Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0,1,2,3\}$.
Với $y=0\Rightarrow x=0$; $y=1\Rightarrow x=8$; $y=2\Rightarrow x=80$; $y=3\Rightarrow x=728$.
Vậy có 4 cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ bằng

A $-\dfrac{17}{20}$. B $-\dfrac{13}{4}$. C $\dfrac{17}{4}$. D -1.

Lời giải.

+Ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$
$\Leftrightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} x f\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(-x^{11} + x^7 - 2x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\ \mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\ \mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{24}\,(1)$$

Ta có $x^2 f\left(x^3\right) + x f\left(1-x^2\right) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x f\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(-x^{11} + x^7 - 2x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{1} f\left(x^3\right)\ \mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} f\left(1-x^2\right)\ \mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}$$

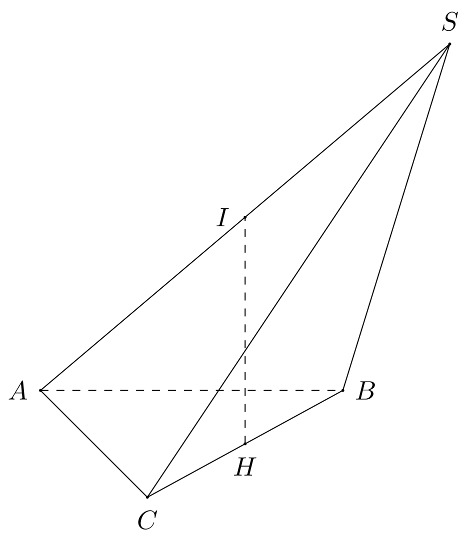
Từ (1) $\Rightarrow \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-13}{4}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABC$có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60°. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) a^3. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3}{2}$. (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.



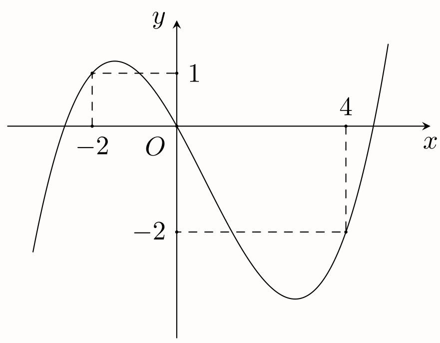
- Gọi I và H lần lượt là trung điểm của SA và BC. Theo giả thiết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ nên điểm I cách đều 4 điểm S, A, B, C, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- Mặt khác, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra IH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $IH \perp (ABC)$.
- Ngoài ra, tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$; $AB = a$
$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Đặt $IH = x$, $x > 0$.
- Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho
$H(0;\,0;\,0)$, $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0;\,0\right)$, $B\left(0;\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $C\left(0;\,-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $I(0;\,0;\,x)$.
Do I là trung điểm của SA nên ta có $S\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0;\,2x\right)$.
- Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $\overrightarrow{AS} = \left(-a\sqrt{2};\,0;\,2x\right)$,
suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AS}\right] = \left(ax\sqrt{2};\,ax\sqrt{2};\,a^2\right)$.
-Ta có $\overrightarrow{CA} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $\overrightarrow{CS} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,2x\right)$,
suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là
$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{CA},\,\overrightarrow{CS}\right] = \left(ax\sqrt{2};\,-ax\sqrt{2};\,a^2\right)$.
Theo giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° nên ta có
$\cos 60^\circ = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\,\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$
$= \dfrac{\left|2a^2x^2 - 2a^2x^2 + a^4\right|}{\sqrt{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4}.\sqrt{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4}}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^4}{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4} \Leftrightarrow 4a^2x^2 + a^4 = 2a^4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$
(do $x,\,a > 0$).
Khi đó $d(S,\,(ABC)) = 2d(I,\,(ABC)) = 2.IH = 2x = a$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.d(S,\,(ABC)).S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{6}$(đvtt).

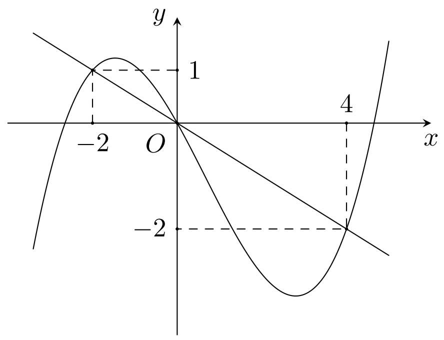
Chọn đáp án D □

Câu 50.
Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $\left(1;\,\dfrac{3}{2}\right)$. B $\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right)$. C $(-2;-1)$. D $(2;3)$.



Lời giải.



Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) - (1-2x)$

Đặt $u = 1 - 2x$ ta được hàm số $h(u) = -2\left[f'(u) + \dfrac{1}{2}u\right]$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = -\dfrac{1}{2}u$ như hình vẽ

Từ đó ta có $h(u) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < u < 0 \\ u > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 19

ĐỀ MINH HOẠ TN THPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019–2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?

(A) C_{10}^2. (B) A_{10}^2. (C) 10^2. (D) 2^{10}.

Lời giải.

Nhóm gồm 10 học sinh, ta chọn 2 học sinh và không có tính thứ tự nên số cách chọn là C_{10}^2.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 6. (B) 3. (C) 12. (D) -6.

Lời giải.

Cấp số cộng, ta có $d = u_2 - u_1 = 9 - 3 = 6$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $3^{x+1} = 27$ là

(A) $x = 4$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

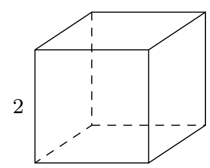
Ta có $3^{x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^3$
$\Leftrightarrow x + 1 = 3$
$\Leftrightarrow x = 2$.
Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương là $V = (\text{cạnh})^3 = 2^3 = 8$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

(A) $[0; +\infty)$. (B) $(-\infty; +\infty)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x > 0$. Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 6. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 12. Ⓒ 36. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7. Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 16π. Ⓑ 48π. Ⓒ 36π. Ⓓ 4π.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $\mathbb{K}$ nếu

Ⓐ $F'(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{K}$. Ⓑ $f'(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

Ⓒ $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$. Ⓓ $f'(x) = -F(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

Lời giải.

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $\mathbb{K}$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{32\pi}{3}$. Ⓑ 8π. Ⓒ 16π. Ⓓ 4π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}\log_2 a$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}\log_2 a$. Ⓒ $3+\log_2 a$. Ⓓ $3\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(a^3) = 3\log_2 a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

Ⓐ $4\pi rl$. Ⓑ πrl. Ⓒ $\dfrac{1}{3}\pi rl$. Ⓓ $2\pi rl$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

Ⓐ $x=-2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cựa đại tại $x=-1$.

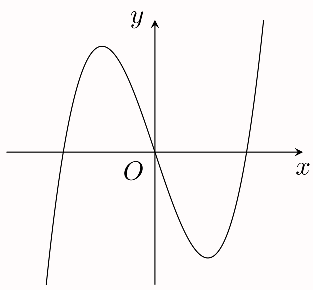
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 14.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

Ⓐ $y = x^3 - 3x$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x$.

Ⓒ $y = x^4 - 2x^2$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị có dạng hàm số bậc ba đi qua gốc toạ độ có hệ số $a>0$ nên loại các phương án $y=-x^3+3x$, $y=x^4-2x^2$ và $y=-x^4+2x^2$.

Vậy chỉ có đáp án $y=x^3-3x$ đúng.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 15. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ là

Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $y = 1$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to-\infty} y = 1.$$

Do đó $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

Ⓐ $(10; +\infty)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $[10; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 10)$.

Lời giải.

Ta có $\log x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 10^1 = 10$.

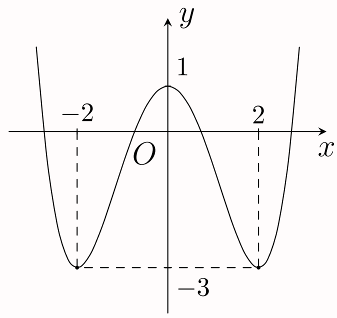
Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [10; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 17.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 1. Ⓓ 4.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $x = -1$ tại bốn điểm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 18. Nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ thì $\displaystyle\int_0^1 2f(x)\,dx$ bằng

Ⓐ 16. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 2f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2 \cdot 4 = 8.$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

Ⓐ $\overline{z} = -2 + i$. Ⓑ $\overline{z} = -2 - i$. Ⓒ $\overline{z} = 2 - i$. Ⓓ $\overline{z} = 2 + i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2 + i$ là $\overline{z} = 2 - i$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ -2.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 2 + i + 1 + 3i = 3 + 4i$. Vậy phần thực bằng 3.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

Ⓐ $Q(1; 2)$. Ⓑ $P(-1; 2)$. Ⓒ $N(1; -2)$. Ⓓ $M(-1; -2)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$ trong mặt phẳng tọa độ là $P(-1; 2)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

Ⓐ $(0; 1; 0)$. Ⓑ $(2; 1; 0)$. Ⓒ $(0; 1; -1)$. Ⓓ $(2; 0; -1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M'(2; 0; -1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm S có tọa độ là:

Ⓐ $(-2; 4; -1)$. Ⓑ $(2; -4; 1)$. Ⓒ $(2; 3; 1)$. Ⓓ $(-2; -4; -1)$.

Lời giải.

Mặt cầu có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ nên tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2; -4; 1)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + 3y + z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Ⓐ $\vec{n}_3 = (2; 3; 2)$. Ⓑ $\vec{n}_1 = (2; 3; 0)$. Ⓒ $\vec{n}_2 = (2; 3; 1)$. Ⓓ $\vec{n}_4 = (2; 0; 3)$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$) có véc-tơ pháp tuyến $(A; B; C)$. Vậy véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_2 = (2; 3; 1)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$. Điểm nào thuộc đường thẳng d?

Ⓐ $P(1; 2; -1)$. Ⓑ $M(-1; -2; 1)$. Ⓒ $N(2; 3; -1)$. Ⓓ $Q(-2; -3; 1)$.

Lời giải.

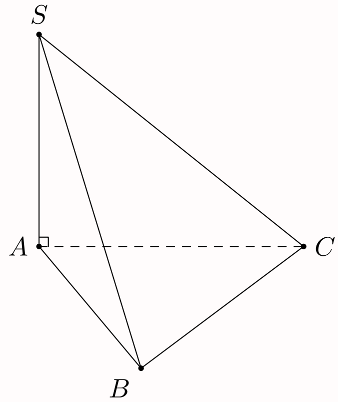
Thế tọa độ $P(1; 2; -1)$ vào phương trình đường thẳng d ta có $\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{2-2}{3} = \dfrac{-1+1}{-1}$. Do đó $P(1; 2; -1)$ thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án Ⓐ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 26.
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $90°$.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$, AB là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA}$.

Do tam giác ABC vuông cân tại B có cạnh huyền $AC = 2a$ nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $\triangle SAB$ vuông tại A có $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45°$.

Chọn đáp án B

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ đổi dấu 2 lần.
Vậy hàm số có 2 cực trị.
Chọn đáp án C

Câu 28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 2. B. -23. C. -22. D. -7.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -\sqrt{5} \notin [-1;2] \\ x = \sqrt{5} \notin [-1;2]. \end{array}\right.$

Xét $f(-1) = -7$, $f(0) = 2$, $f(2) = -22$.
Vậy $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = -22$.

Chọn đáp án C

Câu 29. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + 2b = 2$. B. $4a + 2b = 1$. C. $4ab = 1$. D. $2a + 4b = 1$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Ta có

$$\log_3(3^a\cdot 9^b)=\log_9 3 \Leftrightarrow \log_3(3^a\cdot 3^{2b})=\log_9 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \log_3 3^{a+2b}=\log_9 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a+2b=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+4b=1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Xét $y=x^3-3x+1$ có $y'=3x^2-3=3(x^2-1)$. Tại $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.
Ta có các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$.
Bảng biến thiên của hàm số.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=x^3-3x+1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2\cdot 3^x-3>0$ là

(A) $[0;+\infty)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $[1;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=3^x$. Điều kiện $t>0$.
Khi đó bất phương trình trở thành

$$t^2+2t-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ t>1. \end{array}\right.$$

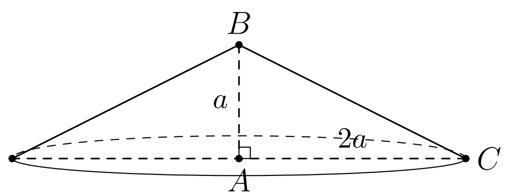
Kết hợp điều kiện, ta có $t>1 \Rightarrow 3^x>1 \Leftrightarrow x>0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $AC=2a$. Khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

(A) $5\pi a^2$. (B) $\sqrt{5}\pi a^2$. (C) $2\sqrt{5}\pi a^2$. (D) $10\pi a^2$.

Lời giải.

Đường sinh của hình nón là
$\ell=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$.
Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh ℓ, bán kính đáy r là
$S_{\text{xq}}=\pi r\ell=\pi\cdot AC\cdot BC=\pi\cdot 2a\cdot\sqrt{5}a=2\sqrt{5}\pi a^2$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Xét $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

Ⓐ $2\int\limits_0^2 e^u du$. Ⓑ $2\int\limits_0^4 e^u du$. Ⓒ $\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^u du$. Ⓓ $\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du$.

Lời giải.

Đặt $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=4. \end{cases}$

Do đó: $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx=\int\limits_0^4 e^u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 34. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$, và $x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S=\pi\int\limits_0^1\left(2x^2+1\right)dx$. Ⓑ $S=\int\limits_0^1\left(2x^2-1\right)dx$.

Ⓒ $S=\int\limits_0^1\left(2x^2+1\right)^2dx$. Ⓓ $S=\int\limits_0^1\left(2x^2+1\right)dx$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bở các đường thẳng $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$, và $x=1$ được tính bởi công thức $S=\int\limits_0^1\left(2x^2+1\right)dx$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 35. Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

Ⓐ 4. Ⓑ $4i$. Ⓒ -1. Ⓓ $-i$.

Lời giải.

Ta có $z_1z_2=(3-i)(-1+i)=-2+4i$.

Vậy phần ảo của số phức z_1z_2 là 4.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Mô-đun của số phức z_0+i bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{10}$. Ⓓ 10.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_0=1-2i \Leftrightarrow z_0+i=1-i \Rightarrow |z_0+i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Vậy $|z_0+i|=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M vuông góc với Δ có phương trình là

A. $3x+y-z-7=0$.
B. $x+4y-2z+6=0$.
C. $x+4y-2z-6=0$.
D. $3x+y-z+7=0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;4;-2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.
Do $\Delta\perp(P)$ nên (P) nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $1(x-2)+4(y-1)+-2z=0\Leftrightarrow x+4y-2z-6=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương tham số là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=1-2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)=2(1;1;-1)$.
Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;0;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang, xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng 1 học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A. $\dfrac{1}{6}$.
B. $\dfrac{3}{20}$.
C. $\dfrac{2}{15}$.
D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $|\Omega|=6!$.
Để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B ta có các trường hợp sau:
• Trường hợp 1: Học sinh C ngồi ở 2 ghế ngoài cùng

C	B				

hoặc

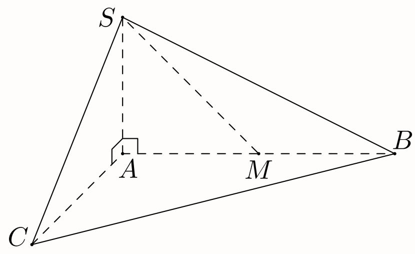
				B	C

Ta có $2\times2\times4!=96$ cách xếp.
• Trường hợp 2: C ngồi ở 1 trong 4 ghế trong (xem hình vẽ minh họa)

B	C	B			

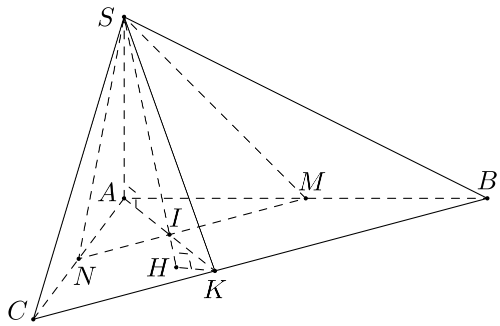
Số cách xếp trong trường hợp này là $4\times2!\times3!=48$.
Vậy có tổng cộng $96+48=144$ cách xếp nên xác suất cần tìm là $P=\dfrac{144}{6!}=\dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



Ⓐ $\dfrac{2a}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Ⓓ $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi N là trung điểm của AC.
Ta có $MN \parallel BC$, $MN \subset (SMN)$ và BC không nằm trong $(SMN) \Rightarrow (SMN) \parallel BC$.
Khi đó, $\mathrm{d}(BC,\, SM) = \mathrm{d}(BC,\, (SMN))$. (1)
Kẻ $AK \perp BC$ tại K. Gọi $I = MN \cap AK$.

$$\begin{cases} MN \perp AK \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAK)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (SAK) \perp (SMN) \\ (SAK) \cap (SMN) = SI. \end{cases}$$

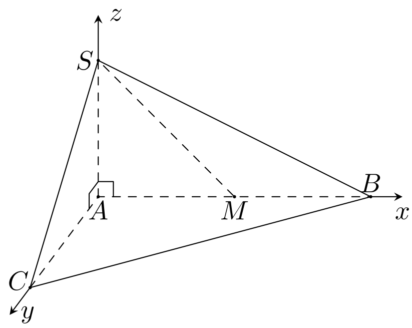
Kẻ $KH \perp SI$ tại H.
$\Rightarrow \mathrm{d}(K,\, (SMN)) = KH$. (2)
Mà $BC \parallel (SMN)$ nên $\mathrm{d}(BC,\, (SMN)) = \mathrm{d}(K,\, (SMN))$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\mathrm{d}(BC,\, SM) = KH$.
$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{5}$.

$AK \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AK = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{2a \cdot 4a}{2a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

$SI = \sqrt{AI^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{5} + a^2} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

$$\Rightarrow \frac{HK}{AS} = \frac{IK}{IS} \Leftrightarrow HK = AS \cdot \frac{IK}{IS} = a \cdot \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\frac{3a}{\sqrt{5}}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SM,\, BC) = \dfrac{2a}{3}$.



Cách 2: Đặt hình chóp $S.ABC$ lên hệ trục tọa độ $Oxyz$, có $A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $C(0;4a;0)$, $S(0;0;a)$, $M(a;0;0)$.
$\overrightarrow{SM} = (a;0;-a)$; $\overrightarrow{BC} = (-2a;4a;0)$.
$\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right] = (4a^2;2a^2;4a^2)$; $\overrightarrow{SB} = (2a;0;-a)$.

$$\mathrm{d}(SM,\, BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right] \cdot \overrightarrow{SB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right]\right|}$$

$$= \frac{|4a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 0 + 4a^2 \cdot (-a)|}{\sqrt{4a^4 + 16a^4 + 16a^4}} = \frac{|4a^3|}{6a^2} = \frac{2a}{3}.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (đúng)} \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 2]$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 42. Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015n}}$. Hỏi cần phát **ít nhất** bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

Ⓐ 202. Ⓑ 203. Ⓒ 206. Ⓓ 207.

Lời giải.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015n}} > 0{,}3 \\ \Leftrightarrow\ & 1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015n} < \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-0{,}015n} < \frac{7}{147} \\ \Leftrightarrow\ & -0{,}015n < \ln\frac{7}{147} \\ \Leftrightarrow\ & n > -\frac{1}{0{,}015}\ln\frac{7}{147} \approx 202{,}97 \end{aligned}$$

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax + 1}{bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có:

- Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang $y=1$, do đó $\dfrac{a}{b}=1>0 \Rightarrow a$ và b cùng dấu.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$, do đó $-\dfrac{c}{b}=2>0 \Rightarrow \dfrac{c}{b}<0 \Rightarrow c$ và b trái dấu.
- Khi $x<2$ thì $f(x)$ luôn dương $(f(x)>1)$. Do đó với $x=0$ thì $f(0)=\dfrac{1}{c}>0 \Rightarrow c>0$.
- Vì $c>0$, c và b trái dấu nên $b<0$. Mà a và b cùng dấu nên $a<0$.

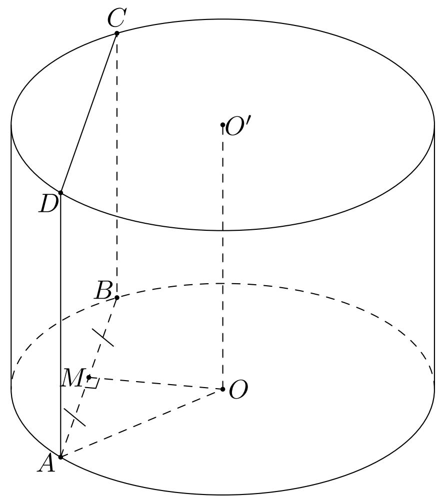
Vậy chỉ có 1 số dương là c.
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

(A) $216\pi a^3$. (B) $150\pi a^3$. (C) $54\pi a^3$. (D) $108\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi thiết diện thu được là hình vuông $ABCD$. Khi đó $h=AD=AB=6a$ và $\mathrm{d}\left(OO',(ABCD)\right)=\mathrm{d}\left(O,(ABCD)\right)=OM=3a$.
Gọi M là trung điểm của cạnh AB nên $AM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{6a}{2}=3a$.
Ta có $\triangle AMO$ vuông tại M và $OM=AM=3a$ nên $\triangle AMO$ vuông cân tại M. Suy ra $r=AO=3a\sqrt{2}$.
Thể tích của khối trụ là $V=\pi r^2\cdot h=\pi\left(3a\sqrt{2}\right)^2\cdot 6a=108\pi a^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{1042}{225}$. (B) $\dfrac{208}{225}$. (C) $\dfrac{242}{225}$. (D) $\dfrac{149}{225}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int \cos x\cos^2 2x\,\mathrm{d}x=\int \cos x\left(1-2\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x$.
Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.
$\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int\left(1-2t^2\right)^2\mathrm{d}t=\int\left(1-4t^2+4t^4\right)\mathrm{d}t=t-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x+C$.
Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.
$\Rightarrow f(x)=\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x+\dfrac{4}{5}\sin^5 x=\sin x\left(1-\dfrac{4}{3}\sin^2 x+\dfrac{4}{5}\sin^4 x\right)$

$\Rightarrow f(x) = \sin x\left[1 - \dfrac{4}{3}(1-\cos^2 x) + \dfrac{4}{5}(1-\cos^2 x)^2\right].$

Khi đó $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\left[1 - \dfrac{4}{3}(1-\cos^2 x) + \dfrac{4}{5}(1-\cos^2 x)^2\right]\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \pi \Rightarrow t = -1$.

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[1 - \dfrac{4}{3}(1-t^2) + \dfrac{4}{5}(1-t^2)^2\right]\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{7}{15} - \dfrac{4}{15}t^2 + \dfrac{4}{5}t^4\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{7}{15}t - \dfrac{4}{45}t^3 + \dfrac{4}{25}t^5\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \dfrac{121}{225} - \dfrac{-121}{225} = \dfrac{242}{225}.$

Chọn đáp án C

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A 7. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x$.

$t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; x = \dfrac{5\pi}{2} \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ thì $t \in [-1; 1]$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(\sin x) = 1$ hay $f(t) = 1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$ với $t \in [-1; 1]$.

t	-1		b		0		a		1
$f(t)$	2	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2
			$y = 1$				$y = 1$		$y = 1$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra trên đoạn $[-1; 1]$ thì phương trình có 2 nghiệm

- Một nghiệm $t = b \in (-1; 0)$ cho 2 nghiệm x, một nghiệm thuộc $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ và một nghiệm thuộc một nghiệm thuộc $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

- Một nghiệm $t = a \in (0; 1)$ cho 3 nghiệm x, một nghiệm thuộc $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; một nghiệm thuộc $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ và một nghiệm thuộc $\left(2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \dfrac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\dfrac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có: $a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \\ b^y = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} \\ b^{y-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_a b \\ y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_b a. \end{cases}$

Do đó: $P = x + 2y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b + 1 + \log_b a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b + \log_b a$.
Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$.
Khi đó $P = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{\dfrac{1}{2}t \cdot \dfrac{1}{t}} = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $b = a^{\sqrt{2}}$.
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\dfrac{5}{2}; 3\right)$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1 - m}{(x + 1)^2}$.

- Nếu $m = 1$ thì $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 1} = 1, \forall x \neq -1$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (thỏa mãn). Do đó $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

- Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đơn điệu trên $[0; 1]$.

TH 1. $\left(\dfrac{m + 1}{2}\right) \cdot m \leq 0$ thì $\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 0, \max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{\dfrac{|m + 1|}{2}; |m|\right\}$.

Do đó

$$\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=2\Leftrightarrow 0+\dfrac{\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|}{2}=2$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{|3m+1|+|m-1|}{4}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq 1: m=2(\text{ loại})\\ 1>m\geq -\dfrac{1}{3}: m=3(\text{ loại})\\ m<-\dfrac{1}{3}: m=-2(\text{ loại})\end{array}\right.$$

TH 2. $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\cdot m>0$ thì $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{\dfrac{|m+1|}{2};|m|\right\}$, $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{|m+1|}{2};|m|\right\}$.

Do đó

$$\begin{aligned}&\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=2\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{\left|\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|-\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|\right|}{2}+\dfrac{\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|}{2}=2\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{||3m+1|-|m-1||}{4}+\dfrac{|3m+1|+|m-1|}{4}=2\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}|3m+1|\geq|m+1|: 2|3m+1|=8 & (2)\\ |3m+1|<|m+1|: 2|m-1|=8 & (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Giải (2) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1(\text{ thỏa})\\ m=-\dfrac{5}{3}(\text{ thỏa}).\end{array}\right.$

Giải (3) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=5(\text{ loại})\\ m=-3(\text{ loại}).\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{1;\dfrac{-5}{3}\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

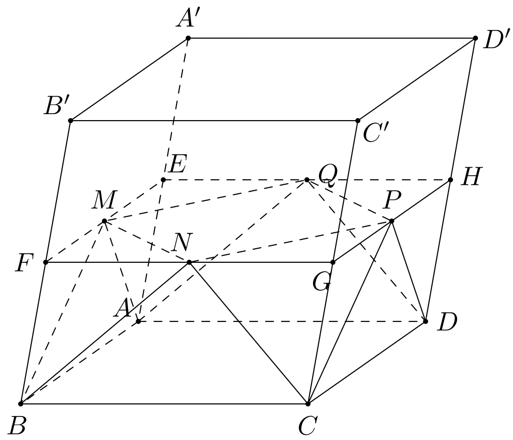
Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là A, B, C, D, M, N, P, Q.

(A) 27. (B) 30. (C) 18. (D) 36.

Lời giải.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'.
Khi đó

$$V_{ABCD.EFGH} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8 = 36.$$



Gọi V là thể tích khối tứ diện lồi cần tính.
khi đó

$$V = V_{ABCD.EFGH} - V_{E.AMQ} - V_{F.BMN} - V_{G.CNP} - V_{H.DPQ}.$$

Trong đó

$$V_{E.AMQ} = V_{F.BMN} = V_{G.CNP} = V_{H.DPQ} = \frac{EQ}{EH}\cdot\frac{EM}{EF}\cdot V_{E.AHF} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot V_{ABCD.EFGH} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow V = 36 - 4\cdot\frac{3}{2} = 30.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A 3. B 2. C 1. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x + y > 0$.

Đặt $t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2\cdot 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2.$

Ta lại có

$x^2+y^2 = 4^t \Rightarrow x^2 \leq 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3{,}27$. Do x nguyên nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

- $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$
- $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$
- $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5.$ (loại)
  (vì mâu thuẫn với $x^2 + y^2 \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3{,}27$)

Vậy $x \in \{-1; 0\}$.
Chọn đáp án B □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 20

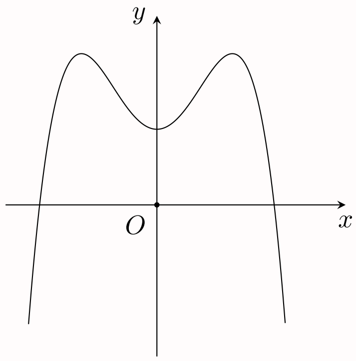
ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ?



(A) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Đồ thị trong hình vẽ của hàm bậc bốn, có hệ số $a < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 9$ là

(A) $x = -2$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = -3$.

Lời giải.

$3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) 3. (B) -5. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng -5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty;-1)$. **B** $(0;1)$. **C** $(-1;1)$. **D** $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 3; 4; 5. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A 10. **B** 20. **C** 12. **D** 60.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
Chọn đáp án D □

Câu 6. Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là

A $\bar{z} = -3 - 5i$. **B** $\bar{z} = 3 + 5i$. **C** $\bar{z} = -3 + 5i$. **D** $\bar{z} = 3 - 5i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là $\bar{z} = -3 - 5i$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 8$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A 24π. **B** 192π. **C** 48π. **D** 64π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 48\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho khối cầu có bán kính $r = 4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A $\dfrac{256\pi}{3}$. **B** 64π. **C** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D** 256π.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \dfrac{256}{3}\pi$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

Ⓐ $5\log_a b$. Ⓑ $\frac{1}{5} + \log_a b$. Ⓒ $5 + \log_a b$. Ⓓ $\frac{1}{5}\log_a b$.

Lời giải.

$\log_{a^5} b = \frac{1}{5}\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 18. Ⓒ 9. Ⓓ 3.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ có bán kính $r = \sqrt{9} = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là

Ⓐ $y = \frac{1}{4}$. Ⓑ $y = 4$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = -1$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là $y = \dfrac{a}{c} = \dfrac{4}{1} = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $\frac{10\pi}{3}$. Ⓑ 10π. Ⓒ $\frac{50\pi}{3}$. Ⓓ 50π.

Lời giải.

Thể tích của khối nón đã cho bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 5^2 \cdot 2 = \dfrac{50\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) = 2$ là

Ⓐ $x = 8$. Ⓑ $x = 9$. Ⓒ $x = 7$. Ⓓ $x = 10$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 1$.

$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $2x + C$. Ⓑ $\frac{1}{3}x^3 + C$. Ⓒ $x^3 + C$. Ⓓ $3x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc?

Ⓐ 36. Ⓑ 720. Ⓒ 6. Ⓓ 1.

Lời giải.

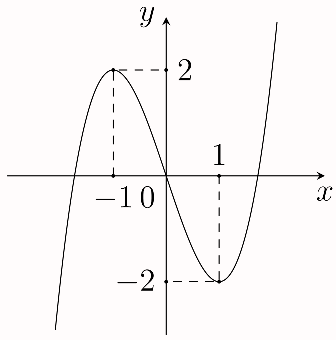
Mỗi cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc là một hoán vị của 6 phần tử. Do đó, số cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc là số hoán vị của 6 phần tử, tức là $6! = 720$ cách.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16.

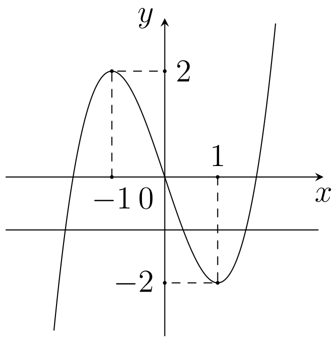
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 2.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ bằng số giao điểm của đường cong $f(x)$ với đường thẳng $y = -1$.



Nhìn vào hình ta thấy có 3 giao điểm nên có 3 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0; 2; 1)$. Ⓑ $(3; 0; 0)$. Ⓒ $(0; 0; 1)$. Ⓓ $(0; 2; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ lên trục Ox là $A'(3; 0; 0)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 12.

Lời giải.

Thể tích khối chóp có công thức là $V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u}_2=(3;4;-1)$. (B) $\vec{u}_1=(2;-5;3)$. (C) $\vec{u}_3=(2;5;3)$. (D) $\vec{u}_4=(3;4;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng có phương trình dạng $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ thì có chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.

Nên đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$ có chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-5;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$. (B) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$. (C) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. (D) $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng phẳng qua 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc\neq 0$, có dạng là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Nên phương trình mặt phẳng qua 3 điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$ là

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và công bội $q=2$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 8. (B) 9. (C) 6. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_2=u_1\cdot q=3\cdot 2=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

(A) $5+i$. (B) $-5+i$. (C) $5-i$. (D) $-5-i$.

Lời giải.

Ta có $z_1+z_2=(3-2i)+(2+i)=5-i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Biết $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x=3$ bằng

(A) 5. (B) 9. (C) 6. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

(A) 1. (B) -3. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

Vì $z=-3+i$ nên phần thực của z là -3.
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

(A) $[0;+\infty)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.
Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là $\mathcal{D}=(0;+\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

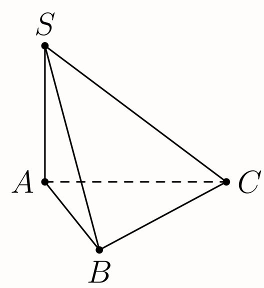
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

$$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là 3.
Chọn đáp án (A) □

Câu 27.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.



Lời giải.

$SA\perp(ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên (ABC), góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $\widehat{SCA}=\varphi$.
Tam giác ABC vuông tại B nên $AC^2=AB^2+BC^2=5a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{5}$.
Tam giác SAC vuông tại A có $\tan\varphi=\dfrac{SA}{AC}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.
Vậy $\varphi=60^\circ$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của

$\int\limits_1^2 (2+f(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

A) 5. B) 3. C) $\dfrac{13}{3}$. D) $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 (2+f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + x^2\Big|_1^2 = 2+4-1=5.$

Chọn đáp án A

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A) 36. B) $\dfrac{4}{3}$. C) $\dfrac{4\pi}{3}$. D) 36π.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ là

$$x^2-4=2x-4 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ là

$$S=\int\limits_0^2 \left|\left(x^2-4\right)-(2x-4)\right|\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

Vậy $S=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A) $3x+2y-z+1=0$. B) $2x-2y+3z-17=0$.

C) $3x+2y-z-1=0$. D) $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với d nên (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{u}=(3;2;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $3(x-2)+2(y+2)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0$.

Chọn đáp án A

Câu 31. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A) $N(-2;2)$. B) $M(4;2)$. C) $P(4;-2)$. D) $Q(2;-2)$.

Lời giải.

Ta có $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+2i \\ z=-3-2i. \end{array}\right.$

Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=-3+2i$.
Số phức $1-z_0=1-(-3+2i)=4-2i$.
Vậy điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là $P(4;-2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$.
(B) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.
(C) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.
(D) $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$.
Đường thẳng đi qua $A(1;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Nhìn vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy, hàm số có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=-1$, $x=1$ và hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
Vậy hàm số có hai điểm cực đại là $x=-1$ và $x=1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

(A) $(4;+\infty)$. (B) $(-4;4)$. (C) $(-\infty;4)$. (D) $(-4;4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-13}<27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3 \Leftrightarrow x^2-13<3 \Leftrightarrow x^2-16<0 \Leftrightarrow -4<x<4$.
Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-4;4)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

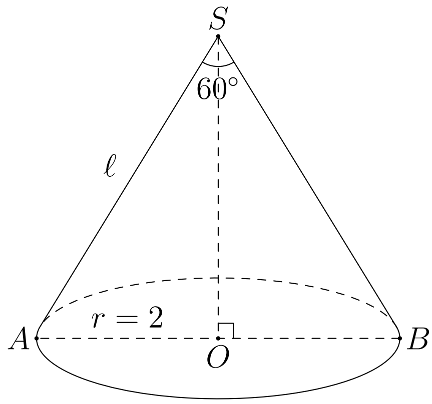
(A) 8π. (B) $\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. (D) 16π.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB$ là tam giác đều nên đường sinh của hình nón là $\ell = SA = AB = 2r = 2\cdot 2 = 4$.
Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi r\ell = \pi\cdot 2\cdot 4 = 8\pi.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Giá trị nhỏ nhất của của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

(A) $32\sqrt{2}$. (B) -40. (C) $-32\sqrt{2}$. (D) -45.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 24$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2\sqrt{2} & \in [2;19] \\ x = -2\sqrt{2} & \notin [2;19]. \end{array}\right.$

$f(2) = -40;\quad f(19) = 6043;\quad f(2\sqrt{2}) = -32\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x) = -32\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 + i$. Mô-đun của số phức $z\cdot\overline{w}$ bằng

(A) $5\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) 26. (D) 50.

Lời giải.

Ta có $\overline{w} = 3 - i$ nên $z\cdot\overline{w} = (1+2i)\cdot(3-i) = 5 + 5i$.
Do đó $|z\cdot\overline{w}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2^{\left(a^2b\right)}} = 3a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

(A) 3. (B) 6. (C) 12. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4^{\log_2^{\left(a^2b\right)}} = 3a^3 \\ \Leftrightarrow\ & \left(a^2b\right)^{\log_2^4} = 3a^3 \\ \Leftrightarrow\ & \left(a^2b\right)^2 = 3a^3 \\ \Leftrightarrow\ & a^4b^2 = 3a^3 \\ \Leftrightarrow\ & ab^2 = 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

là

(A) $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. (B) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. (C) $\dfrac{2x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. (D) $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \int (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (x+1)f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}\left(x^2+2\right)\\ &= \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+2}+C\\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

(A) $[4;7)$. (B) $(4;7]$. (C) $(4;7)$. (D) $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ khi và chỉ khi

$y'>0,\forall x\in(-\infty;-7)\Leftrightarrow\begin{cases}m-4>0\\-m\notin(-\infty;-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\-m\geq -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\m\leq 7\end{cases}\Leftrightarrow 4<m\leq 7.$

Vậy $m\in(4;7]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha?

(A) Năm 2028. (B) Năm 2047. (C) Năm 2027. (D) Năm 2046.

Lời giải.

- Gọi P_0 là diện tích rừng trồng mới năm 2019.
- Gọi P_n là diện tích rừng trồng mới sau n năm.
- Gọi $r\%$ là phần trăm diện tích rừng trồng mới tăng mỗi năm.

Sau 1 năm, diện tích rừng trồng mới là $P_1=P_0+P_0r=P_0(1+r)$.

Sau 2 năm, diện tích rừng trồng mới là $P_2=P_1+P_1r=P_0(1+r)^2$.

...

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Sau n năm, diện tích rừng trồng mới là $P_n = P_0(1+r)^n$.
Theo giả thiết: $P_0 = 600$, $r = 0,06$, ta có

$$600(1+0,06)^n > 1000 \Leftrightarrow (1,06)^n > \frac{10}{6} \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\frac{10}{6} \approx 8,8$$

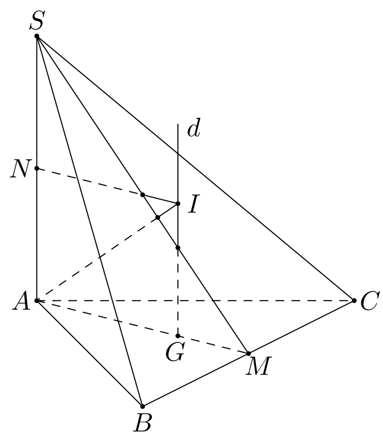
Do đó $n = 9$. Vậy sau 9 năm (tức năm 2028) thì tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. B. $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. C. $84\pi a^2$. D. $\dfrac{172\pi a^2}{9}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh $4a$, $AM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$ với M là trung điểm BC. Do $(SAM) \perp BC$ nên góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA} = 60°$. Khi đó $SA = AM.\tan 60° = 2a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6a$. Qua tâm G của tam giác đều ABC dựng trục Gx vuông góc mặt phẳng (ABC) thì G cách đều A, B, C và tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ nằm trên Gx. Từ trung điểm E của SA dựng đường thẳng d song song với AM cắt Gx tại I thì $IS = IA$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.



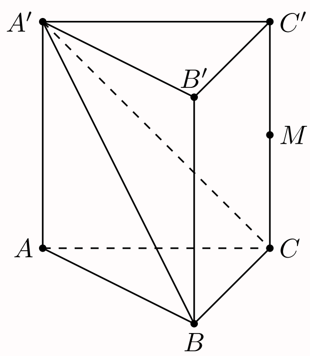
Theo định lý Pytago cho tam giác vuông IAG ta có

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AM\right)^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{43}{3}}a$$

Vậy $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{43}{3}a^2 = \dfrac{172}{3}\pi a^2$.
Chọn đáp án A □

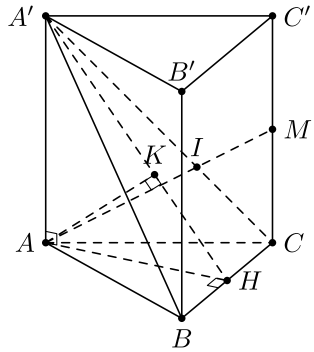
Câu 43.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $A'BC$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC. Kẻ $AH \perp A'I$ tại H.
Ta có $AH \perp (A'BC)$ nên



$$\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$$

Xét $\Delta AA'I$ có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{14}$$

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A 11. B 9. C 7. D 5.

Lời giải.

Cách 1. Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm bậc ba có hệ số bậc ba đồng thời nhận các giá trị -1; 0; 1 làm nghiệm. Do đó

$$f'(x)=ax(x-1)(x+1)=a\left(x^3-x\right)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+b$$

Vì $f(0)=3$ và $f(1)=-2$ nên suy ra $a=20$; $b=3$.
Vậy $f(x)=5x^4-10x^2+3=5\left(x^2-1\right)^2-2$, suy ra $f(x+1)=5\left(x^2+2x\right)^2-2$.
Ta có $g(x)=\left[x^2\cdot f(x+1)\right]^2=\left[5x^2\left(x^2+2x\right)^2-2x^2\right]^2$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}5x^2\left(x^2+2x\right)^2=2x^2 & (1)\\ 10x\left(x^2+2x\right)^2+10x^2\left(x^2+2x\right)(2x+2)=4x & (2)\end{array}\right.$$

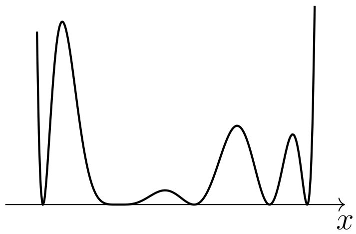
Phương trình (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0 \text{ nghiệm kép}\\ x^2+2x=\sqrt{\dfrac{2}{5}}\\ x^2+2x=-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\approx 0,277676\\ x\approx -2,277676\\ x\approx -0,393746\\ x\approx -1,606254\end{array}\right.$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 15x^4+50x^3+40x^2-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\approx -2,0448\\ x\approx -1,21842\\ x\approx -0,26902\\ x\approx 0,19893\end{array}\right.$.

So sánh các nghiệm giải bằng máy tính cầm tay ta có 9 nghiệm không trùng nhau, trong đó 8 nghiệm đơn và nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội 3 nên $g(x)$ có 9 điểm cực trị.
Vậy $g(x)$ có 9 điểm cực trị.
Cách 2. Từ bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Hàm số $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có

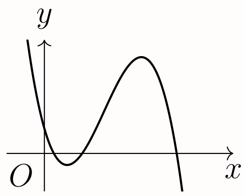
$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3\left[f(x+1)\right]^2 + 2x^4 f(x+1)\cdot f'(x+1)\\ &= 2x^3 f(x+1)\left[2f(x+1) + xf'(x+1)\right] \end{aligned} \qquad (*)$$

Ta thấy rằng hàm $f(x)$ bậc 4 nên hàm $g(x)$ có tối đa 9 điểm cực trị.
Mặt khác phương trình $g(x) = 0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, nên đồ thị hàm $g(x)$ sẽ có dạng



Như vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.
Từ đồ thị ta thấy $a < 0$ và khi $x = 0$ thì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Do hai điểm cực trị của hàm số đều dương nên suy ra $\begin{cases} \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{3a}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b < 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0. \end{cases}$
Vậy $b, d > 0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

(A) $\dfrac{25}{42}$. (B) $\dfrac{5}{21}$. (C) $\dfrac{65}{126}$. (D) $\dfrac{55}{126}$.

Lời giải.
Số các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là $\mathrm{A}_9^4 = 3024$.
Không gian mẫu Ω là tập hợp các cách lấy ra 1 số từ tập $S \Rightarrow |\Omega| = 3024$.
Gọi A là biến cố "lấy được một số có 4 chữ số từ tập S sao cho không có 2 chữ số nào liên tiếp cùng chẵn". Các khả năng có thể xảy ra là

- Số tạo thành có 4 chữ số đều là lẻ, có $\mathrm{A}_5^4 = 120$ số.
- Số tạo thành có 3 chữ số lẻ và 1 chữ số chẵn.

— Lấy ra 3 chữ số lẻ từ 5 chữ số lẻ có C_5^3 cách.

— Lấy ra 1 chữ số chẵn từ 4 chữ số chẵn có C_4^1 cách.

— Xếp 4 chữ số vừa lấy ra có 4! cách.

Vậy số các số có 3 chữ số lẻ và 1 chữ số chẵn lấy ra từ tập S là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4! = 960$ số.

Số tạo thành có 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn.

— Lấy ra 2 chữ số lẻ từ 5 chữ số lẻ có C_5^2 cách.

— Lấy ra 2 chữ số chẵn từ 4 chữ số chẵn có C_4^2 cách.

— Xếp các chữ số lẻ vào vị trí 1, 3 và các chữ số chẵn vào các vị trí 2, 4 hoặc đảo lại có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách. Xếp hai số lẻ ở giữa, hai số chẵn ở hai đầu có 4 cách.

Vậy số các số có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ sao cho 2 chữ số chẵn không đứng cạnh nhau là $12 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 720$ số.

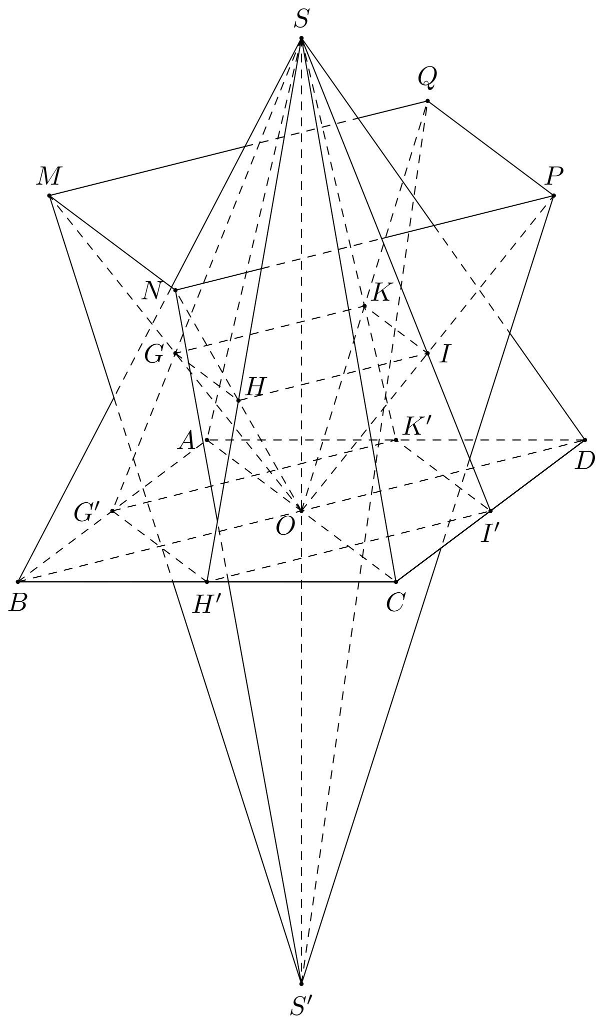
Do đó $|A| = 120 + 960 + 720 = 1800$.
Xác suất cần tìm là $\mathrm{p}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{1800}{3024} = \dfrac{25}{42}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{20\sqrt{14}a^3}{81}$.
B. $\dfrac{40\sqrt{14}a^3}{81}$.
C. $\dfrac{10\sqrt{14}a^3}{81}$.
D. $\dfrac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi G', H', I' và K' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.

Ta có $S_{G'H'I'K'} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Gọi G, H, I và K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA.

Hai hình vuông $GHIK$ và $G'H'I'K'$ đồng dạng tỉ số bằng $\dfrac{2}{3}$ nên $S_{GHIK} = \dfrac{4}{9} \cdot S_{G'H'I'K'} = \dfrac{2}{9}a^2$.

Hai hình vuông $MNPQ$ và $GHIK$ đồng dạng tỉ số bằng 2 nên $S_{MNPQ} = 4 \cdot S_{GHIK} = \dfrac{8}{9}a^2$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}a$.

Ta có $\mathrm{d}(O, (MNPQ)) = 2 \cdot \mathrm{d}(M, (GHIK)) = \dfrac{2}{3}SO \Rightarrow \mathrm{d}(S', (MNPQ)) = \dfrac{5}{3}SO = \dfrac{5\sqrt{14}}{6}a$.

Vậy thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ là

$$V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot \mathrm{d}(S', (MNPQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9}a^2 \cdot \frac{5\sqrt{14}}{6}a = \frac{20\sqrt{14}a^3}{81}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

(A) $\dfrac{33}{4}$. (B) $\dfrac{65}{8}$. (C) $\dfrac{49}{8}$. (D) $\dfrac{57}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3. \qquad (*)$$

Đặt $t = 2(x+y-1)$. Do x, y không âm nên $t \geq -2$. Khi đó $(*)$ trở thành

$$(t-1) + y \cdot \left(2^t - 2\right) \geq 0. \qquad (**)$$

Từ $(**) \Rightarrow t \geq 1$, vì nếu $t < 1$ thì $2^t < 2$ nên $(t-1) + y \cdot (2^t - 2) < 0$.

Từ $t \geq 1 \Rightarrow x + y \geq \dfrac{3}{2}$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 + 4x + 6y \\ &= (x+2)^2 + (y+3)^2 - 13 \\ &\geq \frac{1}{2}(x+2+y+3)^2 - 13 \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2} \\ x + 2 = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Vậy $\min P = \dfrac{65}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \geq \log_3(x+y)$?

(A) 59. (B) 58. (C) 116. (D) 115.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x + y > 0. \end{cases}$

Đặt $k = x + y$, suy ra $k \in \mathbb{Z}^+$.

Xét hàm số $f(y) = \log_4\left(x^2+y\right) - \log_3(x+y) \geq 0.$ (*)

Ta có $f'(y) = \dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4} - \dfrac{1}{(x+y)\ln 3} < 0$ (vì $x \in \mathbb{Z}^+$ nên $x^2 \geq x \Rightarrow x^2 + y \geq x + y$ hay $\dfrac{1}{x^2+y} - \dfrac{1}{x+y} > 0$ và $\ln 4 > \ln 3 > 0$).

Suy ra $f(y)$ nghịch biến trên mỗi khoảng mà $f(y)$ xác định.

Xét $g(k) = f(k-x) = \log_4\left(x^2+k-x\right) - \log_3 k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Do f nghịch biến nên g cũng nghịch biến.

Giả sử k_0 là một nghiệm của phương trình $g(k) = 0$. Khi đó k_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g(k) = 0$.

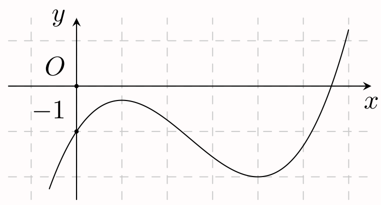
Suy ra (*) trở thành $g(k) \geq g\left(k_0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq k_0 \\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow k_0 \leq 728.$

Khi đó

$$\begin{aligned} & g(728) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_4\left(x^2 - x + 728\right) \leq \log_3 728 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x + 728 < 4089 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 3361 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -57{,}476 \leq x \leq 58{,}478. \end{aligned}$$

Vì x nguyên nên $x \in \{-57; -56; \ldots; 58\}$.
Khi đó có 116 giá trị x thỏa bài toán.
Chọn đáp án (C) □

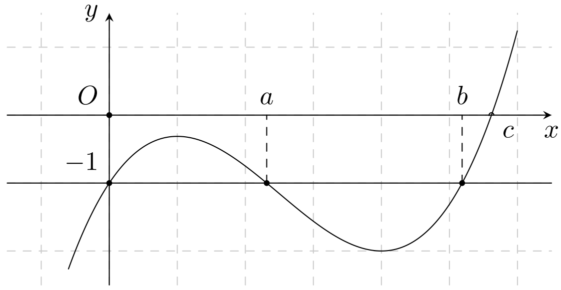
Câu 50.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là



(A) 8. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Từ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$, ta suy ra



- Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \in (2;3) \\ x = b \in (5;6). \end{array}\right.$
- Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c \in (5;6)$.

Do đó, ta có

$$f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x) = 0 & (1) \\ x^3 f(x) = a & (2) \\ x^3 f(x) = b. & (3) \end{array}\right.$$

Khi đó

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = c. \end{array}\right.$
- Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^3}$. Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đồ thị (C_1): $g(x) = \dfrac{a}{x^3}$.
  Với $a \in (2;3)$ ta có $g'(x) = -\dfrac{3a}{x^4} < 0$, $\forall x \neq 0$.
  Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \dfrac{a}{x^3}$ là

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ và đồ thị (C), ta suy ra

— Trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta thấy

x	$-\infty$		0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ||
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1

Suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $x = x_1 \in (-\infty; 0)$.

— Trên khoảng $(0; c)$, ta thấy $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

— Trên nửa khoảng $[c; +\infty)$, ta thấy

x	c		$+\infty$
$g(x)$	$\dfrac{a}{c^3}$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $x = x_2 \in (c; +\infty)$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

- Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{b}{x^3}$.
  Tương tự như trên, ta có phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án C □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 21

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Biết $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Giá trị của $\int\limits_1^5 3f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 7. (B) $\frac{4}{5}$. (C) 64. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cdot 4 = 12$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0;2;0)$. (B) $(0;0;5)$. (C) $(1;0;0)$. (D) $(0;2;5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có tọa độ là $(1;0;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) 48π. (B) 12π. (C) 16π. (D) 24π.

Lời giải.

Hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$ thì có diện tích xung quanh là $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell = 2\pi\cdot 4\cdot 3 = 24\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

(A) 3. (B) -1. (C) -3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 3i$.

Vậy phần thực của số phức z là -1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_2 bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 6. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 2 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

Ⓐ $5 - i$. Ⓑ $5 + i$. Ⓒ $-5 - i$. Ⓓ $-5 + i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Bán kính (S) bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 18. Ⓒ 3. Ⓓ 9.

Lời giải.

Bán kính $R = \sqrt{9} = 3$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 7.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.
Ta có $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x-1) = \log_2 2^3 = 8 \Leftrightarrow x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn $x > 1$).
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x-1}$ là

Ⓐ $y = 1$. Ⓑ $y = \dfrac{1}{5}$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $y = 5$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 5$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 5$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{8\pi}{3}$. Ⓑ 8π. Ⓒ $\dfrac{32\pi}{3}$. Ⓓ 32π.

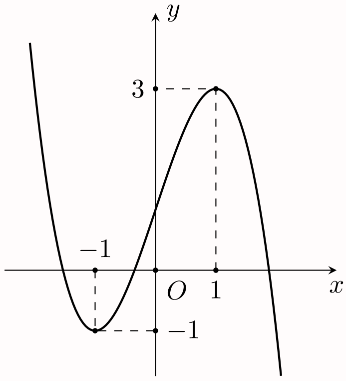
Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi h = \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2 = \dfrac{32\pi}{3}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 11.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Lời giải.

Ta có đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{2} + \log_a b$. Ⓑ $\frac{1}{2}\log_a b$. Ⓒ $2 + \log_a b$. Ⓓ $2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

Ⓐ $x = -3$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $x = 4$. Ⓓ $x = -4$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 14. $\int x^3 \,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $4x^4 + C$. Ⓑ $3x^2 + C$. Ⓒ $x^4 + C$. Ⓓ $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15. Cho hình chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 12. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Thể tích khối chóp được tính theo công thức $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$. (B) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$. (C) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{4}=1$. (D) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-4}=1$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(0;1)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 3. (B) 2. (C) -2. (D) -3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và giá trị cực đại là $y=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u}_2=(3;4;-1)$. (B) $\vec{u}_1=(2;-5;2)$. (C) $\vec{u}_3=(2;5;-2)$. (D) $\vec{u}_4=(3;4;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(3;4;-1)$.

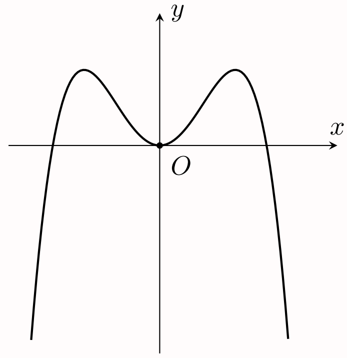
Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 20. Đồ thị hàm số nào có dạng như đường cong trong hình bên?

(A) $y = -x^4 + 2x^2$. (B) $y = -x^3 + 3x$.

(C) $y = x^4 - 2x^2$. (D) $y = x^3 - 3x$.



Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị ta thấy đó là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số $a < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho khối cầu có bán kính $r = 4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

(A) 64π. (B) $\dfrac{64\pi}{3}$. (C) 256π. (D) $\dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{256}{3}\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 7. (B) 5040. (C) 1. (D) 49.

Lời giải.

Số cách xếp 7 học sinh thành 1 hàng dọc là $7! = 5040$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 4; 6. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

(A) 16. (B) 12. (C) 48. (D) 8.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp là $V = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Số phức liên hợp của số phức $z = -2 + 5i$ là

(A) $\overline{z} = 2 - 5i$. (B) $\overline{z} = 2 + 5i$. (C) $\overline{z} = -2 + 5i$. (D) $\overline{z} = -2 - 5i$.

Lời giải.

Ta có số phức liên hợp của số phức $z = -2 + 5i$ là $\overline{z} = -2 - 5i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y = \log_6 x$ là

(A) $[0; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; 0)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ -36. Ⓑ $-14\sqrt{7}$. Ⓒ $14\sqrt{7}$. Ⓓ -34.

Lời giải.

Xét trên đoạn $[2;19]$ hàm số liên tục.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 21$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{7} \in [2;19] \\ x = -\sqrt{7} \notin [2;19] \end{array}\right.$.

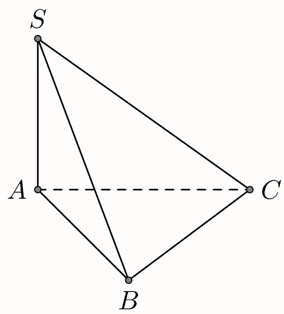
Khi đó $f(2) = -34$, $f\left(\sqrt{7}\right) = -14\sqrt{7}$, $f(19) = 6460$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x) = f\left(\sqrt{7}\right) = -14\sqrt{7}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 27.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ $60°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $90°$.



Lời giải.

Ta có $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x)$ có hai lần đổi dấu từ âm sang dương khi qua ± 1 nên số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓐ $x+2y-3z-9=0$. Ⓑ $x+y-2z-6=0$.
Ⓒ $x+2y-3z+9=0$. Ⓓ $x+y-2z+6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d nên nhận một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$.
Suy ra mặt phẳng đi qua điểm M nên có phương trình là

$$1(x-1)+2(y-1)-3(z+2)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z-9=0.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Cho a và b là hai số thực dương thoả mãn $4^{\log_2(ab)}=3a$. Giá trị của ab^2 bằng
Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có $4^{\log_2(ab)}=\left[2^{\log_2(ab)}\right]^2=(ab)^2$ nên $4^{\log_2(ab)}=3a \Leftrightarrow (ab)^2=3a \Leftrightarrow ab^2=3$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 31. Cho hai số phức $z=2+2i$ và $w=2+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng
Ⓐ 40. Ⓑ 8. Ⓒ $2\sqrt{2}$. Ⓓ $2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $z.\overline{w}=(2+2i)(2-i)=6+2i$.
Vậy $|z.\overline{w}|=|6+2i|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng
Ⓐ $\frac{\pi}{6}$. Ⓑ $\frac{13}{6}$. Ⓒ $\frac{13\pi}{6}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong đã cho là

$$x^2-1=x-1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_0^1 \left|x^2-x\right| \mathrm{d}x=\left|\int_0^1 \left(x^2-x\right) \mathrm{d}x\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\right|=\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 33. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là
Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị là 3.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Biết rằng $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $\int\limits_1^2 [2 + f(x)]\,dx$ bằng

Ⓐ $\frac{23}{4}$. Ⓑ 7. Ⓒ 9. Ⓓ $\frac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = F(x) = 3x^2$.

Khi đó $\int\limits_1^2 [2 + f(x)]\,dx = \int\limits_1^2 2\,dx + \int\limits_1^2 f(x)\,dx = 2x\Big|_1^2 + x^3\Big|_1^2 = 2 + 7 = 9$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;\,2;\,3)$, $B(1;\,1;\,1)$, $C(3;\,4;\,0)$ đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

Ⓐ $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{1}$. Ⓑ $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{1}$. .

Ⓒ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$. Ⓓ $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;\,3;\,-1)$.

Phương trình đường thẳng đi qua $A(1;\,2;\,3)$ nhận $\overrightarrow{BC} = (2;\,3;\,-1)$ là véc-tơ chỉ phương có dạng

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

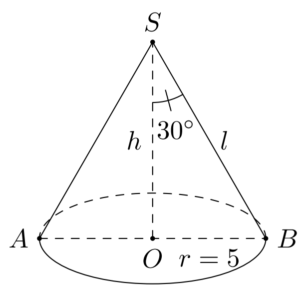
Câu 36. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 5 và góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

Ⓐ 50π. Ⓑ $\frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$. Ⓒ $\frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. Ⓓ 100π.

Lời giải.

Ta có $\sin 30^\circ = \frac{r}{l} \Rightarrow l = \frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi.5.10 = 50\pi$.



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 37. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

Ⓐ $(-5;\,5)$. Ⓑ $(-\infty;\,5)$. Ⓒ $(5;\,+\infty)$. Ⓓ $(0;\,5)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-23} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 23 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 38. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

Ⓐ $M(-2;\ 2)$. Ⓑ $Q(4;\ -2)$. Ⓒ $N(4;\ 2)$. Ⓓ $P(-2;\ -2)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + 2i \\ z = 3 - 2i \end{array}\right.$ suy ra $z_0 = 3 + 2i$, khi đó $1 - z_0 = -2 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là $P(-2;\ -2)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;\ -8)$ là

Ⓐ $(5;\ +\infty)$. Ⓑ $(5;\ 8]$. Ⓒ $[5;\ 8)$. Ⓓ $(5;\ 8)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;\ -8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{m-5}{(x+m)^2} > 0 \\ -m \notin (-\infty;\ -8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m \leq 8.$$

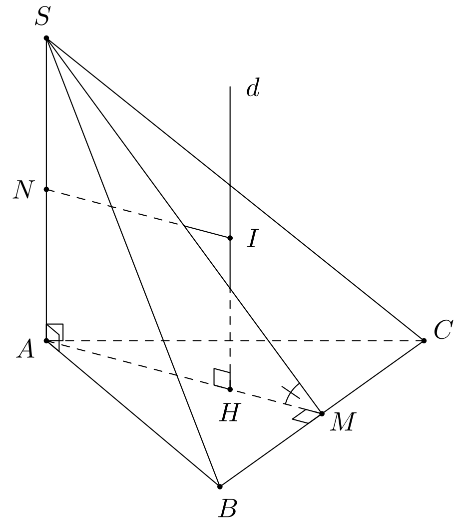
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $52\pi a^2$. Ⓑ $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{76\pi a^2}{9}$. Ⓓ $\dfrac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt



- Gọi M là trung điểm của của BC.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.
Từ đó suy ra $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SM,AM}\right) = \widehat{SMA} = 30^\circ$.

- Ta có $AM = 2a\sqrt{3}$; $SA = AM.\tan 30^\circ = 2a\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2a$.

- Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, dựng đường thẳng d đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đường thẳng d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- Mặt phẳng trung trực của đoạn SA đi qua trung điểm N của SA, cắt đường thẳng d tại điểm I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu này là $R = AI$.

- Lại có $IH = AN = \dfrac{SA}{2} = a$; $AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$;
$AI = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{\dfrac{16a^2}{3} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{57}}{3}$.

Diện tích tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{19a^2}{3} = \dfrac{76\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)\cdot f'(x)$ là

A $\dfrac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}}$.
B $\dfrac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}}$.
C $\dfrac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.
D $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int (x+1)\cdot f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x). \end{cases}$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
I &= (x+1)\cdot f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x \\
&= (x+1)\cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx \\
&= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2+3) \\
&= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2}\cdot \frac{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}} - \sqrt{x^2+3} + C \\
&= \frac{x^2+x-x^2-3}{\sqrt{x^2+3}} + C \\
&= \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

(A) Năm 2043. (B) Năm 2025. (C) Năm 2024. (D) Năm 2042.

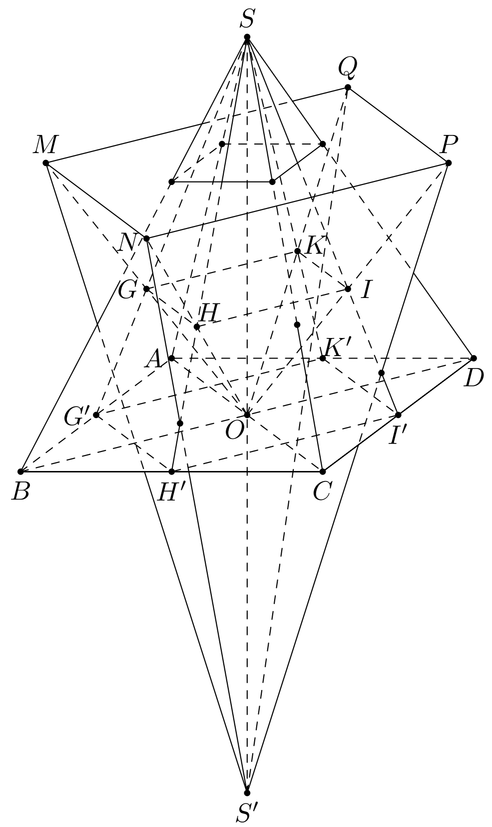
Lời giải.

Gọi S_n là diện tích rừng trồng mới của tỉnh A sau n năm.
r là phần trăm diện tích rừng trồng mới tăng thêm sau mỗi năm.
S là diện tích rừng trồng mới năm 2019.
Khi đó $S_n = S(1+r)^n$.
Với $S = 1000$ ha, $r = 6\% = 0{,}06$ suy ra $S_n = 1000\,(1+0{,}06)^n = 1000\,(1{,}06)^n$.
Để $S_n \geq 1400 \Leftrightarrow 1000\,(1{,}06)^n \geq 1400 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}06}\left(\frac{7}{5}\right) \approx 5{,}77$.
Vậy năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha là năm 2025.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

(A) $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. (B) $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. (C) $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. (D) $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi G', H', I' và K' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.

Ta có $S_{G'H'I'K'} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Gọi G, H, I và K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA.

Hai hình vuông $GHIK$ và $G'H'I'K'$ đồng dạng tỉ số bằng $\dfrac{2}{3}$ nên $S_{GHIK} = \dfrac{4}{9}\cdot S_{G'H'I'K'} = \dfrac{2}{9}a^2$.

Hai hình vuông $MNPQ$ và $GHIK$ đồng dạng tỉ số bằng 2 nên $S_{MNPQ} = 4\cdot S_{GHIK} = \dfrac{8}{9}a^2$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Ta có $\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = 2\cdot \mathrm{d}(O,(GHIK)) = \dfrac{2}{3}SO \Rightarrow \mathrm{d}(S',(MNPQ)) = \dfrac{5}{3}SO = \dfrac{5\sqrt{10}}{6}a$.

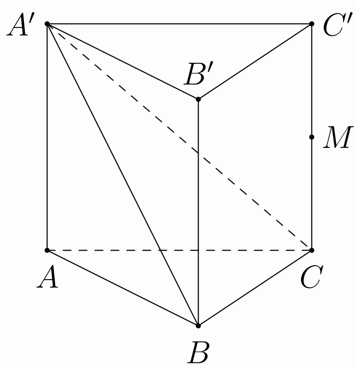
Vậy thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ là

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot S_{MNPQ}\cdot \mathrm{d}(S',(MNPQ)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}a^2\cdot\frac{5\sqrt{10}}{6}a = \frac{20\sqrt{10}a^3}{81}.$$

Chọn đáp án C □

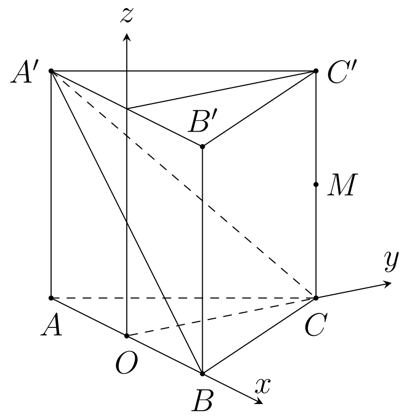
Câu 44.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$.



(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. (D) $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ và chọn $a = 2$ ta có:

- $A(-1;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $A'(-1;0;4)$, $C'\left(0;\sqrt{3};4\right)$, $M\left(0;\sqrt{3};2\right)$.
- $\overrightarrow{A'B} = (2;0;-4)$.
- $\overrightarrow{A'C} = (1;\sqrt{3};-4)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BC)$ là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right] = \left(2\sqrt{3};2;\sqrt{3}\right)$ nên phương trình của mặt phẳng $(A'BC)$ là

$$2\sqrt{3}\,(x+1) + 2\,(y-0) + \sqrt{3}\,(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z - 2\sqrt{3} = 0.$$

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ là

$$\mathrm{d}\,(M,(A'BC)) = \frac{\left|2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4\cdot 3+4+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

Vì chọn $a = 2$ nên suy ra $\mathrm{d}\,(M,(A'BC)) = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) = a(x^2-1)x = ax^3 - ax \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax^4}{4} - \dfrac{ax^2}{2} + c$.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$ nên $c = -1$.
Điểm $(1;3)$ thuộc đồ thị nên có $\dfrac{a}{4} - \dfrac{a}{2} - 1 = 3 \Rightarrow a = -16$.
Ta có hàm số $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$, $f'(x) = -16x(x^2-1)$.
Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ ta có hàm số $g(t+1) = (t+1)^2\left[f(t)\right]^4$.
$g'(t+1) = 2(t+1)[f(t)]^4 + 4(t+1)^2\left[f(t)\right]^3 f'(t) = 2(t+1)[f(t)]^3\left[f(t) + 2(t+1)f'(t)\right]$.

$$g'(t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ f(t) = 0 \\ f(t) + 2(t+1)f'(t) = 0. \end{array}\right.$$

+ Phương trình $f(t) + 2(t+1)f'(t) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -4t^4 + 8t^2 - 1 + 2(t+1)(-16)t(t^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1 = 0. \end{aligned}$$

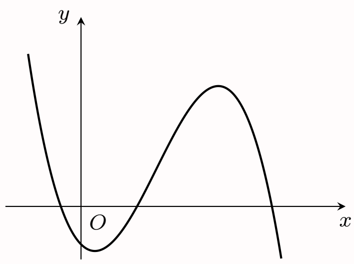
Xét vế trái: $h(t) = -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1$.
$h'(t) = -144t^3 - 96t^2 + 80t + 32 = -144(t+1)\left(t + \dfrac{1}{3}\right)\left(t - \dfrac{2}{3}\right)$.

t	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\dfrac{175}{27}$	$\nearrow$	$\dfrac{581}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đây suy ra phương trình $h(t) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.
+ Phương trình $f(t) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.
Vậy phương trình $g'(t+1) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x) = x^2\left[f(x-1)\right]^4$ có 9 điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 46.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 4. B 3. C 1. D 2.



Lời giải.

Hình dạng đồ thị cho thấy $a < 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại một điểm nằm phía dưới trục hoành nên $d < 0$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị cùng dương, khi đó $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$

mà $a < 0$ nên $c < 0$, $b > 0$.
Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.
Chọn đáp án C ☐

Câu 47. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

A $\dfrac{17}{42}$. B $\dfrac{41}{126}$. C $\dfrac{31}{126}$. D $\dfrac{5}{21}$.

Lời giải.

Tập các số S có $\mathrm{A}_9^4 = 3024$ số, suy ra $n(\Omega) = 3024$.
Gọi A là biến cố lấy được số thuộc tập S mà số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ.
Ta có các trường hợp sau:

- TH1: số đó có thứ tự: lẻ, chẵn, lẻ, chẵn: lúc đó có $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ số.
- TH2: số đó có thứ tự: lẻ, chẵn, chẵn, tùy ý: lúc đó có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 360$ số.
- TH3: số đó có thứ tự: chẵn, chẵn, chẵn, tùy ý: lúc đó có $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 = 144$ số.
- TH4: số đó có thứ tự: chẵn, chẵn, lẻ, chẵn: lúc đó có $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ số.
- TH5: số đó có thứ tự: chẵn, lẻ, chẵn, tùy ý: lúc đó có $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 = 360$ số.

Vậy ta có: $n(A) = 240 + 360 + 144 + 120 + 360 = 1224$.
Do đó xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1224}{3024} = \dfrac{17}{42}$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 48. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

A $\dfrac{65}{8}$. B $\dfrac{33}{4}$. C $\dfrac{49}{8}$. D $\dfrac{57}{8}$.

Lời giải.

$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x}$. (1)
Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \ln 2 > 0, \forall t \geq 0$.
Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow 2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x+3) + (y+2) \geq \frac{13}{2}.$$

Ta có: $P = (x+3)^2 + (y+2)^2 - 13 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = P + 13$.
Ta lại có: $\dfrac{13}{2} \leq (x+3) + (y+2) \leq \sqrt{2\left[(x+3)^2 + (y+2)^2\right]} = \sqrt{2(P+13)}$

$$\Leftrightarrow \frac{169}{4} \leq 2(P+13) \Leftrightarrow P \geq \frac{65}{8}.$$

Dấu xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{65}{8}$.
Chọn đáp án A ☐

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

Ⓐ 55. Ⓑ 28. Ⓒ 29. Ⓓ 56.

Lời giải.

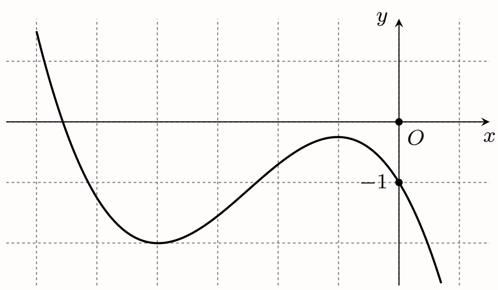
Điều kiện $x+y>0$ và $x^2+y>0$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & \log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y \geq 4^{\log_3(x+y)} \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y \geq (x+y)^{\log_3 4} \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x > (x+y)^{\log_3 4}-(x+y). \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t$. (2)
Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1).
Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t.
Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t\geq 1$.
Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\leq 781 \Leftrightarrow -27\leq x\leq 28$ (do x nguyên).
Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 50.
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 8.



Lời giải.

Ta có $f\left(x^3f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x^3f(x)=a & (-3<a<-1) & (1) \\ x^3f(x)=b & (-5<b<-3) & (2) \\ x^3f(x)=0 & & (3) \end{array}\right.$, với $a,b<0$.

+Với $m<0$, xét phương trình $x^3f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0, \forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	‖	+
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.
Suy ra mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm.
+Xét phương trình (3) : $x^3f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).
Vậy phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.
Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 22

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 15π. Ⓑ 25π. Ⓒ 30π. Ⓓ 75π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rl = 30\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Cho khối nón có bán kính $r = 2$, chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{20\pi}{3}$. Ⓑ 20π. Ⓒ $\dfrac{10\pi}{3}$. Ⓓ 10π.

Lời giải.

Thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 5 = \dfrac{20\pi}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 3. Biết $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^3 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

Ⓐ $\vec{u}_3 = (3;-1;-2)$. Ⓑ $\vec{u}_4 = (4;2;3)$. Ⓒ $\vec{u}_2 = (4;-2;3)$. Ⓓ $\vec{u}_1 = (3;1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (4;-2;3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 5. Cho khối cầu có bán kính $r = 2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

(A) 16π. (B) $\dfrac{32\pi}{3}$. (C) 32π. (D) $\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 2^3}{3} = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0;5;2)$. (B) $(0;5;0)$. (C) $(3;0;0)$. (D) $(0;0;2)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3;0;0)$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2) = 3$ là

(A) $x = 6$. (B) $x = 8$. (C) $x = 11$. (D) $x = 10$.

Lời giải.

Điều kiện $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Xét phương trình $\log_2(x-2) = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 2^3 \Leftrightarrow x = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

(A) 2. (B) -2. (C) 3. (D) -1.

Lời giải.

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $y = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{-3} = 1$. (B) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$. (C) $\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. (D) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=-2$. Ⓓ $x=-1$.

Lời giải.

Ta có $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2;6;7$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

Ⓐ 28. Ⓑ 14. Ⓒ 15. Ⓓ 84.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2;6;7$ là $V=2\cdot 6\cdot 7=84$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Cho khối chóp có diện tích $B=2$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khốp chóp bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Lời giải.

$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3=2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

Ⓐ $\overline{z}=2+5i$. Ⓑ $\overline{z}=-2+5i$. Ⓒ $\overline{z}=2-5i$. Ⓓ $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là $\overline{z}=2+5i$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và công bội $q=4$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 64. Ⓑ 81. Ⓒ 12. Ⓓ $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

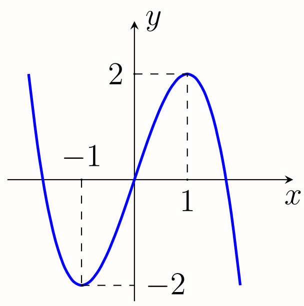
Ta có $u_2=qu_1=3\cdot 4=12$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15.

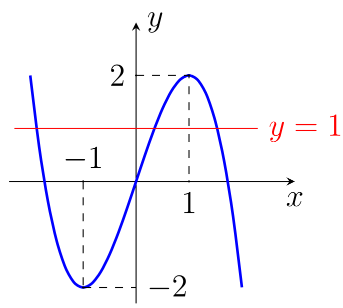
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.



Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 1$
Từ đồ thị ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1$ ta có hình vẽ bên.
Vì đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có ba nghiệm phân biệt



Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng
(A) $3 + i$. (B) $-3 - i$. (C) $3 - i$. (D) $-3 + i$.

Lời giải.

Ta có: $z_1 + z_2 = 1 - 2i + 2 + i = 3 - i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
(A) $(-2; 2)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
Chọn đáp án (B) □

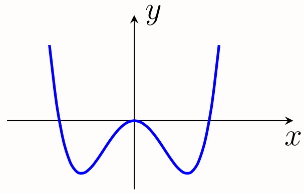
Câu 18. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là:
(A) $y = \dfrac{1}{2}$. (B) $y = -1$. (C) $y = 1$. (D) $y = 2$.

Lời giải.

Ta có:
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2}{1} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2}{1} = 2$.
Vậy $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 19.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên



(A) $y = -x^4 + 2x^2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2$.
(C) $y = x^4 - 2x^2$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị thị ta thấy đây là đồ thị của hàm trùng phương có $a > 0$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

(A) 32.
(B) 8.
(C) 4.
(D) 16.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{16} = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

(A) -2.
(B) 2.
(C) 1.
(D) -1.

Lời giải.

$M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -2 + i$. Vậy phần thực của z bằng -2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

(A) $(-\infty;0)$.
(B) $(0;+\infty)$.
(C) $(-\infty;+\infty)$.
(D) $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (0;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 1.
(B) 25.
(C) 5.
(D) 120.

Lời giải.

Số cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc là một hoán vị 5 phần tử.

Vậy có $5! = 120$ cách xếp.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

(A) $3 + \log_a b$.
(B) $3\log_a b$.
(C) $\dfrac{1}{3} + \log_a b$.
(D) $\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^3} b = \dfrac{1}{3}\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 25. $\int x^4\,dx$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{5}x^5 + C$. Ⓑ $4x^3 + C$. Ⓒ $x^5 + C$. Ⓓ $5x^5 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^4\,dx = \dfrac{1}{5}x^5 + C$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^3 [1 + f(x)]\,dx$ bằng

Ⓐ 20. Ⓑ 22. Ⓒ 26. Ⓓ 28.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 [1 + f(x)]\,dx = \int\limits_1^3 dx + \int\limits_1^3 f(x)\,dx = \left(x + x^3\right)\Big|_1^3 = 28.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hình nón có bán kính bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

Ⓐ 18π. Ⓑ 36π. Ⓒ $6\sqrt{3}\pi$. Ⓓ $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Tam giác SAB có $SA = SB = \ell$, $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle SAB$ đều có $r = OA = 3$.
$\Rightarrow SA = AB = 2OA = 6$.
Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r\ell = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2$ và $y = 3x - 2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{9}{2}$. Ⓑ $\dfrac{9\pi}{2}$. Ⓒ $\dfrac{125}{6}$. Ⓓ $\dfrac{125\pi}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 3x\right|\,dx = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7} < 4$ là

Ⓐ $(-3; 3)$. Ⓑ $(0; 3)$. Ⓒ $(-\infty; 3)$. Ⓓ $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-7} < 4 \Leftrightarrow x^2 - 7 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $9^{\log_3(ab)} = 4a \Leftrightarrow (ab)^2 = 4a \Leftrightarrow ab^2 = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$. Mặt phẳng đi qua điểm qua M và vuông góc với d có phương trình là

Ⓐ $2x+3y+z-3=0$. Ⓑ $2x-y+2z-9=0$.

Ⓒ $2x+3y+z+3=0$. Ⓓ SAM.

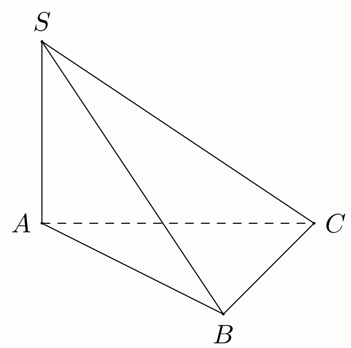
Lời giải.

Ta có $(P) \perp d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = \vec{u} = (2;3;1)$.
Khi đó mặt phẳng (P) có phương trình $2x+3y+z-3=0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32.

Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



Ⓐ $45°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $30°$.

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mp (ABC) $\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = a\sqrt{10}$.

Tam giác SAC vuông tại A có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

Ⓐ $P(-1;-3)$. Ⓑ $M(-1;3)$. Ⓒ $N(3;-3)$. Ⓓ $Q(3;3)$.

Lời giải.

$z^2+4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2+3i \\ z=-2-3i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_0 = -2+3i \Rightarrow 1-z_0 = 3-3i$.
Vậy điểm biểu diễn cho số phức $1-z_0$ là $N(3;-3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Đường thẳng đi qua $A(1;2;0)$ và song song với BC có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.
B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{3}$.
C. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{3}$.
D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC}=(1;2;-1)$.
Đường thẳng đi qua $A(1;2;0)$ và song song với BC nhận $\overrightarrow{BC}=(1;2;-1)$ làm vecto chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$.
B. -63.
C. $-20\sqrt{10}$.
D. -52.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[2;19]$.
Ta có $f'(x)=3x^2-30$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{10}\in[2;19]\\ x=-\sqrt{10}\notin[2;19]\end{array}\right.$.
Mà $f(2)=-52$; $f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}\approx-63,25$; $f(19)=6289$.
Vậy $\min\limits_{[2;19]}f(x)=-20\sqrt{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 1.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi qua các điểm $x=\pm2; x=1$.
Do đó hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hai số phức $z=4+2i$ và $\mathrm{w}=1+\mathrm{i}$. Môđun của số phức $z.\overline{\mathrm{w}}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.
B. 8.
C. $2\sqrt{10}$.
D. 40.

Lời giải.

Ta có $w=1+i\Rightarrow\overline{w}=1-i$.
Nên $z.\overline{w}=6-2i\Rightarrow|z.\overline{w}|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án C □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 38. Số giao điêm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$.

A 3. B 0. C 1. D 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 + x^2$ và $y = x^2 + 5x$ là

$x^3 + x^2 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị $y = x^3 + x^2$ và đồ thị $y = x^2 + 5x$ có 3 giao điểm.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong năm 2019 , diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

A Năm 2029. B Năm 2051. C Năm 2030. D Năm 2050.

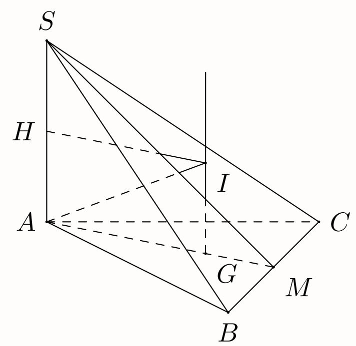
Lời giải.

Bài toán trên giống bài toán lãi kép khi gửi tiền vào Ngân hàng:
Ta đặt $S_0 = 900$ha là diện tích rừng trồng mới của tỉnh A năm 2019, $S_N = 1700$ là diện tích rừng trồng mới sau Nnăm (kể từ sau năm 2019) của tỉnh A mà mỗi năm đều tăng $r\% = 6\% = 0.06$ so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước.
Sau một năm: $S_1 = (1 + 0.06) \cdot S_0$.
Sau hai năm: $S_2 = S_1 + S_1.0.06 = 1.06^2 \cdot S_0$.
...
Sau N năm: $S_N = (1 + r\%)^N \cdot S_0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1700 < 1.06^N \cdot 900 \\ &\Leftrightarrow 1.06^N > \frac{17}{9} \\ &\Leftrightarrow N > \log_{1.06} \frac{17}{9} \approx 10.915. \end{aligned}$$

Vậy năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700ha là 2030.
Chọn đáp án C □

Câu 40.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng



A $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. B $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. C $\dfrac{43\pi a^2}{9}$. D $21\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là trung điểm cạnh SA và G là trọng tâm tam giác ABC.

Do tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(2a)\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SAM, ta có $SA = AM.\tan\widehat{SMA} = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$.

Suy ra $AH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm G. Khi đó, d là trục của tam giác ABC.

Dựng đường trung trực của cạnh SA cắt đường thẳng d tại điểm I. Khi đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và bán kính $R = IA$.

Trong tam giác vuông IGA, ta có $IA^2 = IG^2 + AG^2 = \dfrac{43a^2}{12} \Rightarrow R^2 = IA^2 = \dfrac{43a^2}{12}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\cdot\dfrac{43a^2}{12} = \dfrac{43\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng$(-\infty;-5)$ là

(A) $(2;5]$. (B) $[2;5)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(2;5)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{-m\}$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow y' > 0,\ \forall x \in (-\infty;-5)$.
- Ta có $\dfrac{m-2}{(x+m)^2} > 0,\ \forall x \in (-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ -m \notin (-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$
- Vậy tập hợp các giá trị của tham số m cần tìm là $(2;5]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

(A) $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$. (B) $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$. (C) $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. (D) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
- Do đó $g(x) = (x+1)f'(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
- Ta lại có $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x^2+1) + \int \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

- Vậy $\int g(x)\,\mathrm{d}x = -\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

Chọn đáp án D

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A $\dfrac{9}{35}$. B $\dfrac{16}{35}$. C $\dfrac{22}{35}$. D $\dfrac{19}{35}$.

Lời giải.

- Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_7^4 = 840$.
- Gọi A là biến cố "số được được không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn"
- Giả sử số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$
- Trường hợp 1: cả 4 số đều lẻ. Số cách chọn là 4!
- Trường hợp 2: Ba chữ số lẻ và một chữ số chẵn. Số cách chọn là $C_4^3C_3^1.4!$
- Trường hợp 3: Hai chữ số lẻ và hai chữ số chẵn:
- Xét sơ đồ: C-L-C-L, L-C-L-C, C-L-L-C: Số cách chọn 3.4.3.3.2
- Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 4! + 4!.C_4^3.C_3^1 + 3.4.3.3.2 = 528$
- Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{22}{35}$

Chọn đáp án C

Câu 44. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$ là

A 7. B 5. C 9. D 11.

Lời giải.

- Ta có : $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x(x^2-1)$
- Ta có $g'(x) = 2x^3.f(x-1).[2f(x-1) + x.f'(x-1)]$
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ 2f(x-1) + x.f'(x-1) = 0 \end{array}\right.$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

- Phương trình $x^3 = 0$ có $x = 0$ (nghiệm bội ba).
- Phương trình $f(x-1) = 0$ có cùng số nghiệm với phương trình $f(x) = 0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.
- Phương trình $2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0$ có cùng số nghiệm với phương trình :

$$\begin{aligned} 2f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(4x^4 - 8x^2 + 3) + 16x(x+1)(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 24x^4 + 16x^3 - 32x^2 - 16x + 6 = 0 \end{aligned}$$

có 4 nghiệm phân biệt.

- Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x) = 0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Xét các số thực không âm x và y thoản mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

(A) $\dfrac{33}{8}$. (B) $\dfrac{9}{8}$. (C) $\dfrac{21}{4}$. (D) $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải.

- Ta có $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \geq (3-2x)\,2^{3-2x}(1)$
- Xét trường hợp: $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$.

$$(1) \text{ đúng với mọi giá trị } \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \dfrac{21}{4} \ (2)$$

- Xét trường hợp: $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \dfrac{3}{2}$
- Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \geq \dfrac{3}{2} - x$$

- Khi đó:

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq x^2 + \left(\dfrac{3}{2} - x\right)^2 + 2x + 2(3-2x) = 2x^2 - 5x + \dfrac{33}{4} = 2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{41}{8} \geq \dfrac{41}{8} \ (3)$$

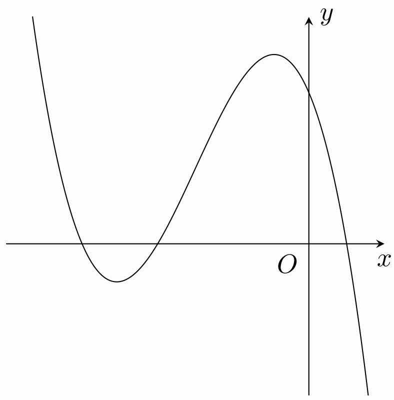
- So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\dfrac{41}{8}$ khi $x = \dfrac{5}{4}, y = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các a, b, c, d?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.



Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên

$$\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0. \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng của S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}a^3$. (B) $\dfrac{40\sqrt{6}}{81}a^3$. (C) $\dfrac{10\sqrt{6}}{81}a^3$. (D) $\dfrac{20\sqrt{6}}{81}a^3$.

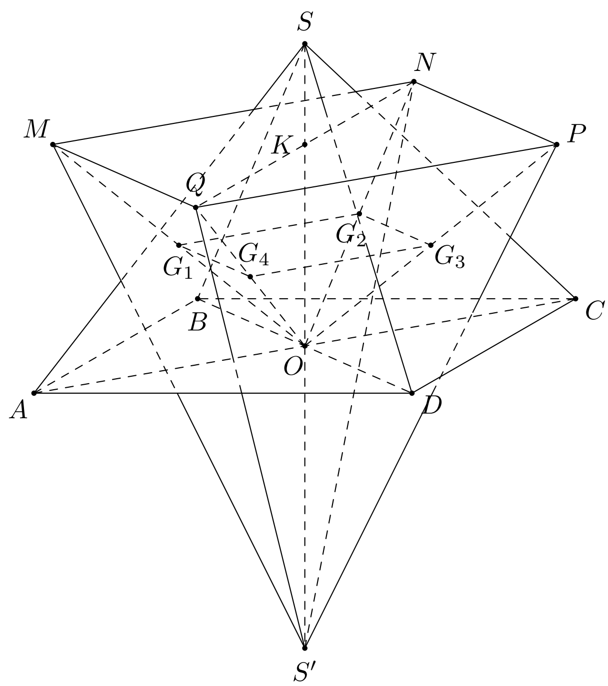
Lời giải.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên suy ra $MNPQ$ là hình vuông. Gọi K là tâm hình chữ nhật $MNPQ$, ta có

$$S'K = S'O + OK = SO + \frac{2}{3}SO = \frac{5a\sqrt{6}}{6}.$$

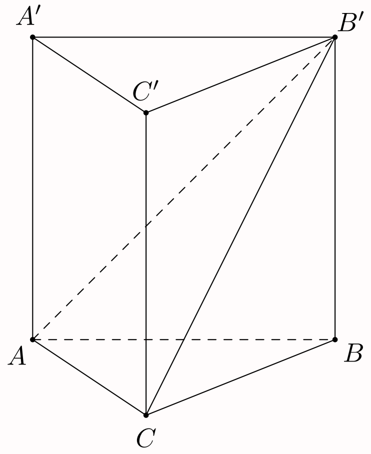
$$S_{MNPQ} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{8}{9}a^2.$$

Vậy $V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot S'K = \dfrac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.



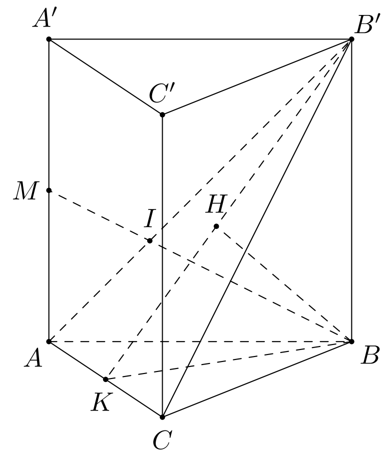
Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA'=2a$. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.   (B) $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.   (C) $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.   (D) $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải.



Gọi $I=BM\cap AB'$ và K là trung điểm AC .
Ta có

$$\frac{\mathrm{d}\,(M,(AB'C))}{\mathrm{d}\,(B,(AB'C))}=\frac{MI}{BI}=\frac{MA}{BB'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\,(M,(AB'C))=\frac{1}{2}\mathrm{d}\,(B,(AB'C))=\frac{BH}{2}.$$

Xét tam giác $BB'K$ có

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{B'B^2}+\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow BH=\frac{2\sqrt{57}a}{19}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(M,(AB'C))=\dfrac{BH}{2}=\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\geq\log_2(x+y)$?

(A) 89.   (B) 46.   (C) 45.   (D) 90.

Lời giải.

Cách 1:

Điều kiện $\begin{cases}x^2+y>0\\x+y>0.\end{cases}$

Đặt $k=x+y\in\mathbb{Z}^+$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x^2+y)-\log_2(x+y)\geq 0$.

Suy ra $f'(y)=\dfrac{1}{(x^2+y)\cdot\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y)\cdot\ln 2}<0\Rightarrow f(y)$ nghịch biến.

Xét hàm số $g(k)=f(k-x)=\log_3(x^2+k-x)-\log_2 k,\ k\in\mathbb{Z}^+$.

Do hàm số f nghịch biến nên hàm số g cũng nghịch biến.
Giả sử k_0 là nghiệm của phương trình $g(k) = 0$.
Suy ra $\begin{cases} 1 \le k \le k_0 \\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow k_0 < 128.$
Nên

$$\begin{aligned} g(128) < 0 &\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+128-x\right) < \log_2 128 \\ &\Rightarrow x^2 - x + 128 < 3^{\log_2 128} \\ &\Rightarrow -44 \le x \le 45. \end{aligned}$$

Vậy có 90 số nguyên x.

Cách 2:
Điều kiện $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0. \end{cases}$ Ta có

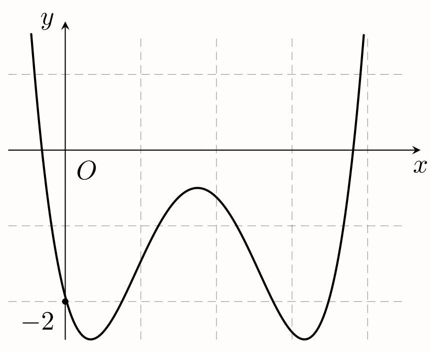
$$\begin{aligned} & \log_3\left(x^2+y\right) \ge \log_2(x+y) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y \ge 3^{\log_2(x+y)} \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y \ge (x+y)^{\log_2 3} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x \ge (x+y)^{\log_2 3} - (x+y). \qquad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = x+y$ thì (1) trở thành $x^2 - x \ge t^{\log_2 3} - t$. (2)
Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình (2) có không quá 127 nghiệm t.
Ta có hàm số $f(t) = t^{\log_2 3} - t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2 - x > 128^{\log_2 3} - 128 = 2059$ thì sẽ có ít nhất 127 nghiệm nguyên $t \ge 1$.
Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \le 2059 \Leftrightarrow -44 \le x \le 45$ (do x nguyên).
Vậy có 90 số nguyên x

Chọn đáp án D □

Câu 50.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là

A 8. B 12. C 6. D 9.



Lời giải.

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x) = a & (1) \\ x^2 f(x) = b & (2) \\ x^2 f(x) = c & (3) \\ x^2 f(x) = 0 & (4) \end{array}\right.$, với $a,\ b,\ c > 0$.

Với $m > 0$, xét phương trình $x^2 f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{m}{x^2}$. $(*)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{m}{x^2}, m > 0$, ta có $g'(x) = \dfrac{-2m}{x^3}, \forall x \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên và hình vẽ, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và khoảng $(0;+\infty)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có đúng một nghiệm. Do đó phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm. Từ đó suy ra mỗi phương trình (1), (2), (3) có 2 nghiệm phân biệt.

- Phương trình (4) tương đương với $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình (4) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án D $\square$

—— HẾT ——

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 23

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là

Ⓐ $(-\infty;\, 0)$. Ⓑ $[0;\, +\infty)$. Ⓒ $(0;\, +\infty)$. Ⓓ $(-\infty;\, +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là $(0;\, +\infty)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 7$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 42π. Ⓑ 147π. Ⓒ 49π. Ⓓ 21π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi \cdot 7 \cdot 3 = 42\pi$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

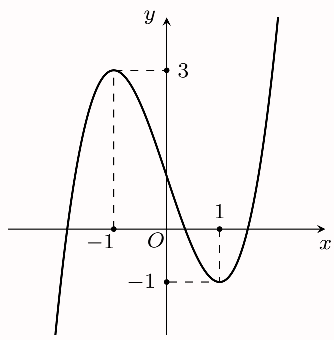
Ⓐ $\vec{u}_2 = (4;\, -2;\, 3)$. Ⓑ $\vec{u}_4 = (4;\, 2;\, -3)$.
Ⓒ $\vec{u}_3 = (3;\, -1;\, -2)$. Ⓓ $\vec{u}_1 = (3;\, 1;\, 2)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_3 = (3;\, -1;\, -2)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

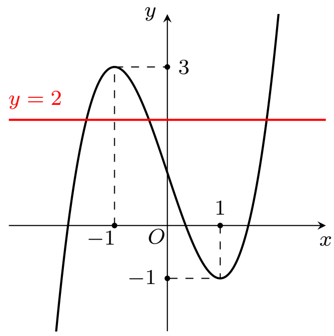
Câu 4.
Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Lời giải.

Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm thực.



Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Biết $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của $\int\limits_2^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A 36. **B** 3. **C** 12. **D** 8.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 2\cdot 6 = 12.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ là

A $y = \dfrac{1}{3}$. **B** $y = 3$. **C** $y = -1$. **D** $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+1}{x-1} = 3$.

Do đó đường thẳng $y = 3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A\,(8\,;\,1\,;\,2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A $(0\,;\,1\,;\,0)$. **B** $(8\,;\,0\,;\,0)$. **C** $(0\,;\,1\,;\,2)$. **D** $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $A\,(8\,;\,1\,;\,2)$ lên trục Ox là $(8\,;\,0\,;\,0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Nghiệm của phương trình $3^{x+2} = 27$ là

A $x = -2$. **B** $x = -1$. **C** $x = 2$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$3^{x+2} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 8π. Ⓑ $\dfrac{8\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{16\pi}{3}$. Ⓓ 16π.

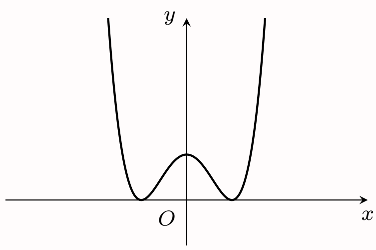
Lời giải.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \dfrac{16\pi}{3}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



Ⓐ $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số bậc 4 có hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$ thì $\log_{a^4} b$ bằng

Ⓐ $4 + \log_a b$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}\log_a b$. Ⓒ $4\log_a b$. Ⓓ $\dfrac{1}{4} + \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a^4 b = \dfrac{1}{4}\log_a b$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$. Bán kính của (S) bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 32. Ⓒ 16. Ⓓ 8.

Lời giải.

Mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ có bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 - 5i$ là

Ⓐ $\bar{z} = -3 - 5i$. Ⓑ $\bar{z} = 3 + 5i$. Ⓒ $\bar{z} = -3 + 5i$. Ⓓ $\bar{z} = 3 - 5i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 3 - 5i$ là $\bar{z} = 3 + 5i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

(A) 7. (B) 42. (C) 12. (D) 14.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 là $V = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$, chiều cao $h = 8$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 24. (B) 12. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 8 = 8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3; 0)$. (B) $(-3; 3)$. (C) $(0; 3)$. (D) $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 3. (B) -3. (C) -1. (D) 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 64. Ⓑ 81. Ⓒ 12. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

$u_2 = u_1 \cdot q = 4 \cdot 3 = 12$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Cho khối cầu có bán kính $r = 2$. Thể tích khối cầu đã cho là

Ⓐ $\dfrac{32\pi}{3}$. Ⓑ 16π. Ⓒ 32π. Ⓓ $\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -1.

Lời giải.

Điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2\mathrm{i}$ nên phần thực là $a = -1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 21. $\displaystyle\int x^5\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $5x^4 + C$. Ⓑ $\dfrac{1}{6}x^6 + C$. Ⓒ $x^6 + C$. Ⓓ $6x^6 + C$.

Lời giải.

$$\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + C.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) = 2$ là

Ⓐ $x = 11$. Ⓑ $x = 10$. Ⓒ $x = 7$. Ⓓ $x = 8$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Ta có $\log_3(x-2) = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 11$ (thỏa mãn điều kiện $x > 2$).

Vậy phương trình $\log_3(x-2) = 2$ có nghiệm là $x = 11$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1$. Ⓑ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{-3} = 1$.

Ⓒ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1$. Ⓓ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Với 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$, theo phương trình đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng $(ABC): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 8. (B) 1. (C) 40320. (D) 64.

Lời giải.

Mỗi cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc là một hoán vị của tập có 8 phần tử.
Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc là: $P_8 = 8! = 40320$ (cách).
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = 3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

(A) $4-2i$. (B) $-4+2i$. (C) $4+2i$. (D) $-4-2i$.

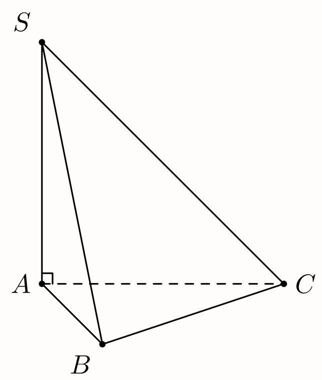
Lời giải.

Ta có $z_1+z_2 = 1-3i+3+i = 4-2i$.
Vậy $z_1+z_2 = 4-2i$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 90°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 30°.



Lời giải.

Ta có ΔABC vuông tại B.
Có $AC^2 = AB^2+BC^2 = a^2+2a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.
Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$.

Trong ΔSCA có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 30^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(a^2b)} = 4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

$9^{\log_3(a^2b)} = 4a^3 \Leftrightarrow 3^{2\log_3(a^2b)} = 4a^3 \Leftrightarrow 3^{\log_3(a^2b)^2} = 4a^3 \Leftrightarrow (a^2b)^2 = 4a^3 \Leftrightarrow a^4b^2 = 4a^3 \Leftrightarrow ab^2 = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

Ⓐ $x+2y-2z+5=0$. Ⓑ $3x-2y+2z-17=0$.
Ⓒ $3x-2y+2z+17=0$. Ⓓ $x+2y-2z-5=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(3;-2;2)$ và vuông góc với $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.
Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;-2)$.
$(\alpha)\perp d$ nên vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(1;2;-2)$.
Phương trình mặt phẳng (α) là

$$1(x-3)+2(y+2)-2(z-2)=0\Leftrightarrow x+2y-2z+5=0.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ -72. Ⓑ $-22\sqrt{11}$. Ⓒ -58. Ⓓ $22\sqrt{11}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2-33$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=11\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{11}$.
Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$.
Ta có $f(2)=-58$; $f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$; $f(19)=6232$.
Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-\infty;2)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-1}<8\Leftrightarrow 2^{x^2-1}<2^3\Leftrightarrow x^2-1<3\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;2)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

Ⓐ $\dfrac{125\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{125}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

$x^2-3=x-3\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1.\end{array}\right.$

$$S=\int_0^1\left|x^2-3-(x-3)\right|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\right|=\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 32. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. (B) 32π. (C) 64π. (D) $\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

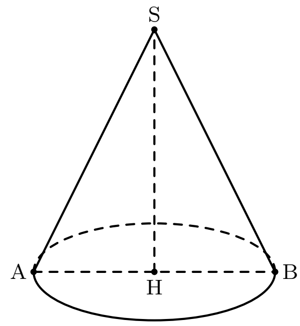
Lời giải.

Ta có $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HSB} = 30^\circ$; $HB = 4$.

Áp dụng tỉ số lượng giác cho $\triangle SHB$ ta có

$$\sin 30^\circ = \frac{HB}{SB} \Rightarrow SB = \frac{HB}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot HB \cdot SB = \pi \cdot 8 \cdot 4 = 32\pi$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

(A) $M(3; -3)$. (B) $P(-1; 3)$. (C) $Q(1; 3)$. (D) $N(-1; -3)$.

Lời giải.

$z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i. \end{array}\right.$

Vậy $z_0 = 2 + 3i$.

$1 - z_0 = 1 - (2 + 3i) = -1 - 3i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là $N(-1; -3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Quan sát bảng xét dấu $f'(x)$ ta có $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua các điểm $x = \pm 2$.

Do hàm số đã cho liên tục trên nên hàm số có 2 điểm cực đại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 0)$; $B(1; 0; 1)$; $C(3; 1; 0)$. Đường thẳng đi qua $A(1; 1; 0)$ và song song với BC có phương trình

(A) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. (B) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. (D) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm đi qua $A(1;1;0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2;1;-1)$.
Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hai số phức $z = 1+3i$ và $w = 1+i$. Môđun của số phức $z \cdot \overline{w}$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 20. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $w = 1+i \Rightarrow \overline{w} = 1-i$.
$z \cdot \overline{w} = (1+3i)(1-i) = 4+2i$.
$|z \cdot \overline{w}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm thực phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm sau:

$$x^3 - x^2 = -x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là 3.
Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 10. (B) 8. (C) $\dfrac{26}{3}$. (D) $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.

Do $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = (F(x))' = (x^2)' = 2x$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (1+2x)\,\mathrm{d}x = \left(x+x^2\right)\Big|_1^3 = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

(A) $\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. (B) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. (C) $\dfrac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. (D) $\dfrac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

Lời giải.

Họ các nguyên hàm của hàm số $g(x)$ là $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = (x+1) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$ ta có

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x.$$

Tính $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2=x^2+4 \Rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$. Do đó

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C = \sqrt{x^2+4}+C.$$

Vậy, $\int g(x)\,\mathrm{d}x = (x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

Chọn đáp án B

Câu 40. Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

A Năm 2029. **B** Năm 2028. **C** Năm 2048. **D** Năm 2049.

Lời giải.

Ta có $S_n = 1400\,\text{ha}$; $A = 800\,\text{ha}$; $r = 6\%$.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow A(1+r)^n > 1400$

$\Leftrightarrow n > \log_{1+r}\left(\frac{1400}{A}\right) \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\left(\frac{1400}{800}\right) \Leftrightarrow n > 9{,}609 \Rightarrow n = 10.$

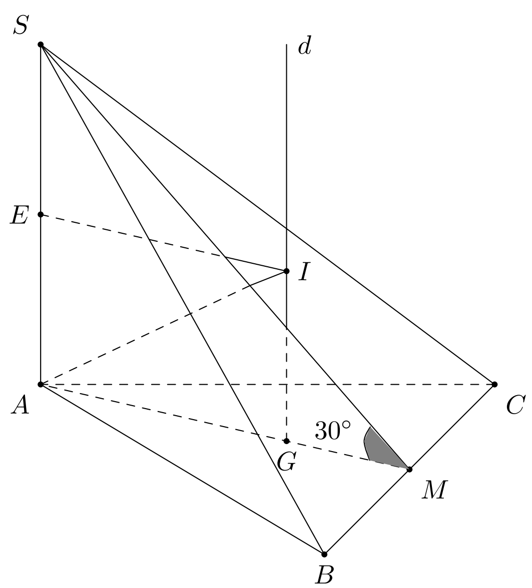
Vậy năm đầu tiên là năm 2029.

Chọn đáp án A

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **D** $13\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, ta có góc $\widehat{SMA}$ là góc giữa (SBC) và $(ABC) \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^\circ$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó ta có:

$AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SA = AM \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = a$.

Qua G kẻ đường thẳng d vuông góc với $(ABC) \Rightarrow d \parallel SA$.

Gọi E là trung điểm của SA, qua E kẻ mặt phẳng (P) sao cho: $\begin{cases} (P) \perp SA \\ (P) \cap d = \{I\} \end{cases}$

Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ và khối cầu đó có bán kính là:

$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty, -6)$ là

(A) $(3; 6]$. (B) $(3; 6)$. (C) $(3; +\infty)$. (D) $[3; 6)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m-3}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6) \Leftrightarrow y' > 0\ \forall x \in (-\infty; -6)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{13}{35}$. (C) $\dfrac{9}{35}$. (D) $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{A}_7^4 = 840$ (số).

Gọi số cần lập có dạng $abcd$.

Gọi A là biến cố "Số tự nhiên có 4 số đôi một khác nhau và không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ".

Khi đó có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Trong 4 chữ số a, b, c, d có 1 chữ số lẻ.

- Chọn 1 vị trí trong 4 vị trí để xếp 1 chữ số lẻ có $4 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 16$ (cách).
- Còn 3 vị trí còn lại xếp 3 số chẵn khác nhau có $3! = 6$ (cách).

Vậy có $4 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 3! = 16 \cdot 6 = 96$ (số) $abcd$ trong đó có 1 chữ số lẻ.

Trường hợp 2: Trong 4 chữ số a, b, c, d có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Có các khả năng xảy ra:

- Số cần lập có thứ tự: "chẵn, lẻ, chẵn, lẻ" có $\mathrm{A}_3^2 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 6 \cdot 12 = 72$ (số).
- Số cần lập có thứ tự: "lẻ, chẵn, lẻ, chẵn" có $\mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_3^2 = 12 \cdot 6 = 72$ (số).
- Số cần lập có thứ tự: "lẻ, chẵn, chẵn, lẻ" có $\mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_3^2 = 12 \cdot 6 = 72$ (số).

Khi đó có $3 \cdot \mathrm{A}_3^2 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 3 \cdot 72 = 216$ (số) $abcd$ trong đó có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Vậy số số tự nhiên có 4 số đôi một khác nhau và không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ là $n(A) = 96 + 216 = 312$ (số).

Vậy xác suất chọn được 1 số có không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ là

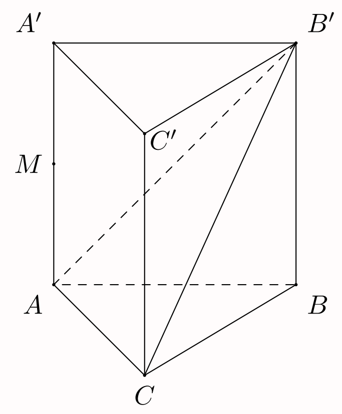
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{312}{840} = \frac{13}{35}.$$

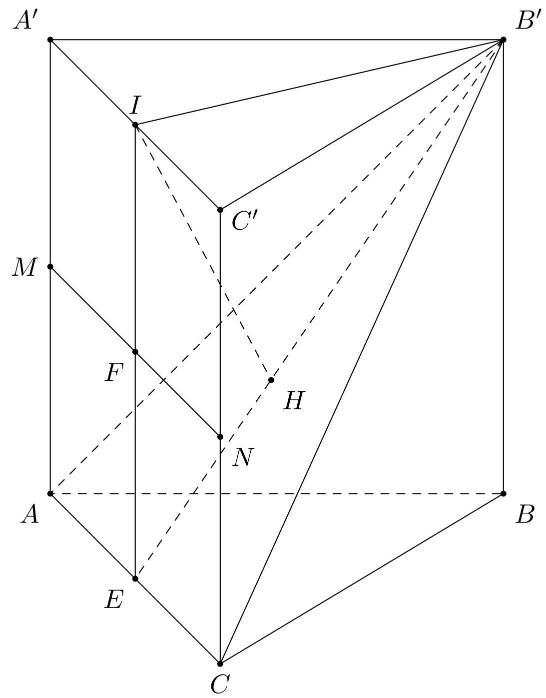
Chọn đáp án (B) □

Câu 44.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. (C) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.



Lời giải.



Gọi N là trung điểm của CC' , suy ra $MN \parallel AC$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, MN và $I = EF \cap A'C'$ suy ra I là trung điểm $A'C'$.
Từ đó ta có $\mathrm{d}(M,(AB'C)) = \mathrm{d}(F,(AB'C)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(I,(AB'C))$.
Ta có tam giác $\triangle AB'C$ cân tại B' nên $AC \perp B'E$ (1).
Mặt khác ta lại có $AC \perp IE$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $AC \perp (IB'E) \Rightarrow (IB'E) \perp (AB'C)$.
Trong tam giác $\triangle IB'E$ kẻ $IH \perp B'E$ suy ra $IH = \mathrm{d}(I,(AB'C))$.
Xét tam giác $\triangle IB'E$ vuông tại I có

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{B'I^2} + \frac{1}{IE^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{21}a}{7} \Rightarrow \mathrm{d}(M,(AB'C)) = \frac{\sqrt{21}a}{14}.$$

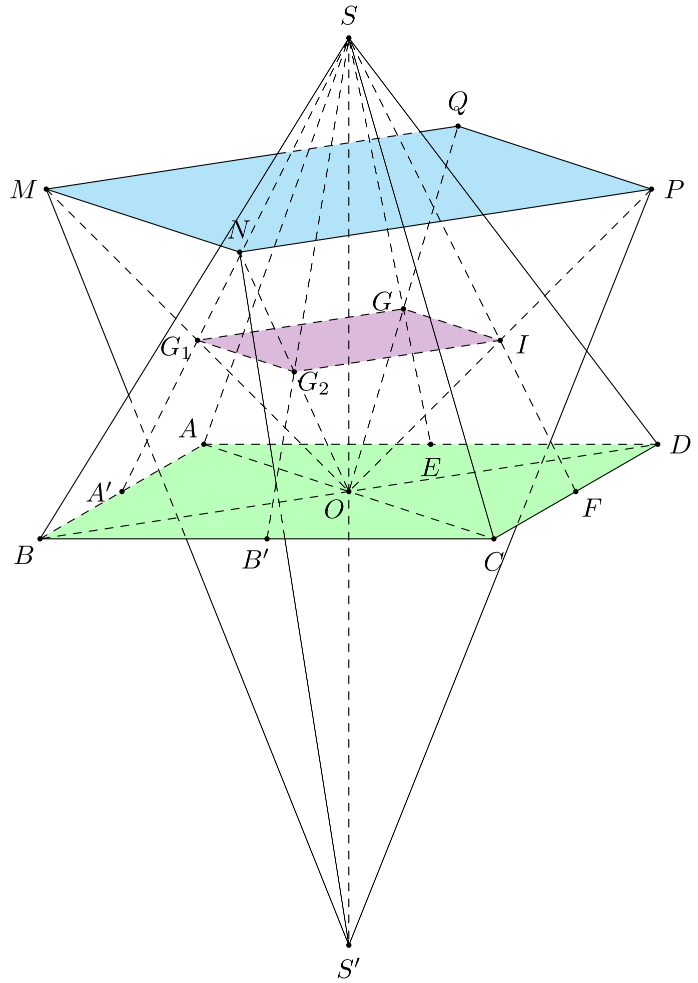
Vậy $\mathrm{d}(M,(AB'C)) = \frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. (B) $\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. (C) $\dfrac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. (D) $\dfrac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải.



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng $a \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G, I lần lượt là trọng tâm các tam giác SDA, SDC.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm DA, DC.

Ta có $GI = \dfrac{2}{3}EF$, $EF = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow GI = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mà G, I lần lượt là trung điểm của OQ, $OP \Rightarrow QP = 2GI = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Từ giả thiết cho dễ dàng suy ra được $MNPQ$ là hình vuông cạnh $PQ = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3} \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{8a^2}{9}$.

Gọi O' là tâm hình vuông $MNPQ$ kẻ $GH \parallel QO'$ $(H \in OO') \Rightarrow H$ là trung điểm OO' (vì G là trung điểm OQ).

Ta có $QO' = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2a}{3}$ và $OO' = 2OH = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vì S và S' đối xứng nhau qua O nên $S'O = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $S'O' = S'O + OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$.

$V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot S'O' \cdot S_{MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5a\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{8a^2}{9} = \dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2[f(x+1)]^4$ là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. . (D) 9.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Cũng theo BBT ta có $f(-1) = 3$; $f(0) = -2$; $f'(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ c=-2 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=10 \\ c=-2 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = -5x^4+10x^2-2$. Đặt $X = x-1 \Rightarrow x = X+1$ khi đó $g(X) = (X+1)^2(-5X^4+10X^2-2)^4$.

$\Rightarrow g'(X) = 2(X+1)(-5X^4+10X^2-2)^4 + 4(X+1)^2(-20X^3+20X)(-5X^4+10X^2-2)^3$

$= 2(X+1)(-5X^4+10X^2-2)^3(-45X^4-40X^3+50X^2+40X-2)$

$\Rightarrow g'(X) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X+1=0 \\ -5X^4+10X^2-2=0 \\ -45X^4-40X^3+50X^2+40X-2 \end{array}\right.$

+) Với $X=-1 \Rightarrow x=0$ (nghiệm bội lẻ). (1)

+) Với $-5X^4+10X^2-2=0$. Đặt $t=X^2, (t \geq 0) \Rightarrow -5t^2+10t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5+\sqrt{15}}{5}>0 \\ t=\dfrac{5-\sqrt{15}}{5}>0 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow -5X^4+10X^2-2=0$ có 4 nghiệm X nên có 4 nghiệm x (nghiệm bội lẻ). (2)

+) Xét $f(X) = -45X^4-40X^3+50X^2+40X-2$

Khi đó $f'(X) = -180X^3-120X^2+100X+40 \Rightarrow f'(X)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-\dfrac{1}{3} \\ X=\dfrac{2}{3} \\ X=-1 \end{array}\right.$.

Ta có Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{239}{7}$	$\nearrow$	$\frac{706}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $-45X^4 - 40X^3 + 50X^2 + 40X - 2 = 0$ có 4 nghiệm nên cũng có 4 nghiệm x (nghiệm bội lẻ).(3)

Từ $(1)\,,\,(2)\,,\,(3)$ ta suy ra $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm bội lẻ và phân biệt nên $g(x)$ có 9 cực trị

Chọn đáp án D □

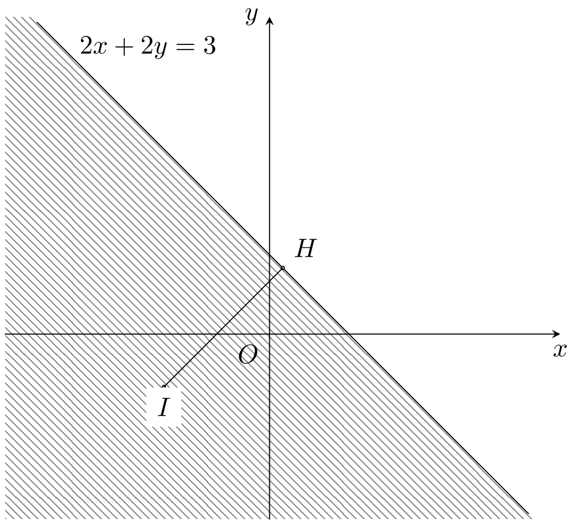
Câu 47. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

A $\frac{33}{8}$. B $\frac{9}{8}$. C $\frac{21}{4}$. . D $\frac{41}{8}$.

Lời giải.

Nếu $x + y < \frac{3}{2}$ thì $2x + y4^{x+y-1} < 2x + y4^{\frac{1}{2}} = 2x + 2y < 3$ (loại). Vậy từ giả thiết suy ra $2x + 2y \geq 3$.

Trên mặt phẳng tọa độ miền nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ là phần không bị gạch như hình vẽ



Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 5 + P \quad (*)$

Tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $(*)$ là đường tròn tâm $I(-2; -1)$ bán kính $R = \sqrt{5 + P}$, $\quad (P > -5)$.

Để tồn tại cặp $(x; y)$ thì đường tròn phải có điểm chung với phần mặt phẳng không bị gạch ở hình trên. Điều đó xảy ra khi bán kính đường tròn không bé hơn khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng có phương trình $d : 2x + 2y - 3 = 0$.

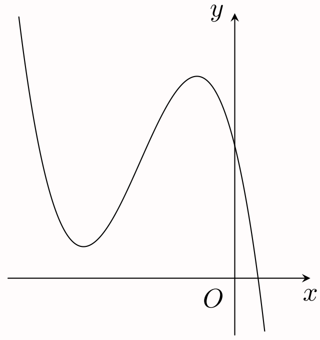
Bởi vì $d(I; d) = \frac{|-2.2 - 1.2 - 3|}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ nên ta phải có $5 + P \geq \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow P \geq \frac{41}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi cặp $(x; y)$ là tọa độ của điểm H trên hình vẽ.

Chọn đáp án D □

Câu 48.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c,)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} y < 0 \Rightarrow a < 0$.
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 0$.
Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b < 0$ và $c < 0$.
Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

(A) 80. (B) 79. (C) 157. (D) 158.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x + y > 0 \\ x^2 + y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x \\ y > -x^2 \end{cases}$.
Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x^2 \geq x \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ do đó có điều kiện $y > -x \Rightarrow y \geq 1 - x$.
Xét hàm số $f(y) = \log_3(x^2 + y) - \log_2(x + y)$.
Ta có $f'(y) = \dfrac{1}{(x^2 + y)\ln 3} - \dfrac{1}{(x + y)\ln 2} = \dfrac{(x + y)\ln 2 - (x^2 + y)\ln 3}{(x^2 + y)(x + y)\ln 3.\ln 2}$.
Vì $x \leq x^2$ nên $0 < x + y \leq x^2 + y$. Hơn nữa, $0 < \ln 2 < \ln 3$.
Do đó $(x + y)\ln 2 < (x^2 + y)\ln 3 \Rightarrow f'(y) < 0$.
Nhận xét: $f(1 - x) = \log_3(x^2 - x + 1) - \log_2 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.
Giả sử phương trình $\begin{cases} f(y) = 0 \\ f'(y) < 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $y = m$.
Có bảng biến thiên:

y	$1-x$	m	$+\infty$
$f'(y)$	$-$		$-$
$f(y)$	↘	0	↘

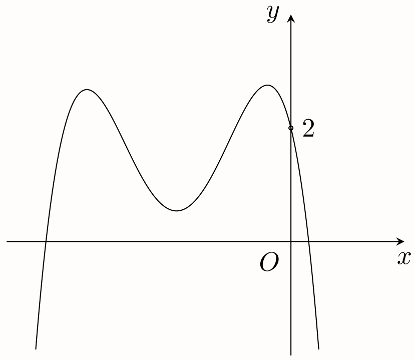
Nên bất phương trình $f(y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leq y \leq m$ do đó để bất phương trình có không quá 255 giá trị thì $m \leq 255 - x$ nên

$$\begin{aligned} & f(256 - x) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3\left(x^2 - x + 256\right) - \log_2 256 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x + 256 < 3^8 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1 - \sqrt{25221}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{25221}}{2}. \end{aligned}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $-78 \leq x \leq 79 \Rightarrow$ có 158 giá trị x thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 50.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) - 2 = 0$ là

(A) 6. (B) 12. (C) 8. (D) 9.



Lời giải.

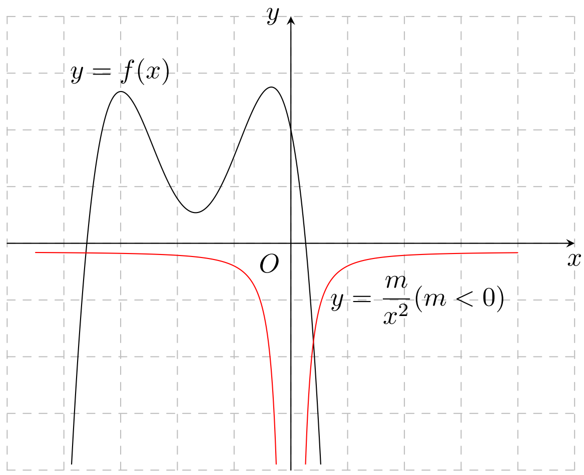
Từ đồ thị ta thấy

$$f\left(x^2 f(x)\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x) = 0 & (1) \\ x^2 f(x) = a\,(-1 < a < 0) & (2) \\ x^2 f(x) = b\,(-3 < b < -2) & (3) \\ x^2 f(x) = c\,(-4 < c < -3)\,. & (4) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$ (3 nghiệm phân biệt).

$(2) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{a}{x^2}$ lên hệ tọa độ Oxy đã có đồ thị hàm số $y = f(x)$. Ta thấy đồ thị hàm số $y = \dfrac{a}{x^2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 nghiệm phân biệt.
Tương tự, mỗi phương trình (3) và (4) đều có 2 nghiệm phân biệt và bốn phương trình trên không có nghiệm chung.
Vậy phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) = 2$ có 9 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án (D) □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 24

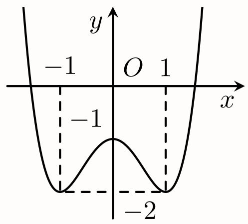
ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

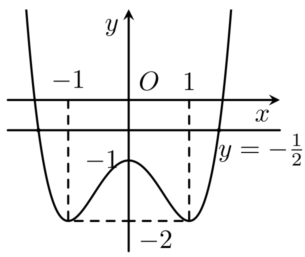
Câu 1. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là



Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị và đường thẳng $d\colon y = -\frac{1}{2}$ song song với trục Ox.
Nhìn vào đồ thị ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có hai nghiệm phân biệt.



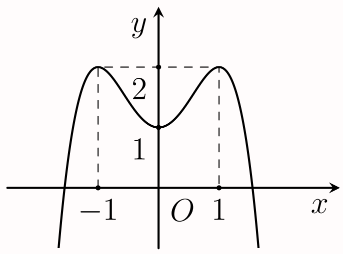
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = 4^x$ là
Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓑ $[0; +\infty)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có hàm số mũ $y = 4^x$ luôn xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-1; 0)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$?

A. $N(3;4)$. B. $M(4;3)$. C. $P(-3;4)$. D. $Q(4;-3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$ là điểm $P(-3;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho mặt cầu có bán kính $r = 4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{256\pi}{3}$. B. $\dfrac{64\pi}{3}$. C. 16π. D. 64π.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 4$ là $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$.
Chọn đáp án D □

Câu 6. $\displaystyle\int 5x^4\, dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}x^5 + C$. B. $x^5 + C$. C. $5x^5 + C$. D. $20x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 5x^4\, dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $N(0;4;2)$. B. $P(1;4;0)$. C. $Q(1;0;2)$. D. $M(0;0;2)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm có tọa độ $(1;4;0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 11$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. B. 33. C. $\dfrac{11}{3}$. D. 14.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d = 11 + 3 = 14$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 9. B. 18. C. 3. D. 6.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = B \cdot h = 3 \cdot 6 = 18$.
Chọn đáp án B □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ là

Ⓐ $x=17$. Ⓑ $x=24$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=40$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+8)=5 \Leftrightarrow x+8=2^5 \Leftrightarrow x=32-8=24$.
Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=24$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x=1$. Khi đó $\displaystyle\int_2^3 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng?

Ⓐ -3. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_2^3 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x=4-1=3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ $Q(4;-2;1)$. Ⓑ $N(4;2;1)$. Ⓒ $P(2;1;-3)$. Ⓓ $M(2;1;3)$.

Lời giải.

Từ phương trình $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ ta thấy $P(2;1;-3)$ là một điểm thuộc d.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -3. Ⓒ 3. Ⓓ -4.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z=-3-4i$ là -3.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

Ⓐ $(-1;2;-3)$. Ⓑ $(2;-4;6)$. Ⓒ $(1;-2;3)$. Ⓓ $(-2;4;-6)$.

Lời giải.

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm là $I(a,b,c)$.
Khi đó mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ có tâm $I(-1,2,-3)$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = 3$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = -3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 2a^2$ và chiều cao $h = 6a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $12a^3$. B. $4a^3$. C. $2a^3$. D. $6a^3$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 6a = 4a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 48π. B. 4π. C. 16π. D. 24π.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

A. $x = 8$. B. $x = -8$. C. $x = 3$. D. $x = -3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-3} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 3 = x \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + 4y - z + 3 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}_1 = (2; 4; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_4 = (-2; 4; 1)$. D. $\vec{n}_3 = (2; 4; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + 4y - z + 3 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; 4; -1)$.

Chọn đáp án A □

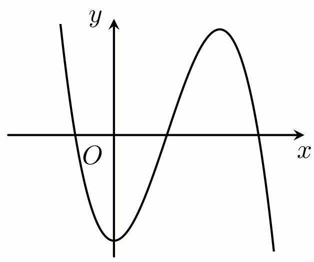
Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$ là

A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = x^4 - 2x^2 - 2$. (B) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 - 2$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải.

Dạng đồ thị là đồ thị của hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ (nhánh phía ngoài bên phải đi xuống) nên hệ số $a < 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm học sinh gồm 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ?
(A) 11. (B) 30. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Nhóm học sinh có tất cả $5 + 6 = 11$ (học sinh).
Vậy có tất cả 11 cách chọn một học sinh từ nhóm học sinh này.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4(4a)$ bằng
(A) $1 + \log_4 a$. (B) $4 - \log_4 a$. (C) $4 + \log_4 a$. (D) $1 - \log_4 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_4(4a) = \log_4 4 + \log_4 a = 1 + \log_4 a$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng
(A) $2 - 3i$. (B) $-2 + 3i$. (C) $-2 - 3i$. (D) $2 + 3i$.

Lời giải.

$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (1 - i) = 2 + 3i$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
(A) 20π. (B) $\dfrac{20\pi}{3}$. (C) 10π. (D) $\dfrac{10\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$-x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Suy ra có 3 giao điểm.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 27. Biết $\int\limits_0^1 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 1 = 2$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28. Cho số phức $z = 1 - 2i$, số phức $(2 + 3i)\overline{z}$ bằng

Ⓐ $-4 - 7i$. Ⓑ $-4 + 7i$. Ⓒ $8 + i$. Ⓓ $-8 + i$.

Lời giải.

Ta có $(2 + 3i)\overline{z} = (2 + 3i)(1 + 2i) = -4 + 7i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \mathrm{e}^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

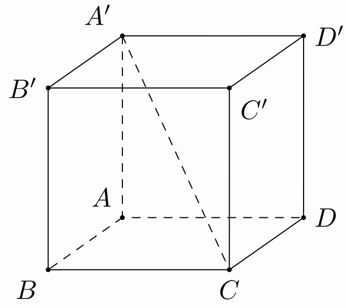
Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

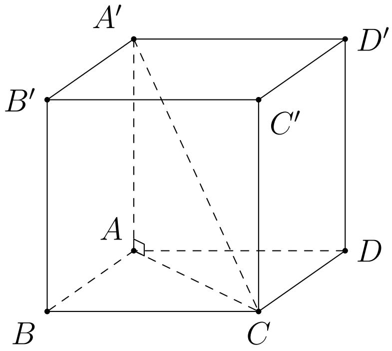
Câu 30.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a$, $AA' = \sqrt{6}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



(A) $60°$. (B) $90°$. (C) $30°$. (D) $45°$.

Lời giải.

Theo đề bài ta thấy AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra



$$[A'C, (ABCD)] = [AC, A'C] = \widehat{A'CA}.$$

Xét tam giác vuông $\triangle A'AC$ vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{AA'}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

Suy ra $\widehat{A'CA} = 60°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

(A) -28. (B) -4. (C) -13. (D) -29.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5) = 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên khoảng $(0; 9)$ là $x = \sqrt{5}$.
Ta tính được $f(0) = -4$, $f(\sqrt{5}) = -29$ và $f(9) = 5747$.
Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là -29.
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+4)^3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đã cho đạt cực đại tại một điểm duy nhất $x=0$. Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 8b^2$. (B) $a = 8b$. (C) $a = 6b$. (D) $a = 8b^4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 3 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 3 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 2^3 \Leftrightarrow a = 8b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

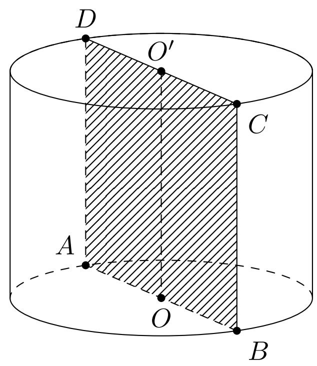
(A) $\dfrac{49\pi}{4}$. (B) $\dfrac{49\pi}{2}$. (C) 49π. (D) 98π.

Lời giải.

Giả sử hình trụ có tâm hai đường tròn đáy là O và O' cùng với thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ như hình vẽ.

Ta có $h = AD = 7$, $r = AO = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{7}{2}$.

Diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = 2\pi r h = 2\cdot\pi\cdot\dfrac{7}{2}\cdot 7 = 49\pi$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+1=0$. Phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

(A) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 3+3t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3+3t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+3t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -2-t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là phương trình đường thẳng cần tìm.
d vuông góc với (P) nên VTCP của d là $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (2;-1;3)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 4. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phức z_1 và z_2.
Theo định lý Vi-ét, ta có $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = 2$. Từ đó suy ra

$$|z_1| + |z_2| = 2|z_1| = 2\sqrt{|z_1|^2} = 2\sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}} = 2\sqrt{z_1 z_2} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

(A) $2x - y + 4z - 21 = 0$. (B) $2x - y + 4z + 21 = 0$.
(C) $3x - 2y + z - 12 = 0$. (D) $3x - 2y + z + 12 = 0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P).
Do mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (P) nên (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;-2;1)$.
Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;4)$, vậy (α) có phương trình là

$$3 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 (18 - x^2) \geq 2$ là

(A) $(-\infty; 3]$. (B) $(0; 3]$.
(C) $[-3; 3]$. (D) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là

$$18 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2}.$$

Với điều kiện xác định trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$18 - x^2 \geq 3^2 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

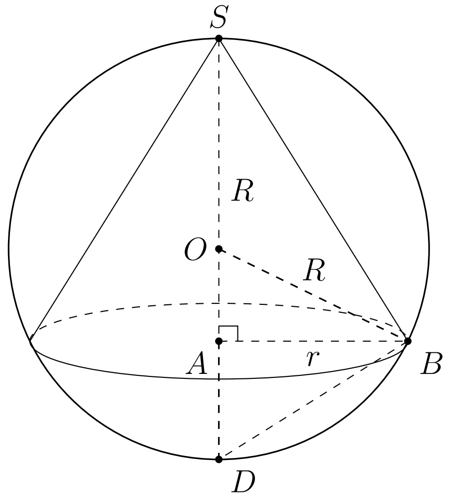
Kết hợp với điều kiện xác định, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-3; 3]$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{2}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua đỉnh S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}$. (B) $\sqrt{14}a$. (C) $\dfrac{4\sqrt{14}a}{7}$. (D) $\dfrac{8\sqrt{14}a}{7}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(O;R)$ và hình nón có đáy là hình tròn tâm A nội tiếp mặt cầu như hình vẽ.
Đặt $h = CA, r = AB$.
Theo giả thiết ta có $AB = \sqrt{2}a$, $CB = 4a$.
Xét tam giác vuông CBD có



$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2}$$
$$\frac{1}{2a^2} = \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{BD^2}$$

Khi đó $BD = \dfrac{4\sqrt{7}a}{7}$.

Ta có $BC \cdot BD = AB \cdot CD \Leftrightarrow 4a \cdot \dfrac{4\sqrt{7}a}{7} = \sqrt{2}a \cdot CD$.

Suy ra $CD = \dfrac{8\sqrt{14}a}{7}$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $\dfrac{4\sqrt{14}a}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

(A) $(-\infty; 1]$. (B) $(-\infty; 4]$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(-\infty; 4)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty).$$

Xét $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$.
$f'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2;+\infty)$.
Ta có bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	4 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \leq 4$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Ⓐ 810.000.000 đồng. Ⓑ 813.529.000 đồng. Ⓒ 797.258.000 đồng. Ⓓ 830.131.000 đồng.

Lời giải.

Gọi giá xe X năm 2020 là $A = 900.000.000$ đồng và $r = 2\%$. Khi đó

- Giá xe X năm 2021 là $A_1 = A - A \cdot r = A(1-r)$.
- Giá xe X năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1 \cdot r = A(1-r)^2$.
- Giá xe X năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2 \cdot r = A(1-r)^3$.
- Giá xe X năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3 \cdot r = A(1-r)^4$.
- Giá xe X năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4 \cdot r = A(1-r)^5$.

Vậy giá xe X năm 2025 là $A_5 = 900.000.000 \cdot (1-2\%)^5 \approx 813.529.000$ đồng.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42. Biết $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $2\mathrm{e}^x + 2x^2 + C$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x^2 + C$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + C$. Ⓓ $2\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(2x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2} \cdot f(2x)\,\mathrm{d}(2x)\\ &= \frac{1}{2} \cdot F(2x) + C\\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{e}^{2x} + (2x)^2\right] + C\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 43. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây ?

Ⓐ -2. Ⓑ -3. Ⓒ -5. Ⓓ -4.

Lời giải.

Với các số thực x, y ta có

$$2^{x^2+y^2+1} \le (x^2+y^2-2x+2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+y^2+1} \le (x^2+y^2-2x+1)+1.$$

Đặt $t = x^2+y^2-2x+1$, suy ra $t = (x-1)^2+y^2$ nên $t \ge 0$.
Bất phương trình đã cho trở thành $2^t \le t+1$ với $t \ge 0$.
Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$ với $t \ge 0$, có

$$f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \log_2(\log_2 \mathrm{e}) \approx 0{,}52.$$

Hàm số $f(t)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như sau

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	0		$+$		
$f(t)$	|| 0	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lại có $f(1) = 0$, do đó tập nghiệm của bất phương trình $f(t) \leq 0$ là $[0;1]$.
Vậy $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.
Tập hợp tất cả các điểm có tọa độ $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$ nằm trong hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R = 1 \quad (*)$.
Với $d\colon 2x+y+1=0$, suy ra $\mathrm{d}[I,d] > R$ nên $2x+y+1 \neq 0$ với các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $(*)$.
Ta có $P = \dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow (\Delta)\colon 2Px + (P-4)y + P = 0.$
Yêu cầu bài toán suy ra

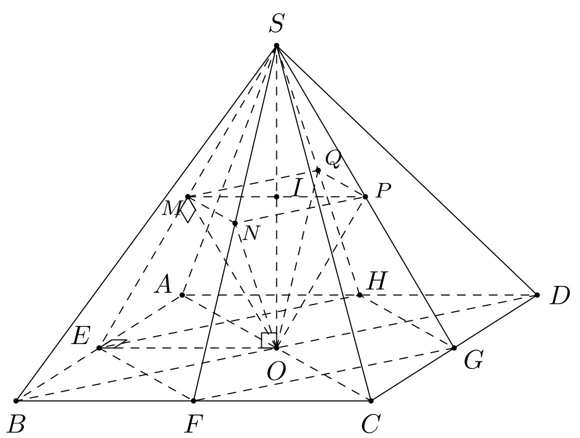
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[I,(\Delta)] \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|2P\cdot 1 + (P-4)\cdot 0 + P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}} \leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad |3P| \leq \sqrt{5P^2-8P+16}\\
&\Leftrightarrow \quad 4P^2+8P-16 \leq 0\\
&\Leftrightarrow \quad -\sqrt{5}-1 \leq P \leq \sqrt{5}-1.
\end{aligned}$$

Do đó, $\min P = -\sqrt{5}-1 \approx -3{,}2$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{9a^3}{16}$. B. $\dfrac{2a^3}{3}$. C. $\dfrac{9a^3}{32}$. D. $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, $SO \perp (ABCD)$.
Do $AB \perp OE$ và $AB \perp SO$ suy ra $AB \perp (SOE)$, $(SOE) \perp (SAB)$ theo giao tuyến SE. Mặt khác $OM \perp (SAB)$ nên $OM \subset (SOE)$ và OM là đường cao tam giác SOE.
Tam giác SOA vuông tại O, suy ra

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{27a^2}{4} - \frac{18a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

Suy ra $SO = OE = \dfrac{3a}{2}$ hay tam giác SOE vuông cân tại O. Từ đó ta có M là trung điểm của SE.
Tương tự ta cũng có N, P, Q lần lượt là trung điểm của SF, SG, SH.

Ta cũng suy ra $(MNPQ) \parallel (ABCD)$ và I là trung điểm của SO.
Ta có

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{EFGH} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

Vì vậy

$$V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}S_{MNPQ}\cdot OI = \frac{1}{3}\cdot\frac{S_{ABCD}}{8}\cdot\frac{SO}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9a^2}{8}\cdot\frac{3a}{4} = \frac{9a^3}{32}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 4$

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax(x-4) = 3ax^2 - 12ax \Rightarrow f(x) = ax^3 - 6ax^2 + d.$$

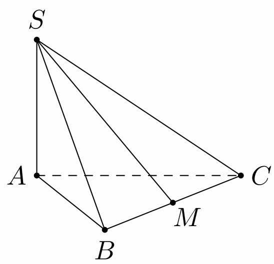
Các điểm $A(0;3)$ và $B(4;-5)$ thuộc đồ thị hàm số nên

$$\begin{cases} d = 3 \\ -32a + d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3.$$

Trong các số $a,\ b,\ c,\ d$ có 2 số dương là $a = \dfrac{1}{4}$ và $d = 3$.

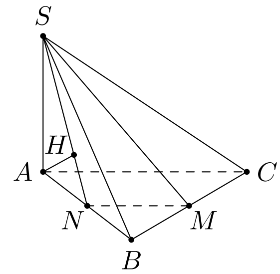
Chọn đáp án (A) □

Câu 46.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SN.
Khi đó $MN \parallel AC$ nên $MN \perp AB$. Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp MN$.
Do đó $MN \perp (SAB)$, kéo theo $MN \perp AH$, như vậy $AH \perp (SMN)$.
Lại có $MN \parallel AC$ nên $AC \parallel (SMN)$, suy ra

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(AC, SM) &= \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(A, SMN) = AH\\ &= \frac{SA\cdot AN}{\sqrt{SA^2+AN^2}} = \frac{\sqrt{3}a\cdot\dfrac{a}{2}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{39}a}{13}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ bằng

(A) $\dfrac{50}{81}$. (B) $\dfrac{5}{9}$. (C) $\dfrac{5}{18}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi số có 6 chữ số là $\overline{abcdmn}$ với a, b, c, d, m, n là các chữ số đôi một khác nhau.

- Có 9 cách chọn chữ số $a \neq 0$.
- Có A_9^4 cách chọn các chữ số còn lại.

Suy ra có $9\cdot\mathrm{A}_9^4 = 136080$ số có 6 chữ số đôi một khác nhau.
Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 136080$.
Gọi A là biến cố "số được chọn có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ".
Khi đó, có hai trường hợp thỏa mãn là

Trường hợp 1. m là số chẵn và n là số lẻ.

- Nếu chọn $m = 0$ thì có 5 cách chọn n và 8 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
  Suy ra có $5\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 8400$ số.
- Nếu chọn $m \neq 0$ thì có 4 cách chọn m, 5 cách chọn n và 7 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
  Suy ra có $4\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 29400$ số.

Do đó, có $29400 + 8400 = 37800$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2. m là số lẻ và n là số chẵn. Tương tự, ta tìm được 37800 số thỏa mãn.

Suy ra $n(A) = 2\cdot 37800 = 75600$.
Vậy xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ là

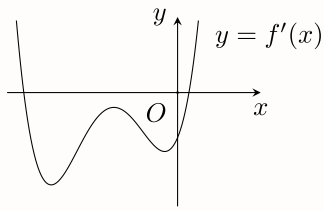
$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{75600}{136080} = \frac{5}{9}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là



(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Xét $h(x)=f\left(x^3\right)-x$, ta có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-1$.

Xét $h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)-1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{3x^2}$ $(*)$, với $x\neq 0$.

Đặt $t=x^3$, ta có $(*) \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ $(**)$.

Xét hàm số $k(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, $k'(t)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{t^5}}$. Ta có bảng biến thiên của $k(t)$ như bên dưới

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(t)$		$+$	||	$-$	
$k(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ ta suy ra phương trình $(**)$ có hai nghiệm $t_1<0<t_2$, vậy $(*)$ có hai nghiệm $x_1<0<x_2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h\left(x_1\right)$	$\searrow$	$h(0)$	$\searrow$	$h\left(x_2\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $h(0)=f(0)-0=0$, nên $h(x)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt, suy ra hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

Ⓐ 24. Ⓑ 21. Ⓒ 25. Ⓓ 20.

Lời giải.

Đặt $g(x)=5f\left(x^2-4x\right)$, với $x\in(0;+\infty)$.
Ta có $g'(x)=10(x-2)f'\left(x^2-4x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ f'\left(x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-4x=-4\\ x^2-4x=-2\\ x^2-4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-4x+4=0\\ x^2-4x+2=0\\ x^2-4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2-\sqrt{2}\\ x=2+\sqrt{2}\\ x=0\\ x=4.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-15	$\nearrow$	10	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $-15<m\le 10$.
Mà m nguyên nên có 25 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

Ⓐ 14. Ⓑ 12. Ⓒ 11. Ⓓ 13.

Lời giải.

- Ta có $a=0$ luôn thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.
- Xét $a\in\mathscr{D}=(-1;0)\cup(0;1)$, ta có

$$2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow\frac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}=2.\qquad(1)$$

Xét hàm số $g(a)=\dfrac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$.

Ta có $g'(a)=\dfrac{n\cdot a^{m-1}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)}{a^{2m}}$.

Xét hàm số $h(a)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Ta có $h'(a)=\dfrac{1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}-\dfrac{m}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\dfrac{1}{a^2+1}-m\right)<0,\ \forall a\in(-1;1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(a)$ như sau

a	-1	0	1
$h'(a)$		$+$	
$h(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta xét các trường hợp sau

— Nếu $m \in \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$-$	‖	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Do $g(-1) = n\ln(-1+\sqrt{2}) < 0$ nên phương trình (1) không thể có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$.

— Nếu $m \in \{3; 5; 7; 9; 11; 13\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	‖	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 \\ g(1) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n\ln(-1+\sqrt{2}) < 2 \\ n\ln(1+\sqrt{2}) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \in \{1; 2\}.$$

— Nếu $m = 1$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	‖	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	n ‖ n	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 < n \\ g(1) < 2 < n \end{cases} \text{(vô lí).}$$

Vậy có 11 cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án C □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 25

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020

Môn: Toán

Năm học: 2019 – 2020

Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9)=5$ là

(A) $x=41$. (B) $x=23$. (C) $x=1$. (D) $x=16$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+9)=5 \Leftrightarrow x+9=2^5 \Leftrightarrow x=2^5-9=23$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (D) $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số mũ $y=5^x$ luôn xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_5(5a)$ bằng

(A) $5+\log_5 a$. (B) $5-\log_5 a$. (C) $1+\log_5 a$. (D) $1-\log_5 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(5a)=\log_5 5+\log_5 a=1+\log_5 a$.

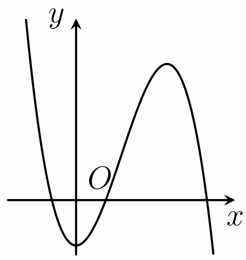
Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

(A) $y=-x^4+2x^2-1$. (B) $y=x^4-2x^2-1$.

(C) $y=x^3-3x^2-1$. (D) $y=-x^3+3x^2-1$.



Lời giải.

Nhìn vào hình dáng đồ thị ta thấy rằng đây là đồ thị một hàm số bậc ba có hệ số a âm. Trong 4 phương án lựa chọn, chỉ có hàm số thoả mãn là $y=-x^3+3x^2-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓐ $N(4;2;-1)$. Ⓑ $Q(2;5;1)$. Ⓒ $M(4;2;1)$. Ⓓ $P(2;-5;1)$.

Lời giải.

Lần lượt thay toạ độ các điểm ở các phương án lựa chọn vào phương trình đường thẳng, ta thấy

- $\dfrac{4-4}{2}=\dfrac{2-2}{5}=\dfrac{-1+1}{1}\Rightarrow N\in d.$
- $\dfrac{2-4}{2}\neq\dfrac{5-2}{-5}\Rightarrow Q\notin d.$
- $\dfrac{4-4}{2}=\dfrac{2-2}{-5}\neq\dfrac{1+1}{1}\Rightarrow M\notin d.$
- $\dfrac{2-4}{2}\neq\dfrac{-5-2}{-5}\Rightarrow P\notin d.$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-4;6)$. Ⓑ $(2;4;-6)$. Ⓒ $(-1;-2;3)$. Ⓓ $(1;2;-3)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$ có tọa độ là $(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $2a^3$. Ⓑ $4a^3$. Ⓒ $6a^3$. Ⓓ $12a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$ là

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 6a^2\cdot 2a=4a^3.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

Ⓐ 5π. Ⓑ 30π. Ⓒ 25π. Ⓓ 75π.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=3$ là

$$V=\pi r^2h=\pi\cdot 5^2\cdot 3=75\pi.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=1-2i$?

Ⓐ $Q(1;2)$. Ⓑ $M(2;1)$. Ⓒ $P(-2;1)$. Ⓓ $N(1;-2)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z=1-2i$ là điểm $N(1;-2)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 4 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $3 + 3i$. B. $-3 - 3i$. C. $-3 + 3i$. D. $3 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (4 - i) = 1 + 2i - 4 + i = -3 + 3i$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho mặt cầu có bán kính $r = 5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. 25π. B. $\dfrac{500\pi}{3}$. C. 100π. D. $\dfrac{100\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 5$ là

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} y = -\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $\ell = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 28π. B. 14π. C. $\dfrac{14\pi}{3}$. D. $\dfrac{98\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $\ell = 7$ là

$$S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot 2 \cdot 7 = 14\pi.$$

Ghi chú: Câu hỏi này đã được chỉnh sửa so với đề gốc, đổi giả thiết $r = 7$, $\ell = 2$ thành $r = 2$, $\ell = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. $\displaystyle\int 6x^5 \, dx$ bằng

A. $6x^6 + C$. B. $x^6 + C$. C. $\dfrac{1}{6}x^6 + C$. D. $30x^4 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 6x^5 \, dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} + C = x^6 + C$.

Chọn đáp án B □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - 3y + 4z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A $\overrightarrow{n_3} = (2; -3; 4)$. **B** $\overrightarrow{n_2} = (2; 3; -4)$. **C** $\overrightarrow{n_1} = (2; 3; 4)$. **D** $\overrightarrow{n_4} = (-2; 3; 4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) đã cho có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_3} = (2; -3; 4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

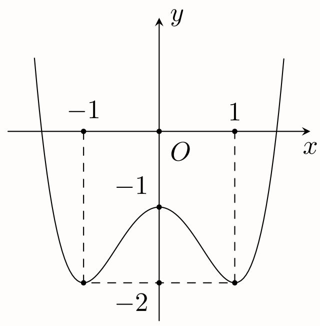
A 11. **B** $\dfrac{9}{2}$. **C** 18. **D** 7.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d = 9 + 2 = 11$.
Chọn đáp án A □

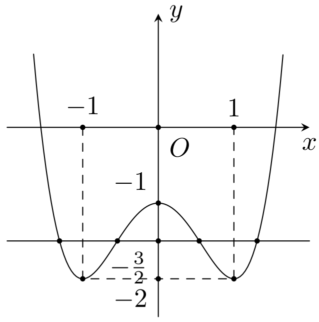
Câu 17.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ là

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 2.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = -\dfrac{3}{2}$.
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ bằng 4.



Chọn đáp án A □

Câu 18. Phần thực của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

A 3. **B** 4. **C** -3. **D** -4.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z = 3 - 4i$ bằng 3.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 6.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = B \cdot h = 3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án D

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = 3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = -2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = 1$.

Chọn đáp án C

Câu 21. Biết $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\displaystyle\int_2^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. B. 2. C. -2. D. 3.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_2^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 1 = 4$.

Chọn đáp án A

Câu 22. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ?

A. 9. B. 54. C. 15. D. 6.

Lời giải.

Nhóm học sinh có tất cả $6 + 9 = 15$ học sinh.

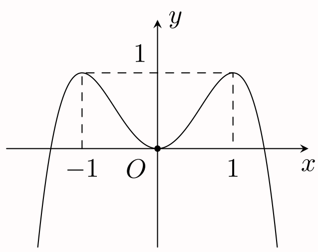
Vậy có 15 cách chọn một học sinh từ nhóm học sinh đã cho.

Chọn đáp án C

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; +\infty)$.



Lời giải.

Theo đồ thị, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A

Câu 24. Nghiệm của phương trình $2^{2x-4} = 2^x$ là

Ⓐ $x = 16$. Ⓑ $x = -16$. Ⓒ $x = -4$. Ⓓ $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-4} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 4 = x \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

Ⓐ $Q(1;0;3)$. Ⓑ $P(1;2;0)$. Ⓒ $M(0;0;3)$. Ⓓ $N(0;2;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là $P(1;2;0)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-4)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 27. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a = 9b^3$. Ⓑ $a = 9b$. Ⓒ $a = 6b$. Ⓓ $a = 9b^2$.

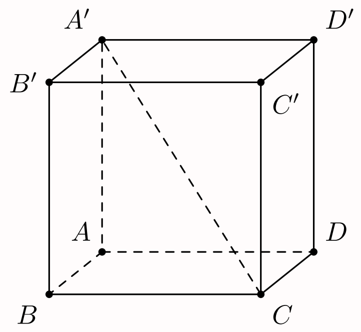
Lời giải.

Ta có $\log_3 a - 2\log_9 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 2 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right) = 2 \Leftrightarrow a = 9b$.

Chọn đáp án Ⓑ □

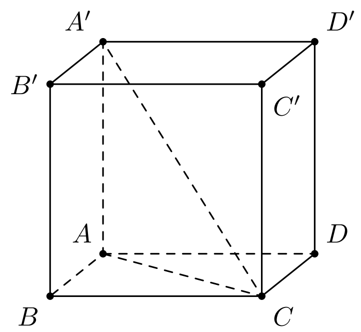
Câu 28.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $ABCD$ bằng



Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.

Lời giải.



Hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $ABCD$ là AC nên $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \left(2\sqrt{2}a\right)^2} = 3a.$$

Xét tam giác $A'CA$ vuông tại A có

$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

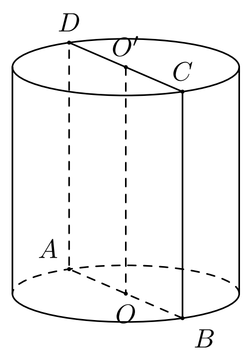
Vậy $\widehat{A'CA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 1. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ π. Ⓑ $\frac{\pi}{2}$. Ⓒ 2π. Ⓓ $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục của (T) là hình vuông $ABCD$ có cạnh 1.

Do đó đường cao của hình trụ là $h = 1$ và bán kính đường tròn đáy $r = \frac{1}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là

$$S_{\text{xq}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Trong không gian $0xyz$ cho điểm $M(2; 1; -2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

Ⓐ $2x + y - 2z + 9 = 0$. Ⓑ $2x + y - 2z - 9 = 0$.

Ⓒ $3x - 2y + z + 2 = 0$. Ⓓ $3x - 2y + z - 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm, ta có
(Q) song song với (P) nên phương trình (Q) có dạng

$$(Q)\colon 3x - 2y + z + D = 0.$$

Mặt khác, (Q) đi qua $M(2;1;-2)$ nên ta có

$$3\cdot 2 - 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

Vậy $(Q)\colon 3x - 2y + z - 2 = 0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

- Giải phương trình $z^2 - z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i. \end{array}\right.$
- Khi đó $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right| + \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right| = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

(A) -39. (B) -40. (C) -36. (D) -4.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = 4x^3 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6}\ \text{(loại)}. \end{array}\right.$
- Tính được $f(0) = -4$; $f(9) = 5585$ và $f(\sqrt{6}) = -40$.
- Do đó $\min\limits_{[0;9]} f(x) = -40$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho số phức $z = 2 - i$, số phức $(2-3i)\,\overline{z}$ bằng

(A) $-1 + 8i$. (B) $-7 + 4i$. (C) $7 - 4i$. (D) $1 + 8i$.

Lời giải.

Ta có $(2-3i)\overline{z} = (2-3i)(2+i) = 7 - 4i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$. (B) $\displaystyle\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{8x}\mathrm{d}x$. (C) $\displaystyle\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{8x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{4x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^{8x} \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là $-x^3 + 7x = 0$.
Ta có

$$-x^3 + 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Phương trình có 3 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ và trục hoành bằng 3.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13 - x^2) \geq 2$ là

(A) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2]$.

(C) $(0; 2]$. (D) $[-2; 2]$.

Lời giải.

Vì cơ số $a = 3 > 1$ nên

$$\begin{aligned} & \log_3(13 - x^2) \geq 2 \\ \Leftrightarrow\ & 13 - x^2 \geq 9 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 2]$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Biết $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 3.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 3 - x^2\Big|_0^1 = 3 - (1 - 0) = 2.$

Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-1=0$. Phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

Ⓐ $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=3-3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=-3-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng(P) nhận $\vec{n}=(2;-1;3)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39. Năm 2020, một hãng xe ô-tô niêm yết giá bán loại xe X là 750.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô-tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Ⓐ 677.941.000 đồng. Ⓑ 675.000.000 đồng. Ⓒ 664.382.000 đồng. Ⓓ 691.776.000 đồng.

Lời giải.

Gọi N_0 là giá bán xe ô-tô năm 2020, ta có $N_0=750.000.000$.
Giá xe ô-tô bán ở năm 2021 là $N_1=N_0-N_0\cdot 2\%=N_0(1-2\%)$.
Giá xe ô-tô bán ở năm 2022 là $N_2=N_1-N_1\cdot 2\%=N_1(1-2\%)=N_0(1-2\%)^2$.
Lập luận tương tự, giá xe bán ô-tô ở năm 2025 là

$$N_5=N_0(1-2\%)^5=750.000.000(1-2\%)^5\approx 677.941.000\,(\text{đồng}).$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 40. Biết $F(x)=\mathrm{e}^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $2\mathrm{e}^x-4x^2+C$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-4x^2+C$. Ⓒ $\mathrm{e}^{2x}-8x^2+C$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-2x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=F'(x)=\mathrm{e}^x-4x$. Suy ra $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}-8x$.
Vậy $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}-8x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-4x^2+C$.
Chọn đáp án Ⓑ □

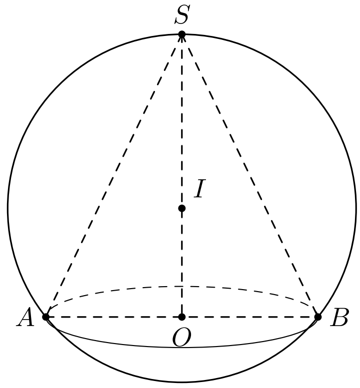
Câu 41. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{10}a}{3}$. Ⓑ $\dfrac{16\sqrt{13}a}{13}$. Ⓒ $\dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$. Ⓓ $\sqrt{13}a$.

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Gọi O, AB lần lượt là tâm và đường kính đường tròn đáy của hình nón (N).
Gọi I là tâm mặt cầu (T).
Suy ra $IA = IB = IS$ và $I \in SO$. Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.
Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16a^2 - 3a^2} = \sqrt{13}a$ và $\sin\widehat{SAB} = \sin\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{\sqrt{13}a}{4a} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.
Vậy bán kính của mặt cầu (T) là



$$R = \frac{SB}{2\sin\widehat{SAB}} = \frac{4a}{2\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{4}} = \frac{8\sqrt{13}a}{13}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A $(-\infty; 2)$. B $(-\infty; 5)$. C $(-\infty; 5]$. D $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.
Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \geq 0,\ \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0,\ \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow\ & m \leq 3x^2 - 6x + 5,\ \forall x \in (2; +\infty) \end{aligned}$$

Xét hàm $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên $(2; +\infty)$ có $g'(x) = 6x - 6$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Bảng biến thiên của $g(x)$

x	2 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$5 \nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$, ta được

$$m \leq 3x^2 - 6x + 5,\ \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng

A $\dfrac{4}{9}$. B $\dfrac{2}{9}$. C $\dfrac{2}{5}$. D $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi số có 6 chữ số là $\overline{abcdmn}$ với a, b, c, d, m, n là các chữ số đôi một khác nhau.

- Có 9 cách chọn chữ số $a \neq 0$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

- Có A_9^4 cách chọn các chữ số còn lại.

Suy ra có $9 \cdot \mathrm{A}_9^4 = 136080$ số có 6 chữ số đôi một khác nhau.
Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 136080$.
Gọi A là biến cố "số được chọn có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ".
Ta đếm các số có 6 chữ số khác nhau có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ. Khi đó, có hai trường hợp thỏa mãn là

Trường hợp 1. m là số chẵn và n là số chẵn.

- Nếu chọn $m = 0$ thì có 4 cách chọn n và 8 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
  Suy ra có $4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 6720$ số.
- Nếu chọn $n = 0$ thì có 4 cách chọn m và 8 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
  Suy ra có $4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 6720$ số.
- Nếu chọn $m \neq 0$ và $n \neq 0$ thì có 4 cách chọn m, 3 cách chọn n và 7 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
  Suy ra có $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 17640$ số.

Do đó, có $6720 + 6720 + 17640 = 31080$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2. m là số lẻ và n là số lẻ.
Có 5 cách chọn m 4 cách chọn n và 7 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, 5 cách chọn d.
Suy ra có $5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29400$ số.

Suy ra $n(A) = 29400 + 17640 + 6720 + 6720 = 60480$.
Vậy xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ là

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60480}{136080} = \frac{4}{9}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 44. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây ?

A 9. **B** 6. **C** 7. **D** 8.

Lời giải.

Với các số thực x, y ta có

$$2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+1)+1.$$

Đặt $t = x^2+y^2-2x+1$, suy ra $t = (x-1)^2+y^2$ nên $t \geq 0$.
Bất phương trình đã cho trở thành $2^t \leq t+1$ với $t \geq 0$.
Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$ với $t \geq 0$, có

$$f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \log_2(\log_2 \mathrm{e}) \approx 0{,}52.$$

Hàm số $f(t)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như sau

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	0		$+$		
$f(t)$	|| 0	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lại có $f(1) = 0$, do đó tập nghiệm của bất phương trình $f(t) \leq 0$ là $[0; 1]$.
Vậy $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.
Tập hợp tất cả các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$ nằm trong hình tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1 \quad (*)$.
Với $d\colon 2x + y + 1 = 0$, suy ra $\mathrm{d}[I, d] > R$ nên $2x + y + 1 \neq 0$ với các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(*)$.
Ta có $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow (\Delta)\colon\ (2P-8)\,x - Py + P - 4 = 0$.
Yêu cầu bài toán suy ra

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[I, (\Delta)] \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|(2P-8)\cdot 1 + P\cdot 0 + P - 4|}{\sqrt{(2P-8)^2 + P^2}} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |3P - 12| \leq \sqrt{5P^2 - 32P + 64} \\
&\Leftrightarrow \quad 4P^2 - 40P + 80 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

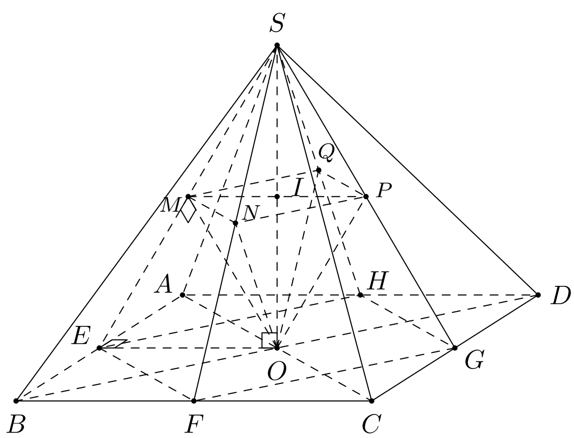
Do đó, $\min P = 5 + \sqrt{5} \approx 7{,}23$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. B. $\dfrac{64a^3}{81}$. C. $\dfrac{128a^3}{81}$. D. $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$ và $SO \perp (ABCD)$.
Do đó $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}$ và $OE = 2a$.
Do $AB \perp OE$ và $AB \perp SO$ suy ra $AB \perp (SOE)$ hay mặt phẳng (SOE) vuông góc với mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến SE.
Mặt khác $OM \perp (SAB)$ nên $OM \perp SE$.
Tam giác SOA vuông tại O, suy ra



$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{12a^2 - 8a^2} = 2a.$$

Suy ra $SO = OE = 2a$ hay tam giác SOE vuông cân tại O. Từ đó ta có M là trung điểm của SE.
Tương tự ta cũng có N, P, Q lần lượt là trung điểm của SF, SG, SH.
Ta cũng suy ra $(MNPQ) \parallel (ABCD)$, kéo theo $SO \perp (MNPQ)$.
Khi đó gọi I là giao điểm của SO và mặt phẳng $(MNPQ)$ thì $OI \perp (MNPQ)$.

Do $MI \parallel OE$ nên I là trung điểm SO.
Ta có

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{EFGH} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

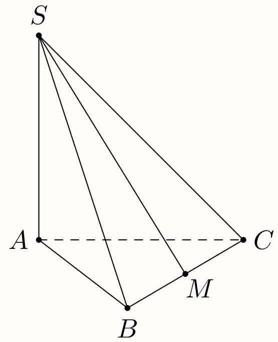
Vì vậy

$$V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}S_{MNPQ}\cdot OI = \frac{1}{3}\cdot\frac{S_{ABCD}}{8}\cdot\frac{SO}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{16a^2}{8}\cdot\frac{2a}{2} = \frac{2a^3}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 46.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

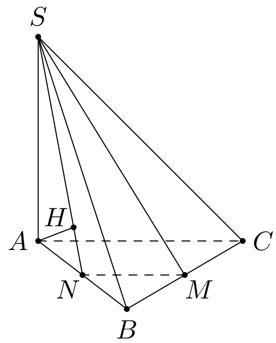
(A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$. (D) $\frac{2a}{3}$.



Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SN. Khi đó $MN \parallel AC$ nên $MN \perp AB$. Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp MN$. Do đó $MN \perp (SAB)$, kéo theo $MN \perp AH$, như vậy $AH \perp (SMN)$.
Lại có $MN \parallel AC$ nên $AC \parallel (SMN)$, suy ra

$$\mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC, (SMN)) = \mathrm{d}(A, (SMN)) = AH.$$



Trong tam giác SAN vuông tại A có

$$AH = \frac{SA\cdot AN}{\sqrt{SA^2 + AN^2}} = \frac{2a\cdot\frac{a}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2\sqrt{17}a}{17}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \frac{2\sqrt{17}a}{17}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

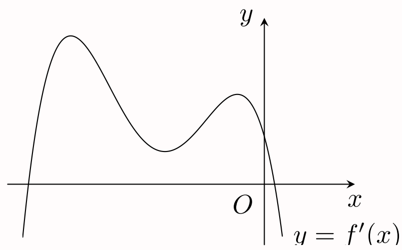
Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.
Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.
Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $c = 0$; $\dfrac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.
Vậy có 3 số dương là a, b, d.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^3) + x|$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.



Lời giải.

Đặt $h(x) = f(x^3) + x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = -\dfrac{1}{3x^2}$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

Xét hàm số $y = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần tư thứ 3 và 4.
Gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1 < 0, t_2 > 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{t_1}, x_2 = \sqrt[3]{t_2}$.
Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			0	$+$	
y	↘			↗	0	↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$?

Ⓐ 16. Ⓑ 14. Ⓒ 15. Ⓓ 13.

Lời giải.

- Ta có $a=0$ luôn thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

- Xét $a \in \mathscr{D} = (-1;0)\cup(0;1)$, ta có

$$2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \frac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m} = 2. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(a) = \dfrac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$.

Ta có $g'(a) = \dfrac{n\cdot a^{m-1}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)}{a^{2m}}$.

Xét hàm số $h(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Ta có $h'(a) = \dfrac{1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}} - \dfrac{m}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\dfrac{1}{a^2+1}-m\right) < 0,\ \forall a \in (-1;1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(a)$ như sau

a	-1		0		1
$h'(a)$			$-$		
$h(a)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên trên ta xét các trường hợp sau

— Nếu $m \in \{2;4;6;8;10;12;14\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$-$	‖	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Do $g(-1) = n\ln(-1+\sqrt{2}) < 0$ nên phương trình (1) không thể có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$.

— Nếu $m \in \{3;5;7;9;11;13;15\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	‖	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 \\ g(1) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n\ln(-1+\sqrt{2}) < 2 \\ n\ln(1+\sqrt{2}) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \in \{1;2\}.$$

— Nếu $m = 1$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	||	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	n || n	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 < n \\ g(1) < 2 < n \end{cases} \text{(vô lí).}$$

Vậy có 13 cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 25. (B) 30. (C) 29. (D) 24.

Lời giải.

Đặt $g(x) = 6f\left(x^2 - 4x\right)$, với $x \in (0; +\infty)$.
Ta có $g'(x) = 12(x-2)f'\left(x^2 - 4x\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ f'\left(x^2 - 4x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = -2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-18	$\nearrow$	12	$\searrow$	-12	$\nearrow$	12	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $-18 < m \leq 12$.
Mà m nguyên nên có 30 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án (B) □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 26

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(2a)$ bằng

A. $1+\log_2 a$. B. $1-\log_2 a$. C. $2-\log_2 a$. D. $2+\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(2a)=\log_2 2+\log_2 a=1+\log_2 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 3. B. 18. C. 6. D. 9.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ $V=S_đ\cdot h=6\cdot 3=18$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. B. 4. C. -4. D. -5.

Lời giải.

Phần thực của số phức z bằng -5.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=2a^2$ và chiều cao $h=9a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. B. $6a^3$. C. $18a^3$. D. $9a^3$.

Lời giải.

$V=\dfrac{1}{3}\cdot S_đ\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 2a^2\cdot 9a=6a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. B. $(2;-4;-6)$. C. $(-2;4;6)$. D. $(1;-2;-3)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì có tâm là $(a;b;c)$.

Vậy tâm của (S) là $(1;-2;-3)$.

Chọn đáp án D □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A $\dfrac{8}{3}$. B 24. C 5. D 11.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d = 8 + 3 = 11$.
Chọn đáp án D □

Câu 7. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ?

A 7. B 12. C 5. D 35.

Lời giải.

Có $C_{12}^1 = 12$ cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_1^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 6. B 1. C 5. D -1.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 - 2 = 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ là

A $x = -2$. B $x = 1$. C $x = -1$. D $x = 2$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ là $x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là

A $\mathbb{R}$. B $(0; +\infty)$. C $[0; +\infty)$. D $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra điểm cực đại của hàm số là $x = -1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - y + 3z + 5 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

Ⓐ $\vec{n}_3 = (-2; 1; 3)$. Ⓑ $\vec{n}_4 = (2; 1; -3)$. Ⓒ $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$. Ⓓ $\vec{n}_1 = (2; 1; 3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Cho mặt cầu có bán kính $r = 4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

Ⓐ 16π. Ⓑ 64π. Ⓒ $\dfrac{64\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 64\pi$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

Ⓐ $-2 - 4i$. Ⓑ $2 - 4i$. Ⓒ $-2 + 4i$. Ⓓ $2 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (1 - 3i) - (3 + i) = -2 - 4i$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 15. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 2^x$ là

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $\ell = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{10\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{50\pi}{3}$. Ⓒ 20π. Ⓓ 10π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r\ell = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là
(A) $x=4$. (B) $x=19$. (C) $x=38$. (D) $x=26$.

Lời giải.

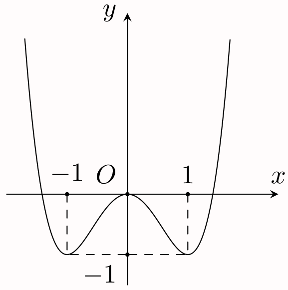
$\log_2(x+6)=5 \Leftrightarrow x+6=2^5 \Leftrightarrow x=26$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=3-2i$?
(A) $P(3;-2)$. (B) $Q(2;-3)$. (C) $N(3;-2)$. (D) $M(2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $z=3-2i$ có điểm biểu diễn là $N(3;-2)$.
Chọn đáp án (C) □

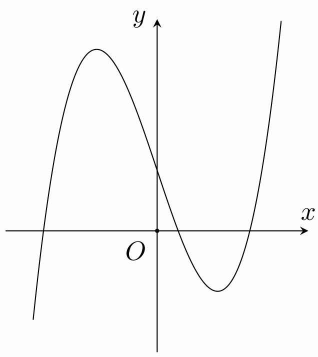
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên.
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
(A) $(-1;0)$. (B) $(-\infty;-1)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $(0;1)$.



Lời giải.

Nhìn đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?
(A) $y=x^3-3x+1$. (B) $y=x^4-2x^2+1$.
(C) $y=-x^4+2x^2+1$. (D) $y=-x^3+3x+1$.



Lời giải.

Đường cong như hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và có hệ số $a>0$. Nên nhìn đáp án ta thấy hàm số $y=x^3-3x+1$ thỏa.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?
(A) $N(3;-1;-2)$. (B) $Q(2;4;1)$. (C) $P(2;4;-1)$. (D) $M(3;1;2)$.

Lời giải.

Ta thấy tọa độ điểm $N(3;-1;-2)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng d. Vậy điểm N thuộc d.
Chọn đáp án (A) □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $M(3;0;2)$. B. $Q(0;0;2)$. C. $P(0;5;2)$. D. $N(3;5;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$. Do đó hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là $N(3;5;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 4π. B. 12π. C. 36π. D. 24π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2 h=\pi\cdot 3^2\cdot 4=36\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. $\displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3+C$. B. $6x+C$. C. $\dfrac{1}{3}x^3+C$. D. x^3+C.

Lời giải.

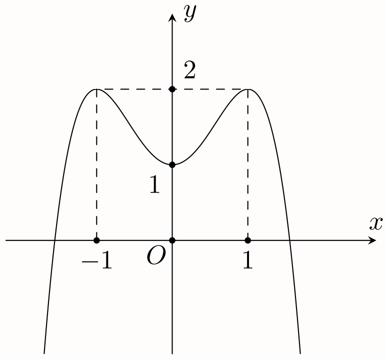
Ta có $\displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 25.

Cho hàm số bậc bốn có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ là

A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

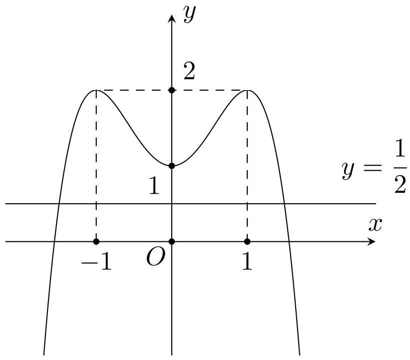


Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm thực.



Chọn đáp án A □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 26. Gọi hai số z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Khi đó, $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 1. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giải phương trình $z^2 - z = 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Số giao điểm của $y = -x^3 + 3x$ với trục hoành là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C): $y = -x^3 + 3x$ và trục Ox là

$$-x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 3 nghiệm phân biệt suy ra (C) và Ox có 3 điểm chung.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là hình vuông cạnh bằng 3. Diện tích khung quanh của (T) bằng

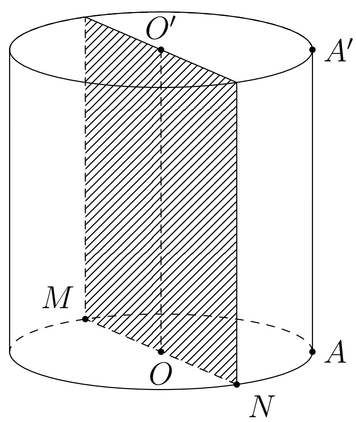
(A) $\dfrac{9\pi}{4}$. (B) 18π. (C) 9π. (D) $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải.

Giả sử ta có hình trụ và thiết diện như hình bên, thiết diện là phần gạch chéo.

Khi đó, diện tích xung quanh của (T) được tính theo công thức

$$S_{xq} = 2\pi ON \cdot AA' = 2\pi \frac{9}{2} = 9\pi.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox

(A) $\pi \displaystyle\int_0^1 e^{4x} dx$. (B) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} dx$. (C) $\pi \displaystyle\int_0^1 e^{2x} dx$. (D) $\displaystyle\int_0^1 e^{4x} dx$.

Lời giải.

Ta có, thể tích khối tròn xoay tạo thành khi xoay (D) quanh Ox là

$$V = \pi \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{4x} \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Biết $\int_0^1 (f(x) + 2x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(A) 3. (B) 2. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(x) + 2x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\mathrm{d}x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

(A) $3x - 2y + z + 11 = 0$.
(B) $2x - y + 3z - 14 = 0$.
(C) $3x - 2y + z - 11 = 0$.
(D) $2x - y + 3z + 14 = 0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P).
Do mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (P) nên (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;-2;1)$.
Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;3)$, vậy (α) có phương trình là

$$3 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 11 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

(A) -2. (B) -11. (C) -26. (D) -27.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2-5) = 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên khoảng $(0;9)$ là $x = \sqrt{5}$.
Ta tính được $f(0) = -2$, $f(\sqrt{5}) = -27$ và $f(9) = 5745$.
Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là -27.
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-4)^3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đã cho đạt cực đại tại một điểm duy nhất $x = 0$. Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 1.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 2-3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -3+2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+t \\ z = -2-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là phương trình đường thẳng cần tìm.

d vuông góc với (P) nên VTCP của d là $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{n}_P = (2;1;-3)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 2-3t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 35. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a = 27b$. Ⓑ $a = 9b$. Ⓒ $a = 27b^4$. Ⓓ $a = 27b^2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b.$

Vậy $a = 27b$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là

A $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
B $(-\infty; 3]$.
C $[-3; 3]$.
D $(0; 3]$.

Lời giải.

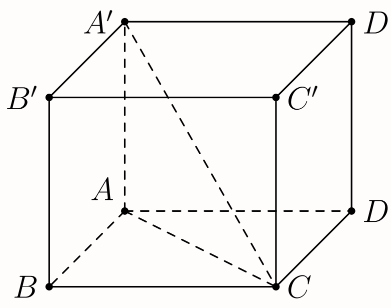
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 36 - x^2 > 0 \\ 36 - x^2 \geq 27 \end{cases} \Leftrightarrow 36 - x^2 \geq 27 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-3; 3]$.
Chọn đáp án C □

Câu 37.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = \sqrt{2}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A 30°.
B 45°.
C 90°.
D 60°.



Lời giải.

Ta có đường thẳng AC là hình chiếu của đường thẳng $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó

$$(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}.$$

Do $AB = a$, $AD = \sqrt{2}a$ nên $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.
Từ $\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra $\widehat{A'CA} = 30^\circ$.
Vậy góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho số phức $z = -2 + 3i$, số phức $(1 + i) \cdot \overline{z}$ bằng

A $-5 - i$.
B $-1 + 5i$.
C $1 - 5i$.
D $5 - i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức z là $\overline{z} = -2 - 3i$.
Vậy $(1 + i) \cdot \overline{z} = (1 + i) \cdot (-2 - 3i) = 1 - 5i$.
Chọn đáp án C □

Câu 39. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A $(-\infty; -1]$.
B $(-\infty; 2)$.
C $(-\infty; -1)$.
D $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$.
Suy ra $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$.
Vậy $m \leq \min(3x^2 - 6x + 2), \forall x \in (2; +\infty)$.
Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 2$ trên khoảng $(2; +\infty)$.
Có $g'(x) = 6x - 6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2; +\infty)$.
Ta có bảng biến thiên

x	2 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$2 \nearrow +\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là 2, suy ra $m \leq 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Biết $F(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2x^2 + C$. B. $\mathrm{e}^{2x} - 4x^2 + C$. C. $2\mathrm{e}^x - 2x^2 + C$. D. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C$.
Vậy $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} - (2x)^2\right) + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2x^2 + C$.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự tính đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yếu giá bán loại xe X là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 708.674.000 đồng. B. 737.895.000 đồng. C. 723.137.000 đồng. D. 720.000.000 đồng.

Lời giải.

Đặt $A = 800.000.000$ đồng và $r = 2\%$.
Giá xe X năm 2021: $A_1 = A - Ar = A(1 - r)$.
Giá xe X năm 2022: $A_2 = A(1 - r) - A(1 - r)r = A(1 - r)^2$.
Giá xe X năm 2023: $A_3 = A(1 - r)^3$.
Giá xe X năm 2024: $A_4 = A(1 - r)^4$.
Giá xe X năm 2025: $A_5 = A(1 - r)^5 \approx 723.137.000$ đồng.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua đỉnh S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$. B. $\dfrac{16\sqrt{15}a}{15}$. C. $\dfrac{8\sqrt{15}a}{15}$. D. $\sqrt{15}a$.

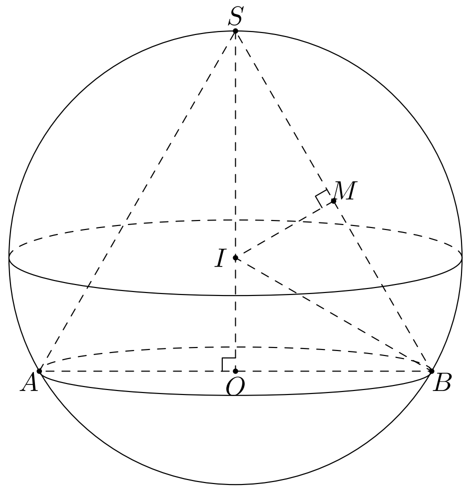
Lời giải.

Nếu cắt mặt cầu ngoại tiếp khối nón (N) bởi mặt phẳng qua trục (SAB), ta được một hình tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó bán kính mặt cầu (T) bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Gọi M là trung điểm của SB. Kẻ đường vuông góc với SB tại M, cắt SO tại I.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$ và $r = SI$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Ta có $\triangle SIM \backsim \triangle SBO \Rightarrow \dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SM}{SO} \cdot SB$.



Trong đó $\begin{cases} SM = 2a \\ SB = 4a \\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow r = SI = \dfrac{8\sqrt{15}a}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- $f(0) = -1 \Leftrightarrow d = -1 < 0$.
- Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = -2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 3a > 0. \end{cases}$

Vậy có 2 số dương là a và b.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ bằng

A $\dfrac{50}{81}$. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{5}{18}$. D $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 9 \cdot \mathrm{A}_9^4$.

Gọi $\overline{abcde}$ là số có 5 chữ số đôi một khác nhau và có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ.

Gọi A là biến cố cần tìm.

TH 1. $e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn.
$d \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow d$ có 5 cách chọn.
Chọn $\overline{abc}$ có A_8^3 cách.
Vậy có $1 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_8^3$ số.

TH 2. $d = 0 \Rightarrow d$ có 1 cách chọn.
$e \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow e$ có 5 cách chọn.
Chọn $\overline{abc}$ có A_8^3 cách.
Vậy có $1 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_8^3$ số.

TH 3. $d, e \neq 0$, $e \in \{2; 4; 6; 8\}$ và $d \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
Chọn e có 4 cách.
Chọn d có 5 cách.
Chọn a có 7 cách.
Chọn $\overline{bc}$ có A_7^2 cách.
Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2$ số.

TH 4. $d, e \neq 0$, $e \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ và $d \in \{2; 4; 6; 8\}$.
Chọn e có 5 cách.
Chọn d có 4 cách.
Chọn a có 7 cách.
Chọn $\overline{bc}$ có A_7^2 cách.
Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2$ số.

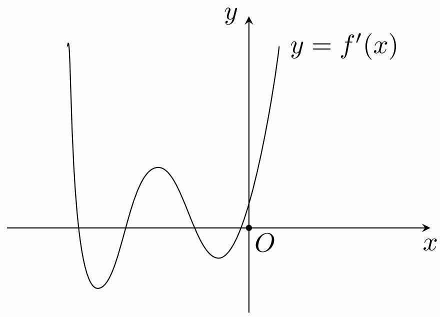
Suy ra $n(A) = 1 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_8^3 + 1 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_8^3 + 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2 = 15120$ số.
Xác suất của biến cố A là

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15120}{9 \cdot \mathrm{A}_9^4} = \frac{5}{9}.$$

Chọn đáp án D

Câu 45.
Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - x^2|$ là

A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.



Lời giải.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số cực trị của hàm số $h(x) = f(x^4) - x^2$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ với trục hoành (không tính tiếp xúc).
Ta có

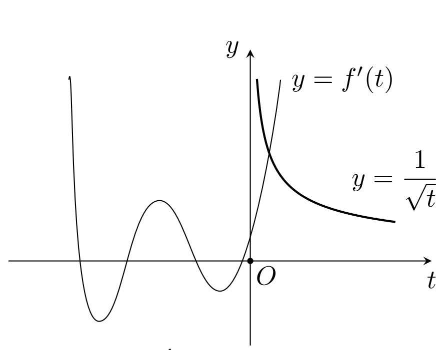
$$h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 2x = 2x\left[2x^2 f'(x^4) - 1\right], \; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 f'(x^4) - 1 = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của (1) nên

$$(1) \Leftrightarrow f'(x^4) = \frac{1}{x^2}. \qquad (2)$$

Đặt $t = x^4$, $t > 0$. Phương trình (2) trở thành $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. (3)

Do với $t > 0$ thì $y = f'(t)$ là hàm đồng biến còn $y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ là hàm nghịch biến, hơn nữa $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$ nên dựa vào đồ thị suy ra phương trình (3) có nghiệm $t_0 > 0$ duy nhất. Từ đó suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\pm\sqrt[4]{t_0}$.



Vậy $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm (đơn) phân biệt $x = 0$ và $x = \pm\sqrt[4]{t_0}$. Ta có bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như hình dưới đây

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{t_0}$		0		$\sqrt[4]{t_0}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				0				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm (tại $x = 0$, đồ thị $h(x)$ tiếp xúc trục hoành). Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có

$$2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 1) + 1.$$

Đặt $t = x^2 + y^2 - 2x + 1$. Ta có $t = (x-1)^2 + y^2$ nên $t \geq 0$.

Điều kiện đã cho trở thành

$$2^t \leq t + 1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leq 0, \quad \text{với } t \geq 0. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$ với $t \geq 0$. Ta có

$$f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1,\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \log_2(\log_2 \mathrm{e}) \approx 0{,}52.$$

Hàm số $f(t)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình dưới đây

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0		$+$		
$f(t)$	0		$f(t_0)$		0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra nghiệm của bất phương trình $(*)$ là $t \in [0; 1]$. Từ đó suy ra

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Vậy tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện đã cho là hình tròn (S) tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1$.
Với các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $2x - y + 1 \neq 0$, ta có

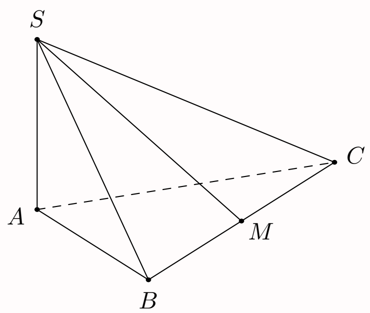
$$P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow (2P-8)x - Py + P - 4 = 0.$$

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $(2P-8)x - Py + P - 4 = 0$. Khi đó điều kiện để tồn tại điểm $(x; y)$ là

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(I, \Delta) \le R &\Leftrightarrow \frac{|(2P-8)\cdot 1 - P\cdot 0 + P - 4|}{\sqrt{(2P-8)^2 + (-P)^2}} \le 1 \\
&\Leftrightarrow |3P - 12| \le \sqrt{5P^2 - 32P + 64} \\
&\Leftrightarrow 9P^2 - 72P + 144 \le 5P^2 - 32P + 64 \\
&\Leftrightarrow 4P^2 - 40P + 80 \le 0 \\
&\Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \le P \le 5 + \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Vậy $\min P = 5 - \sqrt{5} \approx 2{,}76$. Suy ra P gần với giá trị 3 nhất.
Chọn đáp án C □

Câu 47.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

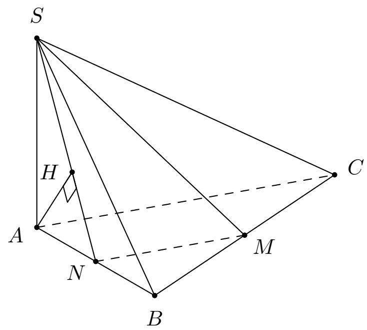


A $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. B $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C $\frac{a}{2}$. D $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của cạnh AB.
Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp MN$.
Xét đường thẳng AC và mặt phẳng (SMN) ta có

$$\begin{cases} AC \parallel MN \\ AC \not\subset (SMN) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (SMN).$$



Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng khoảng cách từ AC đến mặt phẳng (SMN) hay bằng khoảng cách từ A đến (SMN).
Ta có $BA \perp AC$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A), $MN \parallel AC$ (tính chất đường trung bình) nên $MN \perp AB$.
Do $MN \perp AB$, $MN \perp SA$ nên $MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SN$, $H \in SN$. Ta có

$$\begin{cases} (SMN) \perp (SAB) \\ SN = (SMN) \cap (SAB) \\ AH \perp SN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SMN),$$

tức AH là khoảng cách từ A đến (SMN).

Xét tam giác SAN vuông tại A, có $SA = a$, $AN = \dfrac{a}{2}$, $SN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, do đó

$$AH = \frac{SA \cdot AN}{SN} = \frac{a \cdot \dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{48}$. (B) $\dfrac{2a^3}{81}$. (C) $\dfrac{a^3}{81}$. (D) $\dfrac{a^3}{96}$.

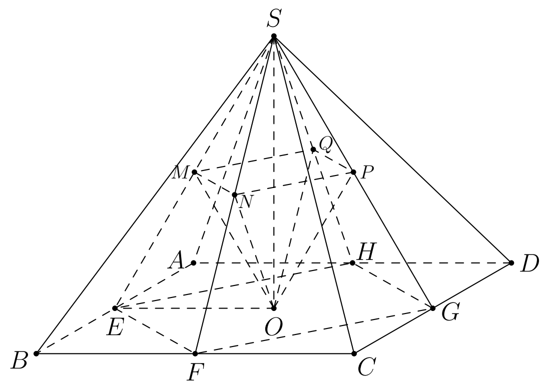
Lời giải.

Gọi E, F, G và H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.

Theo tính chất hình chóp đều ta có $SO \perp (ABCD)$, OE, OF, OG, OH lần lượt vuông góc với AB, BC, CD và DA.

Xét đường thẳng AB và mặt phẳng (SOE), ta có

$$\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow (SAB) \perp (SOE).$$



Do đó hình chiếu M của O lên mặt phẳng (SAB) chính là hình chiếu của O lên giao tuyến SE của hai mặt phẳng (SAB) và (SOE).

Do tam giác SAB cân tại S nên ta có $SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác vuông SOE, ta có $OE = \dfrac{a}{2}$, $SE = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ suy ra $SO = \dfrac{a}{2}$ nên SEO là tam giác vuông cân tại O và M là trung điểm của SE.

Tương tự, ta cũng có N, P, Q cũng lần lượt là trung điểm của SF, SG, SH.

Theo tính chất đường trung bình trong tam giác, ta có $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Diện tích hình vuông bằng $S_{MNPQ} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{a^2}{8}$.

Do $OE \parallel (MNPQ) \Rightarrow \mathrm{d}\left(O, (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(E, (MNPQ)\right)$.

Mặt khác M là trung điểm của SE nên $\mathrm{d}\left(E, (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(S, (MNPQ)\right)$.

Do đó $\mathrm{d}\left(O, (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(S, (MNPQ)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(S, (ABCD)\right) = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a}{4}$.

Vậy thể tích của hình chóp $O.MNPQ$ bằng

$$V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(O, (MNPQ)\right) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^3}{96}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

Ⓐ 15. Ⓑ 12. Ⓒ 14. Ⓓ 13.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x\right)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.
Ta có $g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x\right)$. Khi đó

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\x^2-4x=-4\\x^2-4x=-2\\x^2-4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2\pm\sqrt{2}\\x=0\\x=4.\end{array}\right.$$

Mặt khác,

$$f'\left(x^2-4x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x^2-4x<-2\\x^2-4x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq 2\\2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\end{cases}\\x<0\\x>4.\end{array}\right.$$

Lại có $g(0)=f(0)=-3$, $g\left(2\pm\sqrt{2}\right)=f(-2)=2$, $g(2)=f(-4)=-2$, $g(4)=f(0)=-3$.
Bảng biến thiên của $g(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-4x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho tương đương với $f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{3}$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{m}{3}$.
Dựa vào bảng biến thiên trên, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$-3<\frac{m}{3}\leq 2\Leftrightarrow -9<m\leq 6.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $-9<m\leq 6$ nên $m\in\{-8;-7;\ldots;5;6\}$.
Vậy có tất cả 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A 7. **B** 8. **C** 10. **D** 9.

Lời giải.

Ta thấy $a=0$ luôn thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.
Với $a \in \mathcal{K} = (-1;0)\cup(0;1)$ ta có

$$2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \frac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m} = 2. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$ với mọi $a \in \mathcal{K}$.
Với mọi $a \in \mathcal{K}$, ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}\cdot a^m - m\cdot a^{m-1}\cdot n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{(a^m)^2} \\ &= \frac{n\cdot a^{m-1}\left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right]}{a^{2m}}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{\sqrt{a^2+1} - \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}}{a^2+1} - \frac{m}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}} - \frac{m}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{1}{a^2+1} - m\right) < 0, \forall a \in (-1;1), m \geq 1. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên của $g(a)$ trên khoảng $(-1;1)$

a	-1	0	1
$g'(a)$		$-$	
$g(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$

Từ bảng biến thiên trên, ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m \in \{2;4;6;8\}$ thì bảng biến thiên của $f(a)$ như sau:

a	-1		0		1
$f'(a)$		$-$	‖	$-$	
$f(a)$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(1)$

Vì $f(-1) = n\ln\left(-1+\sqrt{2}\right) < 0$ với mọi $n > 0$ nên phương trình (1) không thể có 2 nghiệm thuộc $\mathcal{K}$.

- Nếu $m \in \{3; 5; 7; 9\}$ thì bảng biến thiên của $f(a)$ như sau:

a	-1		0		1
$f'(a)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(a)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$f(1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $\mathcal{K}$ thì

$$\begin{cases} f(-1) < 2 \\ f(1) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n\ln\left(-1+\sqrt{2}\right) < 2 \\ n\ln\left(1+\sqrt{2}\right) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

Mà n nguyên dương nên $n = 1$ hoặc $n = 2$.
Vậy trong trường hợp này ta có các cặp số nguyên dương $(3;1)$, $(3;2)$, $(5;1)$, $(5;2)$, $(7;1)$, $(7;2)$, $(9;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m = 1$ thì bảng biến thiên của $f(a)$ như sau:

a	-1		0		1
$f'(a)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(a)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$n \ \Vert\ n$	$\searrow$	$f(1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $\mathcal{K}$ thì

$$\begin{cases} f(-1) < 2 < n \\ f(1) < 2 < n \end{cases} \quad (\text{vô lí}).$$

Vậy có tất cả 7 cặp số nguyên dương $(m; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 27

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2020
Môn: Toán
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+4z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

(A) $\vec{n}_3=(1;-2;4)$. (B) $\vec{n}_1=(1;2;-4)$. (C) $\vec{n}_2=(1;2;4)$. (D) $\vec{n}_4=(-1;2;4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+4z-1=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_3=(1;-2;4)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=7$ và công sai $d=2$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 14. (B) 9. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) 5.

Lời giải.

Theo công thức của cấp số cộng thì $u_2=u_1+d=7+2=9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ là

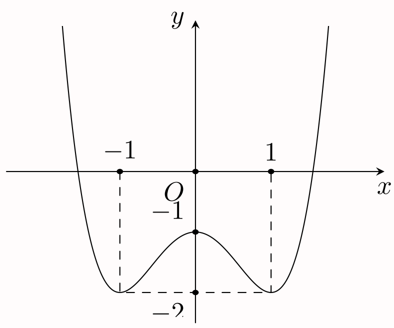
(A) $x=-1$. (B) $x=1$. (C) $x=-3$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to-3^-} y=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x+1}{x+3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x+1}{x+3}=-\infty$.
Khi đó đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là $x=-3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(-\infty;0)$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 5. $\int 4x^3\,dx$ bằng

(A) $4x^4 + C$. (B) $\frac{1}{4}x^4 + C$. (C) $12x^2 + C$. (D) $x^4 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 4x^3\,dx = x^4 + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

(A) $3 - \log_3(a)$. (B) $1 - \log_3(a)$. (C) $3 + \log_3(a)$. (D) $1 + \log_3(a)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a) = 1 + \log_3(a)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

(A) $N(-1; 2)$. (B) $P(2; -1)$. (C) $Q(-2; 1)$. (D) $M(1; -2)$.

Lời giải.

Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn là $N(-1; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

(A) $x = -2$. (B) $x = -3$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 24. (B) 4. (C) 8. (D) 12.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V_{LT} = B \cdot h = 6 \cdot 4 = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ -1. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+2=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ $M(3;1;5)$. Ⓑ $N(3;1;-5)$. Ⓒ $P(2;2;-1)$. Ⓓ $Q(2;2;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình đường thẳng d, ta thấy $N(3;1;-5) \in d$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = 6a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $3a^3$. Ⓑ $6a^3$. Ⓒ $9a^3$. Ⓓ $18a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\cdot 3a^2 \cdot 6a = 6a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

Ⓐ 45π. Ⓑ 5π. Ⓒ 15π. Ⓓ 30π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

Ⓐ $(-1;-2;3)$. Ⓑ $(-2;-4;6)$. Ⓒ $(1;2;-3)$. Ⓓ $(2;4;-6)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Phần thực của số phức $z = 5-4i$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ 5. Ⓓ -5.

Lời giải.

Phần thực của số phức z là 5.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 16. Cho mặt cầu có bán kính $r = 5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{500\pi}{3}$. Ⓑ 25π. Ⓒ $\dfrac{100\pi}{3}$. Ⓓ 100π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (đvdt).

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ?

Ⓐ 8. Ⓑ 15. Ⓒ 56. Ⓓ 7.

Lời giải.

Để chọn một học sinh từ nhóm học sinh ta có thể chọn học sinh nam hoặc học sinh nữ

- Chọn 1 học sinh nam từ 7 học sinh nam nên có 7 cách.
- Chọn 1 học sinh nũ từ 8 học sinh nam nên có 8 cách.

Theo quy tắc cộng có $7 + 8 = 15$ cách chọn một học sinh thỏa mãn yêu cầu bài toán.

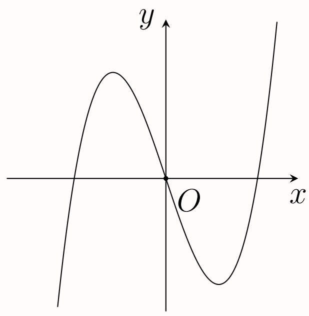
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

Ⓐ $y = x^4 + 2x^2$. Ⓑ $y = -x^3 - 3x$.

Ⓒ $y = x^3 - 3x$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số có dạng hàm bậc ba nên loại $y = x^4 + 2x^2$ và $y = -x^4 + 2x^2$.

Lại có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên hệ số $a > 0$ do đó loại $y = -x^3 - 3x$.

Vậy đáp án đúng là $y = x^3 - 3x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

Ⓐ $Q(0;4;1)$. Ⓑ $P(3;0;1)$. Ⓒ $M(0;0;1)$. Ⓓ $N(3;4;0)$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$ và véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (Oxy) khi đó phương trình Δ: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Do đó tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 3 \\ y = 4 \\ z = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 0 \\ t = -1. \end{cases}$$

Suy ra điểm cần tìm là $N(3;4;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y=3^x$ là
(A) $[0;+\infty)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=3^x$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình nón có bán kính đáy $r=2$ và độ dài đường sinh $\ell=7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
(A) $\dfrac{28\pi}{3}$. (B) 14π. (C) 28π. (D) $\dfrac{14\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq}=\pi r\ell=\pi\cdot 2\cdot 7=14\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Nghiệm của phương trình $2^{2x-2}=2^x$ là
(A) $x=-2$. (B) $x=2$. (C) $x=-4$. (D) $x=4$.

Lời giải.

Phương trình $2^{2x-2}=2^x\Leftrightarrow 2x-2=x\Leftrightarrow x=2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng
(A) $-1+3i$. (B) $-1-3i$. (C) $1+3i$. (D) $1-3i$.

Lời giải.

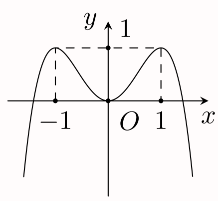
Ta có $z_1-z_2=(3-2i)-(2+i)=1-3i$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7)=5$ là
(A) $x=18$. (B) $x=25$. (C) $x=39$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Phương trình $\log_2(x+7)=5\Leftrightarrow x+7=2^5\Leftrightarrow x=25$.
Chọn đáp án (B) □

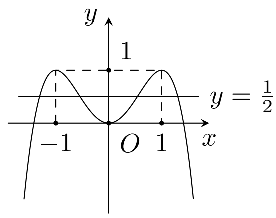
Câu 25.
Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ là
(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$, suy ra phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 5. Diện tích xung quanh của (T) bằng

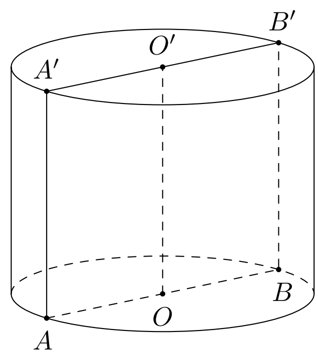
(A) $\frac{25\pi}{2}$. (B) 25π. (C) 50π. (D) $\frac{25\pi}{4}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng qua trục OO' là hình vuông $ABB'A'$ (như hình vẽ bên). Khi đó ta có độ dài đường sinh là $\ell = AA' = 5$, bán kính đáy là $r = OA = \frac{5}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ (T) là

$$S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = 25\pi.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho số phức $z = -3 + 2i$, số phức $(1 - i)\overline{z}$ bằng

(A) $-1 - 5i$. (B) $5 - i$. (C) $1 - 5i$. (D) $-5 + i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = -3 - 2i$ nên

$$(1 - i)\overline{z} = (1 - i)(-3 - 2i) = -3 - 2i + 3i + 2i^2 = -5 + i.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ và trục Ox

$$-x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Phương trình hoành độ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 16b^2$.   B. $a = 8b$.   C. $a = 16b$.   D. $a = 16b^4$.

Lời giải.

Với a, b là các số thực dương ta có

$$\log_2 a - 2\log_4 b = 4 \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 b + \log_2 16 \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2(16b) \Leftrightarrow a = 16b.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+1=0$.   B. $3x-2y+z-1=0$.
C. $2x+y-3z+14=0$.   D. $2x+y-3z-14=0$.

Lời giải.

Ta thấy $3\cdot 2-2\cdot 1-3-3=-2\neq 0$ nên $M\notin(P)$. Vì vậy phương trình mặt phẳng qua M và song song với (P) là

$$3(x-2)-2(y-1)+(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-1=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28.   B. -1.   C. -36.   D. -37.

Lời giải.

Trên đoạn $[0;9]$, ta có $f'(x)=4x^3-24x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{6}\notin[0;9] \\ x=\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-1$, $\quad f\left(\sqrt{6}\right)=-37$, $\quad f(9)=5588$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ là -37 $\left(\text{tại } x=\sqrt{6}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 4.   B. 3.   C. 1.   D. 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại 2 điểm $x=-1$ và $x=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$. (B) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x$. (C) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x$. (D) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 3. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $z^2 + z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i \\ z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i. \end{array}\right.$

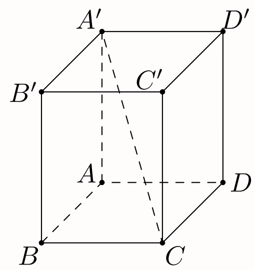
Khi đó $|z_1| + |z_2| = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right| + \left|-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right| = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$

Chọn đáp án (B) □

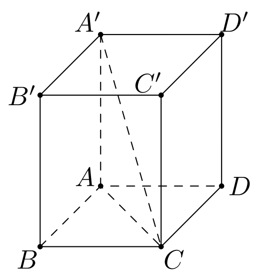
Câu 35.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$, $AA' = 2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) $45°$. (B) $30°$. (C) $60°$. (D) $90°$.



Lời giải.



Do $AA' \perp (ABCD)$ nên $(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA}$. Ta có

$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{A'A}{AC} = \frac{A'A}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \sqrt{3}.$$

Vậy $(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA} = 60°$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2) \geq 3$ là

A. $(-\infty; 2]$.
B. $[-2; 2]$.
C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
D. $(0; 2]$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$31 - x^2 \geq 3^3 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 2]$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3x+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ y = 2 - 3t. \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 1; -3)$ của mặt phẳng (P) làm véc-tơ chỉ phương, do đó nó có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Biết $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7.
B. 3.
C. 5.
D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x)+2x]\,\mathrm{d}x = 5 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 5 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + x^2\Big|_0^1 = 5 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 - 1 = 4. \end{aligned}$$

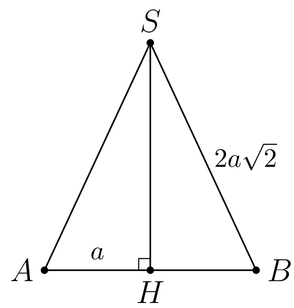
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2\sqrt{2}a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{7}a}{7}$.
B. $\dfrac{4a}{3}$.
C. $\dfrac{8\sqrt{7}a}{7}$.
D. $\sqrt{7}a$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) qua trục của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB cân tại S.
Khi đó, (α) cắt mặt cầu (T) theo đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.
Suy ra bán kính của (T) là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $HA = HB = a$ và $SH = \sqrt{SA^2 - IA^2} = a\sqrt{7}$.
Khi đó, ta có $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2}SH \cdot AB = \dfrac{1}{2}a\sqrt{7} \cdot 2a = \sqrt{7}a^2$.
Mà $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SA \cdot SB \cdot AB}{4R}$ nên suy ra

$$R = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4S_{\triangle SAB}} = \frac{2\sqrt{2}a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot 2a}{4 \cdot a^2\sqrt{7}} = \frac{4a\sqrt{7}}{7}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Biết $F(x) = \mathrm{e}^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\mathrm{e}^{2x} + 8x^2 + C$. (B) $2\mathrm{e}^x + 4x^2 + C$. (C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + C$. (D) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + C.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Năm 2020, một hãng xe ô-tô niêm yết giá bán loại xe X là 850.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô-tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm trong đến hàng nghìn)?

(A) 768.333.000 đồng. (B) 765.000.000 đồng. (C) 752.966.000 đồng. (D) 784.013.000 đồng.

Lời giải.

Gọi M là giá bán của của xe trong năm đầu tiên, $r\%$ là tỉ lệ giảm giá bán theo từng năm liền trước.
Sau năm thứ nhất: Giá bán của xe là $M_1 = M - M \times r\% = M(1 - r\%)$.
Sau năm thứ hai: Giá bán của xe là $M_2 = M_1 - M_1 \times r\% = M_1(1 - r\%) = M(1 - r\%)^2$.
Sau năm thứ ba: Giá bán của xe là $M_3 = M_2 - M_2 \times r\% = M_2(1 - r\%) = M(1 - r\%)^3 \ldots$
Sau năm thứ n: Giá bán của xe là $M_n = M(1 - r\%)^n$.
Vậy giá bán của xe X trong năm 2025 (sau 5 năm lưu hành) là

$$T = M \times (1 - r\%)^5 = 850.000.000 \times (1 - 2\%)^5 \approx 768.333.000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

Ⓐ $(-\infty;-2)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-\infty;-2]$. Ⓓ $(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 1, \forall x \in (2;+\infty).$$

Xét $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, ta có $f'(x) = 6x - 6 > 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

Bảng biến thiên của $f(x)$ là

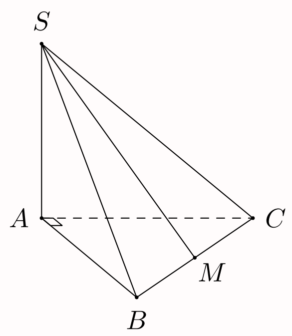
x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

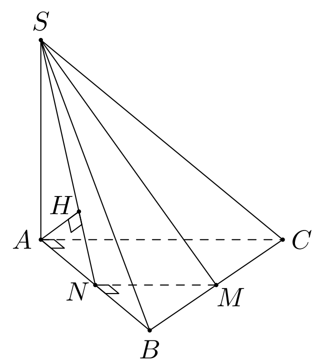
Câu 43.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



Ⓐ $\dfrac{\sqrt{10}a}{5}$. Ⓑ $\dfrac{a}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AB, suy ra $AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (SMN)$.

Do đó $\mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(A,(SMN))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SN, suy ra $AH \perp SN$. (1)

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AC \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow MN \perp AB$.

Mặt khác $SA \perp MN$ vì $SA \perp (ABC)$.

Từ đó suy ra $MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SMN) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SMN)) = AH$.

Trong tam giác SAN vuông tại A, ta có

$$AH = \frac{SA \cdot AN}{\sqrt{SA^2 + AN^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{\sqrt{2}a}{3}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng

(A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{32}{81}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{32}{45}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau là $9\mathrm{A}_9^4$, suy ra $n(\Omega) = 9\mathrm{A}_9^4 = 27216$.
Nếu hai chữ số tận cùng là hai chữ số lẻ thì số cách chọn các số có dạng trên là

$$\mathrm{A}_5^2 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2 = 5880.$$

Nếu hai chữ số tận cùng là hai chữ số chẵn, trong đó có một chữ số là 0 thì số cách chọn là

$$\mathrm{C}_4^1 \cdot 2! \cdot \mathrm{A}_8^3 = 2688.$$

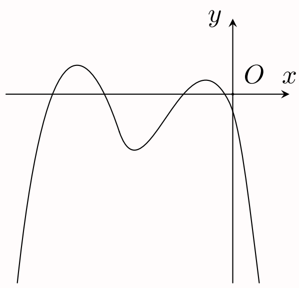
Nếu hai chữ số tận cùng là hai chữ số chẵn (không có chữ số 0 ở hai vị trí này) thì số cách chọn là

$$\mathrm{A}_4^2 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_7^2 = 3528.$$

Như vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $5880 + 2688 + 3528 = 12096$ số.
Vậy ta có xác suất là $\mathrm{P} = \dfrac{12096}{27216} = \dfrac{4}{9}$.
Chọn đáp án (A)

Câu 45.
Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 5. (D) 4.



Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) + x^2$, ta có $h'(x) = 4x^3 \cdot f'(x^4) + 2x$.

Phương trình $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 \cdot f'(x^4) + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^4) = -\dfrac{1}{2x^2}\ (x \neq 0) \end{array}\right.$ (1).

Đặt $t = x^4 \Rightarrow x^2 = \sqrt{t}$, từ (1) suy ra $f'(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. (2)

Xét $k(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, có $k'(t) = \dfrac{1}{4t^{\frac{3}{2}}} > 0$, $\forall t \in (0; +\infty)$.
Bảng biến thiên của $k(t)$ như sau

t	0		$+\infty$
$k'(t)$		$+$	
$k(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ suy ra phương trình (2) có một nghiệm dương hay phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$.
Bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

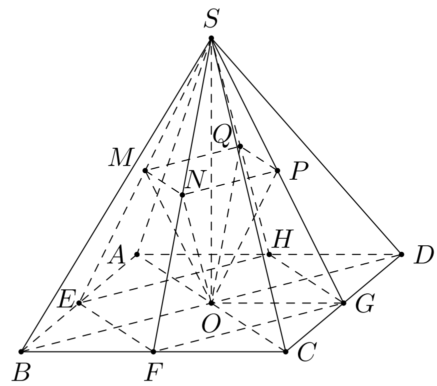
x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{8a^3}{81}$. B. $\dfrac{a^3}{6}$. C. $\dfrac{a^3}{12}$. D. $\dfrac{16a^3}{81}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm AB. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên SE, suy ra $OM \perp (SAB)$.
Tam giác SOB có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a.$$

Tam giác SOE có $SE^2 = SO^2 + OE^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ và

$$SM \cdot SE = SO^2 \Leftrightarrow \frac{SM}{SE} = \frac{SO^2}{SE^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

Do đó M là trung điểm SE.
Gọi H, G, F lần lượt là trung điểm của AD, DC, CB.
Tương tự ta chứng minh được N, P, Q lần lượt là trung điểm của SF, SG, SH.
Suy ra $MNPQ$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng $\dfrac{AC}{4} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có

$$\mathrm{d}(O, (MNPQ)) = \mathrm{d}(S, (MNPQ)) = \frac{SO}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vậy $V_{O.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(O, (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{4y}{2x + y + 1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le (x^2+y^2-2x+2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le (x^2+y^2-2x+1)+1$.
Đặt $t = x^2+y^2-2x+1 = (x-1)^2+y^2$, suy ra $t \ge 0$.
Bất phương trình trở thành $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0$, với $t \ge 0$.
Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$, với $t \ge 0$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t = \dfrac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow t = \log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = t_0 \approx 0{,}52877$.

Và có $f(1) = 0$.
Bảng biến thiên

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bản biến thiên suy ra $f(t) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$. Khi đó $(x-1)^2+y^2 \le 1$. $(*)$
Do đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là các điểm nằm trong và trên đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = 1$.

Từ $(*)$, suy ra $\begin{cases}(x-1)^2 \le 1 \\ y^2 \le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge -1\end{cases}$ và dấu "=" không đồng thời xảy ra. Do đó $2x+y+1 \ne 0$.

Khi đó $P = \dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow (2x+y+1)P = 4y \Leftrightarrow 2Px + (P-4)y + P = 0\ (\Delta)$.
Để tồn tại $(x;y)$ thì đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) phải có điểm chung, nghĩa là

$$\mathrm{d}[I,(\Delta)] \le 1 \Leftrightarrow \frac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}} \le 1 \Leftrightarrow |3P| \le \sqrt{5P^2-8P+16} \Leftrightarrow 4P^2+8P-16 \le 0.$$

Giải bất phương trình ta có $-1-\sqrt{5} \le P \le -1+\sqrt{5}$. Suy ra $\max P = -1+\sqrt{5} \approx 1{,}2361$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $y = ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y' = 3ax^2+2bx+c$.
Từ bảng biến thiên ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- $y(0) = -1 \Leftrightarrow d = -1 < 0$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, theo định lí Vi-et ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \Leftrightarrow \frac{-2b}{3a} = 4 > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0.$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \Leftrightarrow \frac{c}{3a} = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Vậy trong các số a, b, c, d chỉ có a là số dương.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 16. (B) 19. (C) 20. (D) 17.

Lời giải.

Đặt $g(x) = 4f\left(x^2 - 4x\right)$, với $x \in (0; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = 8(x-2)f'\left(x^2 - 4x\right)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ f'\left(x^2 - 4x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = -2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Ta có $g(0) = g(4) = 4f(0) = -12$, $g(2-\sqrt{2}) = g(2+\sqrt{2}) = 4f(-2) = 8$, $g(2) = 4f(-4) = -8$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-12	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	-12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$, suy ra phương trình $g(x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $-12 < m \leq 8$.

Mà m nguyên nên có 20 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên (m,n) sao cho $m+n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A 12. **B** 10. **C** 11. **D** 9.

Lời giải.

- Ta có $a=0$ luôn thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.
- Xét $a \in \mathscr{D} = (-1;0)\cup(0;1)$, ta có

$$2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \frac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m} = 2. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(a) = \dfrac{n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$.

Ta có $g'(a) = \dfrac{n\cdot a^{m-1}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)}{a^{2m}}$.

Xét hàm số $h(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\cdot\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Ta có

$$h'(a) = \frac{1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}} - \frac{m}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{1}{a^2+1} - m\right) < 0,\ \forall a \in (-1;1), \forall m \geq 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(a)$:

a	-1		0		1
$h'(a)$		$-$		$-$	
$h(a)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên trên ta xét các trường hợp sau

— Nếu $m \in \{2;4;6;8;10\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$-$	||	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Do $g(-1) = n\ln(-1+\sqrt{2}) < 0$ nên phương trình (1) không thể có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$.

— Nếu $m \in \{3;5;7;9;11\}$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	||	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 \\ g(1) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n\ln(-1+\sqrt{2}) < 2 \\ n\ln(1+\sqrt{2}) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \in \{1;2\}.$$

— Nếu $m = 1$ thì bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ như sau

a	-1		0		1
$g'(a)$		$+$	||	$-$	
$g(a)$	$g(-1)$	$\nearrow$	n || n	$\searrow$	$g(1)$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc $\mathscr{D}$ thì

$$\begin{cases} g(-1) < 2 < n \\ g(1) < 2 < n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < \dfrac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \\ n > 2 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy có 10 cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (B) □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 28

ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH 2021

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh?

(A) $5!$. (B) A_5^3. (C) C_5^3. (D) 5^3.

Lời giải.

Chọn 3 trong 5 không tính thứ tự
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$ Giá trị của u_3 bằng

(A) 6. (B) 9. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Do cấp số cộng có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$ nên công sai $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$.
Suy ra $u_3 = u_2 + d = 3 + 2 = 5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

(A) $(-2; 2)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra đạo hàm của hàm số dương trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
Đáp án cần chọn là khoảng $(0; 2)$
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A $x=-3$. **B** $x=1$. **C** $x=2$. **D** $x=-2$.

Lời giải.

$f'(x)$ đổi dấu từ cộng sang trừ tại $x=-2$.

Chọn đáp án D

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Hàm số $f'(x)$ đổi dấu 4 lần nên hàm số $f(x)$ có 4 cực trị.

Bình luận. Đề bài nên cho $f(x)$ là một hàm số liên tục.

Chọn đáp án A

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng

A $x=1$. **B** $x=-1$. **C** $x=2$. **D** $x=-2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+4}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

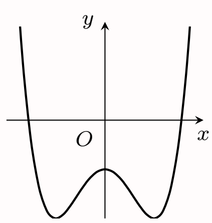
Chọn đáp án A

Câu 7.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A $y=-x^4+2x^2-1$. **B** $y=x^4-2x^2-1$.

C $y=x^3-3x^2-1$. **D** $y=-x^3+3x^2-1$.



Lời giải.

Hình vẽ minh họa đồ thị hàm bậc 4, có hệ số bậc 4 dương.

Chọn đáp án B

Câu 8. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Lời giải.

Khi $x = 0$ thì $y = 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{2} + \log_3 a$. Ⓑ $2\log_3 a$. Ⓒ $(\log_3 a)^2$. Ⓓ $2 + \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

Ⓐ $y' = 2^x \ln 2$. Ⓑ $y' = 2^x$. Ⓒ $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. Ⓓ $y' = x.2^{x-1}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = a^x$ là $y' = a^x \ln a$.

Suy ra, hàm số $y = 2^x$ có đạo hàm là $y' = 2^x . \ln 2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

Ⓐ a^6. Ⓑ $a^{\frac{3}{2}}$. Ⓒ $a^{\frac{2}{3}}$. Ⓓ $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải.

$$\sqrt{a^3} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

$5^{2x-4} = 25 = 5^2 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x) = 3$ là

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = \frac{8}{3}$. Ⓓ $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2(3x) = 3 \Rightarrow 3x = 2^3 = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ (nhận).

Chọn đáp án Ⓒ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\,dx = 3x^3 - x + C$.

B. $\int f(x)\,dx = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.

D. $\int f(x)\,dx = x^3 - C$.

Lời giải.

$$\int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

B. $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\,dx = 2\sin 2x + C$.

D. $\int f(x)\,dx = -2\sin 2x + C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Nếu $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ và $\int_2^3 f(x)\,dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x)\,dx$ bằng

A. 3. B. 7. C. -10. D. -7.

Lời giải.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 5 + (-2) = 3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tích phân $\int_1^2 x^3\,dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{15}{4}$.

Lời giải.

$$\int_1^2 x^3dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1^4\right) = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

A. $\bar{z} = 3 - 2i$. B. $\bar{z} = 2 + 3i$. C. $\bar{z} = -3 + 2i$. D. $\bar{z} = -3 - 2i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án A □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 19. Cho hai số phức $z = 3 + i$ và $w = 2 + 3i$ Số phức $z - w$ bằng

A. $1 + 4i$. B. $1 - 2i$. C. $5 + 4i$. D. $5 - 2i$.

Lời giải.

$3 + i - (2 + 3i) = 1 - 2i$.

Chọn đáp án B

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $3 - 2i$ có tọa độ là

A. $(2; 3)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; 2)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải.

Phần thực và phần ảo của $3 - 2i$ lần lượt bằng 3 và -2.

Suy ra điểm biểu diễm của nó là $(3; -2)$.

Chọn đáp án D

Câu 21. Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. 10. B. 30. C. 90. D. 15.

Câu 22. Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 bằng

A. 14. B. 42. C. 126. D. 12.

Câu 23. Công thức tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h là

A. $V = \pi r h$. B. $V = \pi r^2 h$. C. $V = \frac{1}{3}\pi r h$. D. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 24. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ cm và độ dài đường sinh $l = 3$ cm Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng

A. $12\pi \text{cm}^2$. B. $48\pi \text{cm}^2$. C. $24\pi \text{cm}^2$. D. $36\pi \text{cm}^2$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$ Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4; 2; 2)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(2; 0; -2)$. D. $(1; 0; -1)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

A. 9. B. 3. C. 81. D. 6.

Câu 27. Trong không gian$Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm $M(1; -2; 1)$?

A. $(P_1) : x + y + z = 0$. B. $(P_2) : x + y + z - 1 = 0$.

C. $(P_3) : x - 2y + z = 0$. D. $(P_4) : x + 2y + z - 1 = 0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(1; -2; 1)$?

A. $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (0; 1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (1; -2; 1)$.

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên một số trong 15 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được số chẵn bằng

(A) $\frac{7}{8}$. (B) $\frac{8}{15}$. (C) $\frac{7}{15}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 30. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên

(A) $y = \frac{x+1}{x-2}$. (B) $y = x^2 + 2x$. (C) $y = x^3 - x^2 + x$. (D) $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ Tổng $M + m$ bằng

(A) 11. (B) 14. (C) 5. (D) 13.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là

(A) $[-1; 1]$. (B) $(-\infty; 1]$. (C) $\left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$. (D) $[1; +\infty)$.

Câu 33. Nếu $\int_1^3 [2f(x) + 2]\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) 2. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{3}{2}$.

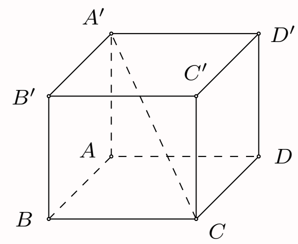
Câu 34. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Mô đun của số phức $(1 + i)z$ bằng

(A) 50. (B) 10. (C) $\sqrt{10}$. (D) $5\sqrt{2}$.

Câu 35.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

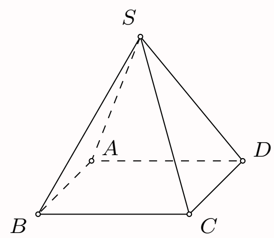
(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $90°$.



Câu 36.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) $\sqrt{7}$. (B) 1. (C) 7. (D) $\sqrt{11}$.



Câu 37. Trong không gian$Oxyz$, mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O và đi qua điểm $M(0; 0; 2)$ có phương trình là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(C) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. (D) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;-1;1)$ có phương trình tham số là

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

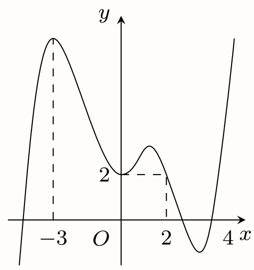
(B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

Câu 39.

Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



(A) $f(0)$. (B) $f(-3) + 6$. (C) $f(2) - 4$. (D) $f(4) - 8$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1} - \sqrt{2}\right)(2^x - y) < 0$?

(A) 1024. (B) 2047. (C) 1022. (D) 1023.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi} x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi} x < 2 \end{cases}$.

Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1)\cos x \, dx$ bằng

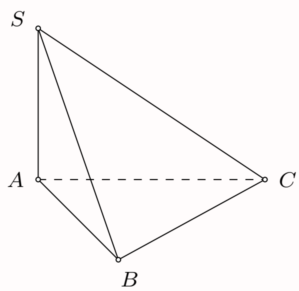
(A) $\frac{23}{3}$. (B) $\frac{23}{6}$. (C) $\frac{17}{6}$. (D) $\frac{17}{3}$.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và $(z + 2i)(\bar{z} - 2)$ là số thuần ảo?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 4.

Câu 43.

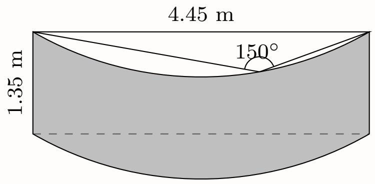
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh$a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng



(A) $\frac{a^3}{8}$. (B) $\frac{3a^3}{8}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

Câu 44.

Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng một tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên. Biết giá tiền của 1m^2 kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?



Ⓐ 23.591.000 đồng. Ⓑ 36.173.000 đồng.
Ⓒ 9.437.000 đồng. Ⓓ 4.718.000 đồng.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $d_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P), đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$.
Ⓒ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 46. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$ Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

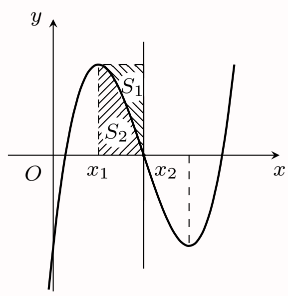
Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a $(a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2?$$

Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 1. Ⓓ Vô số.

Câu 48.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng



Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{5}{8}$. Ⓒ $\dfrac{3}{8}$. Ⓓ $\dfrac{3}{5}$.

Câu 49. Xét hai số phức z_1, z_2, thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

A. $5 - \sqrt{19}$.
B. $5 + \sqrt{19}$.
C. $-5 + 2\sqrt{19}$.
D. $5 + 2\sqrt{19}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A, đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB Khi (N) có thể tích lớp nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng

A. -21.
B. -12.
C. -18.
D. -15.

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 29

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

Ⓐ $(-\infty; \log_3 2)$. Ⓑ $(\log_3 2; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; \log_2 3)$. Ⓓ $(\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; \log_3 2)$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ -5. Ⓒ 5. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 - (-2) = 5$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. Ⓑ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.
Ⓒ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. Ⓓ $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3 nên (S) có phương trình là

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$. Phương trình của d là

Ⓐ $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$ nên d có phương trình là $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+4t\\z=4+5t.\end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

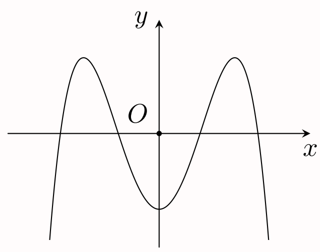
(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x\in\{-2;-1;1;4\}$.
Vậy hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6.
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

(A) $y=-2x^4+4x^2-1$. (B) $y=-x^3+3x-1$.
(C) $y=2x^4-4x^2-1$. (D) $y=x^3-3x-1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên chọn "$y=-2x^4+4x^2-1$".
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) -3.

Lời giải.

Gọi $M(x_M;y_M)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ và trục Oy.
Ta có $x_M=0\Rightarrow y_M=-3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Với n là số nguyên dương bất kì, $n\geq 4$, công thức nào dưới đây đúng?

(A) $\mathrm{A}_n^4=\dfrac{(n-4)!}{n!}$. (B) $\mathrm{A}_n^4=\dfrac{4!}{(n-4)!}$. (C) $\mathrm{A}_n^4=\dfrac{n!}{4!(n-4)!}$. (D) $\mathrm{A}_n^4=\dfrac{n!}{(n-4)!}$.

Lời giải.

Công thức đúng $\mathrm{A}_n^4=\dfrac{n!}{(n-4)!}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Phần thực của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

(A) 5. (B) 2. (C) -5. (D) -2.

Lời giải.

Phần thực của $z = 5 - 2i$ là 5.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{2}}$ là

(A) $y' = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. (B) $y' = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. (C) $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. (D) $y' = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x + C$. (B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 4x + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + 4x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 + 4\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 4x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ là

(A) $(-2; 3; 5)$. (B) $(2; -3; 5)$. (C) $(-2; -3; 5)$. (D) $(2; -3; -5)$.

Lời giải.

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ chính là tọa độ của điểm A.

Vậy $\overrightarrow{OA} = (-2; 3; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) -1. (B) 5. (C) -3. (D) 1.

Lời giải.

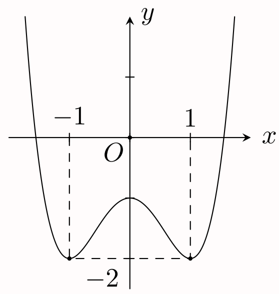
Dựa vào bảng biến thiên đã cho, ta có

- Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị cực tiểu bằng -3 tại điểm $x = -1$.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị cực đại bằng 5 tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 14.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; 1)$. B $(-\infty; 0)$. C $(0; +\infty)$. D $(-1; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_3(5x) = 2$ là

A $x = \dfrac{8}{5}$. B $x = 9$. C $x = \dfrac{9}{5}$. D $x = 8$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3(5x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 0 \\ 5x = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Vậy phương trình $\log_3(5x) = 2$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{9}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\displaystyle\int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 36. B 12. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot 4 = 12.$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

A $5a^3$. B a^3. C $125a^3$. D $25a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương là $V = (5a)^3 = 125a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là

Ⓐ $\mathbb{R}$. Ⓑ $[0; +\infty)$. Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓓ $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = 16\pi R^2$. Ⓑ $S = 4\pi R^2$. Ⓒ $S = \pi R^2$. Ⓓ $S = \frac{4}{3}\pi R^2$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-1}{x-1} = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $-\frac{1}{4}$. Ⓓ -4.

Lời giải.

Ta có $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\frac{5}{6}a^3$. Ⓑ $\frac{5}{2}a^3$. Ⓒ $5a^3$. Ⓓ $\frac{5}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 5a^2 \cdot a = \dfrac{5}{3}a^3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n}_{(P)} = (-3; 1; 2)$. Ⓑ $\vec{n}_{(P)} = (3; -1; 2)$. Ⓒ $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; 2)$. Ⓓ $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; -2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; -1; 2)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 24. Cho khối trụ bán kính đáy $r = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

Ⓐ 108π. Ⓑ 36π. Ⓒ 18π. Ⓓ 54π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 108\pi$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25. Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

Ⓐ $1 + 6i$. Ⓑ $7 - 2i$. Ⓒ $7 + 2i$. Ⓓ $-1 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $z + w = 4 + 2i + 3 - 4i = 7 - 2i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 26. Cho cấp số nhân u_n với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ -6. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = 3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-2} + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x + C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + 2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x + C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

Ⓐ $z_2 = 3 + 4i$. Ⓑ $z_3 = -3 + 4i$. Ⓒ $z_4 = -3 - 4i$. Ⓓ $z_1 = 3 - 4i$.

Lời giải.

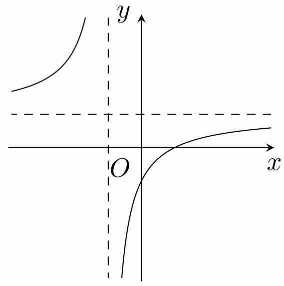
Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm biểu diễn số phức $a + bi$.
Do đó điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -3 + 4i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' < 0, \forall x \neq -1$.
(B) $y' > 0, \forall x \neq -1$.
(C) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(D) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.
Do đó $y' > 0, \forall x \neq -1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

(A) $\dfrac{7}{44}$. (B) $\dfrac{2}{7}$. (C) $\dfrac{1}{22}$. (D) $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.
Gọi A là biến cố: "Lấy được 3 quả màu xanh". Ta có $n(A) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.
Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{220} = \dfrac{7}{44}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

(A) $x = 0$. (B) $x = 3$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ trên $[0;3]$.
Ta có $f'(x) = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;3]. \end{array}\right.$
Ta có $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(3) = -18 \Rightarrow \max\limits_{[0;3]} f(x) = f(1) = 2$.
Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất trên $[0;3]$ tại $x = 1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 4x + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.
(B) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.
(C) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$.
(D) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua $M(-1;3;2)$ và vuông góc với (P) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n}_P = (1;-2;4)$.
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$.
Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

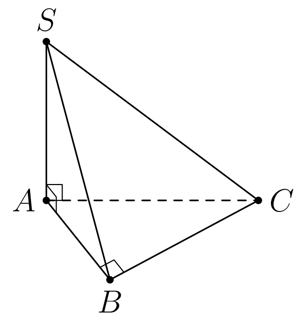
Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Ⓐ $\sqrt{2}a$. Ⓑ $2a$. Ⓒ a. Ⓓ $2\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $\mathrm{d}(C;(SAB)) = BC = AB = 2a$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB có phương trình là

Ⓐ $3x + y + 2z - 17 = 0$. Ⓑ $3x + y + 2z - 3 = 0$.

Ⓒ $5x + y + 2z - 5 = 0$. Ⓓ $5x + y + 2z - 25 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;1;2) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (3;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB là $3(x-1)+y+2z = 0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-3 = 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 5 + 4i$. Số phức liên hợp của z là

Ⓐ $\bar{z} = 4 + 5i$. Ⓑ $\bar{z} = 4 - 5i$. Ⓒ $\bar{z} = -4 + 5i$. Ⓓ $\bar{z} = -4 - 5i$.

Lời giải.

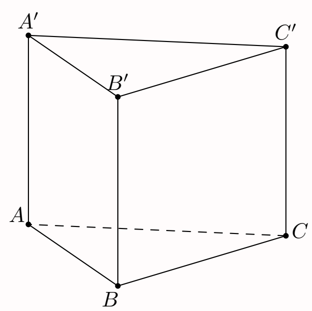
Ta có $iz = 5 + 4i \Rightarrow z = \dfrac{5+4i}{i} \Rightarrow z = 4 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 4 + 5i$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

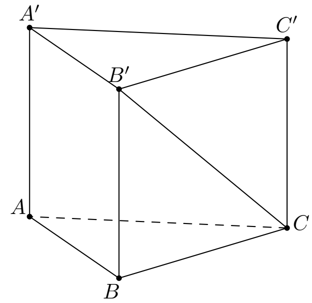
Ⓐ 30°. Ⓑ 90°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°..



Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Do $AA' \,/\!/\, BB'$ nên góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng góc giữa hai đường thẳng BB' và $B'C$ bằng $\widehat{CB'B}$.
Mà tam giác $\triangle B'BC$ vuông tại B có $BC = BB'$ nên $\widehat{CB'B} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?
(A) $a^3b = 64$. (B) $a^3b = 36$. (C) $a^3 + b = 64$. (D) $a^3 + b = 36$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow \log_2 (a^3 \cdot b) = \log_2 2^6 \Leftrightarrow a^3b = 2^6 = 64$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Nếu $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\displaystyle\int\limits_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng
(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 \mathrm{d}x = 2 \cdot 5 - 2 = 8$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
(A) 27. (B) 29. (C) 12. (D) 33.

Lời giải.

Theo giả thiết F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

Vì $F(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2$.
Mặt khác, $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 1$ nên ta có

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) \Leftrightarrow 6 + C_1 = 5 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1 = 1.$$

Vậy $F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27.$
Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

(A) 24. (B) Vô số. (C) 26. (D) 25.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x+25>0 \Leftrightarrow x>-25$.

Ta có $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2}-9^x=0\\ \log_3(x+25)-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu vế trái

x	-25		0		2		$+\infty$
$3^{x^2}-9^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_3(x+25)-3$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\ x=2.\end{array}\right.$

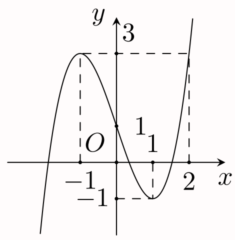
Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-24,-23,\ldots,-1,0,2\}$, có 26 giá trị nguyên của x thoả mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

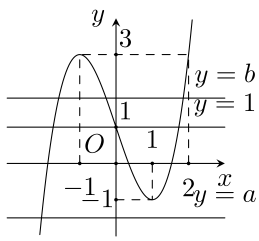
(A) 9. (B) 3. (C) 6. (D) 7.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình

$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=a<-1\\ f(x)=0\\ f(x)=b\in(1;2).\end{array}\right.$$



Phương trình $f(x)=a,(a<-1)$ có một nghiệm.

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của phương trình $f(x)=a$.
Phương trình $f(x)=b$ có 3 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của các phương trình $f(x)=0$ và $f(x)=a$.
Vậy phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $(\mathcal{N})$ bằng

(A) $8\sqrt{7}\pi a^2$. (B) $4\sqrt{13}\pi a^2$. (C) $8\sqrt{13}\pi a^2$. (D) $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải.

Giả sử đỉnh của hình nón là S, tâm của đáy là O. Thiết diện là tam giác SAB đều cạnh bằng $4a$.

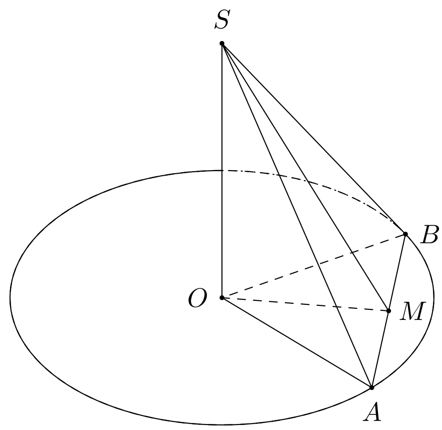
Gọi M là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} SM \perp AB \\ OM \perp AB \end{cases}$, suy ra $((SAB),(OAB)) = \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Ta có $SM = \sqrt{SA^2 - MA^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SOM vuông tại O, ta có $SO = SM \cdot \sin 60^\circ = 3a$.

Suy ra $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy $S_{xq} = \pi OA \cdot SA = \pi \cdot a\sqrt{7} \cdot 4a = 4a^2\pi\sqrt{7}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình

$$z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0 \quad (1).$$

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

a) Khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho có nghiệm kép $z = \dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn).

b) Khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt, khi đó theo yêu cầu bài toán một trong hai nghiệm thỏa mãn $|z_0| = 7$.

- Nếu $z_0 = 7$ thay vào phương trình (1), ta được

$$7^2 - 14(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 7 + \sqrt{14} & \text{(thỏa mãn)} \\ m = 7 - \sqrt{14} & \text{(thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

- Nếu $z_0 = -7$, thay vào phương trình (1), ta được

$$(-7)^2 + 14(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 63 = 0. \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

c) Khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 = \overline{z_1}$ và $|z_1| = |z_2| = |z_0| = 7$.

Hay $|z_1|^2 = 49 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = 49 \Leftrightarrow m^2 = 49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \text{ (loại)} \\ m = -7 \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

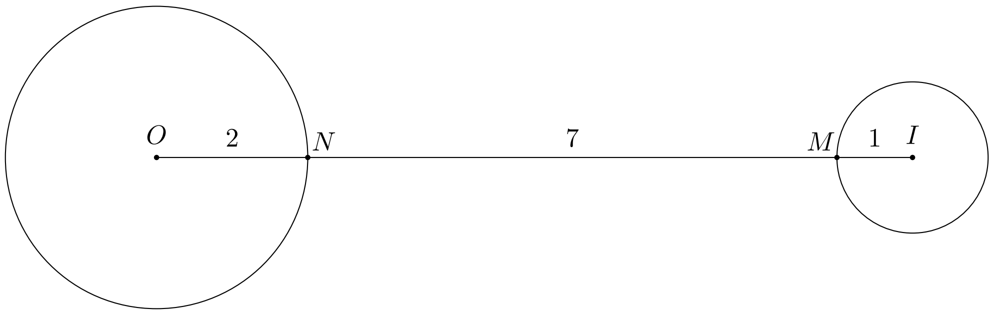
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ 3. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-6-8i$ và $-i\overline{w}$.
Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow |(z-6-8i)+(6+8i)|=1 \Leftrightarrow MI=1$ với $I(-6;-8)$.
Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (T_1) tâm $I(-6;-8)$ và bán kính $R_1=1$.
Ta có $|-i\overline{w}|=|-i|\cdot|\overline{w}|=2$.
Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_2=2$.
Ta có $P=|z+i\overline{w}-6-8i|=MN$.
Suy ra $\min P=OI-R_1-R_2=10-1-2=7$ do (T_1) và (T_2) rời nhau.



Đạt được khi $\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OI}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M\left(-\dfrac{27}{5};-\dfrac{36}{5}\right)\\ N\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right).\end{cases}$

Khi đó $\begin{cases}z-6-8i=-\dfrac{27}{5}-\dfrac{36}{5}i\\ -i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i.\end{cases}$

Vậy $|z-w|=\left|-1-\dfrac{2}{5}i\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$. Ⓑ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$. Ⓓ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;1)$.

Gọi M là giao điểm của $d\colon \begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=2-t\end{cases}$ và (P).

Do $M\in d \Rightarrow M(m;m+1;-m+2)$.
Mặt khác $M\in(P) \Leftrightarrow m+2(m+1)+(-m+2)-4=0 \Leftrightarrow m=0$.
Suy ra $M(0;1;2)$.
Lấy $N(1;2;1)\in d$, gọi Δ là đường thẳng qua N và vuông góc với (P).
Suy ra đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_P=(1;2;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 1+t. \end{cases}$

Gọi H là giao điểm Δ và (P).
Do $H \in d \Rightarrow M(1+h; 2+2h; 1+h)$.
Mặt khác $H \in (P) \Leftrightarrow 1+h+2(2+2h)+(1+h)-4=0 \Leftrightarrow 6h+2=0 \Leftrightarrow h=-\dfrac{1}{3}$.
Suy ra $H\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{MH} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.
Gọi d' hình chiếu vuông góc của d trên (P).
Suy ra đường thẳng d' qua $M(0;1;2)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}'_d = 3\overrightarrow{MH} = (2;1;-4)$.
Vậy phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên (P) là: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

(A) $2\ln 3$. (B) $\ln 3$. (C) $\ln 18$. (D) $2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
- $f''(x) = 6x + 2a$.
- $f'''(x) = 6$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$, ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.
Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm m, n và $\begin{cases} g(m) = -3 \\ g(n) = 6. \end{cases}$
Xét phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow g(x)+6-f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = n. \end{array}\right.$
Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \left|\int\limits_m^n \left(1 - \dfrac{f(x)}{g(x)+6}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_m^n \dfrac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6} \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_m^n \dfrac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6} \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\ln|g(x)+6|\Big|_m^n\right| = \left|\ln|g(n)+6| - \ln|g(m)+6|\right| = |\ln 12 - \ln 3| = \ln 4 = 2\ln 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$?

(A) 27. (B) 9. (C) 11. (D) 12.

Lời giải.

Để cặp (x, y) thỏa mãn phương trình thì $1 + xy > 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$3x^2 + (y-9)\,x - \log_{27}(1 + xy) = 0.$$

Đặt $f(x) = 3x^2 + (y-9)\,x - \log_{27}(1+xy)$, $x \in \left(\dfrac{1}{3}\,;\,3\right)$. Ta xét các trường hợp sau

TH1. Nếu $y < 0$ thì $-y < \dfrac{1}{x} < 3$, suy ra $y > -3$ hay $y \in \{-1; -2\}$.

- Với $y = -1 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ nên theo định lí giá trị trung gian, phương trình có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \subset \left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$.
- Tương tự, với $y = -2$, phương trình cũng có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right) \subset \left(\dfrac{1}{3}\,;\,3\right)$.

TH2. Nếu $y = 0$ thì phương trình trở thành $3x^2 - 9x = 0$ hay $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

TH3. Nếu $y \geq 10$, ta có

$f'(x) = 6x + (y-9) - \dfrac{y}{3\,(1+xy)\ln 3}$,

$f''(x) = 6 + \dfrac{y^2}{3\,(1+xy)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$.

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$. Do đó $f'(x) > f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2 + (y-9) - \dfrac{y}{(3+y)\ln 3} > 0$.

Điều này dẫn đến $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$.

Suy ra $f(x) > f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \dfrac{y}{3}\right) - \dfrac{8}{3}$.

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$.

Dễ thấy $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{3\,(3+t)\ln 3} > 0$ nên $g(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$, kéo theo

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3} \geq g\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{8}{3} > 0.$$

Như vậy, phương trình vô nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$ trong trường hợp này.

TH4. Nếu $1 \leq y \leq 9$ thì từ tính đồng biến của $g(t)$, ta suy ra

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = g\left(\dfrac{y}{3}\right) - \dfrac{8}{3} \leq g\left(\dfrac{9}{3}\right) - \dfrac{8}{3} = 3 - \log_{27} 4 - \dfrac{8}{3} < 0$, $\forall y \in [1; 9]$.

Mặt khác $f(3) = 3y - \log_{27}(1+3y) = g(3y) \geq g(3) = 3 - \log_{27} 4 > 0 \Rightarrow f(3) > 0$, $\forall y \in [1; 9]$.

Điều này dẫn đến phương trình có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$, $\forall y \in [1; 9]$.

Kết luận có tất cả 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án C □

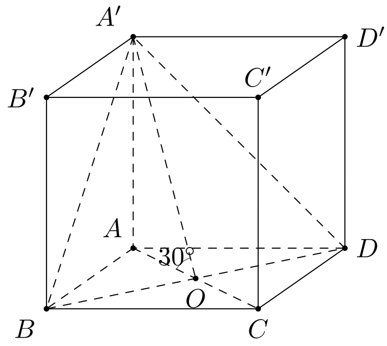
Câu 48. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30°. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $2\sqrt{3}a^3$. D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AC.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$ (1).
Dễ thấy $\triangle A'BD$ cân tại A do $A'B$ và $A'D$ là hai đường chéo của hai hình chữ nhật mặt bên bằng nhau nên $A'O \perp BD$ (2).

Ta có $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD \\ A'O \perp BD. \end{cases}$



Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ chính là góc giữa hai đường thẳng AO và $A'O$ hay $\widehat{A'OA} = 30°$.

Xét $\triangle A'AO$ có $\widehat{A'AO} = 90°$ nên $AA' = AO \cdot \tan \widehat{AOA'} = a \cdot \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lại có độ dài đường chéo của hình vuông đáy bằng $2a$ nên $AB = AD = a\sqrt{2}$.

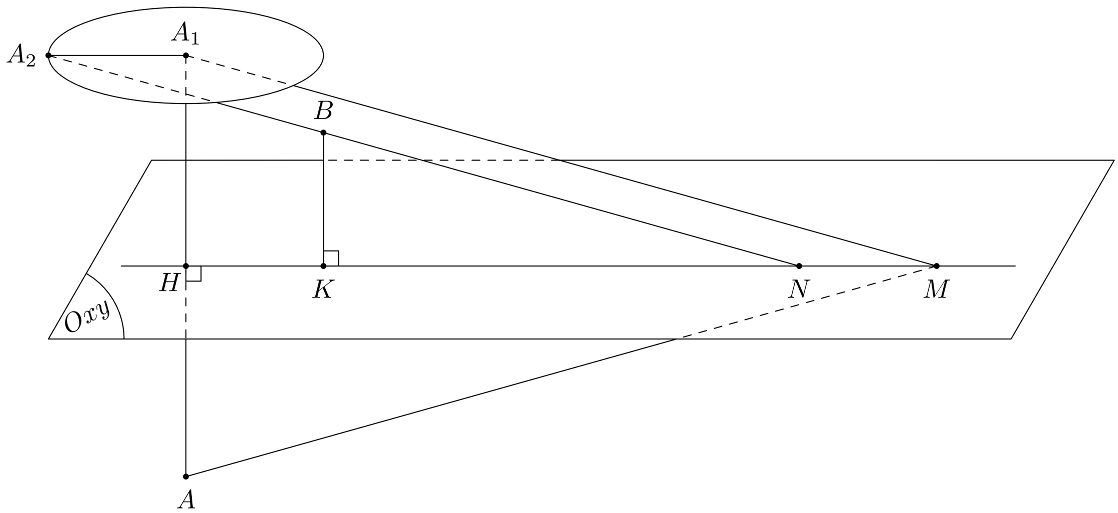
Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = S_{ABCD} \cdot AA' = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A $3\sqrt{5}$. **B** $\sqrt{61}$. **C** $\sqrt{13}$. **D** $\sqrt{53}$.

Lời giải.



Vì $z_A \cdot z_B < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (Oxy).
Suy ra $H(1;-3;0)$, $K(-2;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-3;4;0)$ và $HK = 5$.
Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua $(Oxy) \Rightarrow A_1(1;-3;4)$.
Gọi A_2 là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow A_1A_2 = 2$.
Do đó A_2 thuộc đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng song song với (Oxy) và có tâm A_1, bán kính $R = 2$.
Khi đó $|AM - BN| = |A_1M - BN| = |A_2N - BN| \leq A_2B$.
Dấu "=" xảy ra và A_2B đạt giá trị lớn nhất khi $\overrightarrow{A_1A_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{HK}$.
Suy ra $\overrightarrow{A_1A_2} = -\dfrac{A_1A_2}{HK} \cdot \overrightarrow{HK} = \left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};0\right) \Rightarrow A_2\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{23}{5};4\right) \Rightarrow A_2B = \sqrt{53}$.
Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{53}$.
Chọn đáp án D □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3+5x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (|x^3+5x|)' \cdot f'(|x^3+5x|+m)$. Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(|x^3+5x|\right)' = 0 & (1) \\ f'\left(|x^3+5x|+m\right) = 0 & (2). \end{array}\right.$

Xét hàm số $u(x) = |x^3+5x| = \begin{cases} x^3+5x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^3-5x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow u'(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & \text{khi } x > 0 \\ -3x^2-5 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x) = |x^3+5x|$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	‖	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $u'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x = 0$.

Ta có $f'(|x^3+5x|+m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|+m = 7 \\ |x^3+5x|+m = 3 \\ |x^3+5x|+m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x| = 7-m \\ |x^3+5x| = 3-m \\ |x^3+5x| = -3-m. \end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ có ít nhất ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất hai trong số các nghiệm đó.

Mặt khác $-3-m < 3-m < 7-m$.

Kết hợp với bảng biến thiên hàm số $u(x)$ ta được $7-m > 0 \Leftrightarrow m < 7 \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

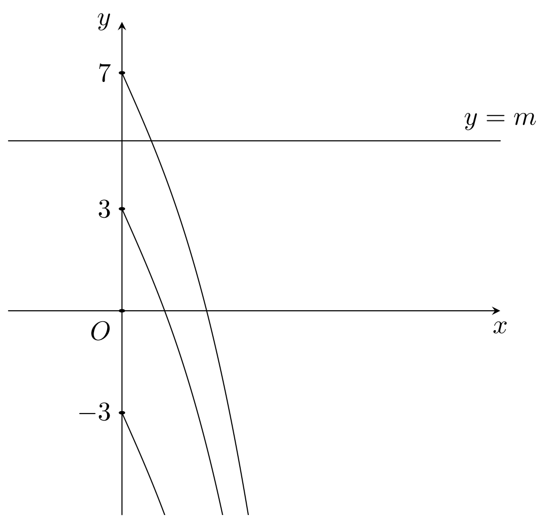
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Ta thấy $x = 0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow$ Hàm số $h(x) = f(x^3+5x+m)$ có ít nhất một điểm cực trị $x \in (0;+\infty)$.

Ta có $h'(x) = (3x^2+5) \cdot f'(x^3+5x+m)$,

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+5x+m = 7 \\ x^3+5x+m = 3 \\ x^3+5x+m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3-5x+7 = m \\ -x^3-5x+3 = m \\ -x^3-5x-3 = m. \end{array}\right.$



Từ đó ta được $m < 7 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 30

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{4}}$ là

Ⓐ $y'=\dfrac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. Ⓑ $y'=\dfrac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. Ⓒ $y'=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. Ⓓ $y'=\dfrac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}a^3$. Ⓑ $3a^3$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}a^3$. Ⓓ a^3.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\cdot 3a^2\cdot a=a^3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 3. Nếu $\displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ và $\displaystyle\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-5$ thì $\displaystyle\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ -11. Ⓒ 1. Ⓓ 11.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=6-(-5)=11$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=7^x$ là

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ⓑ $[0;+\infty)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=7^x$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 3. (B) -1. (C) -5. (D) 1.

Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S = 4\pi R^2$. (B) $S = 16\pi R^2$. (C) $S = \dfrac{4}{3}\pi R^2$. (D) $S = \pi R^2$.

Lời giải.

Công thức diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;2;-3)$. Phương trình của d là

(A) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = -3 + t \end{cases}$

Lời giải.

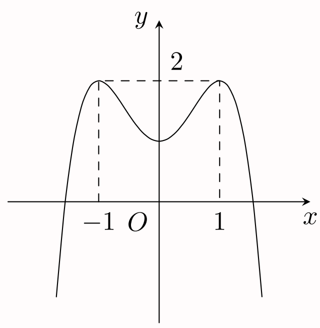
Phương trình của d đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;2;-3)$ là $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \ (t \in \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $\mathbb{R})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1;1)$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(0;1)$. (D) $(0;+\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $(0;1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 5$, công thức nào dưới đây đúng?
(A) $\mathrm{A}_n^5 = \dfrac{n!}{5!(n-5)!}$. (B) $\mathrm{A}_n^5 = \dfrac{5!}{(n-5)!}$. (C) $\mathrm{A}_n^5 = \dfrac{n!}{(n-5)!}$. (D) $\mathrm{A}_n^5 = \dfrac{(n-5)!}{n!}$.

Lời giải.

Theo công thức chỉnh hợp ta có $\mathrm{A}_n^5 = \dfrac{n!}{(n-5)!}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Thể tích của khối lập phương cạnh $4a$ bằng
(A) $64a^3$. (B) $32a^3$. (C) $16a^3$. (D) $8a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $4a$ là $V = (4a)^3 = 64a^3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + 3x + C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?
(A) $z_3 = 3 - 2i$. (B) $z_4 = 3 + 2i$. (C) $z_1 = -3 - 2i$. (D) $z_2 = -3 + 2i$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(-3;2)$ biểu diễn cho số phức $z_2 = -3 + 2i$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x + 5y + z - 3 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?
(A) $\vec{n}_2 = (-2;5;1)$. (B) $\vec{n}_1 = (2;5;1)$. (C) $\vec{n}_4 = (2;5;-1)$. (D) $\vec{n}_2 = (2;-5;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_2 = (-2;5;1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ là

(A) $\overrightarrow{OA}=(-4;1;3)$.
(B) $\overrightarrow{OA}=(4;-1;3)$.
(C) $\overrightarrow{OA}=(-4;1;-3)$.
(D) $\overrightarrow{OA}=(4;1;3)$.

Lời giải.

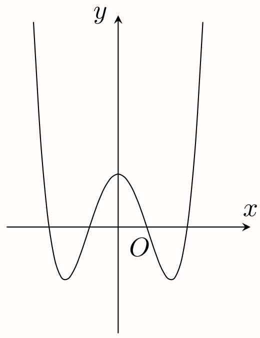
Ta có $\overrightarrow{OA}=(4;-1;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

(A) $y=x^3-3x+1$.
(B) $y=-2x^4+4x^2+1$.
(C) $y=-x^3+3x+1$.
(D) $y=2x^4-4x^2+1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số bên là của hàm số bậc 4 và có hệ số của x^4 dương. Do đó, đồ thị bên là của hàm số $y=2x^4-4x^2+1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 9.
(B) -9.
(C) $\frac{1}{4}$.
(D) 4.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q=\dfrac{u_2}{u_1}=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho $a>0$ và $a\neq 1$. Khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

(A) -3.
(B) $\frac{1}{3}$.
(C) $-\frac{1}{3}$.
(D) 3.

Lời giải.

Ta có $\log_a \sqrt[3]{a}=\log_a a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 1.
(B) 0.
(C) 2.
(D) 3.

Lời giải.

Thay $x=0$ vào $y=-x^4-2x^2+3$, ta được $y=3$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

(A) $6 + 2i$. (B) $4 + 6i$. (C) $6 - 2i$. (D) $-4 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $z + w = (5 + 1) + (2 - 4)i = 6 - 2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-1} + C$.

(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như bên dưới.

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 4 cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\displaystyle\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) 18. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $x = -1$. (B) $x = -2$. (C) $x = 2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$ hoặc $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

A. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$.
B. $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.
C. $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.
D. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=2$ có phương trình là

$$x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng

A. -2.
B. 2.
C. 6.
D. -6.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z=6-2i$ là 6.
Chọn đáp án C □

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x<5$ là

A. $(-\infty;\log_2 5)$.
B. $(\log_2 5;+\infty)$.
C. $(-\infty;\log_5 2)$.
D. $(\log_5 2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x<5 \Leftrightarrow x<\log_2 5$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;\log_2 5)$.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\log_5(3x)=2$ là

A. $x=25$.
B. $x=\dfrac{32}{3}$.
C. $x=32$.
D. $x=\dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(3x)=2 \Leftrightarrow 3x=5^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{25}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{25}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=4$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 16π.
B. 48π.
C. 36π.
D. 12π.

Lời giải.

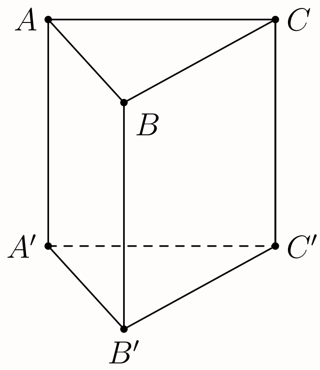
Thể tích khối trụ đã cho là $V=\pi r^2 h=\pi\cdot 4^2\cdot 3=48\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 29.

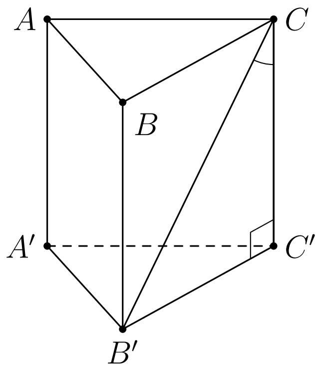
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $60°$.



Lời giải.



Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên ta có $CC' \perp (A'B'C')$ và $CC' \parallel AA'$.

Từ đó suy ra $CC' \perp B'C'$ và $(AA', B'C) = (CC', B'C) = \widehat{B'CC'}$ (do $\triangle B'CC'$ vuông nên $\widehat{B'CC'} < 90°$).

Xét $\triangle B'CC'$ vuông tại C' có $B'C' = CC'$ (gt) nên $\triangle B'CC'$ vuông cân tại C'.

Vậy $(AA', B'C) = \widehat{B'CC'} = 45°$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(2;1;3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

Ⓐ $2x + y + 2z - 11 = 0$. Ⓑ $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Ⓒ $2x + y + 4z - 4 = 0$. Ⓓ $2x + y + 4z - 17 = 0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(P) \perp AB$ nên (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (2;1;2)$.
Mặt phẳng (P) qua $A(0;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2;1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$2(x-0) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 2 = 0.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31. Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{6}$. Ⓑ $\dfrac{1}{30}$. Ⓒ $\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Phép thử lấy ngẫu nhiên 3 quả bóng từ 10 quả bóng có số phần tử không gian mẫu là

$$n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120.$$

Số kết quả thuận lợi của biến cố A: "Lấy được 3 quả bóng màu xanh" là

$$n(A) = \mathrm{C}_6^3 = 20.$$

Vậy xác suất để lấy được 3 quả bóng màu xanh là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 6 + 5i$. Số phức liên hợp của z là

A $\overline{z} = 5 - 6i$. **B** $\overline{z} = -5 + 6i$. **C** $\overline{z} = 5 + 6i$. **D** $\overline{z} = -5 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $iz = 6 + 5i \Leftrightarrow z = \dfrac{6+5i}{i} \Leftrightarrow z = 5 - 6i \Rightarrow \overline{z} = 5 + 6i$.

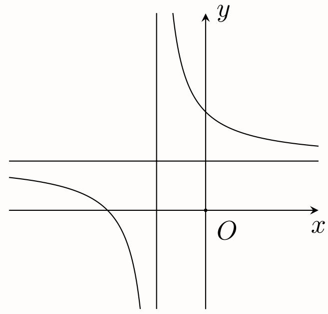
Chọn đáp án C □

Câu 33.

Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là các số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $y' < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. **B** $y' > 0,\ \forall x \neq -1$.

C $y' < 0,\ \forall x \neq -1$. **D** $y' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.



Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng. Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng.

Dựa vào đồ thị hàm số ta cũng suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Vậy $y' < 0,\ \forall x \neq -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 3y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$. **B** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

C $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$. **D** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3; 2)$. Đường thẳng d vuông góc với (P) nên nhận véc-tơ $\vec{n}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình đường thẳng d đi qua $M(2; 1; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A $x = -2$. **B** $x = 0$. **C** $x = -1$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$, có $y' = 3x^2 - 6x$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \in [-2; 1] \\ x = 2 & \notin [-2; 1]. \end{array}\right.$

Mà $y(-2) = -21$, $y(0) = -1$, $y(1) = -3$ nên hàm số có giá trị lớn nhất bằng -1 tại $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

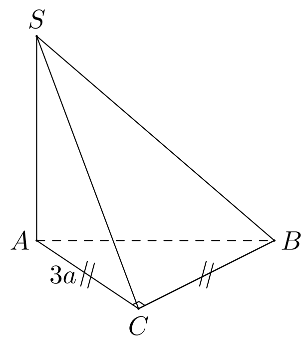
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

(A) $\dfrac{3}{2}a$. (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$. (C) $3a$. (D) $3\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại C suy ra $BC \perp AC$ và $BC = AC = 3a$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SC \text{ (vì } SC \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SAC)) = BC = 3a$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathrm{d}x = 2\cdot 3 - x\Big|_0^2 = 6 - 2 = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$, khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a^3 + b = 64$. (B) $a^3b = 256$. (C) $a^3b = 64$. (D) $a^3 + b = 256$.

Lời giải.

Với a, $b > 0$, ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 8 \Leftrightarrow a^3b = 2^8 = 256$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2} - 9^x\right)[\log_2(x+30) - 5] \le 0$?

(A) 30. (B) Vô số. (C) 31. (D) 29.

Lời giải.

Điều kiện $x + 30 > 0 \Leftrightarrow x > -30$.

Đặt $f(x) = \left(3^{x^2} - 9^x\right)[\log_2(x+30) - 5]$. Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3^{x^2} - 9^x\right) = 0 \quad (1) \\ [\log_2(x+30) - 5] = 0 \quad (2). \end{array}\right.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3^{x^2} = 3^{2x} \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \log_2(x+30) = 5 \Leftrightarrow x + 30 = 32 \Leftrightarrow x = 2$.

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	-30		0		2		$+\infty$
$3^{x^2}-9^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_2(x+30)-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó ta suy ra được tập nghiệm của bất phương trình ban đầu là $S=(-30;0]\cup\{2\}$.
Vậy có 31 số nguyên thỏa mãn bất phương trình ban đầu.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 9. B. 15. C. 11. D. 6.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & \text{khi } x\geq 1\\ x^3-2x+C_2 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

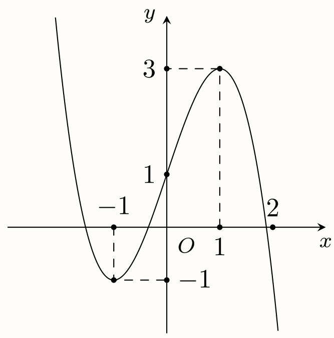
Mà $F(0)=2$ nên $C_2=2$.
Mặt khác $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó $F(x)$ liên tục tại $x=1$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\Leftrightarrow C_1=-1+2=1$.

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\geq 1\\ x^3-2x+2 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

Do đó $F(-1)+2F(2)=3+2\cdot 3=9$.
Chọn đáp án A □

Câu 41.
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$ là

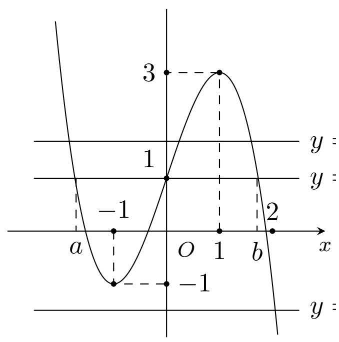
A. 9. B. 7. C. 3. D. 6.



Lời giải.

Ta thấy đường thẳng $y=1$, cắt đồ thị $(C)\colon y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x=a\,(a<-1)$, $x=0$, $x=b\,(1<b<2)$.

Ta thấy, $f\left(f(x)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a<-1\\ f(x)=0\\ 1<f(x)=b<2.\end{array}\right.$



$(C)\colon y=f($

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Từ đồ thị suy ra

- $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3.
- Vì $a < -1$ suy ra phương trình $f(x) = a$ có duy nhất một nghiệm x_4 khác x_1, x_2, x_3.
- Vì $1 < b < 2$, suy ra phương $f(x) = b$ có ba nghiệm phân biệt x_5, x_6, x_7 khác x_1, x_2, x_3, x_4.

Vậy $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} + 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z - w|$ bằng

(A) $\sqrt{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. (C) 3. (D) $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác [1], ta có

$$|z + i\overline{w} + 6 - 8i| \geq ||6 - 8i| - |z| - |i\overline{w}|| = |10 - 1 - 2| = 7.$$

Suy ra $|z + i\overline{w} + 6 - 8i|$ nhỏ nhất bằng 7 khi $\begin{cases} z = t(6 - 8i) \\ i\overline{w} = t'(6 - 8i) \\ |z| = 1,\ |w| = 2 \end{cases}$ $(t,\ t' < 0)$.

Vì $|w| = |iw|$ và theo đề ta có $\begin{cases} |z| = 1 \\ |w| = |iw| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{10} \\ t' = -\dfrac{2}{10} \end{cases}$.

- Với $t = -\dfrac{1}{10}$, suy ra $z = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.
- Với $t' = -\dfrac{2}{10}$, suy ra $i\overline{w} = -\dfrac{6}{5} + \dfrac{8}{5}i$, suy ra $w = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}i$.

Suy ra $|z - w| = \left|-\dfrac{11}{5} + 2i\right| = \dfrac{\sqrt{221}}{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

(A) $2\ln 2$. (B) $\ln 6$. (C) $3\ln 2$. (D) $\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$.
Suy ra $g(x) = x^3 + (a+3)x^2 + (2a+b+6)x + (2a+b+c)$, suy ra $g'(x) = 3x^2 + (2a+6)x + (2a+b+6)$.
Theo đề bài $g(x)$ có hai giá trị cực trị, suy ra $g'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2.

[1] Cho z_1, z_2 là hai số phức khi đó $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, dấu bằng xảy ra khi $z_1 = tz_2$, $t < 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Xét phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6 \Leftrightarrow 3x^2 + (2a+6)x + 2a + b + 6 = 0.$
Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} \, \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+6} \, \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \ln |g(x)+6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \ln 8 - \ln 2 = 2\ln 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

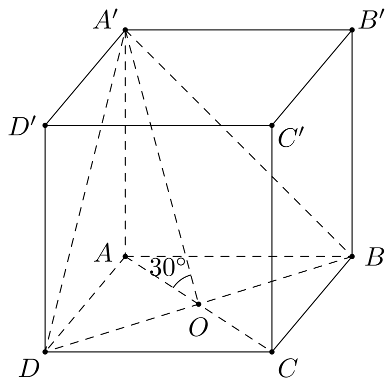
Câu 44. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $30°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. (B) $48\sqrt{3}a^3$. (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Vì đáy $ABCD$ là hình vuông nên $BD = AC = 4a$ và $BD \perp AC$.
Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a = 8a^2$.
Tam giác $A'AO$ vuông tại A, ta có $AA' = AO \cdot \tan 30° = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Vậy thể tích khối hộp chữ nhật là

$$V = S_{ABCD} \cdot AA' = 8a^2 \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}a^3.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x}$?

(A) 14. (B) 27. (C) 12. (D) 15.

Lời giải.

a) Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \dfrac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

- Với $y = 0$, phương trình thành $27^{3x^2-12x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì $27^{3x^2-12x} - 1 < 27^0 - 1 < 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; 4\right)$.
- Với $y \in \{-1, -2\}$, phương trình thành $27^{3x^2-(12-y)x} - (1+xy) = 0$, có nghiệm vì: $h(x) = 27^{3x^2-(12-y)x} - (1+xy)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3}; 4\right]$ và $h\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3^{1+y-12} - 1 - \dfrac{y}{2} < 3^{-3} - 1 - \dfrac{2}{3} < 0 < 27^{4y} - (1+4y) = h(4)$.

b) Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$, ta có

$$\begin{aligned} & 27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x} \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + xy - 12x = \log_{27}(1+xy) \\ \Leftrightarrow\ & 3x - 12 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0. \end{aligned}$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 12 - \dfrac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \dfrac{y}{x(1+xy)\ln 27} > 3 - \dfrac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \dfrac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 4\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$.

Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right) g(4) < 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(4) = -\frac{\log_{27}(1+4y)}{4} + y > -\frac{y}{\ln 27} + y > 0.$$

Do đó phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ khi và chỉ khi

$g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1 + \frac{y}{3}\right) + y - 12 + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 12$ (do y là số nguyên dương, $u(y) = -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 12 + 1$ đơn điệu tăng trên $(0; \infty)$ và $u(12) \leq 0 < u(13)$).

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \ldots; 12\}$ hay có 14 giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + y - z + 3 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

(A) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{13}$.

(B) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{1}$.

(D) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+1}{13}$.

Lời giải.

Gọi C là giao điểm của d và (P).

Ta có phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Thay x, y, z vào (P), ta có $-2 + 2t + t - 1 - 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra toạ độ giao điểm của d và (P) là $C(-1;\ 0;\ 1)$.

Ta lấy $A(0; 1; 3) \in d$ và $A \neq C$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Suy ra đường thẳng BC là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) nên Δ có VTCP là $\vec{n}_{(P)} = (2;\ 1;\ -1)$.

Suy ra Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

Thay x, y, z vào (P), ta có $4t+1+t-3+t+3=0 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{6}$.

Suy ra giao điểm của Δ và (P) là $B\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6};\dfrac{19}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{5}{6};-\dfrac{13}{6}\right)$.

suy ra véc-tơ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ là $\vec{a}=(4;5;13)$.

Vậy đường thẳng BC đi qua C nhận $\vec{a}=(4;5;13)$ làm VTCP có phương trình là $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{13}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$. B. $\sqrt{13}\pi a^2$. C. $2\sqrt{7}\pi a^2$. D. $2\sqrt{13}\pi a^2$.

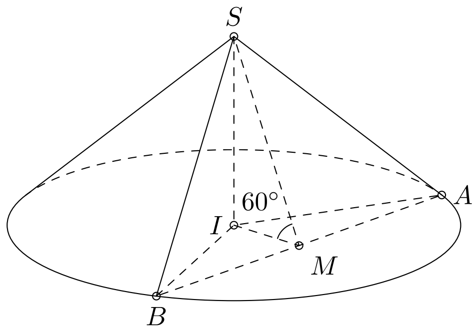
Lời giải.

Gọi tam giác thiết diện là ΔSAB với S là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy, M là trung điểm AB. Vì ΔSAB là tam giác đều cạnh $2a$ nên $SM=\sqrt{3}a$ và SM, IM cùng vuông góc với AB nên $\widehat{SMI}=60°$. Từ đó suy ra

$$MI=\cos 60° \cdot SM=\frac{\sqrt{3}a}{2},$$

và

$$SI=\sin 60° \cdot SM=\frac{3a}{2}.$$



Theo định lý Pitago, ta được

$$IB^2=MI^2+MB^2=\frac{3a^2}{4}+a^2=\frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow IB=\frac{\sqrt{7}a}{2}$$

và

$$SB^2=IB^2+SI^2=4a^2 \Leftrightarrow SB=2a.$$

Từ đó ta được diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi Rl=\sqrt{7}\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=5$?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m^2=2m+1$.

a) Nếu $2m+1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-1}{2}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt

$$\left[\begin{aligned} z&=m+1+\sqrt{2m+1}\\ z&=m+1-\sqrt{2m+1}.\end{aligned}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\left[\begin{aligned} &|m+1+\sqrt{2m+1}|=5 \quad (1)\\ &|m+1-\sqrt{2m+1}|=5. \quad (2)\end{aligned}\right.$$

Giải (1), ta có

$$m+1+\sqrt{2m+1}=5 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=4-m \Leftrightarrow m=5-\sqrt{10} \text{ (nhận)}.$$

Giải (2), ta có

$$\begin{aligned} |m+1-\sqrt{2m+1}|=5 &\Leftrightarrow |2m+2-2\sqrt{2m+1}|=10 \\ &\Leftrightarrow |2m+1-2\sqrt{2m+1}+1|=10 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{2m+1}-1\right)^2=10 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2m+1}-1=-\sqrt{10} \quad \text{(Vô nghiệm)} \\ \sqrt{2m+1}-1=\sqrt{10} \Leftrightarrow m=5+\sqrt{10} \quad \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

b) Nếu $2m+1=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$. Phương trình có nghiệm kép là

$$z=m+1=\frac{1}{2}.$$

Có thể thấy rằng trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

c) Nếu $2m+1<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$. Phương trình sẽ có hai nghiệm phức liên hợp của nhau. Gọi các nghiệm đó là z_1, z_2. Yêu cầu bài toán tương đương với $|z_1z_2|=25 \Leftrightarrow m^2=25 \Leftrightarrow m=-5 \left(\text{vì } m<-\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x^3+6x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A 5. B 7. C 8. D 6.

Lời giải.

Ta thấy hàm $g(x)=f\left(|x^3+6x|+m\right)=f\left((x^2+6)|x|+m\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng. Do đó để hàm $g(x)=f\left(|x^3+6x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì hàm số $h(x)=f\left(x^3+6x+m\right)$ có ít nhất 1 điểm cực trị có hoành độ dương, tức là phương trình

$$\begin{aligned} & h'(x)=(3x^2+6)f'(x^3+6x+m)=0 \text{ có nghiệm dương bội lẻ} \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x^3+3x+m=8 \\ x^3+3x+m=3 \\ x^3+3x+m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x=8-m \\ x^3+3x=3-m \\ x^3+3x=-3-m \end{array}\right. \text{ có nghiệm dương bội lẻ.} \end{aligned}$$

Xét hàm số $k(x)=x^3+3x$, với $x>0$.
$k'(x)=3x^2+3>0$, $\forall x>0$.
Ta có bảng biến thiên của $k(x)$ như hình bên.
Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h'(x)=0$ có nghiệm dương bội lẻ khi và chỉ khi $8-m>0 \Leftrightarrow m<8$.

x	0	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	
$k(x)$	0 ↗	$+\infty$

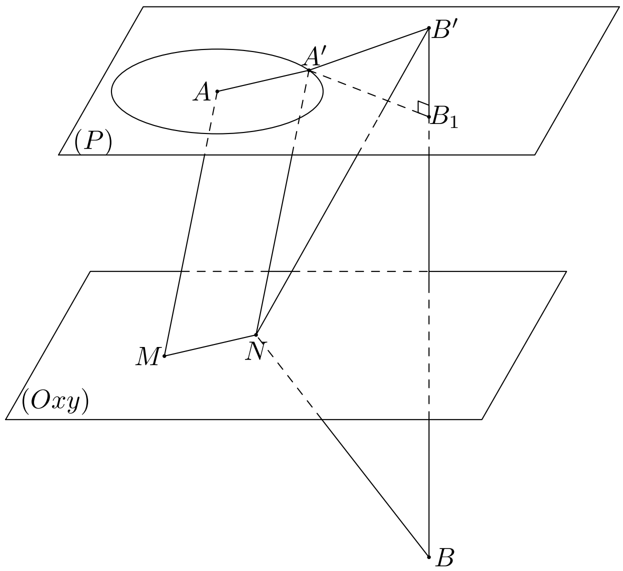
Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.
Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-3)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 1$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

Ⓐ $\sqrt{17}$. Ⓑ $\sqrt{41}$. Ⓒ $\sqrt{37}$. Ⓓ $\sqrt{61}$.

Lời giải.

Ta thấy A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow (P)\colon z = 2$.
Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow B'(-2;1;3)$. B_1 là hình chiếu của B' trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow B_1(-2;1;2)$. Dựng hình bình hành $AMNA'$. Khi đó $AA' = 1$ và $AA' \parallel (Oxy)$. Suy ra A' thuộc đường tròn (C) có tâm A và bán kính $R = 1$, (C) nằm trong mặt phẳng (P).



Ta có

$$\begin{aligned} |AM - BN| &= |A'N - BN| \\ &= |A'N - NB'| \\ &\leq A'B'. \end{aligned}$$

Ta thấy $AB_1 = 5 > R \Rightarrow B_1$ nằm ngoài đường tròn (C). Do $A' \in (P)$, $B' \notin (P)$ mà $(P) \parallel (Oxy)$ suy ra $A'B'$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy).
Ta có $A'B' = \sqrt{B_1B'^2 + A'B_1^2} = \sqrt{1 + A'B_1^2}$, do đó $A'B'$ lớn nhất khi và chỉ khi $A'B_1$ lớn nhất.
Ta lại có $A'B_1 \leq AB_1 + R = 6$. Đẳng thức xảy ra khi A' là giao điểm của AB_1 với đường tròn (C) (A ở giữa A' và B_1) và N là giao điểm của $A'B'$ với mặt phẳng (Oxy).
Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{1 + 6^2} = \sqrt{37}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 31

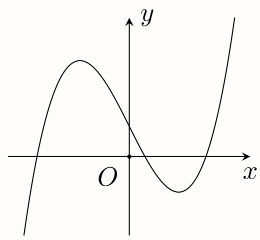
ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1.
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = -x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.
(B) $y = x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}$.
(D) $y = x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị, ta thấy rằng hàm số đã cho là hàm bậc ba và có hệ số $a > 0$ nên hàm số thỏa đề là $y = x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 3$ và $u_2 = 15$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) -12.
(B) $\dfrac{1}{5}$.
(C) 5.
(D) 12.

Lời giải.

Từ công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ta có $u_2 = u_1 \cdot q$. Suy ra $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{7}{6}a^3$.
(B) $\dfrac{7}{2}a^3$.
(C) $\dfrac{7}{3}a^3$.
(D) $7a^3$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích của khối chóp, ta có

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 7a^2 \cdot a = \frac{7a^3}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Nếu $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$ thì $\displaystyle\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ -9. Ⓒ 1. Ⓓ 9.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 5 - (-4) = 9.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;4;-1)$. Phương trình của d là

Ⓐ $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t. \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + t. \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t. \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;4;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 6. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào sau đây?

Ⓐ $S = \pi R^2$. Ⓑ $S = \dfrac{4}{3}\pi R^2$. Ⓒ $S = 4\pi R^2$. Ⓓ $S = 16\pi R^2$.

Lời giải.

Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 3 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n}_3 = (1;2;2)$. Ⓑ $\vec{n}_1 = (1;-2;2)$. Ⓒ $\vec{n}_4 = (1;-2;-3)$. Ⓓ $\vec{n}_2 = (1;2;-2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 3 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1;-2;2)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

Ⓐ $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Ⓑ $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Ⓒ $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$. Ⓓ $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $(a;b;c)$ và bán kính R có phương trình là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Do đó, phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x)\,dx = x^3 + x + C$.
(B) $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C$.
(C) $\int f(x)\,dx = x^2 + x + C$.
(D) $\int f(x)\,dx = 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,dx = \int (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.

Lời giải.

Ta lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là
(A) $[0;+\infty)$.
(B) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(C) $(0;+\infty)$.
(D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)dx = 2$ thì $\int\limits_0^3 3f(x)dx$ bằng
(A) 6.
(B) 2.
(C) 18.
(D) 3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 3f(x)dx = 3\int\limits_0^3 f(x)dx = 6$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

(A) $z_3 = 2+3i$. (B) $z_4 = -2-3i$. (C) $z_1 = -2+3i$. (D) $z_2 = 2-3i$.

Lời giải.

Điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -2+3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 3x + C$. (B) $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-3} + C$. (D) $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 3x + C$.

Lời giải.

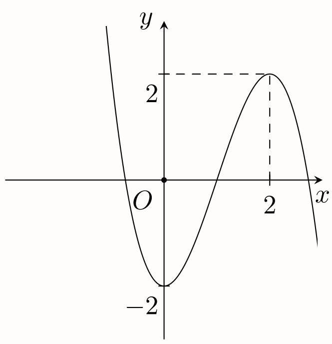
Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x+3)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 3x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;2)$. (B) $(0;2)$. (C) $(-2;2)$. (D) $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 3. (B) 1. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$ là

(A) $y' = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. (B) $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. (C) $y' = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. (D) $y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 18. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_a a = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ là

Ⓐ $(3;-2;-4)$. Ⓑ $(-3;-2;4)$. Ⓒ $(3;2;-4)$. Ⓓ $(3;2;4)$.

Lời giải.

Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{OA} = (3;2;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3$ là

Ⓐ $(\log_3 2; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; \log_2 3)$. Ⓒ $(-\infty; \log_3 2)$. Ⓓ $(\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (\log_2 3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

Ⓐ $2 - 6i$. Ⓑ $4 + 2i$. Ⓒ $4 - 2i$. Ⓓ $-2 + 6i$.

Lời giải.

Ta có $z + w = (1 + 3) + (2 - 4)i = 4 - 2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại bằng 3.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Thể tích của khối lập phương cạnh $3a$ bằng

Ⓐ $27a^3$. Ⓑ $3a^3$. Ⓒ $9a^3$. Ⓓ a^3.

Lời giải.

Khối lập phương cạnh $3a$ có thể tích là $V = (3a)^3 = 27a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = -\dfrac{1}{2}$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Phần thực của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

(A) 2. (B) -3. (C) 3. (D) -2.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x) = 2$ là

(A) $x = \dfrac{9}{2}$. (B) $x = 9$. (C) $x = 4$. (D) $x = 8$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Phương trình tương đương với $2x = 3^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 2$, công thức nào dưới đây đúng?

(A) $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{(n-2)!}{n!}$. (B) $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{2!}{(n-2)!}$. (C) $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$. (D) $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^2 = n \cdot (n-1) = \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) 12π. (B) 18π. (C) 6π. (D) 4π.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ đã cho là $V = h \cdot \pi \cdot r^2 = 12\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$. (B) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-3}$.

(C) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. (D) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

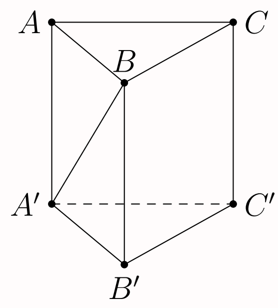
(P) có $\vec{n} = (2;1;-3)$ là một véc-tơ pháp tuyến.
Đường thẳng d vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.
Vậy phương trình đường thẳng d qua $M(1;2;-1)$ và vuông góc với (P) là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 60°.



Lời giải.

Ta có $CC' \parallel BB'$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' cũng là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và BB'.
Lại có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có tất cả các cạnh bằng nhau nên $ABB'A'$ là hình vuông. Suy ra góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và BB' là $\widehat{A'BB'} = 45^\circ$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 3+2i$. Số phức liên hợp của z là

(A) $\overline{z} = 2+3i$. (B) $\overline{z} = -2-3i$. (C) $\overline{z} = -2+3i$. (D) $\overline{z} = 2-3i$.

Lời giải.

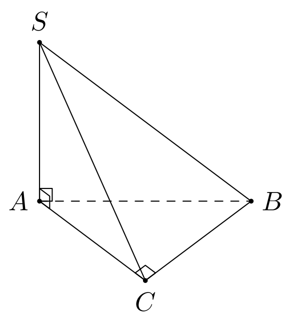
Ta có $iz = 3+2i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+2i}{i} = 2-3i$.
Vậy số phức liên hợp của z là $\overline{z} = 2+3i$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

(A) $\dfrac{1}{2}a$. (B) $\sqrt{2}a$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. (D) a.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại C, có $AC = a$ nên $BC = a$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$. Suy ra $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BC = a$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{30}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu trong 10 quả cầu có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$ cách.
Gọi A là biến cố lấy được 3 quả màu đỏ, ta có $n(A) = \mathrm{C}_4^3 = 4$ cách.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3 + b = 49$. B. $a^3b = 128$. C. $a^3 + b = 128$. D. $a^3b = 49$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7 \Leftrightarrow \log_2 a^3b = 7 \Leftrightarrow a^3b = 2^7 = 128$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(1;2;3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x + 2y + 2z - 11 = 0$. B. $x + 2y + 2z - 2 = 0$.
C. $x + 2y + 4z - 4 = 0$. D. $x + 2y + 4z - 17 = 0$.

Lời giải.

Vì mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến, do đó phương trình là

$$1(x-0) + 2(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 36. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Lời giải.

Trên $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ liên tục, có đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \ (\text{loại vì} \notin [0;3].) \end{array}\right.$$

Ta có $y(0) = 4$, $y(1) = 2$, $y(3) = 22$.
Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 2 tại $x = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 37. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\displaystyle\int_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. B. 10. C. 11. D. 14.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

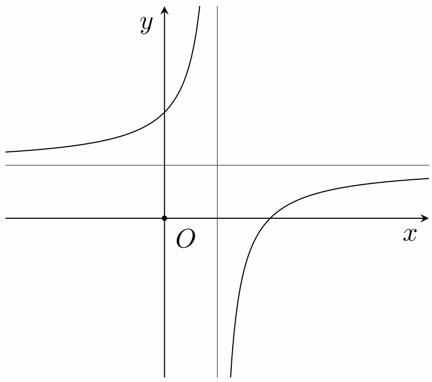
Ta có

$$\int_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathrm{d}x = 2\cdot 6 - 2 = 10.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 38. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $y'>0,\ \forall x\neq 1$.
(B) $y'>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
(C) $y'<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
(D) $y'<0,\ \forall x\neq 1$.



Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ $x\neq 1$. Từ đồ thị hàm số suy ra

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+a}{x-1} = -\infty,$$

kéo theo $a+1<0$.
Vậy $y' = -\dfrac{a+1}{(x-1)^2} > 0$ với mọi $x\neq 1$.
Chọn đáp án (A)

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)[\log_2(x+14)-4]\leq 0$?

(A) 13.
(B) 14.
(C) Vô số.
(D) 15.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-14$.
Ta có

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)[\log_2(x+14)-4]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2^{x^2}-4^x=0\\&\log_2(x+14)-4=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=0\\&x=2.\end{aligned}\right.$$

Do đó, $x=0$, $x=2$ là 2 nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho. (1)
Xét bất phương trình

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)[\log_2(x+14)-4]<0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}2^{x^2}-4^x>0\\ \log_2(x+14)-4<0\end{cases}\\&\begin{cases}2^{x^2}-4^x<0\\ \log_2(x+14)-4>0\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x^2-2x>0\\ x+14<16\end{cases}\\&\begin{cases}x^2-2x<0\\ x+14>16\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow x<0.$$

Kết hợp với điều kiện $x>-14$ và x nguyên, ta được 13 nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)[\log_2(x+14)-4]<0$$

là $x\in\{-13;-12;\ldots;-2;-1\}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra bất phương trình đã cho có 15 nghiệm.
Chọn đáp án (D)

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23. B. 11. C. 10. D. 21.

Lời giải.

Do F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \displaystyle\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ F_2(x) = \displaystyle\int \left(3x^2+2\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên đó và $F(0) = 2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} F_1(1) = F_2(1) \\ F_2(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + C_1 = 3 + C_2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Do đó, $F_1(x) = x^2 + 3x + 1$, $F_2(x) = x^3 + 2x + 2$, suy ra $F(-1) = F_2(-1) = -1$, $F(2) = F_1(2) = 11$. Vậy

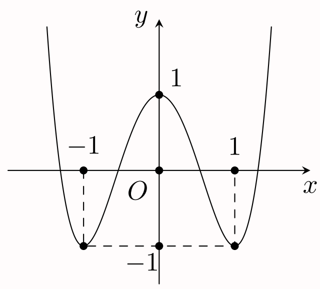
$$F(-1) + 2F(2) = -1 + 2 \cdot 11 = 21.$$

Chọn đáp án D □

Câu 41.

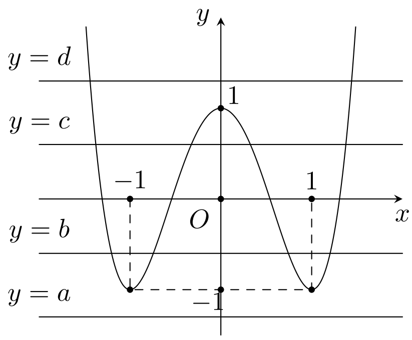
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

A. 4. B. 10. C. 12. D. 8.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = a, & a < -1 \\ f(x) = b, & -1 < b < 0 \\ f(x) = c, & 0 < c < 1 \\ f(x) = d, & d > 1. \end{array}\right.$



- Phương trình $f(x) = a$ vô nghiệm (vì đường thẳng $y = a$ không cắt đồ thị hàm số $f(x)$).
- Phương trình $f(x) = b$ có 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x) = c$ có 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x) = d$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Xét các số phức z, w thoả mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. 3. B. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức về mô-đun số phức ta có

$$|z+i\overline{w}-6+8i|=|(6-8i)-(z+i\overline{w})|\ge|6-8i|-|z+i\overline{w}|=10-|z+i\overline{w}|\,.$$

Ta lại có $|z+i\overline{w}|\le|z|+|i\overline{w}|=|z|+|\overline{w}|=|z|+|w|=3$.
Suy ra $10-|z+i\overline{w}|\ge 7$ hay $|z+i\overline{w}-6+8i|\ge 7$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}z=k\cdot i\overline{w}\\ -6+8i=m\cdot(z+i\overline{w})\end{cases}, k>0, m<0$.

Lấy mô-đun 2 vế, ta được $\begin{cases}|z|=k\cdot|i\overline{w}|\\ |-6+8i|=-m\cdot|z+i\overline{w}|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=k\cdot 2\\ 10=-m\cdot 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{-10}{3}\end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases}z=\dfrac{1}{2}i\overline{w}\\ -6+8i=-\dfrac{10}{3}(z+i\overline{w})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{-8}{5}+\dfrac{6}{5}i\end{cases}\Rightarrow|z-w|=\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-6=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{7}$. D. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{7}$.

Lời giải.

Xét $A(1;2;-1)\in d$. Dễ thấy $A\in(P)$.

Xét $B(2;3;-3)\in d$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua B và vuông góc với (P): $\begin{cases}x=2+t\\ y=3+2t\\ z=-3-t.\end{cases}$

Thay vào phương trình (P): $2+t+6+4t+3+t-6=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-5}{6}$. Suy ra giao điểm của Δ và (P), chính là hình chiếu vuông góc của B trên (P), là $H\left(\dfrac{7}{6};\dfrac{8}{6};\dfrac{-13}{6}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{-4}{6};\dfrac{-7}{6}\right)$. Do đó phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{15x}$?

A. 17. B. 16. C. 18. D. 15.

Lời giải.

Trước hết ta có bất đẳng thức sau

$$27^x \geq 27x\ln 3 + 9 - 18\ln 3,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Thật vậy, xét hàm số $g(x) = 27^x - 27x\ln 3 - 9 + 18\ln 3$, ta có

$$g'(x) = 27^x \cdot 3\ln 3 - 27\ln 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Do đó $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 27^x \geq 27x\ln 3 + 9 - 18\ln 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra (1) đúng.
Từ phương trình, suy ra $xy > -1$. Do $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$, nên ta có $y > -3$ hay $y \geq -2$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$f(x) = 27^{3x^2 - 15x + xy} - (1 + xy) = 0.$$

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{-14+y} - 1 - \frac{1}{3}y$, $f(5) = 27^{5y} - 1 - 5y$. Ta thấy

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq -15,\ \ f(5) > 0\ \forall y \neq 0. \tag{2}$$

Thật vậy, xét hàm số $h(y) = 3^{-14+y} - 1 - \frac{1}{3}y$, ta có

$$h'(y) = 3^{y-14}\ln 3 - \frac{1}{3} \Rightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_0 = 14 - \log_3(3\ln 3) \approx 12{,}9.$$

Hơn nữa

- do $h(-2) < 0 < h(-3) \Rightarrow$ tồn tại $y_1 \in (-3; -2)$ sao cho $h(y_1) = 0$;
- do $h(15) < 0 < h(16) \Rightarrow$ tồn tại $y_2 \in (15; 16)$ sao cho $h(y_2) = 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

y	-3		y_1		y_0		y_2		$+\infty$
$h'(y)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(y)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Suy ra $h(y) < 0 \Leftrightarrow y_1 < y < y_2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 15$ (do $y \in \mathbb{Z}$). Chứng minh tương tự ta có (2) đúng.

- Nếu $y \in \{-2; -1; 1; \ldots; 15\}$, ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(5) < 0$, nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

- Với $y = 0$, ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 5$ nên loại.

- Với $y \geq 16$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 27(3x^2 - 15x + xy)\ln 3 + 9 - 18\ln 3 - (1 + xy) \\ &= x\left[27(3x - 15 + y)\ln 3 - y\right] + 8 - 18\ln 3 \\ &\geq \frac{1}{3}(54\ln 3 - 16) + 8 - 18\ln 3 = \frac{8}{3} > 0. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \ldots; 15\}$.
Chọn đáp án A □

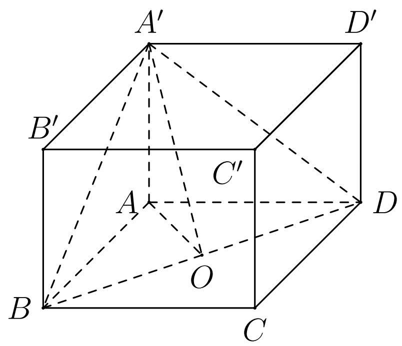
Câu 45. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **B** $6\sqrt{3}a^3$. **C** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $\widehat{AOA'} = 60°$.
Suy ra $A'A = AO \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.
Thể tích khối hộp là

$$V = A'A \cdot AB^2 = a\sqrt{3} \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^3\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f'(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

A $2\ln 3$. **B** $\ln 2$. **C** $\ln 15$. **D** $3\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) + f'(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$. Do hàm số có hai cực trị, nên phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.
Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x) + 6} = 1 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow x = x_1,\ x = x_2.$$

Suy ra diện tích cần tính

$$\begin{aligned} S &= \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+6}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\ln|g(x)+6|\Big|_{x_1}^{x_2}\right| \\ &= \left|\ln\left|\frac{g(x_1)+6}{g(x_2)+6}\right|\right| = \ln 9 = 2\ln 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

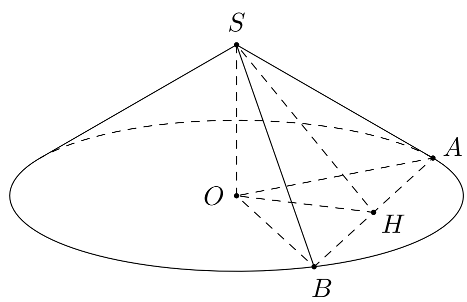
Câu 47. Cắt hình nón $(\aleph)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30°, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $(\aleph)$ bằng

(A) $4\sqrt{7}\pi a^2$. (B) $8\sqrt{7}\pi a^2$. (C) $8\sqrt{13}\pi a^2$. (D) $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.

Giả sử hình nón $(\aleph)$ có đỉnh S, đường tròn đáy có tâm O, thiết diện nói trên là tam giác đều SAB. Gọi H là trung điểm đoạn AB. Khi đó $AB \perp (SHO)$ nên

$$\widehat{SHO} = ((SAB),(OAB)) = 30^\circ.$$



Do đó

$$\begin{aligned} SO &= SH\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}SA}{2}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}a, \\ OH &= SH\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}SA}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a, \\ OA &= \sqrt{OH^2+HA^2} = \sqrt{OH^2+\frac{AB^2}{4}} = \sqrt{13}a. \end{aligned}$$

Vậy diện tích xung quay của hình nón $(\aleph)$ là

$$S_{\text{xq}} = \pi OA \cdot SA = 4\sqrt{13}\pi a^2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=8$?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Nếu $\Delta' \geq 0$ thì phương trình đã cho chỉ có nghiệm thực, dẫn đến $z_0 = \pm 8$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\left[\begin{array}{l} 8^2-2(m+1)8+m^2=0 \\ (-8)^2-2(m+1)(-8)+m^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=12 \\ m=4. \end{array}\right.$$

Thử lại, cả hai giá trị trên đều thỏa mãn.
Nếu $\Delta' < 0$, khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, và hai nghiệm này là liên hợp của nhau. Do đó theo định lí Viète, ta có

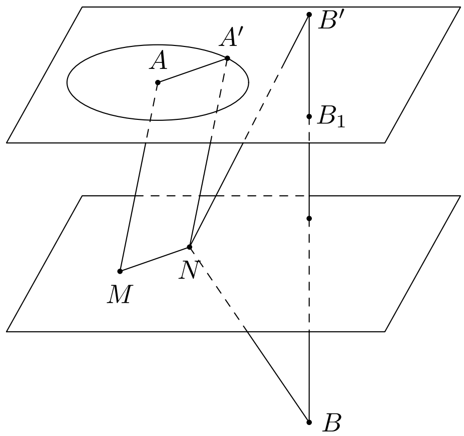
$$64 = |z_0|^2 = z_0 \cdot \overline{z_0} = m^2 \Rightarrow m = \pm 8.$$

Thử lại, chỉ có $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu.
Vậy có tất cả 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A $5\sqrt{2}$. B $3\sqrt{13}$. C $\sqrt{61}$. D $\sqrt{85}$.

Lời giải.



Dễ thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).
Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy), khi đó $B'(-2;1;4)$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (Oxy), phương trình mặt phẳng (P) là $(P)\colon z = 2$.
Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (P), khi đó $B_1(-2;1;2)$.
Gọi A' là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$, khi đó $AA' = MN = 4$ và $AM = A'N$. Điểm A' thuộc đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P), có tâm A bán kính $R = 4$. Ta có

$$|AM - BN| = |A'N - B'N| \leq A'B'.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi N là giao điểm của $A'B'$ với mặt phẳng (Oxy) và N nằm ngoài đoạn thẳng $A'B'$. Ta thấy A', B' nằm cùng một phía với mặt phẳng (Oxy), $A' \in (P)$, $B' \notin (P)$, $(P) \parallel (Oxy)$ nên $A'B'$ luôn cắt (Oxy) tại điểm nằm ngoài đoạn $A'B'$.
Ta có $B'B_1 = 2$; $AB_1 = 5$ nên suy ra

$$A'B_1 \leq AB_1 + A'A = 5 + 4 = 9.$$

Do đó
$$A'B' = \sqrt{A'B_1^2 + B'B_1^2} \leq \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}.$$

Dấu "=" xảy ra khi A' là giao điểm của AB_1 với đường tròn (C) (A ở giữa A' và B_1 và N là giao điểm của $A'B'$ với mặt phẳng (Oxy)).
Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{85}$.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-10)(x^2-25)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(|x^3+8x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9. B. 25. C. 5. D. 10.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f\left(|x^3+8x|+m\right)$.
Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng. Do đó ta nhận thấy $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $g(x)$.
Với $x \neq 0$ ta có

$$g'(x) = \left(\left|x^3+8x\right|+m\right)' f'\left(\left|x^3+8x\right|+m\right) = \frac{(3x^2+8)(x^3+8x)}{|x^3+8x|} f'\left(\left|x^3+8x\right|+m\right).$$

Ta có

$$f'\left(\left|x^3+8x\right|+m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+8x\right|+m = 10 \\ \left|x^3+8x\right|+m = 5 \\ \left|x^3+8x\right|+m = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+8x\right| = 10-m \\ \left|x^3+8x\right| = 5-m \\ \left|x^3+8x\right| = -5-m. \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = x^3+8x$. Vì $h'(x) = 3x^2+8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x) = |h(x)| = |x^3+8x|$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $g(x) = f\left(|x^3+8x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi x đi qua ít nhất 2 trong các nghiệm đó. Từ bảng biến thiên của hàm số $k(x)$ ta thấy điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$$10-m > 0 \Leftrightarrow m < 10.$$

Do m nguyên dương nên có 9 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn đề bài là

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Chọn đáp án A □

HẾT

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 32

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104-1

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

A. $4 + 2i$. B. $4 - 2i$. C. $-2 - 6i$. D. $2 + 6i$.

Lời giải.

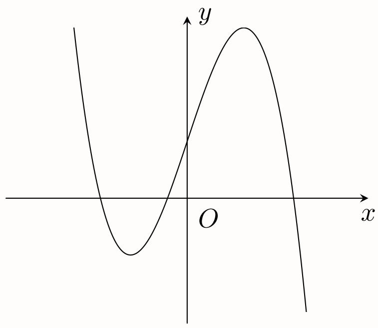
Ta có $z + w = 3 + 2i + 1 - 4i = 4 - 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 2.
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ nên đồ thị này là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. B. -7. C. -1. D. 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 - (-3) = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = -2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là
(A) $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$.
(B) $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.
(C) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.
(D) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính $R=2$.
Phương trình của mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là
(A) $(-\infty;\log_2 5)$.
(B) $(\log_5 2;+\infty)$.
(C) $(-\infty;\log_5 2)$.
(D) $(\log_2 5;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_2 5$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_2 5;+\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng
(A) a^3.
(B) $2a^3$.
(C) $8a^3$.
(D) $4a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ là $V=(2a)^3=8a^3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{3}}$ là
(A) $y' = \dfrac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$.
(B) $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.
(C) $y' = \dfrac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.
(D) $y' = \dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;4)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ là
(A) $(-2;1;4)$.
(B) $(2;-1;4)$.
(C) $(2;1;4)$.
(D) $(-2;1;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;-1;4)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\displaystyle\int_0^3 4f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓐ 3. Ⓑ 12. Ⓒ 36. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 4f(x)\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4\cdot 3 = 12$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 10$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ -8. Ⓑ 8. Ⓒ 5. Ⓓ $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{10}{2} = 5$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{A}_n^3 = \dfrac{(n-3)!}{n!}$. Ⓑ $\mathrm{A}_n^3 = \dfrac{3!}{(n-3)!}$. Ⓒ $\mathrm{A}_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!}$. Ⓓ $\mathrm{A}_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$.

Lời giải.

Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 3$, ta có $\mathrm{A}_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x + C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 2x + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + 2x + C$. Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2+2\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 2x + C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 1.
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+4y-z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_2=(2;-4;1)$. (B) $\vec{n}_1=(2;4;1)$. (C) $\vec{n}_3=(2;4;-1)$. (D) $\vec{n}_4=(-2;4;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(2;4;-1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Phần thực của số phức $z=4-2i$ bằng

(A) 2. (B) -4. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z=4-2i$ là $a=4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\log_2(5x)=3$ là

(A) $\frac{8}{5}$. (B) $\frac{9}{5}$. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $\log_2(5x)=3 \Leftrightarrow 5x=2^3 \Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{8}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=8^x$ là

(A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $[0;+\infty)$. (D) $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=8^x$ là $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $-\frac{1}{5}$. (C) 5. (D) -5.

Lời giải.

Ta có $\log_a \sqrt[5]{a}=\log_a a^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log_a a=\frac{1}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1;5;-2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-6;1)$. Phương trình của d là

(A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 + 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 6t \\ z = -2 + t \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 6t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $M(1; 5; -2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -6; 1)$ thì phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 6t \\ z = -2 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-4; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

(A) $z_3 = -4 - 3i$.
(B) $z_4 = 4 + 3i$.
(C) $z_2 = 4 - 3i$.
(D) $z_1 = -4 + 3i$.

Lời giải.

Điểm $M(-4; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = -4 + 3i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3.
(B) 4.
(C) 2.
(D) 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm thì $f'(x)$ đổi dấu khi qua bốn điểm nên hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 4x + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-4} + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 4x + C$.

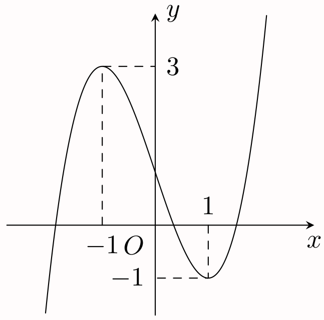
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + 4)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 4x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(0;3)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = \pi R^2$. Ⓑ $S = 16\pi R^2$. Ⓒ $S = 4\pi R^2$. Ⓓ $S = \frac{4}{3}\pi R^2$.

Lời giải.

Ta có diện tích S của mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ -5. Ⓑ 0. Ⓒ -1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Gọi $M(0;y)$ là giao điểm của đồ thị và trục tung.

Thay $x = 0$ và hàm số ta được $y = -5$.

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 8a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $8a^3$. Ⓑ $\frac{4}{3}a^3$. Ⓒ $4a^3$. Ⓓ $\frac{8}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 8a^2 \cdot a = \frac{8}{3}a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

Ⓐ 15π. Ⓑ 75π. Ⓒ 25π. Ⓓ 45π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình

Ⓐ $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

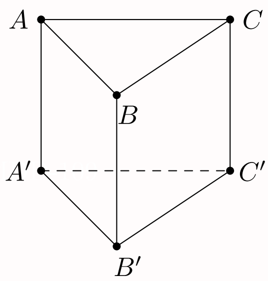
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;2;-1)$.
Gọi d là đường thẳng cần viết phương trình. Do $d\perp(P)$ nên d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(3;2;-1)$.

Ta có phương trình đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng AB' và CC' bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.



Lời giải.

Ta có $CC' \parallel BB'$ nên $(AB',CC')=(AB',BB')=\widehat{AB'B}=45^\circ$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=4a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

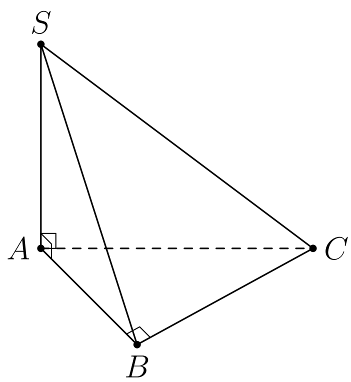
Ⓐ $4a$. Ⓑ $4\sqrt{2}a$. Ⓒ $2\sqrt{2}a$. Ⓓ $2a$.

Lời giải.

Ta có

- $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ (1).
- $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên suy ra $BC\perp AB$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BC\perp(SAB)$ tại B.
Do đó, $\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right)=CB$.
Trong $\triangle ABC$ vuông cân tại B có $BC=AB=4a$.
Vậy $\mathrm{d}\left(C,(SAB)\right)=4a$.



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=4$ thì $\displaystyle\int_0^2 [2f(x)-1]\,dx$ bằng

(A) 8. (B) 10. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Ta có

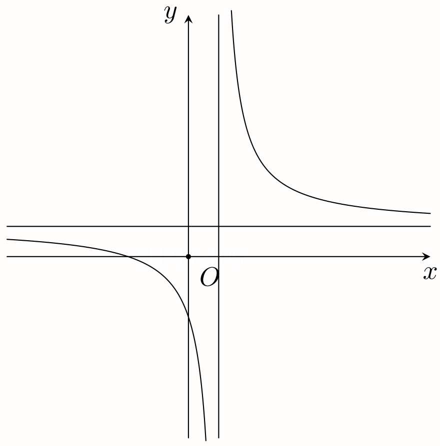
$$\int_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathrm{d}x = 2\cdot 4 - x\Big|_0^2 = 2\cdot 4 - 2 = 6.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (B) $y' < 0, \forall x \neq 1$.

(C) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (D) $y' > 0, \forall x \neq 1$.



Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2} \neq 0, \forall x \neq 1$.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Từ đó suy ra $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 4 + 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là

(A) $\overline{z} = 3 + 4i$. (B) $\overline{z} = -3 - 4i$. (C) $\overline{z} = 3 - 4i$. (D) $\overline{z} = -3 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{4+3i}{i} = \dfrac{(4+3i)\cdot(-i)}{-i^2} = \dfrac{-4i-3i^2}{1} = 3 - 4i$.

Suy ra $\overline{z} = 3 + 4i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

(A) $\dfrac{1}{22}$. (B) $\dfrac{7}{44}$. (C) $\dfrac{5}{12}$. (D) $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu bằng số cách chọn đồng thời 3 quả bóng từ 12 quả bóng.

Do đó $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.

Gọi A là biến cố: "Cả 3 quả bóng lấy ra đều là màu đỏ."

Số kết quả thuận lợi của biến cố A bằng số cách chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 quả màu đỏ.

Suy ra $n(A) = C_5^3$.

Vậy xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_5^3}{C_{12}^3} = \dfrac{1}{22}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a^3b = 32$. (B) $a^3b = 25$. (C) $a^3 + b = 25$. (D) $a^3 + b = 32$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $a > 0$, $b > 0$.

Do đó $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 5 \Leftrightarrow a^3b = 32$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2]. \end{array}\right.$

- Khi $x = 0 \Rightarrow y = 1$.
- Khi $x = -1 \Rightarrow y = 3$.
- Khi $x = 2 \Rightarrow y = 13$.

Vậy trên đoạn $[-1; 2]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 0)$ và $B(3; 2; 1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

(A) $2x + 2y + z - 2 = 0$. (B) $3x + 2y + z - 17 = 0$.

(C) $4x + 2y + z - 4 = 0$. (D) $2x + 2y + z - 11 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $A(1; 0; 0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng có dạng

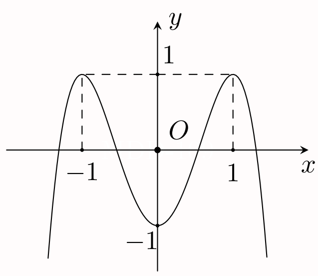
$$2(x - 1) + 2(y - 0) + (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 2 = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39.

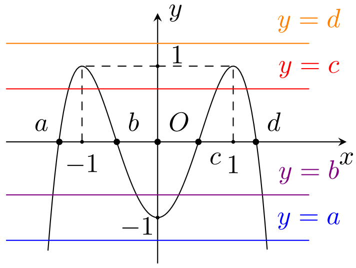
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

(A) 12. (B) 10. (C) 8. (D) 4.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$ với $a<-1<b<0<c<1<d$.



Phương trình $f(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a,\ (a<-1) \\ f(x)=b,\ (-1<b<0) \\ f(x)=c,\ (0<c<1) \\ f(x)=d,\ (d>1). \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có

- Phương trình $f(x)=a$, $(a<-1)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x)=b$, $(-1<b<0)$ có 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x)=c$, $(0<c<1)$ có 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x)=d$, $(d>1)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có 10 nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. B. Vô số. C. 25. D. 26.

Lời giải.

Điều kiện $x>-25$. Khi đó ta có

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}-4^x=0 \\ \log_3(x+25)-3=0 \\ \begin{cases} 2^{x^2}-4^x>0 \\ \log_3(x+25)-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2}-4^x<0 \\ \log_3(x+25)-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}=2^{2x} \\ \log_3(x+25)=3 \\ \begin{cases} 2^{x^2}>2^{2x} \\ \log_3(x+25)<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2}<2^{2x} \\ \log_3(x+25)>3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=0 \\ x+25=27 \\ \begin{cases} x^2-2x>0 \\ 0<x+25<27 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x<0 \\ x+25>27 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \\ -25<x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<2 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ -25<x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, số nghiệm nguyên thỏa mãn là 26.
Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+2 \text{ khi } x\ge 1 \\ 3x^2+1 \text{ khi } x<1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 18. B. 20. C. 9. D. 24.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Do $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = 2 \end{cases}$ nên $F(1) = 2 + F(0) = 4$.

- Xét trên khoảng $(-\infty; 1)$, ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$$
$$\Rightarrow\ F(0) = C = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + x + 2 \Rightarrow F(-1) = 0.$$

- Xét trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, ta có

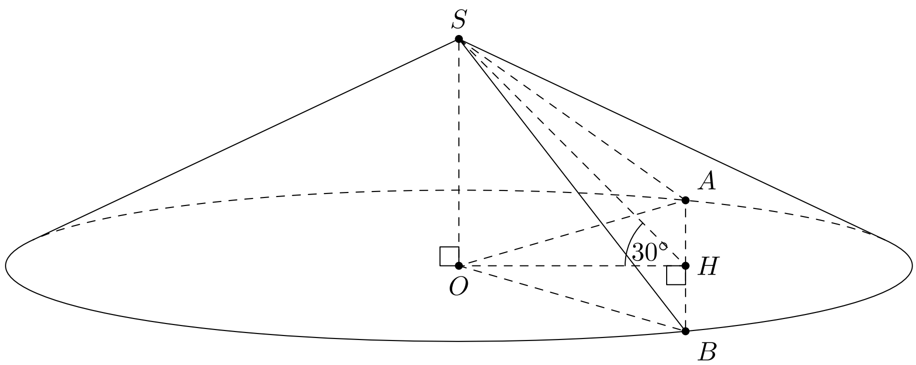
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+2)\,\mathrm{d}x = x^2 + 2x + C$$
$$\Rightarrow\ F(1) = 3 + C = 4 \Rightarrow C = 1$$
$$\Rightarrow\ F(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow F(2) = 9.$$

Do đó $F(-1) + 2F(2) = 0 + 2 \cdot 9 = 18$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30°, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

(A) $\sqrt{7}\pi a^2$. (B) $\sqrt{13}\pi a^2$. (C) $2\sqrt{13}\pi a^2$. (D) $2\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải.



Xét hình nón (N) và mặt phẳng (SAB) đi qua đỉnh, cắt (O) tại A, B.
Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do $\triangle SAB$ đều nên $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do $(SAB) \cap (OAB) = AB$ và $\begin{cases} SH \perp AB \\ OH \perp AB \end{cases}$ nên $((SAB), (OAB)) = (SH, OH) = \widehat{SHO} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow\ SO = SH \cdot \sin\widehat{SHO} = a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\ OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a.$$

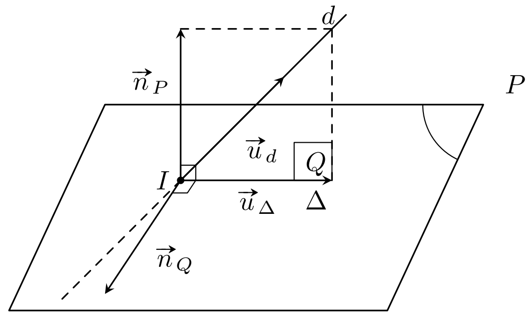
Vậy $S_{\text{xq}} = \pi \cdot SB \cdot OB = \pi \cdot 2a \cdot \dfrac{a\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+2=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

(A) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{3}$. (B) $\dfrac{x}{14}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{8}$. (C) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{3}$. (D) $\dfrac{x}{14}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{8}$.

Lời giải.



Giả sử Δ là hình chiếu của d trên (P).
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và d.
Xét I là giao điểm của d và (P) thì $I\in\Delta$ toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}\\ x+2y-2z+2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{2y}{-2}=\frac{2z-2}{4}=\frac{x+2y-2z+2}{1-2-4}=\frac{0}{-5}=0\Rightarrow x=0,\ y=0,\ z=1\Rightarrow I(0;0;1).\qquad(1)$$

Xét $\vec{u}_d=(1;-1;2)$, $\vec{n}_P=(1;2;-2)$, ta có

$$\begin{cases}(Q)\supset d\\(Q)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}_Q\perp\vec{u}_d\\ \vec{n}_Q\perp\vec{n}_P\end{cases}.\ \text{Chọn } \vec{n}_Q=[\vec{u}_d,\vec{n}_P]=(-2;4;3).$$

Mặt khác

$$\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_P\\ \vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_Q\end{cases}.\ \text{Chọn } \vec{u}_\Delta=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(14;1;8).\qquad(2)$$

Từ (1) và (2), ta được $\Delta\colon \dfrac{x}{14}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)\cdot 27^{18x}$?

(A) 19. (B) 20. (C) 18. (D) 21.

Lời giải.

Để cặp $(x;y)$ thỏa mãn phương trình thì $1+xy>0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&27^{3x^2+xy}=(1+xy)\cdot 27^{18x}\\ \Leftrightarrow\ &27^{3x^2+xy}=27^{\log_{27}(1+xy)}\cdot 27^{18x}\\ \Leftrightarrow\ &3x^2+xy=\log_{27}(1+xy)+18x\\ \Leftrightarrow\ &3x^2+(y-18)x-\log_{27}(1+xy)=0.\end{aligned}\qquad(*)$$

Đặt $f(x)=3x^2+(y-18)x-\log_{27}(1+xy)$, $x\in\left(\dfrac{1}{3};6\right)$. Ta xét các trường hợp sau

TH1. Nếu $y<0$ thì $-y<\dfrac{1}{x}<3$, suy ra $y>-3$ hay $y\in\{-1;-2\}$.

Với $y=-1$ thì ta có $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$ và $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$ nên theo định lí giá trị trung gian, phương trình $(*)$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};1\right) \subset \left(\frac{1}{3};6\right)$. Tương tự, với $y=-2$ phương trình $(*)$ cũng có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{3};6\right)$.

TH2. Nếu $y=0$ thì phương trình $(*)$ trở thành $3x^2-18x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$, không thỏa mãn.

TH3. Nếu $y \geq 19$, ta có

$$f'(x)=6x+(y-18)-\frac{y}{(1+xy)\ln 27},$$
$$f''(x)=6+\frac{y^2}{(1+xy)^2\ln 27}>0, \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3};6\right).$$

Suy ra hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{3};6\right)$. Do đó

$$f'(x)>f'\left(\frac{1}{3}\right)=2+(y-18)-\frac{y}{(3+y)\ln 3}>0, \quad \forall y \geq 19,\ \forall x \in \left(\frac{1}{3};6\right).$$

Điều này dẫn đến $f(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};6\right)$. Suy ra

$$f(x)>f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{y}{3}-\log_{27}\left(1+\frac{y}{3}\right)-\frac{17}{3}.$$

Xét hàm số $g(t)=t-\log_{27}(1+t)$, $t>0$. Dễ thấy $g'(t)=1-\frac{1}{(1+t)\ln 27}>0$ (với mọi $t>0$) nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, kéo theo

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{y}{3}\right)-\frac{17}{3} \geq g\left(\frac{19}{3}\right)-\frac{17}{3}>0.$$

Như vậy, phương trình $(*)$ vô nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};6\right)$ trong trường hợp này.

TH4. Nếu $1 \leq y \leq 18$ thì từ tính đồng biến của hàm $g(t)$, ta suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{y}{3}\right)-\frac{17}{3}<0, \quad \forall y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq y \leq 18.$$
$$f(3)=g(3y)-27>0, \quad \forall y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq y \leq 18.$$

Điều này dẫn đến phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};6\right)$.

Kết luận: có tất cả 20 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=6$?

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m^2=2m+1$. Xét hai trường hợp sau

TH1. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực.
Từ $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$.

- Khi $z_0 = 6$, thay vào phương trình ta được $m^2 - 12m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \pm \sqrt{22}$.
- Khi $z_0 = -6$, thay vào phương trình ta được $m^2 + 12m + 48 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Trong trường hợp này có hai giá trị cần tìm của m là $m = 6 \pm \sqrt{22}$.

TH2. $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt, liên hợp với nhau và có mô-đun bằng nhau.
Từ $|z_0| = 6 \Leftrightarrow |z_0| \cdot |\overline{z_0}| = 36 \Leftrightarrow z_0 \cdot \overline{z_0} = 36 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = 36 \Leftrightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = -6$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

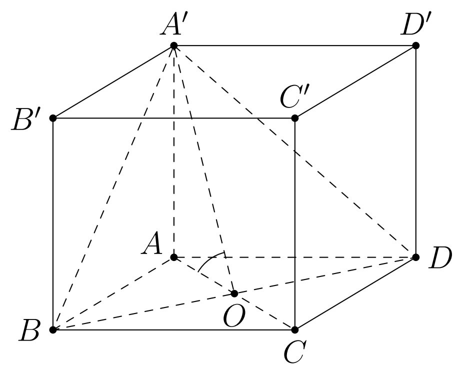
Câu 46. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60°. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$. B. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'O$.
Xét hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$, có

$$\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases}$$
$$\Rightarrow \widehat{((A'BD), (ABCD))} = \widehat{(A'O, AC)} = \widehat{A'OA} = 60^\circ.$$



Ta tính được

- $AB = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$.
- $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.
- $AA' = AO \tan \widehat{A'OA} = 2a \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $V = AB^2 \cdot AA' = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2a\sqrt{3} = 16a^3\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $\ln 3$. B. $3\ln 2$. C. $\ln 10$. D. $\ln 7$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$ và $f'''(x) = 6$.
Do đó $g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.
Ta có $g(x)$ là hàm số bậc ba với hệ số của x^3 bằng 1 nên $g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 thì $g(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ và $g(x_1) = 2$, $g(x_2) = -5$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + 6\\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6\\ &\Leftrightarrow \quad f'(x) + f''(x) + 6 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad g'(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&x = x_1\\ &x = x_2.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned}S &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|1 - \frac{f(x)}{g(x)+6}\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6} \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6} \mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+6} \mathrm{d}x\right| = \left|(\ln|g(x)+6|)\Big|_{x_1}^{x_2}\right| = |\ln 1 - \ln 8| = 3\ln 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. (C) 3. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có hai bất đẳng thức về mô-đun như sau

- $|z + z'| \le |z| + |z'|$. Đẳng thức xảy ra khi $z' = kz$ với $k \ge 0$.
- $|z - z'| \ge ||z| - |z'||$. Đẳng thức xảy ra khi $z' = lz$ với $l \ge 0$.

Từ $|w| = 2$ suy ra $|i\overline{w}| = |i| \cdot |\overline{w}| = |w| = 2$.
Do đó $|z + i\overline{w}| \le |z| + |i\overline{w}| = 1 + 2 = 3$ và

$$\begin{aligned}|z + i\overline{w} + 6 + 8i| &= |6 + 8i - (-z - i\overline{w})|\\ &\ge ||6+8i| - |-z - i\overline{w}|| = |10 - |z + i\overline{w}||\\ &\ge 10 - 3 = 7. \quad (*)\end{aligned}$$

Dấu "=" trong $(*)$ xảy ra khi

$$\begin{cases} i\overline{w} = kz, \text{với } k \ge 0\\ -z - i\overline{w} = l(6+8i), \text{với } l \ge 0\\ |z| = 1\\ |w| = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\\ l = \dfrac{3}{10}\\ |z| = 1\\ |w| = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\\ l = \dfrac{3}{10}\\ z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i\\ w = -\dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}i.\end{cases}$$

Như thế $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7 khi $z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$ và $w=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i$.

Vậy $|z-w|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

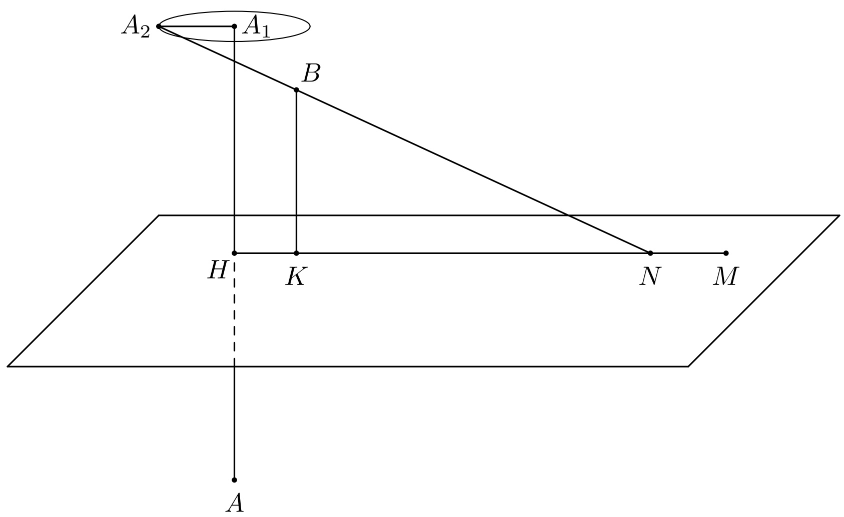
Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;-3;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=3$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

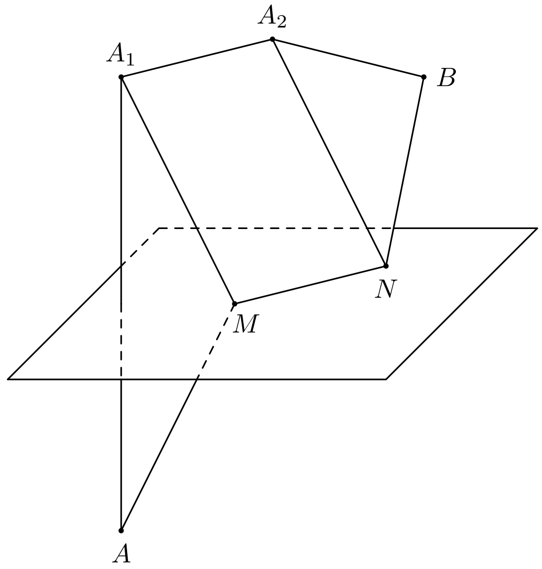
(A) $\sqrt{65}$. (B) $\sqrt{29}$. (C) $\sqrt{26}$. (D) $\sqrt{91}$.

Lời giải.

Cách 1:



Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua $(Oxy)\Rightarrow A_1(-2;1;3)$.
Gọi A_2 là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow A_1A_2=3\Rightarrow A_2$ thuộc đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng song song với (Oxy) có tâm A_1, bán kính $R=3$.
Khi đó $|AM-BN|=|A_1M-BN|=|A_2N-BN|\leq A_2B$.
Dấu "=" xảy ra và A_2B đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{HK}$.
Suy ra $\overrightarrow{A_1A_2}=-\dfrac{A_1A_2}{HK}\overrightarrow{HK}=\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{12}{5};0\right)\Rightarrow A_2\left(-\dfrac{19}{5};\dfrac{17}{5};3\right)\Rightarrow A_2B=\sqrt{65}$.
Vậy giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng $\sqrt{65}$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M, N nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) với mặt phẳng (Oxy) (trong đó (Q) là mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (Oxy)) và $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{KH}$.
Cách 2:



Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A_1(-2;1;3)$.
Gọi A_2 là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MN} = (x;y;0) \Rightarrow A_2(x-2;y+1;3)$ và A_2, B nằm trên cùng một phía bờ là mặt phẳng (Oxy).
Vì $MN = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9$.
Ta có $|MA - NB| = |MA_1 - NB| = |NA_2 - NB| \leq A_2B$.
Mà

$$\begin{aligned} A_2B &= \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2+1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+26-6x+8y} \\ &\leq \sqrt{35+\sqrt{(6^2+8^2)(x^2+y^2)}} \\ &= \sqrt{65}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ là $\sqrt{65}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} A_2,\ B,\ N \text{ thẳng hàng} \\ \dfrac{x}{-6} = \dfrac{y}{8} = t \geq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2 = 9. \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow x = -6t,\ y = 8t$.
Thay vào (2) ta được $36t^2 + 64t^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{9}{100} \Rightarrow t = \dfrac{3}{10} \Rightarrow x = -\dfrac{9}{5};\ y = 8t = \dfrac{12}{5}$.

Suy ra $A_2\left(-\dfrac{19}{5};\dfrac{17}{5};3\right) \Rightarrow \overrightarrow{A_2B} = \left(\dfrac{24}{5};-\dfrac{32}{5};-1\right)$.

Phương trình đường thẳng A_2B: $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{24}{5}t \\ y = -3 - \dfrac{32}{5}t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Điểm $N \in A_2B \Rightarrow N\left(1+\dfrac{24}{5}t;-3-\dfrac{32}{5}t;2-t\right)$.

Điểm $N \in (Oxy) \Rightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N\left(\dfrac{53}{5};-\dfrac{79}{5};0\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{62}{5};-\dfrac{91}{5};0\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(|x^3+7x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

(A) 16. (B) 9. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-9)(x-4)(x+4) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 4 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Ta nhận thấy rằng, hàm số $h(x) = |x^3 + 7x|$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Mà $g'(x) = h'(x) \cdot f'\left(|x^3 + 7x| + m\right)$ nên hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình

$$f'\left(\left|x^3 + 7x\right| + m\right) = 0. \quad (1)$$

phải có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0.

Đặt $u = x^3 + 7x \Rightarrow u' = 3x^2 + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x)$ là hàm đồng biến.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + 7x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 + 7x) = +\infty \Rightarrow$ ứng với mỗi giá trị của u cho duy nhất 1 giá trị của x.

Phương trình trở thành $f'(|u| + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |u| + m = 9 \\ |u| + m = 4 \\ |u| + m = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |u| = 9 - m \\ |u| = 4 - m \\ |u| = -4 - m. \end{array}\right.$

Với mỗi giá trị dương của $|u|$ sẽ cho 2 giá trị của u, tương ứng với 2 giá trị của x.

Do đó để hàm số có ít nhất ba cực trị thì phương trình $f'(|u| + m) = 0$ phải có ít nhất 1 nghiệm dương, suy ra $|u| = 9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn đáp án (D) □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 33

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021

Môn: Toán

Năm học: 2020 – 2021

Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=-4$. B. $y=1$. C. $y=4$. D. $y=-1$.

Lời giải.

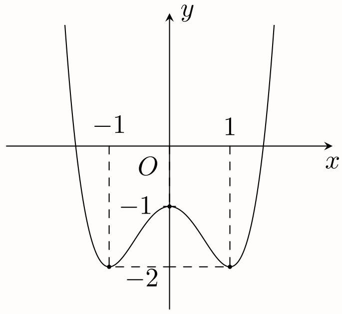
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x-1}{x+1}=4$ nên $y=4$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $x=-2$. D. $x=0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Với mọi số thực a dương, $\log_4(4a)$ bằng

A. $1+\log_4 a$. B. $1-\log_4 a$. C. $\log_4 a$. D. $4\log_4 a$.

Lời giải.

Với $a>0$ ta có $\log_4(4a)=\log_4 4+\log_4 a=1+\log_4 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S_{xq}=\pi rl$. B. $S_{xq}=2\pi rl$. C. $S_{xq}=4\pi rl$. D. $S_{xq}=\dfrac{4}{3}\pi rl$.

Lời giải.

Theo công thức $S_{xq}=\pi rl$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

(A) $y' = \dfrac{3^x}{\ln 3}$. (B) $y' = 3^x$. (C) $y' = x3^{x-1}$. (D) $y' = 3^x \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3^x \ln 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối chóp đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $V = \dfrac{1}{3}Bh$. (B) $V = \dfrac{4}{3}Bh$. (C) $V = 3Bh$. (D) $V = Bh$.

Lời giải.

Theo công thức $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-3)$ là

(A) $(-\infty; 3]$. (B) $(3; +\infty)$. (C) $[3; +\infty)$. (D) $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-3)$ là $(3; +\infty)$.

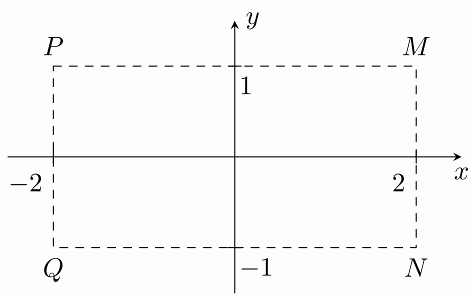
Chọn đáp án (B) □

Câu 8.

Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + i$?

(A) Điểm P. (B) Điểm Q.

(C) Điểm M. (D) Điểm N.



Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + i$ là điểm $P(-2; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Thể tích của khối cầu bán kính $4a$ bằng

(A) $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. (B) $\dfrac{256}{3}\pi a^3$. (C) $256\pi a^3$. (D) $\dfrac{64}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu bán kính $4a$ bằng $\dfrac{4}{3}\pi(4a)^3 = \dfrac{256}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ bằng

(A) -2. (B) -3. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

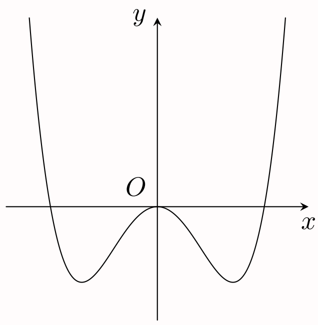
Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ bằng -3.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 11.
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

Ⓐ $y=\dfrac{3x+1}{x+2}$. Ⓑ $y=x^2+2x$.
Ⓒ $y=2x^3-x^2$. Ⓓ $y=x^4-2x^2$.



Lời giải.
Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số có dạng $y=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, nên chọn phương án với hàm số $y=x^4-2x^2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}=(1;-2;3)$ và $\vec{v}=(-1;2;0)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

Ⓐ $(0;0;-3)$. Ⓑ $(0;0;3)$. Ⓒ $(-2;4;-3)$. Ⓓ $(2;-4;3)$.

Lời giải.
Ta có $\vec{u}+\vec{v}=(0;0;3)$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ thì $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 3. Ⓒ 7. Ⓓ -3.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2+5=7.$
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 14. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=3a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}a^3$. Ⓑ $3a^3$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}a^3$. Ⓓ a^3.

Lời giải.
Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V=B\cdot h=3a^2\cdot a=3a^3$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=4x^3-3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^4-3x+C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^4+C$.
Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4x^3-3x+C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=12x^2+C$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(4x^3-3\right)\mathrm{d}x=x^4-3x+C.$
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 16. Cho hai số phức $z = 3 + 4i$ và $w = 1 - i$. Số phức $z - w$ là

Ⓐ $7 + i$. Ⓑ $-2 - 5i$. Ⓒ $4 + 3i$. Ⓓ $2 + 5i$.

Lời giải.

Ta có $z - w = (3 + 4i) - (1 - i) = 2 + 5i$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 17. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 5$, công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{C}_n^5 = \dfrac{n!}{(n-5)!}$. Ⓑ $\mathrm{C}_n^5 = \dfrac{n!}{5!\,(n-5)!}$. Ⓒ $\mathrm{C}_n^5 = \dfrac{5! \cdot n!}{(n-5)!}$. Ⓓ $\mathrm{C}_n^5 = \dfrac{(n-5)!}{n!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^5 = \dfrac{n!}{5!\,(n-5)!}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = 4 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x + \sin x + C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x - \sin x + C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x + \sin x + C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$.
Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

(A) $(0;+\infty)$. (B) $(-2;2)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;-3;5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình

(A) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-5}{3}$.

(B) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$.

(C) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{5}$.

(D) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;-3;5)$ làm véc-tơ chỉ phương là

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Nghiệm của phương trình $5^x=3$ là

(A) $x=\sqrt[3]{5}$. (B) $x=\dfrac{3}{5}$. (C) $x=\log_3 5$. (D) $x=\log_5 3$.

Lời giải.

Ta có $5^x=3\Leftrightarrow x\log_5 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=4$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 2. (C) -6. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^2=F(2)-F(1)=4-(-2)=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 5. (B) $\dfrac{2}{7}$. (C) -5. (D) $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_2=u_1+d\Leftrightarrow 7=2+d\Leftrightarrow d=5$.

Vậy công sai của cấp số cộng là $d=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=9$. Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(1;-3;0)$. B. $(-1;3;0)$. C. $(1;3;0)$. D. $(-1;-3;0)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=9$ có tâm là $(-1;3;0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số $y=x^3-x+2$?

A. Điểm $M(1;1)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. D. Điểm $N(1;0)$.

Lời giải.

Thay hoành độ $x=1$ vào phương trình của hàm số ta được $y=1^3-1+2=2$.
Vậy điểm $P(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số.
Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận véc-tơ $\vec{n}=(1;-2;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

A. $x+2y-5z=0$. B. $x+2y-5z+1=0$.
C. $x-2y+5z=0$. D. $x-2y+5z+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua O và nhận véc-tơ $\vec{n}=(1;-2;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$(x-0)-2(y-0)+3(z-0)=0 \Leftrightarrow x-2y+5z=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x)>5$ là

A. $\left(0;\dfrac{32}{3}\right)$. B. $\left(\dfrac{32}{3};+\infty\right)$. C. $\left(0;\dfrac{25}{3}\right)$. D. $\left(\dfrac{25}{3};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $3x>0 \Leftrightarrow x>0$.
Ta có $\log_2(3x)>5 \Leftrightarrow 3x>2^5 \Leftrightarrow x>\dfrac{32}{3} \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{32}{3};+\infty\right)$.
Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{32}{3};+\infty\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

A. $\dfrac{10}{19}$. B. $\dfrac{5}{19}$. C. $\dfrac{4}{19}$. D. $\dfrac{9}{19}$.

Lời giải.

Gọi X là tập hợp 19 số nguyên dương đầu tiên. Suy ra $X=\{1;2;3;\ldots;18;19\}$.
Khi đó tập X có 19 phần tử, trong đó có 9 phần là số chẵn, 10 phần tử là số lẻ.
Chọn đồng thời hai số từ tập X, ta có C_{19}^2 (cách chọn).
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử chọn đồng thời hai số từ tập X.

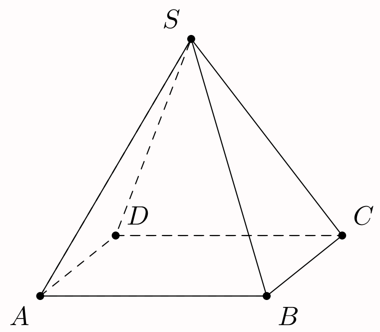
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Suy ra số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{19}^2$.
Gọi A là biến cố "Chọn được hai số chẵn từ tập X".
Khi đó số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_9^2$.
Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_9^2}{\mathrm{C}_{19}^2} = \dfrac{4}{19}$.

Chọn đáp án (C) □

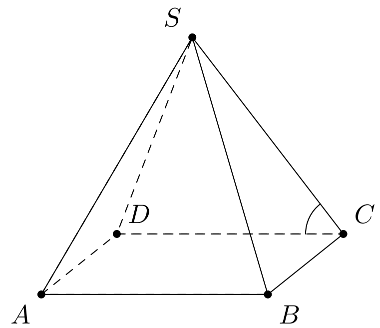
Câu 30.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

(A) 90°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 45°.



Lời giải.

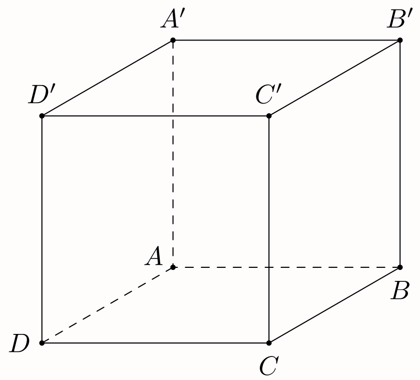
Vì $AB = BC = CD = DA$ nên đáy $ABCD$ là hình thoi. Suy ra $AB \parallel DC$.
Vậy $\widehat{(SC, AB)} = \widehat{(SC, DC)}$ (1).
Xét tam giác SCD có $SD = DC = SC$. Suy ra tam giác SCD đều (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{(SC, AB)} = \widehat{SCD} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

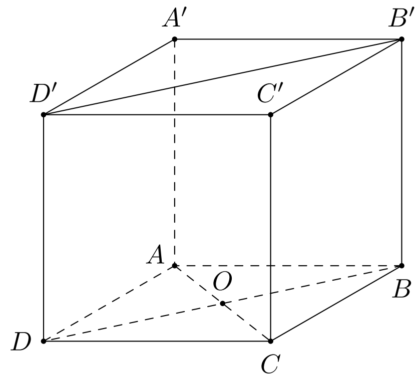
Câu 31.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

(A) $2\sqrt{2}a$. (B) $2\sqrt{3}a$. (C) $\sqrt{2}a$. (D) $\sqrt{3}a$.



Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Do $ABCD$ là hình vuông nên ta có $CO \perp BD$. (1)
Mặt khác $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp CO$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $CO \perp (BDD'B') \Rightarrow \mathrm{d}(C,(BDD'B')) = CO$.
Ta có $CO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a$.
Vậy $\mathrm{d}(C,(BDD'B')) = \sqrt{2}a$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho số phức $z = 4 - i$, môđun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng
(A) 34. (B) 30. (C) $\sqrt{34}$. (D) $\sqrt{30}$.

Lời giải.

Ta có $|(1+i)\overline{z}| = |1+i| \cdot |\overline{z}| = \sqrt{2} \cdot |4+i| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{34}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\displaystyle\int_0^2 [4x - f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng
(A) 12. (B) 10. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [4x - f(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int_0^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 2 - 2 = 6$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?
(A) $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$. (B) $y = x^3 - x$. (C) $y = x^4 - 4x^2$. (D) $y = x^3 + x$.

Lời giải.

- Vì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta loại phương án hàm bậc 4 và hàm nhất biến.
- Xét hàm số $y = x^3 - x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
  Đạo hàm $y' = 3x^2 - 1$. Suy ra phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
  Vậy hàm số $y = x^3 - x$ không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.
- Xét hàm số $y = x^3 + x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
  Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
  Vậy hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trên đoạn $[-4;-1]$ hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm
(A) $x = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = -4$. (D) $x = -3$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-4;-1]$.
Ta có $y' = 4x^3 - 16x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [-4;-1] \\ x = 2 \notin [-4;-1] \\ x = -2 \in [-4;-1]. \end{array}\right.$

Mặt khác $y(-4) = 141$, $y(-2) = -3$, $y(-1) = 6$.
Vậy hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -2$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$ và $N(3;1;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.
B. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.
C. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.
D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;2;1)$, nhận véc-tơ $\overrightarrow{MN} = (2;-1;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Với $a > 0$, đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2\left(8a^4\right)$ bằng

A. $4b + 7$.
B. $4b + 3$.
C. $4b$.
D. $4b - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2\left(8a^4\right) = \log_2\frac{16a^4}{2} = \log_2\frac{(2a)^4}{2} = \log_2(2a)^4 - \log_2 2 = 4\log_2(2a) - 1 = 4b - 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $2x + y + 3z + 7 = 0$.
B. $2x + y + 3z - 7 = 0$.
C. $2x - y + 3z + 9 = 0$.
D. $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P).
Vì $(Q) \parallel (P)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) có dạng $2x - y + 3z + m = 0$, với $m \neq 1$.
Mặt khác, mặt phẳng (Q) đi qua A nên $2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$ (thỏa mãn).
Vậy, mặt phẳng (Q) có phương trình $2x - y + 3z - 9 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31)\right]\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0$?

A. 26.
B. 27.
C. 28.
D. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x+31>0 \Leftrightarrow x>-31$.
Xét các hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)$ và $g(x)=32-2^{x-1}$ trên $(-31;+\infty)$. Ta có

- $f(x)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+1\right)=\log_2(x+31) \Leftrightarrow x^2+1=x+31$
$$\Leftrightarrow x^2-x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=6. \end{array}\right.$$
- $g(x)=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=32 \Leftrightarrow x-1=5 \Leftrightarrow x=6$.

Bảng xét dấu

x	-31		-5		6		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)\cdot g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu, ta có

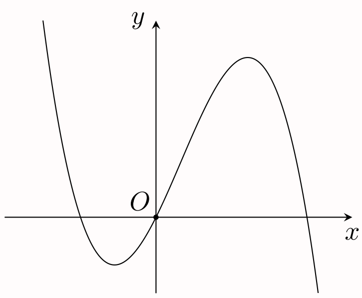
$$\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0 \Leftrightarrow -31<x\leq -5.$$

Kết hợp điều kiện $x\in\mathbb{Z}$, ta có $x\in\{-30;-29;-28;\ldots;-5\}$.
Vậy có tất cả 26 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 40.

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)+4=0$ là

A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<0 \\ x=0 \\ x=x_2>0. \end{array}\right.$

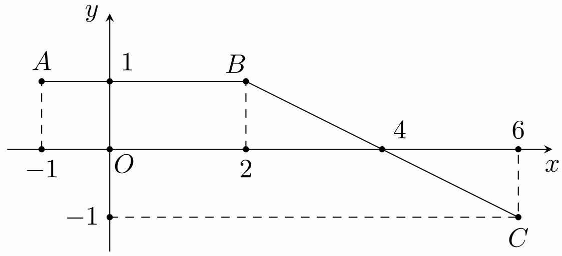
Theo giải thiết, ta có $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ nên $f(0)=0$.
Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{4}{3}$.
Do đó, số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)+4=0$ đúng bằng số giao điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{4}{3}$ (song song với trục hoành Ox).

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta kết luận số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là 2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 41.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng
(A) 10. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng AB có phương trình $y = 1$ và đường thẳng BC đi qua hai điểm $B(2; 1)$, $C(6; -1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-2}{6-2} = \dfrac{y-1}{-1-1} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Suy ra hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + 2 & \text{nếu } 2 < x \leq 6. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(6) - F(-1) + F(4) - F(-1) \\ &= F(4) + F(6) + 2 \qquad (1). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{2} 1\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)\mathrm{d}x \\ &= 6 + 1 + 0 = 7 \qquad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $F(4) + F(6) + 2 = 7 \Rightarrow F(4) + F(6) = 5$.
Vậy $F(4) + F(6) = 5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 3$ và $|z - w| = 3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 1 - i| + |w + 2 - 5i|$ bằng
(A) $5 - 3\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{29} - \sqrt{2}$. (C) $\sqrt{17}$. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} |z| = |w| = 3 \\ |z - w| = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z}{w}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z}{w} - 1\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{|w|} = \sqrt{2}. \end{cases} \qquad (*)$

Đặt $\dfrac{z}{w} = a + bi \, (a, b \in \mathbb{R})$.

Từ $(*)$, ta có

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\(a-1)^2+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\a^2-2a+1+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=1\\a=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=iw\\z=-iw.\end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $z=iw$, ta có

$$\begin{aligned}P&=|z-1-i|+|w+2-5i|\\&=|iw-1-i|+|w+2-5i|\\&=|-w-i+1|+|w+2-5i|\\&\geq|3-6i|=3\sqrt{5}\\\Rightarrow P&\geq 3\sqrt{5}.\end{aligned}$$

- Trường hợp 2: $z=-iw$, ta có

$$\begin{aligned}P&=|z-1-i|+|w+2-5i|\\&=|-iw-1-i|+|w+2-5i|\\&=|-w+i-1|+|w+2-5i|\\&\geq|1-4i|=\sqrt{17}\\\Rightarrow P&\geq\sqrt{17}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-w+i-1=t(w+2-5i),\ t\geq 0\\|w|=3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+i-w=-t(-2+5i-w),\ t\geq 0\\|w|=3\end{cases}\quad(**).$$

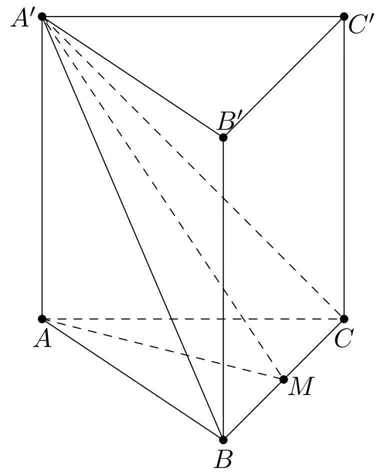
Gọi điểm biểm diễn của w, $-1+i$, $-2+5i$ lần lượt là M, $A(-1;1)$, $B(-2;5)$.
Từ $(**)$, suy ra $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ là hai véc-tơ ngược hướng và M thuộc đường tròn (C) tâm $O(0;0)$, bán kính $R=3$.
Ta có $OA=\sqrt{2}<R$, $OB=\sqrt{29}>R$ nên A nằm trong (C), B nằm ngoài (C). Do đó luôn tồn tại M là giao điểm của đoạn AB với (C), tức là luôn tồn tại w và $z=-iw$ để có đẳng thức $P=\sqrt{17}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$. (B) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}a^3$. (D) $8\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ (vì $\triangle ABC$ đều). (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'MA) \Rightarrow BC \perp A'M$. (2)

Mặt khác $(A'BC) \cap (ABC) = BC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $((A'BC), (ABC)) = \widehat{A'MA} = 30^\circ$.

Xét $\triangle A'AM$ vuông tại A ta có

$$\tan \widehat{A'MA} = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AA'}{\tan \widehat{A'MA}} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2a\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle ABC$ đều nên $BC = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = 4a$.

Do đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AM \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 4a = 4\sqrt{3}a^2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a \cdot 4\sqrt{3}a^2 = 8\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 6)$ thỏa mãn $4(x-1)\mathrm{e}^x = y(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3)$?

(A) 18. (B) 15. (C) 16. (D) 17.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 4(x-1)\mathrm{e}^x = y(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3) \\ \Leftrightarrow\ & 4(x-1)\mathrm{e}^x - y(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3) = 0. \end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(x) = 4(x-1)\mathrm{e}^x - y(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3)$ liên tục trên $[1; 6]$ có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\mathrm{e}^x + 4(x-1)\mathrm{e}^x - y(\mathrm{e}^x + y - 4x) \\ &= (\mathrm{e}^x + y)(4x - y). \end{aligned}$$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{4}$.

Do $x \in (1; 6)$ nên hàm số $y = f(x)$ sẽ tồn tại điểm cực trị $x = \dfrac{y}{4}$ khi $y \in (4; 24)$.

Từ đó ta có cơ sở chia các trường hợp như sau

- Trường hợp 1: $y \leq 4$.

x	1	6
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(1)$ ↗	$f(6)$

Ta có $\begin{cases} f(1) = -y(\mathrm{e} + y - 5) \\ f(6) = 20\mathrm{e}^6 - y(\mathrm{e}^6 + 6y - 75). \end{cases}$

Điều kiện cần và đủ để tồn tại x là

$$\begin{cases} f(6) > 0 \\ f(1) \cdot f(6) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) < 0 \Leftrightarrow -y(\mathrm{e} + y - 5) < 0 \Leftrightarrow y > 5 - \mathrm{e}.$$

Mà $y \leq 4$ và $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y \in \{3, 4\}$. (1)

- Trường hợp 2: $y \geq 24$.

x	1	6
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$f(1)$ $\searrow$	$f(6)$

Ta có $\begin{cases} f(1) = -y(\mathrm{e} + y - 5) \\ f(6) = 20\mathrm{e}^6 - y(\mathrm{e}^6 + 6y - 75). \end{cases}$
Điều kiện cần và đủ để tồn tại x là

$$\begin{cases} f(6) < 0 \\ f(1) \cdot f(6) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) > 0.$$

Mặt khác ta thấy $-y(\mathrm{e} + y - 5) < 0,\ \forall y \geq 24$ (vô lí) nên loại.

- Trường hợp 3: $4 < y < 24$.

x	1		$\frac{y}{4}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(6)$

Do $f(1) < 0$ nên để tồn tại nghiệm $x \in (1; 6)$ thì $f(6) > 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ 20\mathrm{e}^6 - y(\mathrm{e}^6 + 6y - 75 > 0 \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} -6y^2 - (\mathrm{e}^6 - 75)y + 20\mathrm{e}^6 > 0 \\ y \in \mathbb{N}^*;\ y \in (4; 24) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\ y \in \{5; 6; \ldots; 18\}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $y \in \{3; 4; 5; 6; \ldots; 18\}$.
Vậy có tất cả 16 giá trị nguyên dương y thỏa đề bài.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 4az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $z_1 + z_2 = 4a$ và $z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2$. Xét hệ sau

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4a \\ z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \\ z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{3 + (3 - 8a)i}{1 - 2i} \\ z_2 = \dfrac{(4a - 3) - 3i}{1 - 2i} \\ z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2. \end{cases}$$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Suy ra

$$\begin{aligned}
& (-3-4i)z_1z_2 = (4a-3-3i)(3+3i-8ai) \\
\Leftrightarrow\ & (b^2+2)(-3-4i) = 3(4a-3)+9-24a-9i+(3-8a)(4a-3)i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -3(b^2+2) = -12a \\ -4(b^2+2) = -32a^2+36a-18. \end{cases}
\end{aligned}$$

Từ hệ trên ta có $a \neq 0$, suy ra $\dfrac{4}{3} = \dfrac{16a^2-18a+9}{6a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{9}{8} \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

- Với $a = \dfrac{9}{8}$, suy ra $b^2+2 = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.
- Với $a = \dfrac{1}{2}$, suy ra $b^2+2 = 2 \Leftrightarrow b = 0$.

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $\left\{\left(\dfrac{9}{8};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right);\left(\dfrac{9}{8};-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x) = mx^3+nx^2-x$ với a, b, c, m, $n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{71}{6}$. B. $\dfrac{32}{3}$. C. $\dfrac{16}{3}$. D. $\dfrac{71}{12}$.

Lời giải.

Đặt $h(x) = f(x)-g(x) = ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+3x$. Suy ra

$$h'(x) = 4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3.(1)$$

Vì hàm số $h(x)$ có ba điểm cực trị -1, 2, 3 nên phương trình $h'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt -1, 2 và 3. Suy ra, $h'(x)$ có dạng $h'(x) = r(x+1)(x-2)(x-3)$ (2).

Từ (1), lấy $x = 0$, suy ra $h'(0) = 3$. Do đó, từ (2) suy ra $3 = r\cdot 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $h'(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^{3} |h'(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} |(x+1)(x-2)(x-3)|\,\mathrm{d}x = \frac{71}{12}.$$

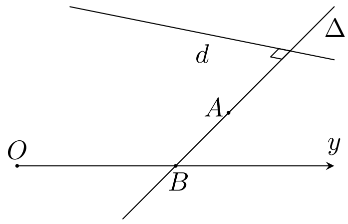
Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3+3t \\ y = 4-2t \\ z = -1+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \\ z = -3+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài, $B(0;b;0)$ là giao điểm của Δ và trục Oy. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;b-1;-3)$.
Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;1)$.
Theo đề bài ta có $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -1+2(b-1)-3=0\Leftrightarrow b=3$.



Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)\Rightarrow\vec{v}=(1;-2;3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=3+3t.\end{cases}$

Khi $t=-2$ thì Δ đi qua điểm $M(-1;5;-3)$.

Hay Δ cũng có phương trình là $\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\\z=-3+3t.\end{cases}$

Chọn đáp án D □

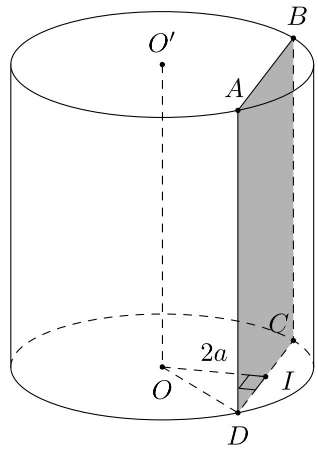
Câu 48. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $4\sqrt{13}\pi a^2$. B. $12\sqrt{13}\pi a^2$. C. $6\sqrt{13}\pi a^2$. D. $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi r và l lần lượt là bán kính đáy là độ dài đường sinh của hình trụ (T).
Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục OO' ta được thiết diện là hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $36a^2$.
Suy ra $S_{ABCD}=CD^2=36a^2\Rightarrow CD=AD=6a=l$.
Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có $\begin{cases}OI\perp CD\\OI\perp AD\end{cases}\Rightarrow OI\perp(ABCD)$.



Suy ra $OI=\mathrm{d}\left(O,(ABCD)\right)=\mathrm{d}\left(OO',(ABCD)\right)=2a$.

Trong $\triangle OID$ vuông tại I, có $ID=\dfrac{CD}{2}=3a$; $OI=2a$.

Suy ra $OD^2=OI^2+ID^2=13a^2\Rightarrow OD=a\sqrt{13}=r$.
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{\text{xq}}=2\pi rl=2\pi\cdot a\sqrt{13}\cdot 6a=12\sqrt{13}\pi a^2$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90^\circ$.

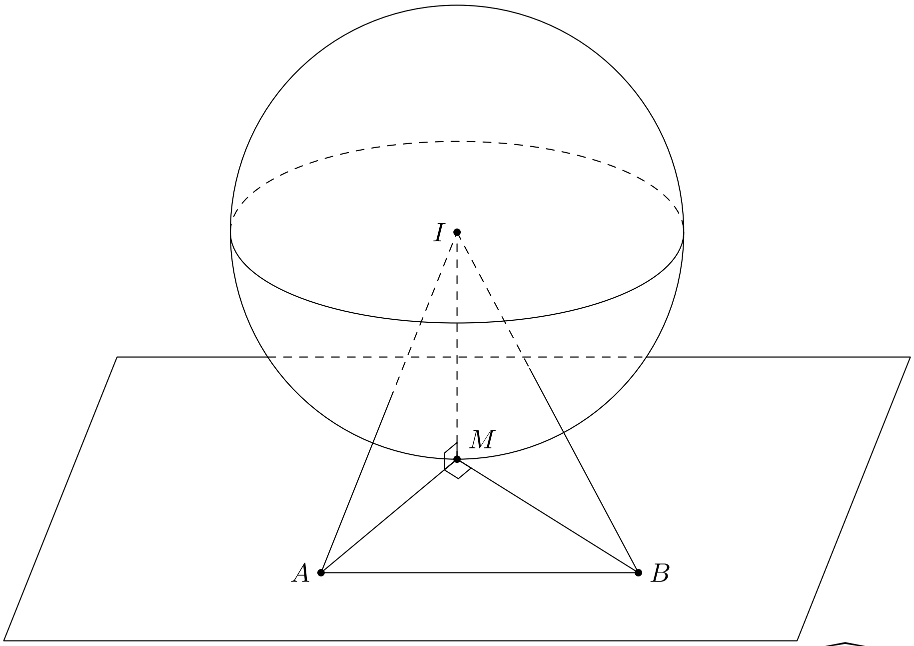
A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R=1$.
Ta có

- $IA^2=(a-3)^2+2^2+1^2=a^2-6a+14$;
- $IB^2=3^2+(b-2)^2+1^2=b^2-4b+14$.

Gọi M là tiếp điểm thỏa mãn bài toán $IM=R=1$.



Vì tiếp diện của mặt cầu (S) tại M cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B nên ta có $\widehat{IMA}=\widehat{IMB}=90^\circ$.
Suy ra

- $MA^2=IA^2-IM^2=a^2-6a+13$;
- $MB^2=IB^2-IM^2=b^2-4b+13$.

Ta lại có $AB^2=a^2+b^2$ và $\widehat{AMB}=90^\circ$ nên $AB^2=MA^2+MB^2$.
hay $a^2+b^2=a^2-6a+13+b^2-4b+13 \Rightarrow 3a+2b=13$.
Mặt khác với a, b là các số nguyên dương cho nên $0<a\le 4$; $0<b\le 5$.
Ta có bảng giá trị của a và b tương ứng như dưới

a	1	2	3	4
b	5	3,5	2	-1
	Lấy	Loại	Lấy	Loại

Thử lại
Trường hợp 1: $A(1;0;0)$ và $B(0;5;0)$.
Gọi (P) là tiếp diện của (S) đi qua A, B cắt Oz tại $C(0;0;c)$, $c\neq 0$ có phương trình

$$(P)\colon \frac{x}{1}+\frac{y}{5}+\frac{z}{c}-1=0.$$

(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $\dfrac{\left|\dfrac{3}{1}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{c^2}}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{144}{25}+\dfrac{24}{5c}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{26}{25}+\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow c=\dfrac{60}{59}$.

Như vậy trường hợp này có 1 điểm M thỏa mãn.
Trường hợp 2: $A(3;0;0)$ và $B(0;2;0)$.
Gọi (P) là tiếp diện của (S) đi qua A, B cắt Oz tại $C(0;0;c)$, $c\neq 0$ có phương trình

$$(P)\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}-1=0.$$

(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $\dfrac{\left|1+1+\dfrac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{c^2}}}=1\Rightarrow 1+\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{13}{36}+\dfrac{1}{c^2}\Rightarrow c=-\dfrac{72}{23}$.

Như vậy trường hợp này có 1 điểm M thỏa mãn.
Vậy có tất cả 2 điểm M thỏa mãn.
Chọn đáp án A

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị.

(A) 27. (B) 31. (C) 28. (D) 30.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m$.
Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.
$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.
Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 = m$ (1).
Đặt $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 \Leftrightarrow h'(x) = 12x^2 - 72x + 60 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	4	$\nearrow$	32	$\searrow$	-96	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
Dựa vào BBT ta có $4 < m < 32$.
Vì m là số nguyên nên $m \in \{5; 6; 7; \ldots; 31\}$ nên có 27 số nguyên.
Chọn đáp án (A) □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 34

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{4}}$ là

(A) $y'=\dfrac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. (B) $y'=\dfrac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. (C) $y'=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. (D) $y'=\dfrac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $y'=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{3}{2}a^3$. (B) $3a^3$. (C) $\dfrac{1}{3}a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy $B=3a^2$ và chiều cao $h=a$ là

$$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot 3a^2\cdot a=a^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Nếu $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ và $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-5$ thì $\displaystyle\int_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1. (B) -11. (C) 1. (D) 11.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6-(-5)=11.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=7^x$ là

(A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (B) $[0;+\infty)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=7^x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng

Ⓐ 3. Ⓑ -1. Ⓒ -5. Ⓓ 1.

Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 6. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = 4\pi R^2$. Ⓑ $S = 16\pi R^2$. Ⓒ $S = \dfrac{4}{3}\pi R^2$. Ⓓ $S = \pi R^2$.

Lời giải.

Diện tích S của mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Với n là số nguyên dương bất kỳ, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{(n-3)!}{n!}$. Ⓑ $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{3!(n-3)!}{n!}$. Ⓒ $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!}$. Ⓓ $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) > 2$ là

Ⓐ $(0;4)$. Ⓑ $\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right)$. Ⓒ $\left(0;\dfrac{9}{2}\right)$. Ⓓ $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(2x) > 2 \Leftrightarrow 2x > 3^2 \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

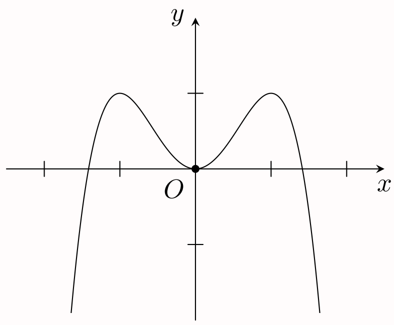
Ⓐ $(1;-3;0)$. Ⓑ $(1;3;0)$. Ⓒ $(-1;3;0)$. Ⓓ $(-1;-3;0)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ là $I(1;-3;0)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10.
Hàm số nào có đồ thị như hình bên?



Ⓐ $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$. Ⓑ $y = x^2 - 2x$.
Ⓒ $y = 2x^3 + x^2$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị nên chỉ có đồ thị $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa mãn.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho hai véc-tơ $\vec{u}(-1;2;0)$ và $\vec{v}(1;-2;3)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}+\vec{v}$ là
Ⓐ $(-2;4;-3)$. Ⓑ $(2;-4;3)$. Ⓒ $(0;0;3)$. Ⓓ $(0;0;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}+\vec{v} = (0;0;3)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Lời giải.

Dựa vào bản biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận véc-tơ $\vec{n} = (2;-1;4)$ làm véc-tơ pháp tuyến là
Ⓐ $2x + y - 4z + 1 = 0$. Ⓑ $2x + y - 4z = 0$.
Ⓒ $2x - y + 4z = 0$. Ⓓ $2x - y + 4z + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua O và và nhận véc-tơ $\vec{n} = (2;-1;4)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $2x - y + 4z = 0$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 14. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao là $h = a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{5}{3}a^3$. (B) $5a^3$. (C) $\dfrac{5}{6}a^3$. (D) $\dfrac{5}{2}a^3$.

Lời giải.

Ta có $V = Bh = 5a^2 \cdot a = 5a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

(A) 4. (B) -3. (C) -4. (D) 3.

Lời giải.

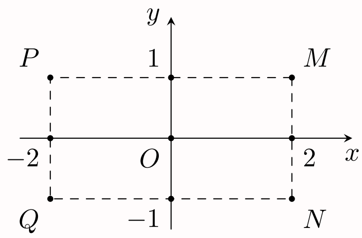
Phần ảo của số phức $z = 3 - 4i$ là -4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16.

Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 - i$?

(A) Điểm Q. (B) Điểm P. (C) Điểm N. (D) Điểm M.



Lời giải.

Điểm $Q(-2, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -2 - i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = 4^x$ là

(A) $y' = x \cdot 4^{x-1}$. (B) $y' = 4^x \ln 4$. (C) $y' = \dfrac{4^x}{\ln 4}$. (D) $y' = 4^x$.

Lời giải.

Ta có $(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Thể tích của khối cầu bán kính $2a$ là

(A) $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. (B) $\dfrac{32}{3}\pi a^3$. (C) $32\pi a^3$. (D) $\dfrac{8}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu bán kính $2a$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-2)$. Ⓑ $(-2;2)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh ℓ. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S_{xq}=\dfrac{4}{3}\pi r\ell$. Ⓑ $S_{xq}=\pi r\ell$. Ⓒ $S_{xq}=4\pi r\ell$. Ⓓ $S_{xq}=2\pi r\ell$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi r\ell$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21. Với mọi số thực dương a, $\log_3(3a)$ bằng

Ⓐ $3\log_3 a$. Ⓑ $1-\log_3 a$. Ⓒ $\log_3 a$. Ⓓ $1+\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a)=\log_3 3+\log_3 a=1+\log_3 a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 22. Nghiệm của phương trình $5^x=2$ là

Ⓐ $x=\log_2 5$. Ⓑ $x=\log_5 2$. Ⓒ $x=\dfrac{2}{5}$. Ⓓ $x=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $5^x=2\Leftrightarrow x=\log_5 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=2+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x+\sin x+C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x+\cos x+C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x-\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=2x+\sin x+C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(2;-3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$.

Ⓒ $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{3}$. Ⓓ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(2;-3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\int f(x)\,dx = x^4 - 2x + C$.
(B) $\int f(x)\,dx = 4x^3 - 2x + C$.
(C) $\int f(x)\,dx = 12x^2 + C$.
(D) $\int f(x)\,dx = x^4 + C$.

Lời giải.

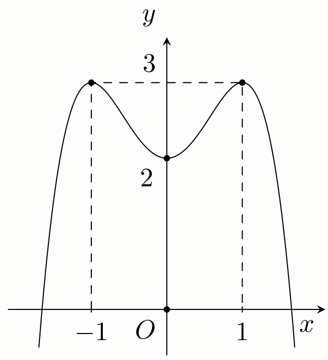
Ta có $\int f(x)\,dx = \int (4x^3 - 2)\,dx = x^4 - 2x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a,\, b,\, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

(A) $x = -1$.
(B) $x = 2$.
(C) $x = 1$.
(D) $x = 0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy, điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 5$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,dx = 2$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ bằng

(A) 10.
(B) -3.
(C) 3.
(D) 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^3 f(x)\,dx = 5 + 2 = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1) = -2$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ bằng

(A) -5.
(B) 1.
(C) -1.
(D) 5.

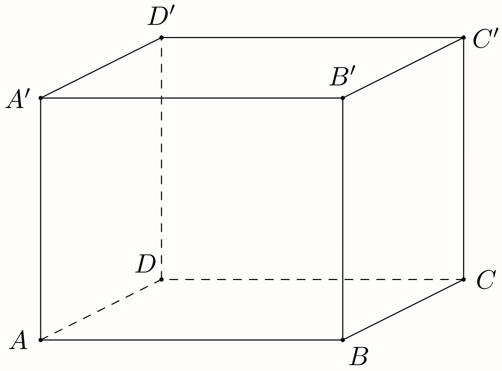
Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = 3 - (-2) = 5$.

Chọn đáp án (D) □

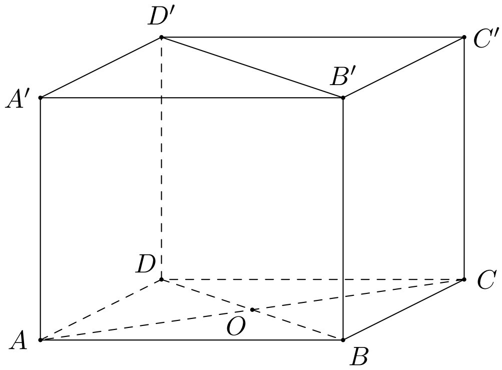
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



Ⓐ $\sqrt{3}a$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Ⓓ $\sqrt{2}a$.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm BD, ta có $CO \perp BD$. (1)
Mặt khác, $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp CO$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $CO \perp (BDD'B')$.
Hay $\mathrm{d}(C,(BDD'B')) = CO$.
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $AC = \sqrt{2}a$.
Do đó $CO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

Ⓐ $2x+y-3z-7=0$. Ⓑ $2x+y-3z+7=0$.
Ⓒ $2x+y+3z-1=0$. Ⓓ $2x+y+3z+1=0$.

Lời giải.

Vì mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng (P) nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;-3)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) là

$$2(x-1)+(y-2)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-7=0.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 31. Với $a>0$, đặt $\log_2(2a)=b$, khi đó $\log_2\left(4a^3\right)$ bằng

Ⓐ $3b+5$. Ⓑ $3b$. Ⓒ $3b+2$. Ⓓ $3b-1$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(2a)=b \Leftrightarrow 1+\log_2 a = b$ suy ra $\log_2 a = b-1$.
Khi đó $\log_2\left(4a^3\right) = \log_2 4 + \log_2 a^3 = 2+3\log_2 a = 2+3(b-1) = 3b-1$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 32. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

(A) $\dfrac{7}{34}$. (B) $\dfrac{9}{34}$. (C) $\dfrac{9}{17}$. (D) $\dfrac{8}{17}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nên $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^2$.
Gọi A là biến cố chọn được hai số chẵn ta có $n(A) = \mathrm{C}_8^2$.
Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{17}^2} = \dfrac{7}{34}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho số phức $z = 4 - 2i$, mô-đun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng
(A) $2\sqrt{10}$. (B) 24. (C) $2\sqrt{6}$. (D) 40.

Lời giải.

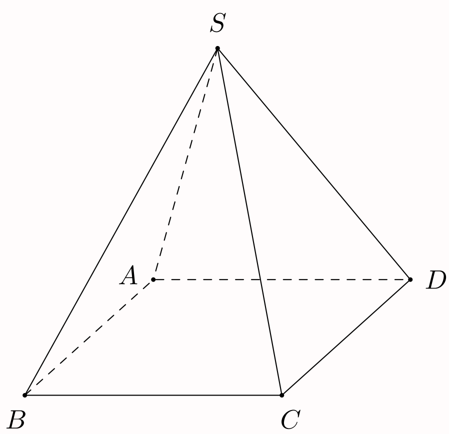
Ta có $z = 4 - 2i \Rightarrow (1+i)\overline{z} = 2 + 6i \Rightarrow |(1+i)\overline{z}| = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 19$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm
(A) $x = -3$. (B) $x = -2$. (C) $x = -4$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 16x = -4x\left(x^2 - 4\right)$.
Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [-4;-1] \\ x = 2 \notin [-4;-1] \\ x = -2 \in [-4;-1]. \end{array}\right.$
Ta có $y(-4) = -147$, $y(-2) = -3$ và $y(-1) = -12$.
Vậy $\max\limits_{[-4;-1]} y = -3$ khi $x = -2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau (*tham khảo hình vẽ bên*). Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng
(A) 60°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 30°.



Lời giải.

Vì hình chóp có tất cả các cạnh bằng nhau nên $\triangle SAB$ đều.
Ta có $CD \parallel AB$ nên $(CD, SB) = (AB, SB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.
Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;1;-1)$ và $N(3;0;2)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

C $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

D $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(2;-1;3)$.
Do đó phương trình đường thẳng MN đi qua M và nhận $\overrightarrow{MN}$ làm véc-tơ chỉ phương là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=x^3+4x$. **B** $y=x^3-4x$. **C** $y=x^4-2x^2$. **D** $y=\dfrac{4x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3+4x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2+4>0$, $\forall x\in\mathscr{D}$.
Suy ra hàm số $y=x^3+4x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Nếu $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ thì $\displaystyle\int\limits_0^2 [2x-f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

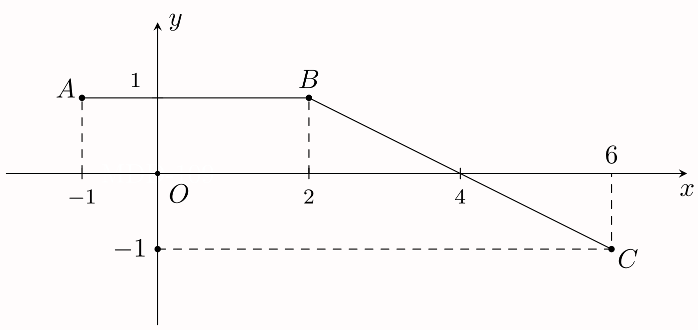
A 2. **B** 8. **C** 6. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 [2x-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 (2x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^2-2=4-2=2.$

Chọn đáp án (A) □

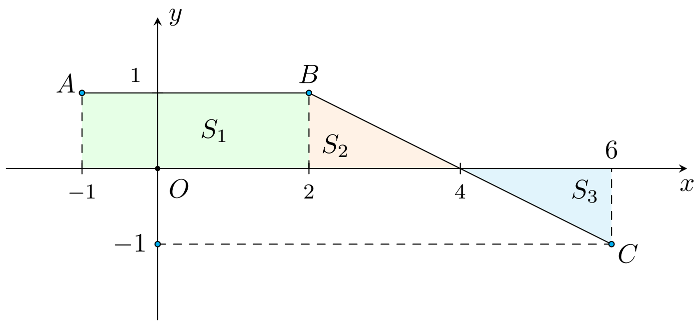
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới



Biết hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng

A 3. **B** 4. **C** 8. **D** 5.

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ ta có

$$\begin{aligned} F(6)-F(-1) &= \int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = S_1+S_2-S_3 \\ &= 3\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 3 \\ &\Rightarrow F(6)=3+F(-1)=1. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4)-F(-1) &= \int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = S_1+S_2 \\ &= 3.1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 4 \\ &\Rightarrow F(4)=4+F(-1)=2. \quad (2) \end{aligned}$$

Lấy (1) cộng (2) ta có $F(4)+F(6)=2+1=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+21)\right]\cdot\left(16-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A 17. B 18. C 16. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+1>0 \\ x+21>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-21.$ $(*)$

Trường hợp 1. Ta có

$$\begin{cases} \log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+21)\geq 0 \\ 16-2^{x-1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x^2+1\right)\geq\log_3(x+21) \\ 2^{x-1}\leq 2^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1\geq x+21 \\ x-1\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-20\geq 0 \\ x\leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -4 \\ x\geq 5 \end{array}\right. \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -4 \\ x=5. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l} -21<x\leq -4 \\ x=5. \end{array}\right.$ (1)

Trường hợp 2. Ta có

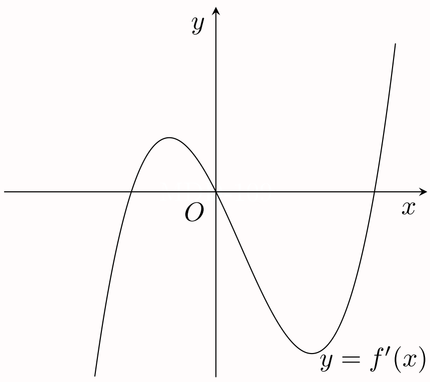
$$\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+21)\le 0\\ 16-2^{x-1}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\le \log_3(x+21)\\ 2^{x-1}\ge 2^4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1\le x+21\\ x-1\ge 4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-20\le 0\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le 5\\ x\ge 5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=5. \text{ (thỏa mãn)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\left[\begin{array}{l}-21<x\le -4\\ x=5.\end{array}\right.$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên ta có $x\in\{-20;-19;\ldots;-5;-4;5\}$.
Vậy tất cả có 18 số nguyên x thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án B □

Câu 41.
Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)-4=0$ là

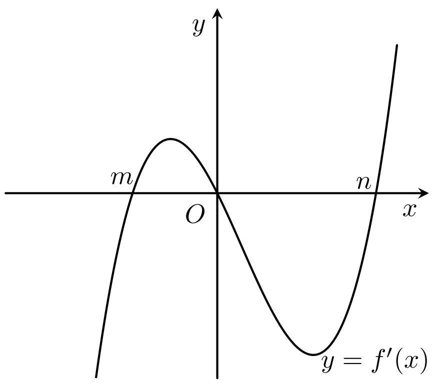
A 1. B 2. C 3. D 4.



Lời giải.

Dễ thấy $f(0)=0$ và hệ số $a>0$.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m<0\\ x=0\\ x=n>0.\end{array}\right.$



Từ đây ta có bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

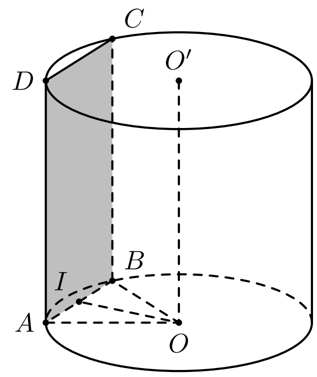
Xét phương trình $3f(x)-4=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$ (1).
Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. (B) $4\sqrt{13}\pi a^2$. (C) $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. (D) $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng song song với trục OO' và cắt hình trụ (T).
Theo giả thiết ta có, mặt phẳng (P) cắt hình trụ (T) theo thiết diện là hình vuông $ABCD$.
Khi đó, diện tích của hình vuông $S_{ABCD} = 16a^2 \Rightarrow AB = CD = 4a$.
Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} OI \perp AB \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.
Do đó $OI = 3a$.
Mặt khác $r = OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}$.
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

$$S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot OA \cdot AD = 2\pi a\sqrt{13} \cdot 4a = 8\sqrt{13}\pi a^2.$$

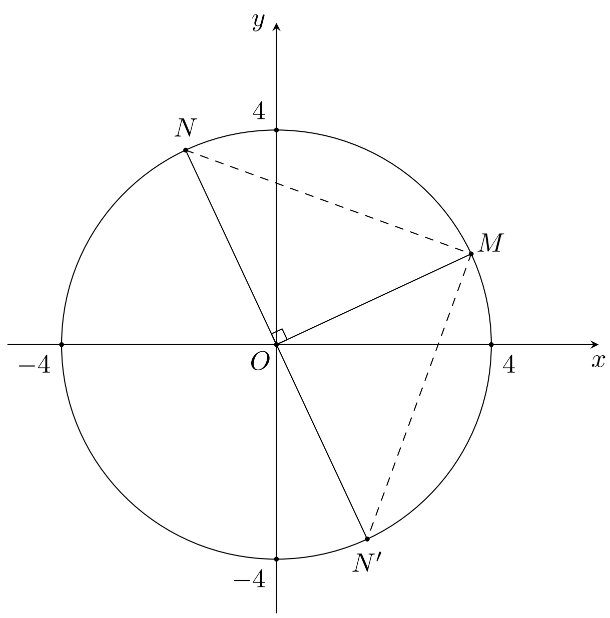
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $|z - w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 1 - i| + |w + 3 - 4i|$ bằng

(A) $\sqrt{41}$. (B) $5 - 2\sqrt{2}$. (C) $5 - \sqrt{2}$. (D) $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi M và N là các điểm biểu diễn số phức z và w.
Theo giả thiết $\begin{cases} |z| = |w| = 4 \\ |z - w| = 4\sqrt{2} \end{cases}$ nên ta suy ra M và N nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 4$ và độ dài $MN = 4\sqrt{2}$.



Suy ra tam giác OMN vuông cân tại $O \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$.
Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta được $M(a; b) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (a; b)$. Suy ra $\overrightarrow{ON} = (b; -a)$ hoặc $\overrightarrow{ON} =$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

$(-b; a)$.
Khi đó $w = -b + ai = iz$ hoặc $w = b - ai = -iz$. Xét hai trường hợp sau

- TH1. Nếu $w = iz$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z-1-i| + |w+3-4i| = |z-1-i| + |iz+3-4i| = |z-1-i| + |-z+3i+4| \\ &\geq |z-1-i-z+3i+4| = |3+2i| = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

- TH2. Nếu $w = -iz$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z-1-i| + |w+3-4i| = |z-1-i| + |-iz+3-4i| = |z-1-i| + |-z-3i-4| \\ &\geq |z-1-i-z-3i-4| = |-5-4i| = \sqrt{41}. \end{aligned}$$

Vậy $\min P = \sqrt{13}$.
Đạt được khi M là giao điểm của đoạn AB và đường tròn (C), với $A(1; 1)$, $B(4; 3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + mx^2 - x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1; 2; 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

(A) $\dfrac{32}{3}$. (B) $\dfrac{71}{9}$. (C) $\dfrac{71}{6}$. (D) $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 3$, $g'(x) = 3mx^2 + 2nx - 1$.
Do hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1; 2; 3 nên ta suy ra $a \neq 0$ và

$$f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + (3b - 3m)x^2 + (2c - 2n)x + 4 = 4a(x+1)(x-2)(x-3).$$

Lại có $f'(0) - g'(0) = 24a = 4 \Rightarrow a = \dfrac{1}{6}$. Suy ra $f'(x) - g'(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$.
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^{3} \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| \mathrm{d}x = \frac{71}{9}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 5)$ thỏa mãn $4(x-1)\,\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right)$?

(A) 14. (B) 12. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $4(x-1)\,\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right) \Leftrightarrow 4(x-1)\,\mathrm{e}^x - y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right) = 0$.
Đặt $f(x) = (4x - 4 - y)\,\mathrm{e}^x - \left(xy^2 - 2x^2y - 3y\right)$.
Ta có $f'(x) = (4x - y)\,\mathrm{e}^x + y(4x - y) = (4x - y)\left(\mathrm{e}^x + y\right)$.
Vì y là số nguyên dương nên $\mathrm{e}^x + y > 0$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{4}$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{y}{4}$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{y}{4}$.
Với $f(1) = -y\mathrm{e} - y^2 + 5y$, $f(5) = (16 - y)\,\mathrm{e}^5 - 5y^2 + 53y$.
Trường hợp 1. Nếu $0 < y \leq 4$ thì $4x - y > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ với mọi $x \in (1; 5)$, ta có bảng biến thiên

x	1		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(5)$

Từ yêu cầu bài toán, ta có

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ye - y^2 + 5y < 0 \\ (16-y)\,e^5 - 5y^2 + 53y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y^2 - \left(e^5 - 53\right)y + 16e^5 > 0 \\ -y\,(e + y - 5) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -33,33120491 < y < 14,24857309 \\ y > 5 - e \end{cases} \Leftrightarrow 5 - e < y < 14,24857309.$$

Suy ra $5 - e < y \leq 4$. Mà y nguyên dương nên $y \in \{3; 4\}$. Có 2 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

Trường hợp 2. Nếu $4 < y < 20$ thì $1 < \dfrac{y}{4} < 5$, ta có bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{y}{4}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(5)$

Do $-y\,(e + y - 5) < 0$, $\forall y \in (4; 20)$ nên để phương trình đã cho có nghiệm $x \in (1; 5)$ thì

$$16e^5 - y\left(e^5 + 5y - 53\right) > 0 \Leftrightarrow -5y^2 - \left(e^5 - 53\right)y + 16e^5 > 0 \Leftrightarrow -33,33120491 < y < 14,24857309.$$

Suy ra $4 < y \leq 14,24857309$. Mà y nguyên dương nên $y \in \{5; 6; 7; \ldots; 14\}$. Có 10 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

Trường hợp 3. Nếu $y \geq 20$ thì $\dfrac{y}{4} \geq 5$, ta có bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{y}{4}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{y}{4}\right)$

Do $f(1) = -y\,(e + y - 5) < 0$, $\forall y \geq 20$ nên phương trình đã cho không có nghiệm $x \in (1; 5)$.

Vậy kết hợp 3 trường hợp trên ta có 12 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(3; 1; 1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t. \\ z = 1 + t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Gọi $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\,(0; b; 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3; b-1; -1) \\ \vec{u}_d = (1; 2; 1). \end{cases}$

Ta có $\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (-3)\cdot 1 + (b-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 2b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 3$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; -1) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$.
Xét điểm $M\,(-3; 5; -1)$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-6; 4; -2)$ và $\overrightarrow{BM} = (-3; 2; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM}$, hay ba điểm A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow M \in \Delta$.
Đường thẳng Δ đi qua điểm M, nhận $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

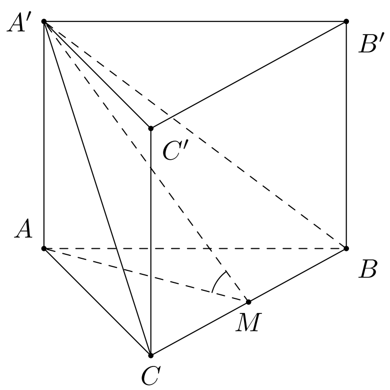
$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $64\sqrt{3}a^3$. (B) $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. (D) $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $AM \perp BC$ và $A'M \perp BC$.
Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\widehat{A'MA} = 30°$.
Tam giác $A'MA$ vuông tại A có $AM = AA' \cdot \cot 30° = 4a\sqrt{3}$.
Do tam giác ABC đều nên

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = 8a.$$

Khi đó diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{64a^2\sqrt{3}}{4} = 16a^2\sqrt{3}$.
Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = 4a \cdot 16a^2\sqrt{3} = 64a^3\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 4az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Trường hợp 1.

Nếu hai nghiệm z_1, z_2 là hai số thực thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$ thì ta có $z_1 = 3$ và $z_2 = \dfrac{3}{2}$.

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -4a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = \dfrac{9}{2} \\ b^2 + 2 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{8} \\ b = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}. \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số thực $(a; b)$ thỏa mãn đề bài là $\left(-\dfrac{9}{8}; \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$ và $\left(-\dfrac{9}{8}; -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$.

Trường hợp 2.

Nếu hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$ thì ta đặt $z_1 = x + yi$ và $z_2 = x - yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} & (x + yi) + 2i(x - yi) = 3 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (x + 2y) + (2x + y)i = 3 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -4a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy có 1 cặp số thực $(a; b)$ thỏa mãn đề bài là $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Vậy có 3 cặp số thực $(a; b)$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3 - m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. B. 27. C. 26. D. 28.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m$.

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 = m$. (1)

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt dương.

Đặt $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3$, ta có $h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

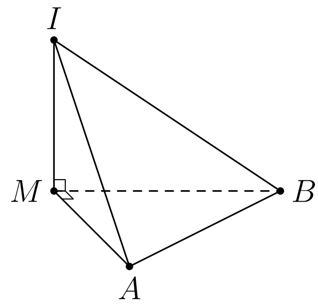
x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	31	$\searrow$	-97	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = h(x)$ và đường thẳng $y = m$.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt dương khi và chỉ khi $m \in (3; 31)$.
Kết hợp giả thiết m nguyên ta được $m \in \{4; 5; 6; \ldots; 30\}$.
Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại điểm M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.



(S) có tâm $I(2; 3; 1)$, bán kính $R = 1$.
Do mặt phẳng (MAB) (M không trùng với A và B vì $\mathrm{d}(I, Ox) > 1$, $\mathrm{d}(I, Oy) > 1$) là tiếp diện của (S) tại $M \Rightarrow IM \perp (MAB)$.
Ta có $IA^2 = (a-2)^2 + 10$; $IB^2 = (b-3)^2 + 5$
$\Rightarrow MA^2 = (a-2)^2 + 9$; $MB^2 = (b-3)^2 + 4$.
Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + 9 + (b-3)^2 + 4 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a + 3b = 13.$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $\left[\begin{array}{l} a = 5,\ b = 1 \\ a = 2,\ b = 3 \end{array}\right.$. Suy ra có hai cặp điểm A, B.

Thử lại

Trường hợp 1: $A(5; 0; 0)$ và $B(0; 1; 0)$. Gọi (P) là tiếp diện của (S) đi qua A, B.

- Trường hợp (P) cắt Oz tại $C(0; 0; c)$, $c \neq 0$, suy ra (P) có phương trình
$$(P)\colon \frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$
(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên
$$\frac{\left|\frac{2}{5} + \frac{3}{1} + \frac{1}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{25} + 1 + \frac{1}{c^2}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{144}{25} + \frac{24}{5c} + \frac{1}{c^2} = \frac{26}{25} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c = -\frac{60}{59}.$$
Như vậy trường hợp này có 1 điểm M thỏa mãn.

- Trường hợp (P) không cắt Oz, suy ra $(P) \parallel Oz$ nên (P) có một véc-tơ pháp tuyến
$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{j}\right] = (1; 5; 0).$$
Phương trình $(P)\colon x + 5y - 5 = 0$. Khi đó
$$\mathrm{d}(I, (P)) = \frac{|2 + 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{6\sqrt{26}}{13} \neq 1 \text{ (loại)}.$$
Vậy trường hợp 1 có một điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $A(2; 0; 0)$ và $B(0; 3; 0)$.
Tính toán tương tự, ta cũng có một điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy có tất cả 2 điểm M thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR

Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 35

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021

Môn: Toán

Năm học: 2020 – 2021

Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f'(x) < 0$, với mọi $x \in (-\infty; -1)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 2; -5)$ và $\vec{v} = (0; -2; 3)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

A. $(1; -4; 8)$. B. $(-1; 0; -2)$. C. $(-1; 4; -8)$. D. $(1; 0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (-1; 0; -2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

A. $(3; +\infty)$. B. $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. D. $(0; 3)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$3x > 2^3 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Với mọi số thực a dương, $\log_2(2a)$ bằng

A. $1 - \log_2 a$. B. $1 + \log_2 a$. C. $2\log_2 a$. D. $\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(2a) = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A -1. **B** 1. **C** 7. **D** 12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 2$, công thức nào sau đây đúng?

A $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!}$. **B** $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{(n-2)!}{n!}$. **C** $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!}$. **D** $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{2!\,(n-2)!}{n!}$.

Lời giải.

Công thức đúng là $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A $y = 1$. **B** $y = -1$. **C** $y = 2$. **D** $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình là $y = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, số điểm cực trị của hàm số là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1;2]$

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

thỏa mãn $F(1) = -1$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. B. -2. C. 2. D. -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = 3 - (-1) = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận véc-tơ $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

A. $x + 2y - 3z + 1 = 0$.
B. $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
C. $x - 2y + 3z = 0$.
D. $x + 2y - 3z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $O(0; 0; 0)$ và nhận $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $x + 2y - 3z = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình món đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S_{xq} = 2\pi rl$. B. $S_{xq} = \dfrac{4}{3}\pi rl$. C. $S_{xq} = \pi rl$. D. $S_{xq} = 4\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón được tính theo công thức là $S_{xq} = \pi rl$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Phần ảo của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

A. 2. B. 3. C. -2. D. -3.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 2i$ có phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Thể tích của khối cầu bán kính $4a$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. B. $\dfrac{256}{3}\pi a^3$. C. $64\pi a^3$. D. $\dfrac{64}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu bán kính $4a$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (4a)^3 = \dfrac{256}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1; 0; 2)$. B. $(1; 0; 2)$. C. $(1; 0; -2)$. D. $(-1; 0; -2)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ có tọa độ tâm là $(1; 0; -2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 2a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2}{3}a^3$. B. a^3. C. $\dfrac{1}{3}a^3$. D. $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = Bh = 2a^2 \cdot a = 2a^3$.
Chọn đáp án D

Câu 16. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$?

A. Điểm $N(1;0)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. D. Điểm $M(1;1)$.

Lời giải.

Thay $x = 1$ vào hàm số ta được $y = 1$.
Vậy điểm $M(1;1)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$.
Chọn đáp án D

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (2;3;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+3}{-5}$. B. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

C. $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{3}$. D. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{5}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (2;3;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$.
Chọn đáp án B

Câu 18. Nghiệm của phương trình $7^x = 2$ là

A. $x = \log_2 7$. B. $x = \log_7 2$. C. $x = \dfrac{2}{7}$. D. $x = \sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $7^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_7 2$.
Chọn đáp án B

Câu 19. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-1)$ là

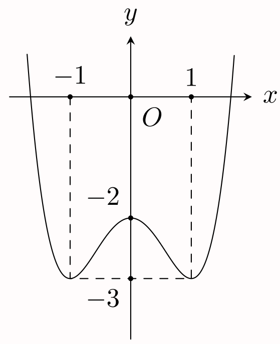
A. $(-\infty;1]$. B. $[1;+\infty)$. C. $(-\infty;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Vậy tập xác định của hàm số là $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án D

Câu 20.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a,\, b,\, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = 1 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \sin x + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \cos x + C$. Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 22. Cho hai số phức $z = 2 + 3i$ và $w = 1 - i$. Số phức $z - w$ bằng

Ⓐ $1 + 4i$. Ⓑ $-1 - 4i$. Ⓒ $3 + 2i$. Ⓓ $5 + i$.

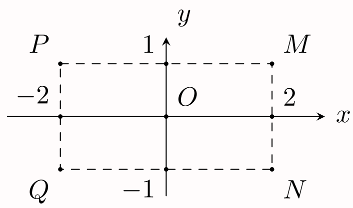
Lời giải.

Ta có $z - w = (2 + 3i) - (1 - i) = 1 + 4i$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23.

Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - i$?



Ⓐ Điểm P. Ⓑ Điểm Q. Ⓒ Điểm M. Ⓓ Điểm N.

Lời giải.

Số phức $z = 2 - i$ được biểu diễn bởi điểm $N(2; -1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là

Ⓐ $y' = 6^x \ln 6$. Ⓑ $y' = x6^{x-1}$. Ⓒ $y' = 6^x$. Ⓓ $y' = \dfrac{6^x}{\ln 6}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là $y' = 6^x \ln 6$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - x + C$.

Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 - x + C$.

Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(4x^3 - 1\right)\,\mathrm{d}x = x^4 - x + C.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 26. Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối chóp đã cho được tính bởi công thức nào dưới đây?

Ⓐ $V = \frac{4}{3}Bh$.

Ⓑ $V = Bh$.

Ⓒ $V = \frac{1}{3}Bh$.

Ⓓ $V = 3Bh$.

Lời giải.

Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h được tính bởi công thức $V = \frac{1}{3}Bh$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27.

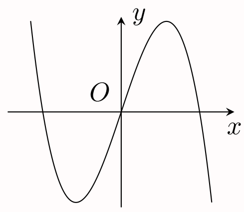
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

Ⓐ $y = -x^3 + 3x$.

Ⓑ $y = x^4 - x^2$.

Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

Ⓓ $y = x^2 + x$.



Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a < 0$.

Suy ra đó là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 5$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

Ⓐ -3.

Ⓑ $\frac{2}{5}$.

Ⓒ $\frac{5}{2}$.

Ⓓ 3.

Lời giải.

Công sai của cấp số cộng đã cho là $d = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(4;2;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Ⓑ $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Ⓓ $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{MN}=(3;2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trên đoạn $[1;4]$, hàm số $y=x^4-8x^2+19$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x=2$. (B) $x=1$. (C) $x=3$. (D) $x=4$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^4-8x^2+19$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.
Ta có $y'=4x^3-16x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;4]\\ x=-2\notin[1;4]\\ x=2\in[1;4].\end{array}\right.$$

Ta tính được $y(1)=12$, $y(2)=3$, $y(4)=147$.
Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;4]$ là $\min\limits_{x\in[1;4]} y=3$ tại điểm $x=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=x^4-x^2$. (B) $y=x^3+3x$. (C) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. (D) $y=x^3-3x$.

Lời giải.

- Hàm số $y=x^4-x^2$ luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có tập xác định khác $\mathbb{R}$ nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y=x^3-3x$ có $y'=3x^2-3$, $y'=0$ có hai nghiệm $x=\pm1$ và đổi dấu hai lần nên cũng không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y=x^3+3x$ có $y'=3x^2+3>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ thì $\displaystyle\int_0^2 [2x-f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 7. (B) -2. (C) 10. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [2x-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4-3=1.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Với $a>0$, đặt $\log_3(3a)=b$, khi đó $\log_3(9a^3)$ bằng

(A) $3b$. (B) $3b-1$. (C) $3b+5$. (D) $3b+2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a) = b \Leftrightarrow \log_3 a = b - 1$.
Suy ra $\log_3(9a^3) = \log_3 9 + \log_3 a^3 = 2 + 3\log_3 a = 2 + 3(b-1) = 3b - 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho số phức $z = 2 - i$, mô-đun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

(A) $\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) 6. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $(1+i)\overline{z} = (1+i)(2+i) = 1 + 3i$.
Vậy $|z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
Chọn đáp án (A) □

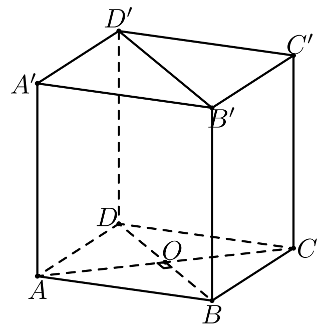
Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

(A) $\sqrt{2}a$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. (C) $\sqrt{3}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên suy ra $AC = a\sqrt{2}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có
$\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AO \perp (BDD'B')$.
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ là

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

(A) $x + 2y + 3z - 5 = 0$. (B) $x + 2y + 3z + 5 = 0$.
(C) $x + 2y - 3z - 7 = 0$. (D) $x + 2y - 3z + 7 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (P) có phương trình dạng $x + 2y - 3z + C = 0$ $(C \neq 1)$.
Vì mặt phẳng này đi qua A nên ta có $1 - 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + C = 0 \Rightarrow C = 7$.
Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $x + 2y - 3z + 7 = 0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số lẻ bằng

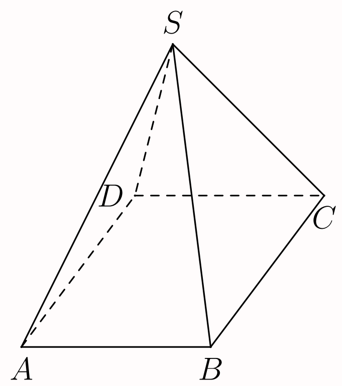
(A) $\dfrac{9}{34}$. (B) $\dfrac{8}{17}$. (C) $\dfrac{7}{34}$. (D) $\dfrac{9}{17}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu, ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^2 = 136$.
Gọi biến cố A: "Chọn được hai số lẻ".
Trong 17 số nguyên dương đầu tiên có 9 số lẻ nên $n(A) = \mathrm{C}_9^2 = 36$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{36}{136} = \dfrac{9}{34}$.

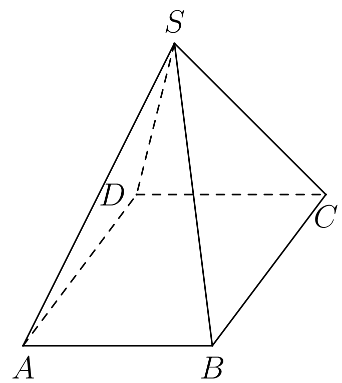
Chọn đáp án (A) □

Câu 38.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng
(A) 90°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 45°.



Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SA và CD là góc giữa SA và AB. Vì hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên SAB là tam giác đều. Vậy góc giữa SA và AB bằng 60°.



Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1) - \log_2(x+21)\right](16 - 2^{x-1}) \geq 0$?
(A) Vô số . (B) 17. (C) 16. (D) 18.

Lời giải.

Điều kiện $x > -21$.

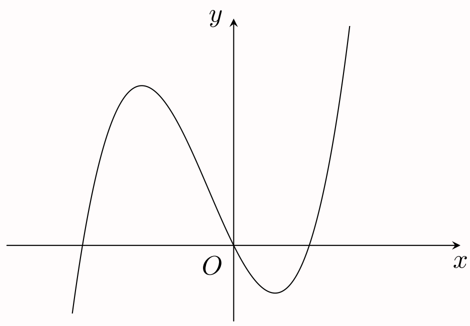
$$\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+21)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+21)=0\\ 16-2^{x-1}=0\\ \begin{cases}\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+21)>0\\ 16-2^{x-1}>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+21)<0\\ 16-2^{x-1}<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+1=x+21\\ 16=2^{x-1}\\ \begin{cases}x^2+1>x+21\\ 4>x-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+1<x+21\\ 4<x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-20=0\\ 4=x-1\\ \begin{cases}x^2-x-20>0\\ x<5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-20<0\\ x>5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4 \text{ hoặc } x=5\\ x<-4.\end{array}\right.$$

So với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-21;-4]\cup\{5\}$.
Vì x là số nguyên thuộc S nên $x\in\{-20;-19;\ldots;-4;5\}$.
Vậy có 18 số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án D □

Câu 40.
Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm phân biệt của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A 2. B 3. C 1. D 4.



Lời giải.

Đặt $h(x)=2f(x)-3$, ta có $h'(x)=2f'(x)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\ x=0\\ x=x_1\end{array}\right.\ \left(\text{dựa vào đồ thị đã cho với } x_0<0<x_1\right).$$

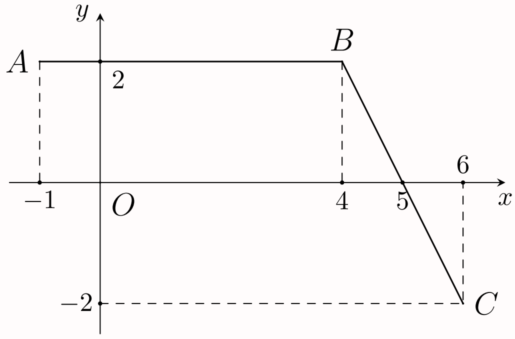
Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_0		0		x_1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	h_0	↗	-3	↘	h_1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $2f(x)-3=0$ có 2 có hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án A □

Câu 41.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

A. 23. B. 21. C. 25. D. 19.



Lời giải.

Đường thẳng đi qua hai điểm $B(4; 2)$ và $C(6; -2)$ có phương trình $y = -2x + 10$. Do đó

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } -1 \le x \le 4 \\ -2x + 10 & \text{khi } 4 < x \le 6. \end{cases}$$

Khi đó

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2x + C_1 & \text{khi } -1 \le x \le 4 \\ -x^2 + 10x + C_2 & \text{khi } 4 < x \le 6. \end{cases}$$

Vì $F(-1) = -1$ nên ta có $2 \cdot (-1) + C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 1$.
Do hàm số $F(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ nên

$$\lim_{x \to 4^+} F(x) = \lim_{x \to 4^-} F(x) = F(4) \Leftrightarrow 24 + C_2 = 8 + C_1 \Leftrightarrow C_2 = -15.$$

Do đó $F(x) = \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } -1 \le x \le 4 \\ -x^2 + 10x - 15 & \text{khi } 4 < x \le 6. \end{cases}$

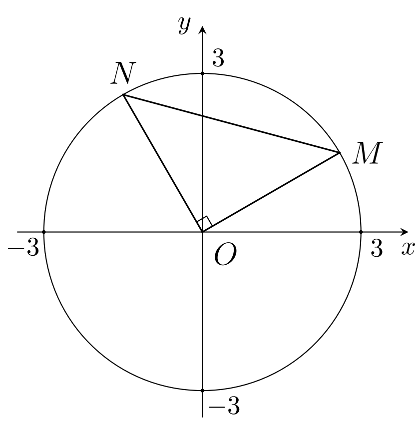
Suy ra $F(5) + F(6) = 10 + 9 = 19$.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 3$ và $|z - w| = 3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1 + i| + |w - 2 + 5i|$ bằng

A. $5 - 3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{17}$. C. $\sqrt{29} - \sqrt{2}$. D. 5.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z và w. Theo giả thiết $|z| = |w| = 3$ và $|z - w| = 3\sqrt{2}$ nên ta có M, N thuộc đường tròn (C) có tâm O, bán kính $R = 3$ và $MN = 3\sqrt{2}$.
Xét tam giác OMN có $OM^2 + ON^2 = MN^2$, do đó $\triangle OMN$ vuông cân tại O, suy ra $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$.
Đặt $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$, suy ra $M(a; b) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (a; b) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = (b; -a)$ hoặc $\overrightarrow{ON} = (-b; a)$.



TH1. Với $\overrightarrow{ON} = (b; -a) \Rightarrow w = b - ai = -iz$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z + 1 + i| + |w - 2 + 5i| = |z + 1 + i| + |-iz - 2 + 5i| \\ &= |z + 1 + i| + |-z + 5 + 2i| \\ &\ge |z + 1 + i - z + 5 + 2i| = |6 + 3i| = 3\sqrt{5}. \quad (1) \end{aligned}$$

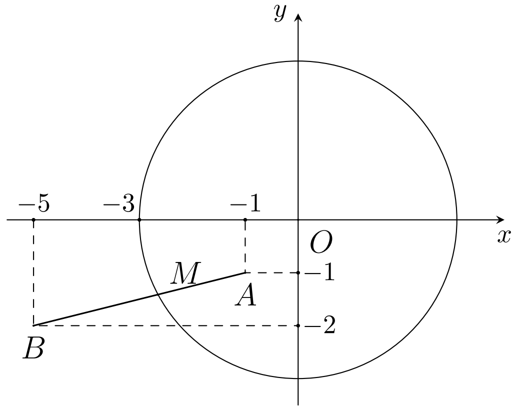
TH2. Với $\overrightarrow{ON} = (-b; a) \Rightarrow w = -b + ai = iz$

$$\begin{aligned} P &= |z+1+i| + |w-2+5i| = |z+1+i| + |iz-2+5i| \\ &= |z+1+i| + |z+5+2i| \\ &= |z+1+i| + |-z-5-2i| \\ &\geq |z+1+i-z-5-2i| = |-4-i| = \sqrt{17}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$.
Gọi $A(-1; -1)$, $B(-5; -2)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= |z+1+i| + |z+5+2i| \\ &= MA + MB \\ &\geq AB \end{aligned}$$

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $AB = \sqrt{17}$ khi M là giao điểm của AB và đường tròn (C) (với M nằm giữa A và B).



Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.
Giả sử đường thẳng cần tìm cắt trục Oy tại điểm $B(0; b; 0)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; b-1; -1)$.
Do đường thẳng cần tìm vuông góc với d nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2(b-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.
Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -1)$.
Do đó đường thẳng cần tìm có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Dễ thấy đường thẳng trên đi qua điểm $C(-1; 3; -1)$ nên phương trình đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 6)$ thỏa mãn

$$4(x-1)\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy + 2x^2 - 3\right)?$$

(A) 15.
(B) 18.
(C) 17.
(D) 16.

Lời giải.

Ta có $4(x-1)\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right) \Leftrightarrow 4(x-1)\mathrm{e}^x - y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right) = 0$.
Xét $f(x) = 4(x-1)\mathrm{e}^x - y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right)$ liên tục trên khoảng $(1;6)$.
Ta có $f'(x) = 4\mathrm{e}^x + 4(x-1)\mathrm{e}^x - y\left(\mathrm{e}^x + y - 4x\right) = 4x\mathrm{e}^x - y\left(\mathrm{e}^x + y - 4x\right) = \left(\mathrm{e}^x + y\right)(4x - y)$.
Trường hợp 1. Với $x \in (1;6)$ và $0 < y \leq 4 \Rightarrow 4x - y > 0$, ta có bảng biến thiên sau

x	1		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(6)$

Với $f(1) = -y(\mathrm{e} + y - 5)$ và $f(6) = 20\mathrm{e}^6 - y\left(\mathrm{e}^6 + 6y - 75\right) = (20 - y)\mathrm{e}^6 + y(75 - 6y) > 0$.
Suy ra yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow -y(\mathrm{e} + y - 5) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e} + y - 5 > 0 \Leftrightarrow y > 5 - \mathrm{e}\,(\approx 2{,}28)$$

Do $y \in \mathbb{N}^*, y \leq 4$ nên $y \in \{3;4\}$.
Trường hợp 2. Với $x \in (1;6)$ và $y \geq 24 \Rightarrow 4x - y < 0$, ta có bảng biến thiên sau

x	1		6
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(6)$

Ta thấy $f(1) = -y(\mathrm{e} + y - 5) < 0, y \in \mathbb{N}^*, y \geq 24$.
Suy ra yêu cầu bài toán không được thỏa mãn.
Trường hợp 3. Với $x \in (1;6)$ và $4 < y < 24$, ta có bảng biến thiên sau

x	1		$\frac{y}{4}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(6)$

Do $y > 4$ thì $f(1) < 0$ nên để tồn tại nghiệm $x \in (1;6)$ thì

$$\begin{aligned} & f(6) > 0 \Leftrightarrow 20\mathrm{e}^6 - y\left(\mathrm{e}^6 + 6y - 75\right) > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -6y^2 - \left(\mathrm{e}^6 - 75\right)y + 20\mathrm{e}^6 > 0 \\ y \in \mathbb{N}^*; y \in (4;24) \end{cases} \Leftrightarrow y \in \{5;6;\ldots;18\}. \end{aligned}$$

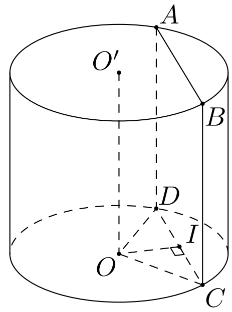
Từ 3 trường hợp trên ta có $y \in \{3;4;5;6;\ldots;18\}$.
Vậy có tất cả 16 giá trị y nguyên dương thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 45. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

(A) $8\sqrt{2}\pi a^2$. (B) $16\sqrt{2}\pi a^2$. (C) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. (D) $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi thiết diện là hình vuông $ABCD$ và O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và I là trung điểm CD.



Theo bài ra, ta có

- $OI = 2a$.
- $S_{ABCD} = CD^2 = 16a^2 \Leftrightarrow CD = 4a \Rightarrow IC = ID = \dfrac{1}{2}CD = 2a$.
- $h = OO' = AD = CD = 4a$.

Khi đó $R = OD = \sqrt{OI^2 + IC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}a \cdot 4a = 16\sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực (a, b) sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thoả mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Vì phương trình $z^2 + 2az + b^2 + 2 = 0$ có các hệ số a, b là các tham số thực nên ta xét các trường hợp sau:

- TH1: z_1, z_2 là các số thực, nên

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{9}{2} \\ z_1 z_2 = \dfrac{9}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2az + b^2 + 2 = 0$

nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -2a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2. \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} -2a = \dfrac{9}{2} \\ b^2 + 2 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b^2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$

Suy ra có 2 cặp (a, b) thỏa mãn.

- TH2: z_1, z_2 là các số phức sao cho $z_1 = \overline{z_2}$.

Đặt $z_1 = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 = x - yi$.

Do z_1, z_2 thỏa mãn

$$\begin{aligned} & z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (x + yi) + 2i(x - yi) = 3 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (x + 2y) + i(2x + y) = 3 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Khi đó $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$.
Mà z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2az + b^2 + 2 = 0$ nên theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Suy ra có 1 cặp (a, b) thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3 cặp (a, b) thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A $\dfrac{32}{3}$. B $\dfrac{16}{3}$. C $\dfrac{71}{12}$. D $\dfrac{71}{6}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) - g(x)$, ta có

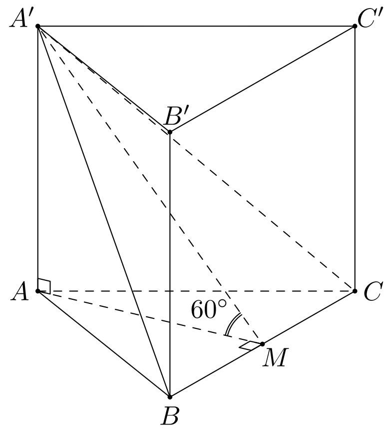
- $$\begin{aligned} y' = f'(x) - g'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 1 - (3mx^2 + 2nx - 2). \\ &= 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 3. \end{aligned}$$
- Vì hàm số có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3 nên
$$\begin{aligned} & 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 3 = 4a(x+1)(x-2)(x-3) \\ \Leftrightarrow\ & 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 3 = 4ax^3 - 16ax^2 + 4ax + 24a. \end{aligned}$$
Suy ra $\begin{cases} 3(b-m) = -16a \\ 2(c-n) = 4a \\ 3 = 24a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(b-m) = -2 \\ 2(c-n) = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$
- Do đó $f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}x + 3$.
- Diện tích hình phẳng cần tìm
$$S = \int_{-1}^{3} |f'(x) - g'(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \right| \mathrm{d}x = \frac{71}{12}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}a^3$. B $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$. C $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}a^3$. D $8\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



- Gọi M là trung điểm BC, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA}$.
- Xét tam giác vuông $A'AM$ có $AM = \dfrac{AA'}{\tan \widehat{A'MA}} = \dfrac{2a}{\tan 60^\circ} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- $\triangle ABC$ đều có trung tuyến $AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $AB = AM : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4a}{3}$.
- $S_{\triangle ABC} = AB^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{4a}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4\sqrt{3}a^2}{9}$.
- $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a \cdot \dfrac{4\sqrt{3}a^2}{9} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. B. 22. C. 26. D. 21.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 - m$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4.$ (1)
Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị dương.
Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ phải có 3 nghiệm dương phân biệt tương đương phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.
Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
Ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48$. Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	0		1		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	4	$\nearrow$	26	$\searrow$	-28	$\nearrow$	$+\infty$

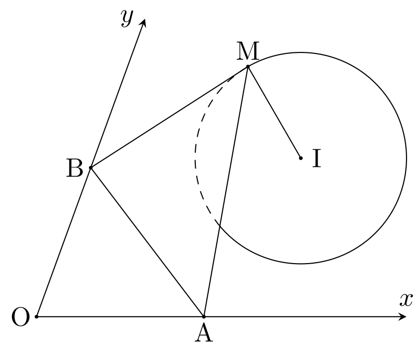
Để phương trình $m = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4$ có 3 nghiệm dương phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $4 < m < 26$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; \ldots; 25\}$.
Vậy có 21 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90°$?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=1$.
Ta có



- $IA^2=(a-2)^2+(-3)^2+1^2=a^2-4a+14$.
- $IB^2=(-2)^2+(b-3)^2+1^2=b^2-6b+14$.

Gọi M là điểm thỏa mãn bài toán thì $IM=R=1$.
Vì tiếp diện của (S) tại M cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B nên $IM\perp(MAB)$, suy ra $IM\perp MA$ và $IM\perp MB$.

- $\triangle IMA$ vuông tại M nên $MA^2=IA^2-IM^2=a^2-4a+13$.
- $\triangle IMB$ vuông tại M nên $MB^2=IB^2-IM^2=b^2-6b+13$.
- $\triangle AMB$ vuông tại M nên

$$AB^2=MA^2+MB^2\Leftrightarrow a^2+b^2=a^2-4a+13+b^2-6b+13\Leftrightarrow 2a+3b=13.$$

Mặt khác a, b là các số nguyên dương nên ta có các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $a=5$, $b=1$. Thử lại $A(5;0;0)$, $B(0;1;0)$.
Nếu mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với Oz thì $(P)\colon x+5y-5=0$.
Khi đó mặt phẳng P không tiếp xúc với mặt cầu (S) có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{12}{\sqrt{26}}>1$.
Gọi (P) là tiếp diện của (S) đi qua A, B cắt Oz tại $C(0;0;c)$, $c\neq0$, có phương trình

$$(P)\colon \frac{x}{5}+y+\frac{z}{c}-1=0.$$

(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$\frac{\left|\dfrac{2}{5}+3-\dfrac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{25}+1+\dfrac{1}{c^2}}}=1\Rightarrow\frac{144}{25}-\frac{24}{5c}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{25}+1+\frac{1}{c^2}\Rightarrow c=\frac{60}{59}.$$

Chú ý rằng qua A, B còn có mặt phẳng (Oxy) cũng tiếp xúc với mặt cầu (S) nhưng tiếp diện này không thỏa mãn bài toán.
Như vậy, trường hợp này có 1 điểm M thỏa mãn.

- **Trường hợp 2.** $a=2$, $b=3$. Thử lại $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$.
Nếu mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với Oz thì $(P)\colon 3x+2y-6=0$.
Khi đó mặt phẳng P không tiếp xúc với mặt cầu (S) có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{6}{\sqrt{13}}>1$.
Gọi (P) là tiếp diện của (S) đi qua A, B cắt Oz tại $C(0;0;c)$, $c\neq0$, có phương trình

$$(P)\colon \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{c}-1=0.$$

(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$\frac{\left|1+1-\frac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{c^2}}}=1 \Rightarrow 1-\frac{2}{c}+\frac{1}{c^2}=\frac{13}{36}+1+\frac{1}{c^2} \Rightarrow c=\frac{72}{23}.$$

Chú ý rằng qua A, B còn có mặt phẳng (Oxy) cũng tiếp xúc với mặt cầu (S) nhưng tiếp diện này không thỏa mãn bài toán.
Như vậy, trường hợp này có 1 điểm M thỏa mãn.

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 36

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2021
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104-2

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận véc-tơ $\vec{n} = (2;3;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

(A) $2x - 3y + 4z + 1 = 0$.
(B) $2x + 3y - 4z + 1 = 0$.
(C) $2x - 3y + 4z = 0$.
(D) $2x + 3y - 4z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{n} = (2;3;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình

$$2x + 3y - 4z = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1.
(B) 1.
(C) 7.
(D) 12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 + 3 = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1) = -1$ và $F(2) = 4$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -5.
(B) 3.
(C) 5.
(D) -3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 4 - (-1) = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (0;-2;3)$ và $\vec{v} = (-1;2;-5)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

(A) $(1;-4;8)$.
(B) $(-1;0;-2)$.
(C) $(-1;4;-8)$.
(D) $(1;0;2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (0 - 1; -2 + 2; 3 - 5) = (-1;0;-2)$.

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(1;0;-2)$. (B) $(-1;0;2)$. (C) $(1;0;2)$. (D) $(-1;0;-2)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$ là $I(-1;0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị là $x=-2$, $x=0$, $x=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $y=-3$. (B) $y=-1$. (C) $y=3$. (D) $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x+1}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+1}=3$.

Do đó đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Phần ảo của số phức $z=4-3i$ bằng

(A) -3. (B) -4. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z=4-3i$ bằng -3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=4x^3-4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=12x^2+C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4x^3-4x+C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^4-4x+C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^4+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\left(4x^3-4\right)\,\mathrm{d}x=x^4-4x+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 4a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $\frac{2}{3}a^3$. Ⓑ $4a^3$. Ⓒ $\frac{4}{3}a^3$. Ⓓ $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Bh = 4a^2 \cdot a = 4a^3$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11. Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối chóp đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $V = 3Bh$. Ⓑ $V = \frac{4}{3}Bh$. Ⓒ $V = Bh$. Ⓓ $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Với mọi số thực a dương, $\log_5(5a)$ bằng

Ⓐ $5\log_5 a$. Ⓑ $1 - \log_5 a$. Ⓒ $1 + \log_5 a$. Ⓓ $\log_5 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(5a) = \log_5 5 + \log_5 a = 1 + \log_5 a$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 1$?

Ⓐ $Q(1;3)$. Ⓑ $M(1;2)$. Ⓒ $N(1;1)$. Ⓓ $P(1;0)$.

Lời giải.

Thay $x = 1$ vào biểu thức hàm số ta được $y = 1$.
Vậy điểm $N(1;1)$ là điểm cần tìm.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 14. Nghiệm của phương trình $7^x = 3$ là

Ⓐ $x = \frac{3}{7}$. Ⓑ $x = \sqrt[3]{7}$. Ⓒ $x = \log_7 3$. Ⓓ $x = \log_3 7$.

Lời giải.

Ta có $7^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_7 3$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15. Thể tích của khối cầu bán kính $2a$ bằng

Ⓐ $8\pi a^3$. Ⓑ $\frac{4}{3}\pi a^3$. Ⓒ $\frac{8}{3}\pi a^3$. Ⓓ $\frac{32}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-2)$ là

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;2)$. Ⓒ $[2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (2;+\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f'(x)>0$ trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 4$, công thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$. Ⓑ $C_n^4 = \dfrac{4!(n-4)!}{n!}$. Ⓒ $C_n^4 = \dfrac{(n-4)!}{n!}$. Ⓓ $C_n^4 = \dfrac{n!}{(n-4)!}$.

Lời giải.

Công thức tổ hợp chập 4 của n là $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;3;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{5}$. Ⓑ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{3}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{-5}$.

Lời giải.

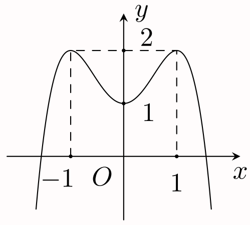
Đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;3;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-5}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a,\, b,\, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A $x = 0$. **B** $x = -1$. **C** $x = 2$. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A 4. **B** -4. **C** $\dfrac{3}{7}$. **D** $\dfrac{7}{3}$.

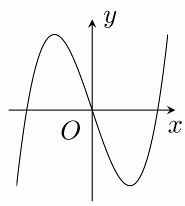
Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có $d = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



A $y = x^3 - 3x$. **B** $y = x^4 + x^2$. **C** $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$. **D** $y = x^2 - x$.

Lời giải.

Đường cong bên là đồ thị hàm số bậc 3. Vậy hàm số có đồ thị bên là $y = x^3 - 3x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - i$. Số phức $z - w$ bằng

A $2 + 3i$. **B** $4 + i$. **C** $-2 - 3i$. **D** $5 - i$.

Lời giải.

Ta có $z - w = 3 + 2i - 1 + i = 2 + 3i$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) > 4$ là

A $(0; 32)$. **B** $\left(0; \dfrac{81}{2}\right)$. **C** $(32; +\infty)$. **D** $\left(\dfrac{81}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(2x) > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x > 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \dfrac{81}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{81}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(\dfrac{81}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh ℓ. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S_{xq} = 4\pi r\ell$. (B) $S_{xq} = \pi r\ell$. (C) $S_{xq} = \dfrac{4}{3}\pi r\ell$. (D) $S_{xq} = 2\pi r\ell$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón được tính theo công thức $S_{xq} = \pi r\ell$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = 3 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x - \sin x + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x + \sin x + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x + \sin x + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

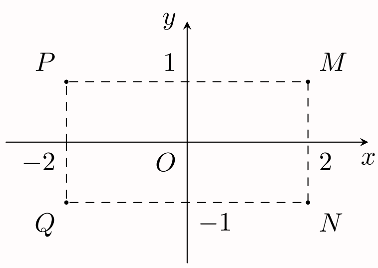
(A) $y' = 5^x$. (B) $y' = \dfrac{5^x}{\ln 5}$. (C) $y' = 5^x \ln 5$. (D) $y' = x5^{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 28.
Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn số phức $z = 2+i$?

(A) Điểm N. (B) Điểm M. (C) Điểm P. (D) Điểm Q.



Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + i$ là điểm có hoành độ bằng 2 và tung độ bằng 1.
Vậy điểm M là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + i$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;1;0)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

(A) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$.
(B) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$.
(C) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$.
(D) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

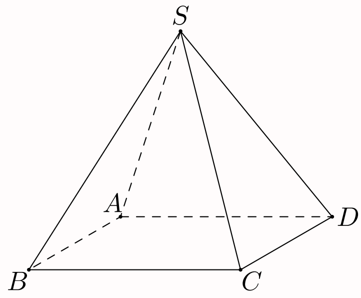
Đường thẳng MN nhận véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (2;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương và đi qua điểm $M(1;1;0)$ nên MN có phương trình là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng SD và AB bằng

(A) $30°$. (B) $90°$. (C) $30°$. (D) $45°$.



Lời giải.

Ta có $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên $SD = CD = SC$, suy ra tam giác SCD là tam giác đều.
Lại có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SD, AB)} = \widehat{(SD, CD)} = \widehat{SDC} = 60°$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho số phức $z = 3 - 2i$, mô-đun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

(A) $\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) 26. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $(1+i)\overline{z} = (1+i)(3+2i) = 1+5i$.
Mô-đun của số phức $1+5i$ là $\sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^3 + 2x$. (B) $y = x^4 - 3x^2$. (C) $y = x^3 - 2x$. (D) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 2x$, hàm số này có $y' = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = x^3 + 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\displaystyle\int_0^2 [4x - f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 14. (B) 5. (C) -2. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [4x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 4x\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2\Big|_0^2 - 3 = 8 - 3 = 5.$

Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 34. Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$, khi đó $\log_3(27a^4)$ bằng

A. $4b + 3$. B. $4b$. C. $4b - 1$. D. $4b + 7$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a) = b \Leftrightarrow \log_3 3 + \log_3 a = b \Leftrightarrow \log_3 a = b - 1$.
Mặt khác $\log_3(27a^4) = \log_3 27 + \log_3 a^4 = 3 + 4\log_3 a = 3 + 4(b-1) = 4b - 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Trên đoạn $[1;4]$, hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 13$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin [1;4] \\ x = 0 \notin [1;4] \\ x = 2 \in [1;4]. \end{array}\right.$

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[1;4]$ và ta tính được $y(1) = -6$; $y(2) = 5$ và $y(4) = -141$.
Vậy trên đoạn $[1;4]$ hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất là 5 tại điểm $x = 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Xác xuất để chọn được hai số lẻ bằng

A. $\dfrac{5}{19}$. B. $\dfrac{4}{19}$. C. $\dfrac{9}{19}$. D. $\dfrac{10}{19}$.

Lời giải.

Trong 19 số nguyên dương đầu tiên từ 1 đến 19 có 10 số lẻ. Số cách chọn 2 số lẻ từ 10 số lẻ đó là C_{10}^2. Số cách chọn ngẫu nhiên hai số từ tập hợp 19 số là C_{19}^2.
Vậy xác suất để chọn được hai số lẻ là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{19}^2} = \dfrac{45}{171} = \dfrac{5}{19}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z+1 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $x + 2y + 3z + 2 = 0$. B. $x - 2y + 3z - 6 = 0$.
C. $x - 2y + 3z + 6 = 0$. D. $x + 2y + 3z - 2 = 0$.

Lời giải.

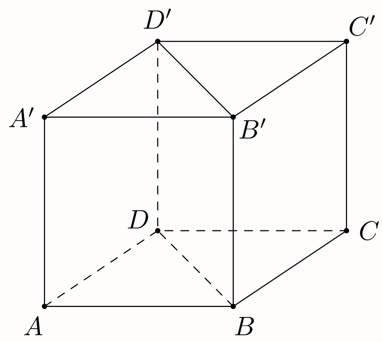
Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

$$(x-1) - 2(y-2) + 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 6 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38.

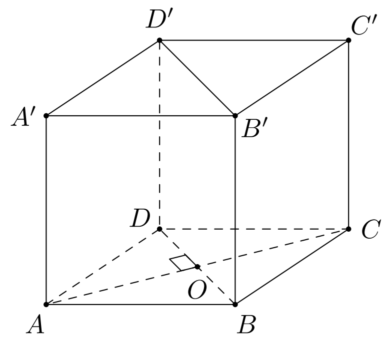
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



Ⓐ $2\sqrt{2}a$. Ⓑ $2\sqrt{3}a$. Ⓒ $\sqrt{2}a$. Ⓓ $\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(BDD'B')) = AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right) \geq 0$?

Ⓐ 27. Ⓑ 26. Ⓒ Vô số. Ⓓ 28.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -31$.
Đặt $f(x) = \left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)$.
Ta có

$$\begin{aligned}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)=0 &\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+1\right)=\log_3(x+31)\\ &\Leftrightarrow x^2+1=x+31\\ &\Leftrightarrow x^2-x-30=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=6 & (\text{thỏa mãn } x>-31)\\ x=-5 & (\text{thỏa mãn } x>-31).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Tiếp đến $32-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=32 \Leftrightarrow x-1=5 \Leftrightarrow x=6$ (thỏa mãn $x>-31$).
Bảng xét dấu của $f(x)$ như sau.

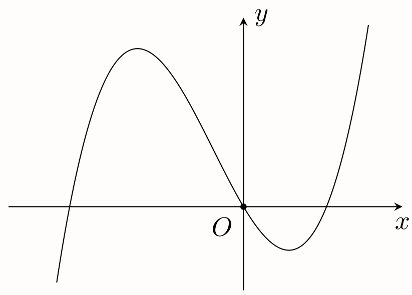
x	-31		-5		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-31;-5]\cup\{6\}$.
Vậy có tất cả 27 số nguyên x thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 40.

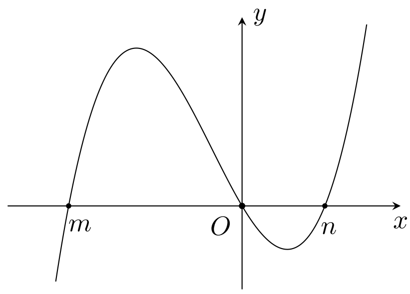
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$ và từ hình dáng đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ là hàm số đa thức bậc ba và



$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a > 0.$$

Cũng từ hình vẽ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m < 0 \\ x = 0 \\ x = n > 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

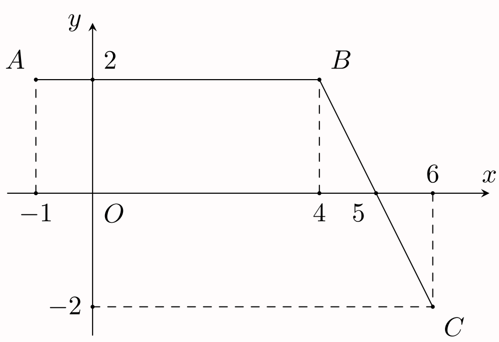
Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

(A) 19. (B) 22. (C) 17. (D) 18.



Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(4; 2)$ là $y = 2$.
Phương trình đường thẳng đi qua điểm $B(4; 2)$ và $C(6; -2)$ là $y = -2x + 10$.

Do đó hàm số $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } -1 \le x \le 4 \\ -2x + 10 & \text{nếu } 4 < x \le 6. \end{cases}$

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ nên có nguyên hàm trên $[-1;6]$.
Mà $\displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x = 2x + C_1$, $\displaystyle\int(-2x+10)\,\mathrm{d}x = -x^2+10x+C_2$. Suy ra

$$F(x) = \begin{cases} 2x + C_1 & \text{nếu } -1 \le x \le 4 \\ -x^2+10x+C_2 & \text{nếu } 4 < x \le 6. \end{cases}$$

Ta có $F(-1) = -2 \Leftrightarrow C_1 - 2 = -2 \Leftrightarrow C_1 = 0$ nên

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } -1 \le x \le 4 \\ -x^2+10x+C_2 & \text{nếu } 4 < x \le 6. \end{cases}$$

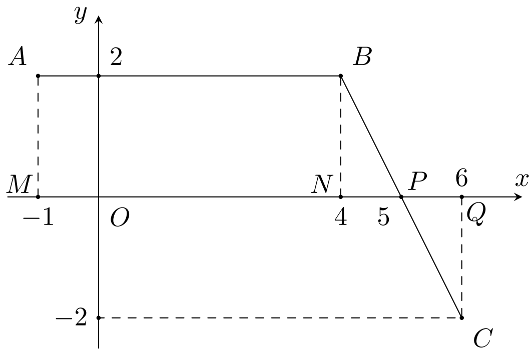
Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[-1;6]$ cho nên $F(x)$ có đạo hàm trên $[-1;6]$, suy ra $F(x)$ liên tục trên $[-1;6]$.
Lại có $\lim\limits_{x\to 4^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 2x = 8$, $\lim\limits_{x\to 4^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(-x^2+10x+C_2) = C_2 + 24$.
Suy ra

$$\lim_{x\to 4^-} F(x) = \lim_{x\to 4^+} F(x) = F(4) \Leftrightarrow C_2 + 24 = 8 \Leftrightarrow C_2 = -16.$$

Vậy

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } -1 \le x \le 4 \\ -x^2+10x-16 & \text{nếu } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

và $F(5) + F(6) = (-25+50-16) + (-36+60-16) = 17$.
Cách khác:
Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ nên tồn tại nguyên hàm $F(x)$ trên đoạn $[-1;6]$.



Từ đồ thị hàm số ta có

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = -1$, $x = 4$ bằng diện tích hình chữ nhật $ABNM$ nên

$$\int_{-1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow F(4) - F(-1) = 10 \Leftrightarrow F(4) = 8.$$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = 4$, $x = 5$ bằng diện tích tam giác vuông NBP nên

$$\int_{4}^{5} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow F(5) - F(4) = 1 \Leftrightarrow F(5) = 9.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = 5$, $x = 6$ bằng diện tích tam giác vuông PCQ nên

$$\int\limits_5^6 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow -\int\limits_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow -[F(6) - F(5)] = 1 \Leftrightarrow F(6) = 8.$$

Vậy $F(5) + F(6) = 17$.

Chọn đáp án C

Câu 42. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. B. $\dfrac{71}{9}$. C. $\dfrac{71}{6}$. D. $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) - g(x)$ là hàm đa thức nên xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có

$$y' = f'(x) - g'(x) = \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 2\right) - \left(3mx^2 + 2nx - 2\right) = 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 4.$$

Vì hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3 nên chúng là nghiệm của phương trình $f'(x) - g'(x) = 0$, do đó ta có

$$\begin{cases} (-1)\cdot 4a + 3(b-m) + (-1)\cdot 2(c-n) + 4 = 0 \\ 8\cdot 4a + 4\cdot 3(b-m) + 2\cdot 2(c-n) + 4 = 0 \\ 27\cdot 4a + 9\cdot 3(b-m) + 3\cdot 2(c-n) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = \dfrac{2}{3} \\ 3(b-m) = -\dfrac{8}{3} \\ 2(c-n) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Suy ra $f'(x) - g'(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{8}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 4$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-1}^{3} |f'(x) - g'(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} |f'(x) - g'(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{3} |f'(x) - g'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-1}^{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right| + \left|\left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 4x\right)\Bigg|_{2}^{3}\right| \\ &= \left|\frac{44}{9} + \frac{47}{18}\right| + \left|\frac{9}{2} - \frac{44}{9}\right| = \frac{71}{9}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B

Câu 43. Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $|z - w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1 + i| + |w - 3 + 4i|$ bằng

A. $5 - \sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{41}$. D. $5 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}|z|=|w|=4\\|z-w|=4\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left|\dfrac{z}{w}\right|=1\\ \left|\dfrac{z}{w}-1\right|=\dfrac{4\sqrt{2}}{|w|}=\sqrt{2}.\end{cases}$ (1)

Đặt $\dfrac{z}{w}=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$.

Từ (1) ta có $\begin{cases}a^2+b^2=1\\(a-1)^2+b^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=\pm 1\end{cases} \Rightarrow z=\pm iw.$

TH 1. $z=iw$. Ta có

$$\begin{aligned}P &= |z+1+i|+|w-3+4i|\\ &= |iw+1+i|+|w-3+4i|\\ &= |-w+i-1|+|w-3+4i|\\ &\geq |-4+5i|=\sqrt{41}.\end{aligned}$$

TH 2. $z=-iw$. Ta có

$$\begin{aligned}P &= |z+1+i|+|w-3+4i|\\ &= |-iw+1+i|+|w-3+4i|\\ &= |-w-i+1|+|w-3+4i|\\ &\geq |-2+3i|=\sqrt{13}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}-w-i+1=k(w-3+4i),\ k\geq 0\\|w|=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}w-1+i=-k(w-3+4i),\ k\geq 0\\|w|=4.\end{cases} \quad (*)$$

Gọi điểm biểu diễn của w, $1-i$ và $3-4i$ lần lượt là M, $A(1;-1)$ và $B(3;-4)$.
Từ $(*)$ suy ra $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ ngược hướng và M nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$.
Ta có $OA<R$, $OB>R$ nên tồn tại giao điểm của đoạn AB cắt đường tròn (C).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{13}$, đạt được khi M là giao điểm của đường tròn (C) và đoạn AB.
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)\mathrm{e}^x=y(\mathrm{e}^x+xy-2x^2-3)$?

(A) 14. (B) 12. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=4(x-1)\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^x-xy^2+2x^2y+3y$. Ta có

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4\mathrm{e}^x+4(x-1)\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^x-y^2+4xy\\ &= (4x-y)\mathrm{e}^x-y^2+4xy\\ &= (4x-y)(\mathrm{e}^x+y).\end{aligned}$$

Do $y\in\mathbb{N}^*$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{4}$.

TH 1. $\dfrac{y}{4}\in(1;5)\Leftrightarrow y\in(4;20)$. Ta có bảng biến thiên

x	1		$\frac{y}{4}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(5)$

Ta có $f(1) = -y\mathrm{e} - y^2 + 5y = y(5 - \mathrm{e} - y) < 0, \forall y \in (4; 20)$,
$f(5) = -5y^2 + (53 - \mathrm{e}^5)\, y + 16\mathrm{e}^5$.
Khi đó tồn tại $x \in (1; 5)$ sao cho $f(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & f(5) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -5y^2 + \left(53 - \mathrm{e}^5\right) y + 16\mathrm{e}^5 > 0 \\ \Rightarrow\ & -33{,}33 < y < 14{,}24. \end{aligned}$$

Suy ra $y \in \{5; 6; 7 \ldots; 14\}$, có 10 giá trị thỏa mãn.

TH 2. $0 < \dfrac{y}{4} \le 1 \Leftrightarrow 0 < y \le 4$. Ta có bảng biến thiên

x	1		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(5)$

Khi đó tồn tại $x \in (1; 5)$ sao cho $f(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(5) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -y^2 + (5 - \mathrm{e})y < 0 \\ 0 < y < 14{,}24 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & y > 5 - \mathrm{e} \\ \Rightarrow\ & 2{,}24 < y \le 4. \end{aligned}$$

Suy ra $y \in \{3; 4\}$.

TH 3. $\dfrac{y}{4} \ge 5 \Leftrightarrow y \ge 20$. Ta có bảng biến thiên

x	1		5
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(5)$

Khi đó tồn tại $x \in (1;5)$ sao cho $f(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(5) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in (0; 5 - \mathrm{e}) \\ y > 14{,}24. \end{cases}$$

Trường hợp này không tồn tại y.

Qua 3 trường hợp có 12 số y nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}a^3$. (B) $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. (C) $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) $64\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi D là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} AD \perp BC \\ A'D \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = \widehat{ADA'} = 60°$.

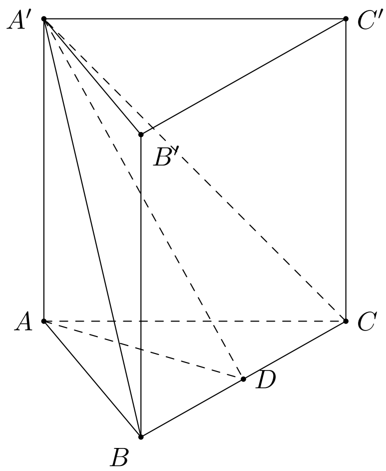
Xét tam giác ADA' vuông tại A, ta có $AD = \dfrac{AA'}{\tan 60°} = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Xét tam giác ABD vuông tại D, ta có $AB = \dfrac{AD}{\sin 60°} = \dfrac{8a}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \dfrac{16\sqrt{3}a^2}{9}$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$$V = AA' \cdot S = 4a \cdot \frac{16\sqrt{3}a^2}{9} = \frac{64\sqrt{3}a^3}{9}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

(A) $12\sqrt{2}\pi a^2$. (B) $36\sqrt{2}\pi a^2$. (C) $24\sqrt{2}\pi a^2$. (D) $18\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi $d = MO$ là khoảng cách từ trục tới mặt phẳng thiết diện.

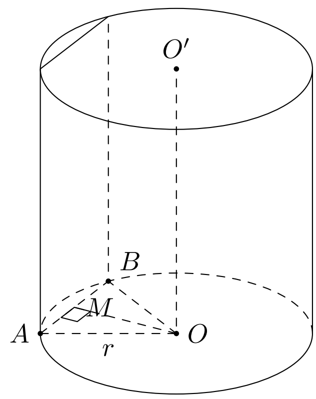
Diện tích hình vuông: $AB^2 = 36a^2 \Rightarrow AB = 6a \Rightarrow AM = \dfrac{AB}{2} = 3a$.

Xét tam giác AMO vuông tại M, ta có:

$$r = \sqrt{AM^2 + d^2} = \sqrt{9a^2 + 9a^2} = 3\sqrt{2}a.$$

Vậy diện tích xung quanh của (T) là

$$S_{\text{xq}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 3\sqrt{2}a \cdot 6a = 36\sqrt{2}\pi a^2.$$



Chọn đáp án (B) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 47. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 + 2 = 0$. (1)
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2. Theo định lý Vi-et ta có

$$z_1 + z_2 = 2a \text{ và } z_1 z_2 = b^2 + 2.$$

TH1. z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$. Theo đề bài ta có

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ 2z_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{9}{2} \\ z_1 z_2 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \dfrac{9}{2} \\ b^2 + 2 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9}{4} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

TH2. z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Khi đó ta có $z_2 = \overline{z_1}$.
Để tìm z_1 và z_2, ta có hai cách

Cách 1. Đặt $z_1 = x + yi$, với x, $y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$. Suy ra $z_2 = x - yi$. Khi đó theo đề bài ta có

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow x + yi + 2i(x - yi) = 3 + 3i \Leftrightarrow x + 2y + (2x + y)i = 3 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i. \end{cases}$$

Cách 2. Theo đề bài ta có

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow z_1 + 2i\overline{z_1} = 3 + 3i. \quad (*)$$

Lấy liên hợp hai vế ta được

$$\overline{z_1} + \overline{2i}z_1 = 3 - 3i \Leftrightarrow -2iz_1 + \overline{z_1} = 3 - 3i \quad (**)$$

Từ (**) ta nhân hai vế cho $-2i$ rồi cộng vế theo vế với (*) ta được

$$z_1\left(1 + (2i)^2\right) = 3 + 3i - 2i(3 - 3i) \Leftrightarrow z_1 = \frac{-3 - 3i}{-3} \Leftrightarrow z_1 = 1 + i.$$

Với $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy có 3 cặp số thực $(a; b)$ thỏa mãn bài toán là $\left(\dfrac{9}{4}; \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $(1; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+3t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2-t\\y=2+t\\z=2-t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+3t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;1)$.
Gọi đường thẳng cần tìm là Δ và $B=\Delta\cap Oy$.
Ta có $B\in Oy$ suy ra $B(0;b;0)$ (với $b\in\mathbb{R}$).
Vì A, $B\in\Delta$ nên

$$\Delta\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0.\quad(1)$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;b-3;-1)$.
Từ đó $(1)\Leftrightarrow -1+2(b-3)-1=0\Leftrightarrow b=4$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-1)$.
Khi đó đường thẳng Δ qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình $\Delta\colon\begin{cases}x=1-t\\y=3+t\\z=1-t.\end{cases}$

Khi $t=-1$ ta được $C(2;2;2)\in\Delta$ nên Δ cũng có phương trình $\Delta\colon\begin{cases}x=2-t\\y=2+t\\z=2-t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=x^4-10x^3+24x^2+(3-m)x$, với m là số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

Ⓐ 21. Ⓑ 25. Ⓒ 24. Ⓓ 22.

Lời giải.

Ta có $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $f(|x|)$ đối xứng qua Oy nên hàm số $f(|x|)$ luôn có một cực trị tại $x=0$.
Vậy $f(|x|)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.
$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt
$\Leftrightarrow 4x^3-30x^2+48x+3-m=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.
$\Leftrightarrow 4x^3-30x^2+48x+3=m$ có 3 nghiệm dương phân biệt. $\quad(1)$
Đặt $g(x)=4x^3-30x^2+48x+3$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$g'(x)=12x^2-60x+48$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1.\end{array}\right.$
Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	25	$\searrow$	-29	$\nearrow$	$+\infty$

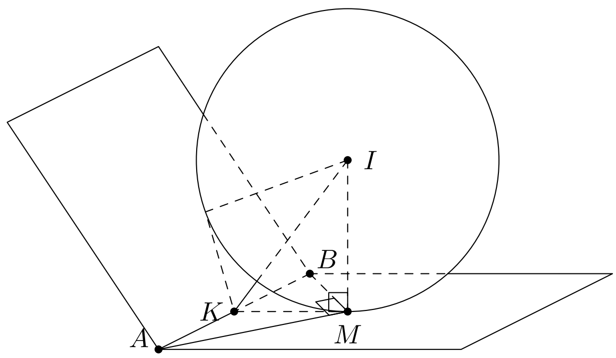
Từ bảng biên thiên ta có (1) $\Leftrightarrow 3 < m < 25$.
Do m nguyên suy ra $m \in \{4; 5; 6; \ldots; 24\}$.
Vậy có tất cả 21 số nguyên m thoả mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$, bán kính $R = 1$.
Gọi K là trung điểm AB suy ra toạ độ $K\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; 0\right)$.
Do $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên tam giác AMB vuông tại M nên $MK = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow MK = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.
Do K nằm trên tiếp diện của (S) tại M nên $MK \perp IK$



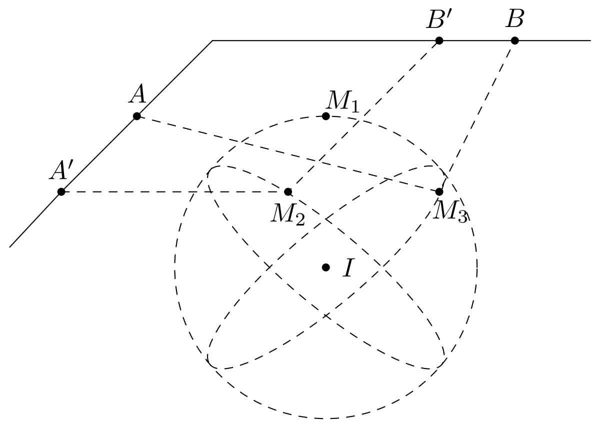
$$\Rightarrow \quad IM^2 + MK^2 = IK^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 2\right)^2 + 1 = 1 + \frac{a^2+b^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3a + 2b = 13$$
$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{13-3a}{2}.$$

Do a và b nguyên dương và A, B nằm ngoài mặt cầu nên $\begin{cases} 13 - 3a > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Ta có bảng sau

a	1	2	3	4
b	5	3,5	2	0,5

Từ bảng trên ta thấy chỉ xảy hai ra trường hợp
TH1: $a = 1$ và $b = 5$ hay $A(1;0;0)$ và $B(0;5;0)$.
Ta chỉ dựng được 2 mặt phẳng tiếp diện chứa A và B.
TH2: $a = 3$ và $b = 2$ hay $A'(3;0;0)$ và $B'(0;2;0)$.
Ta chỉ dựng được 2 mặt phẳng tiếp diện chứa A' và B'.
Lại có 4 điểm này nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $\mathrm{d}[I,(Oxy)] = 1$ nên (Oxy) chính là một tiếp diện chung.
Vậy chỉ có 3 tiếp diện thỏa mãn nên chỉ có 3 tiếp điểm.



Chọn đáp án D □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 37

ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2022
Môn: Toán
Năm học: 2020 – 2021
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH 2022

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Môđun của số phức $z = 3 - i$ bằng

Ⓐ 8. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ 10. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 81. Ⓒ 9. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $R^2 = 9$ nên bán kính mặt cầu $R = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$?

Ⓐ Điểm $P(-1; -1)$. Ⓑ Điểm $N(-1; -2)$. Ⓒ Điểm $M(-1; 0)$. Ⓓ Điểm $Q(-1; 1)$.

Lời giải.

Thay điểm $M(-1; 0)$ vào hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Thể tích V của khối cầu bán kính r được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $V = \dfrac{1}{3}\pi r^3$. Ⓑ $V = 2\pi r^3$. Ⓒ $V = 4\pi r^3$. Ⓓ $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính r là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ là

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C$.

Lời giải.

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ là $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu qua các giá trị $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$.
Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 6$ là

(A) $(\log_2 6; +\infty)$. (B) $(-\infty; 3)$. (C) $(3; +\infty)$. (D) $(-\infty; \log_2 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_2 6$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (\log_2 6; +\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 42. (B) 126. (C) 14. (D) 56.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $V = \dfrac{1}{3}hB = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 7 = 14$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ xác định khi và chỉ khi $x > 0$.
Vậy $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\log_2(x + 4) = 3$ là

(A) $x = 5$. (B) $x = 4$. (C) $x = 2$. (D) $x = 12$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x + 4) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 > 0 \\ x + 4 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Nếu $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_2^5 g(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_2^5 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

(A) 5. (B) -5. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^5 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + (-2) = 1.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho số phức $z = 3 - 2i$, khi đó $2z$ bằng

(A) $6 - 2i$. (B) $6 - 4i$. (C) $3 - 4i$. (D) $-6 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $2z = 2(3 - 2i) = 6 - 4i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

(A) $\overrightarrow{n_4} = (-1; 2; -3)$. (B) $\overrightarrow{n_3} = (-3; 4; -1)$. (C) $\overrightarrow{n_2} = (2; -3; 4)$. (D) $\overrightarrow{n_1} = (2; 3; 4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P): $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (2; -3; 4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là

(A) $(3; 4; -3)$. (B) $(-1; 2; -3)$. (C) $(-1; 2; -1)$. (D) $(1; -2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} - \vec{v} = (-1; 2; -1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Trên mặt phẳng tọa độ, cho $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

(A) 2. (B) 3. (C) -3. (D) -2.

Lời giải.

Vì $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức z nên $z = 2 + 3i$.

Vậy phần tự của số phức z là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 3$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} \dfrac{3x+2}{x-2} = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{a}{2}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}\log_2 a$. (B) $\log_2 a + 1$. (C) $\log_2 a - 1$. (D) $\log_2 a - 2$.

Lời giải.

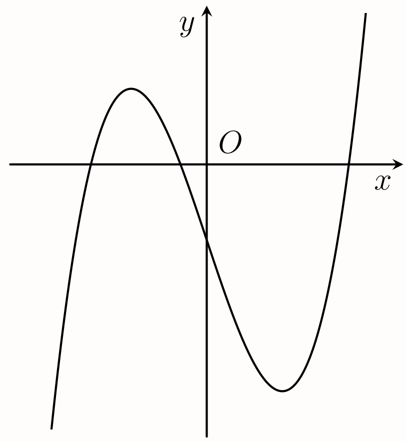
Ta có $\log_2 \frac{a}{2} = \log_2 a - \log_2 2 = \log_2 a - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 1$. (B) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

(C) $y = x^3 - 3x - 1$. (D) $y = x^2 + x - 1$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy rằng đường cong ở hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc ba, do đó ta chọn được hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) Điểm $Q(2; 2; 3)$. (B) Điểm $N(2; -2; -3)$.

(C) Điểm $M(1; 2; -3)$. (D) Điểm $P(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Dễ thấy rằng đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(1; 2; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây **đúng**?

(A) $P_n = n!$. (B) $P_n = n - 1$. (C) $P_n = (n-1)!$. (D) $P_n = n$.

Lời giải.

Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $V = \frac{1}{3}Bh$. (B) $V = \frac{4}{3}Bh$. (C) $V = 6Bh$. (D) $V = Bh$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = B \cdot h$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

(A) $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$. (B) $y' = \dfrac{\ln 2}{x}$. (C) $y' = \dfrac{1}{x}$.. (D) $y' = \dfrac{1}{2x}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;+\infty)$. (B) $(-\infty;-2)$. (C) $(0;2)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình trụ có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S_{xq} = 4\pi rl$. (B) $S_{xq} = 2\pi rl$. (C) $S_{xq} = 3\pi rl$. (D) $S_{xq} = \pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Nếu $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\displaystyle\int_2^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 3. (C) 18. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_2^5 3f(x)\mathrm{d}x = 3 \cdot 2 = 6$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 11. (B) 3. (C) $\dfrac{7}{4}$. (D) 28.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d = 7 + 4 = 11$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \cos x + C$.
(B) $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.
(C) $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \cos x + C$.
(D) $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos x + C$.

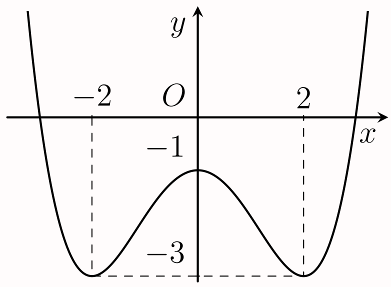
Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \cos x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 0. (B) -1. (C) -3. (D) 2.



Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng -1.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x = 5$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

- $f(1) = 1 + \dfrac{4}{1} = 5$.
- $f(2) = 2 + \dfrac{4}{2} = 4$.
- $f(5) = 5 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{29}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 4 tại điểm $x = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = -x^3 - x$. Ⓑ $y = -x^4 - x^2$. Ⓒ $y = -x^3 + x$. Ⓓ $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số $y = -x^3 - x$ có

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = -x^3 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A

Câu 31. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a - 3\log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây **đúng**?

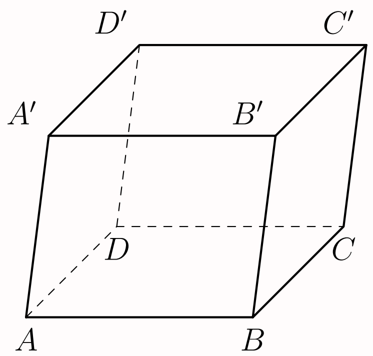
Ⓐ $a = 4b^3$. Ⓑ $a = 3b + 4$. Ⓒ $a = 3b + 2$. Ⓓ $a = \dfrac{4}{b^3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a - 3\log_2 b = 2 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{a}{b^3} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b^3} = 2^2 \Leftrightarrow a = 4b^3$.
Chọn đáp án A

Câu 32.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng

Ⓐ 90°. Ⓑ 30°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.



Lời giải.

$A'C' \perp BD$ nên góc giữa $A'C'$ và BD bằng 90°.
Chọn đáp án A

Câu 33. Nếu $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + 2x]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 20. Ⓑ 10. Ⓒ 18. Ⓓ 12.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_1^3 [f(x) + 2x]\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 2x\mathrm{d}x = 2 + x^2\Big|_1^3 = 2 + (3^2 - 1^2) = 10.$$
Chọn đáp án B

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -5; 3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{4} =$

$\dfrac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

(A) $2x-5y+3z-38=0$. (B) $2x+4y-z+19=0$.

(C) $2x+4y-z-19=0$. (D) $2x+4y-z+11=0$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{a}=(2;4;-1)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua $M(2;-5;3)$ nhận $\vec{a}$ làm vec-tơ pháp tuyến là

$$2(x-2)+4(y+5)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+4y-z+19=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $i\overline{z}=5+2i$. Phần ảo của z bằng

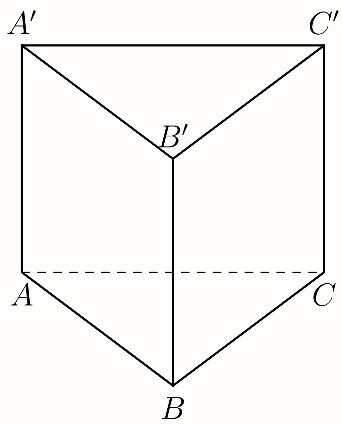
(A) 5. (B) 2. (C) -5. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=\dfrac{5+2i}{i}=2-5i$.
Suy ra $z=2+5i$, do đó phần ảo của z là 5.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=4$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) 4.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CB\perp AB \\ CB\perp BB' \end{cases} \Rightarrow CB\perp (ABB'A')$.
Suy ra $\mathrm{d}(C,(ABB'A'))=CB$.
Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $CB=AB=4$.
Vậy $\mathrm{d}(C,(ABB'A'))=CB=4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Từ một hộp chứa 16 quả cầu gồm 7 quả màu đỏ và 9 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Xác suất để lấy được hai quả có màu khác nhau bằng

(A) $\dfrac{7}{40}$. (B) $\dfrac{21}{40}$. (C) $\dfrac{3}{10}$. (D) $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "chọn được hai quả màu khác nhau"
Chọn 2 quả từ 16 quả nên không gian mẫu $|n_\Omega|=\mathrm{C}_{12}^2$

- Chọn 1 quả đỏ từ 7 quả đỏ có C_7^1 cách.
- Chọn 1 quả xanh từ 9 quả xanh có C_9^1 cách.

Vậy số cách chọn là $C_7^1 \cdot C_9^1 = 63$.

Xác suất biến cố A là $P = \dfrac{63}{C_{12}^2} = \dfrac{21}{40}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;3)$, $B(1;3;4)$ và $C(3;-1;5)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

(A) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$.
(B) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$.
(C) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{9}$.
(D) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC} = (2;-4;1)$. Đường thẳng đi qua A song song với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}$ làm một véctơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(4^x - 5.2^{x+2} + 64)\sqrt{2-\log(4x)} \geq 0$?

(A) 22.
(B) 25.
(C) 23.
(D) 24.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x > 0 \\ 2 - \log(4x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{10}(4x) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 25.$

Vì $\sqrt{2-\log(4x)} \geq 0$ nên bất phương trình đề bài đã cho tương đương với

$$4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 \geq 0 \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \leq 4 \\ 2^x \geq 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$$

So lại với điều kiện xác định, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0;2] \cup [4;25]$.

Vậy có 24 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

(A) 3.
(B) 4.
(C) 5.
(D) 6.

Lời giải.

Ta có

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$$

Với $f(x) = -1$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$. Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt, suy ra phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.
Với $f(x) = 2$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm duy nhất, suy ra phương trình $f(x) = 2$ có 1 nghiệm thực (nghiệm này khác 3 nghiệm của phương trình $f(x) = 1$).
Vậy phương trình $f'(f(x)) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3. B. 1. C. 2. D. 7.

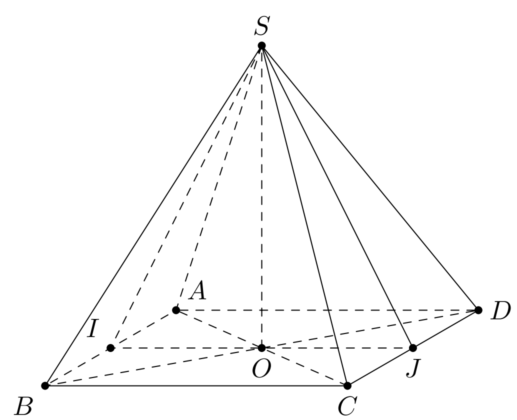
Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 + 2x + C_1$. Vì $f(1) = 3$ nên $C_1 = -3$.
Khi đó $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$.
Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 - 3x + C_2$. Vì $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2$.
Khi đó $F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.
Vậy $F(1) = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}a^3$. B. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $16a^3$. D. $\dfrac{16}{3}a^3$.

Lời giải.



Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mặt khác $AB \parallel CD$ nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d qua điểm S và song song với AB, CD.
Gọi O là tâm hình vuông suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Gọi I là trung điểm AB, J là trung điểm CD. Khi đó

- $SI \perp AB \Rightarrow SI \perp d$.
- $SJ \perp CD \Rightarrow SJ \perp d$.

Suy ra góc giữa (SAB) và (SCD) là $\widehat{ISJ} = 90^\circ$
Ta có $AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}a$.
Vì $\triangle ISJ$ vuông tại S nên $SO = \dfrac{1}{2}IJ = \dfrac{1}{2}AD = \sqrt{2}a$.
Thể tích $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot 8a^2 = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2

thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A 5. **B** 6. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiêm thực. Khi đó, $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).
- Nếu $\Delta' < 0$, thì phương trình có hai nghiệm phức. Khi đó, là hai số phức liên hợp nên ta luôn có $|z_1| = |z_2|$ hay $m^2 - 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$ luôn thỏa mãn.

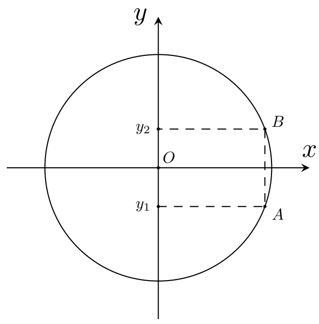
Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2$ bằng

A 16. **B** 20. **C** 10. **D** 32.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, điều kiện $|z| - z \neq 0\,(*)$; $z_1 = x_1 + y_1 i$; $z_2 = x_2 + y_2 i$.



Ta có $w = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) - yi} = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) + yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)^2 + y^2}$.

Theo đề, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2\left(x^2+y^2\right) - 2x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\; & 8\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) = 2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2+y^2} \\ \Leftrightarrow\; & 4\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) \\ \Leftrightarrow\; & \left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2} - 4\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\; & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} = 4 \\ \sqrt{x^2+y^2} - x = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2+y^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$
$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 16$ và $x_2^2 + y_2^2 = 16$.
Ta có $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)^2 = 4 - (x_1 - x_2)^2$.
Khi đó $P = x_1^2 + (y_1 - 5)^2 - x_2^2 - (y_2 - 5)^2 = -10 \cdot (y_1 - y_2) \leq 10\,|y_1 - y_2| = 10 \cdot \sqrt{4 - (x_1 - x_2)^2} \leq 20$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $|y_1 - y_2| = 2$.
Vậy $\max P = 20$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2, -1$ và 1. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

(A) $\dfrac{500}{81}$. (B) $\dfrac{36}{5}$. (C) $\dfrac{2932}{405}$. (D) $\dfrac{2948}{405}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$. (1)
Mặt khác, vì $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn và có ba điểm cực trị -2, -1, 1 nên suy ra

$$f'(x) = 12(x+3)(x+1)(x-1) = 12(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a = 24 \\ 2b = -12 \\ c = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -6 \\ c = -24. \end{cases}$

Suy ra $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + d$.

Cách 1:
Ta có $f(x) = f'(x)\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{6}\right) - 7x^2 - 16x + d + 4$.
Khi đó đồ thị đi qua ba điểm cực trị của $f(x)$ là $g(x) = -7x^2 - 16x + d + 4$.
Do đó ta có

$$S = \int_{-2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int\limits_{-2}^{1} \left|3x^4 + 8x^3 + x^2 - 8x - 4\right| dx = \frac{2948}{405}.$$

Cách 2:
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$, $g(x)$ là $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.
Nhận xét rằng $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc bốn và theo giả thiết, phương trình trên có 3 nghiệm -2, -1, 1. Khi đó

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= 3(x^2 - 1)(x + 2)(mx + n) \\
&= \left(3x^3 + 6x^2 - 3x - 6\right)(mx + n) \\
&= 3mx^4 + 3nx^3 + 6mx^3 + 6nx^2 - 3mx^2 - 3nx - 6mx - 6n \\
&= 3mx^4 + 3(n + 2m)x^3 + 3(2n - m)x^2 - 3(n + 2m)x - 6n.
\end{aligned}$$

Vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn và $g(x)$ là hàm số bậc hai, nên ta có thể đồng nhất hệ số bậc 4 và bậc 3 của $f(x)$ và $f(x) - g(x)$. Suy ra $m = 1$ và $n = \dfrac{2}{3}$.
Khi đó $f(x) - g(x) = (x + 2)(x^2 - 1)(3x + 2)$.
Do đó

$$S = \int\limits_{-2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int\limits_{-2}^{1} \left|(x + 2)(x^2 - 1)(3x + 2)\right| dx = \frac{2948}{405}.$$

Chọn đáp án (D) □

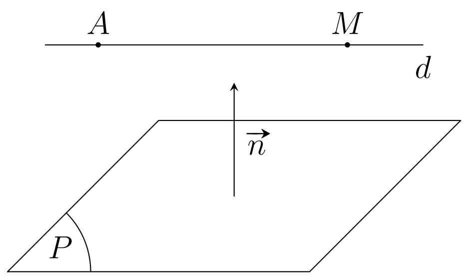
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -3; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oz và song song với (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-3}{-7}$. (B) $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-3}{1}$.

(C) $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. (D) $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-10}{-7}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng thỏa đề bài. Đặt $M(0;0;m)=d\cap Oz$.
- Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;1;1)$, đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=\overrightarrow{AM}=(4;3;m-3)$.
- Vì $d\parallel(P)\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow 4+3+m-3=0\Leftrightarrow m=-4$.
- d có VTCP là $\vec{u}=(4;3;-7)$ nên loại được các phương án $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ và $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.
- Đường thẳng d qua $A(-4;-3;3)$ và có VTCP $\vec{u}=(4;3;-7)$ nên d có PTCT là: $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$.



- Vì d đi qua điểm $N(-8;-6;10)$ nên $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-10}{-7}$ là phương trình của d.

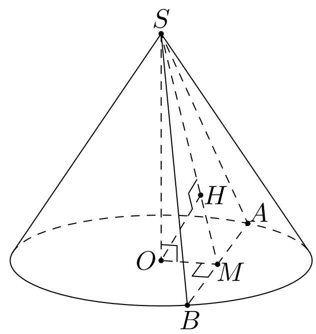
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho khối nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. (B) $4\sqrt{6}\pi a^3$. (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (D) $8\sqrt{2}\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn đáy và M là trung điểm của AB.
Ta có $SO\perp(OAB)$ và $OM\perp AB$. Dựng $OH\perp SM$ tại H.
Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là $OH=2a$.
Ta tính được $OM^2=OA^2-AM^2=12a^2-4a^2=8a^2$.
Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao nên



$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OM^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{8a^2}=\frac{1}{8a^2}.$$

Suy ra $OS=2\sqrt{2}a$.
Thể tích của khối nón đã cho là $V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^2\cdot2\sqrt{2}a=8\sqrt{2}\pi a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

(A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

$$4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65\Leftrightarrow\frac{3^b}{3^a}+65\ge 4^{a^2}\cdot4^b\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^b+65\cdot3^a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^b-4^{a^2}\cdot3^a\ge0.\qquad(1)$$

Hàm số $f(b)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^b+65\cdot3^a\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^b-4^{a^2}\cdot3^a$.

Ta có $f'(b)=\left(\frac{3}{4}\right)^b\ln\frac{3}{4}+65\cdot 3^a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^b\ln\frac{1}{4}<0,\ \forall b$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(b)$		$-$	0	$-$	
$f(b)$	$+\infty$		$y=0$		$-4^{a^2}\cdot 3^a$

Ta được tập nghiệm $S=(-\infty;\alpha]$.

S chứa ít nhất 4 số nguyên tố $b\in(-12;12)\Leftrightarrow\{-11;-10;-9;-8\}\subset(-\infty;\alpha]\Leftrightarrow f(-8)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^8+65\cdot 3^a\cdot 4^8-4^{a^2}\cdot 3^a\geq 0\Leftrightarrow a\in\{-3;-2;\ldots;3\}$ (TABLE $-5\to 5$).

Chọn đáp án (D)

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=50$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

(A) 29. (B) 33. (C) 55. (D) 28.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;-3;-6), R=5\sqrt{2}$.

Ta có $M\in Ox\Rightarrow M(a;0;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S). Khi đó (P) đi qua $M(a;0;0)$, vuông góc với đường thẳng d, phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x-a)+4y-z=0\Leftrightarrow 2x+4y-z-2a=0.$$

Ta có M là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra

- $IM>R\Leftrightarrow(a-4)^2+9+36>50\Leftrightarrow(a-4)^2>5$ (1)
- $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)<R\Leftrightarrow\frac{|8-12+6-2a|}{\sqrt{21}}<5\sqrt{2}\Leftrightarrow|2-2a|<5\sqrt{42}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$\begin{cases}(a-4)^2>5\\|2-2a|<5\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-8a+11>0\\a^2-2a+1<\dfrac{350}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\geq 7\\a\leq 1\end{array}\right.\\-15\leq a\leq 17\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-15\leq a\leq 1\\7\leq a\leq 17.\end{array}\right.$$

Vì $a\in\mathbb{Z}$, suy ra có 28 điểm M thoả mãn.

Chọn đáp án (D)

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+10x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có **đúng** 9 điểm cực trị?

(A) 16. (B) 9. (C) 15. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-10. \end{array}\right.$

$$y'=\left(4x^3-16x\right)\cdot f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x^4-8x^2+m=0 \\ x^4-8x^2+m=-10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=2 & \\ x=-2 & \\ m=-x^4+8x^2 & (1) \\ m+10=-x^4+8x^2 & (2) \end{array}\right.$$

Để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có 9 điểm cực trị thì $f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0$ phải có 6 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình (1) phải có 2 nghiệm và phương trình (2) phải có 4 nghiệm.

Ta có: $\begin{cases} -m \geq 0 \\ -16<-m-10<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -10<m<6 \end{cases} \Leftrightarrow -10<m\leq 0.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;\ldots;-1;0\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

HẾT

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 38

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022
Môn: Toán
Năm học: 2021 – 2022
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Nếu $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 4 + 4 = 6.$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ a^3. Ⓑ $6a^3$. Ⓒ $3a^3$. Ⓓ $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = 3a^2.2a = 6a^3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. Nếu $\int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int_5^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Áp dụng tính chất $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_5^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -(-3) = 3.$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. Cho $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $f(x) = -\sin x$. Ⓑ $f(x) = -\cos x$. Ⓒ $f(x) = \sin x$. Ⓓ $f(x) = \cos x$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1; +\infty)$. **B** $(0; 1)$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

A $\sqrt{6}$. **B** 12. **C** $2\sqrt{6}$. **D** 3.

Lời giải.

Ta có bán kính của (S) là $\sqrt{6}$ nên đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A $(0; 2; -3)$. **B** $(1; 0; -3)$. **C** $(1; 2; 0)$. **D** $(1; 0; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $A(a; b; c)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(a; b; 0)$ nên hình chiếu của điểm $A(1; 2; -3)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(1; 2; 0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A 2. **B** 15. **C** 10. **D** 30.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3} \cdot 10.3 = 10$.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

A $q = \dfrac{1}{2}$. **B** $q = 2$. **C** $q = -2$. **D** $q = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1.q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.
Vậy $q = 2$.
Chọn đáp án B □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 10. Cho hình trụ có chiều cao $h = 1$ và bán kính đáy $r = 2$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 4π. B. 2π. C. 3π. D. 6π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi.r.h = 2\pi.2.1 = 4\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $y = -2$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ nên $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1) > 2$ là

A. $(9; +\infty)$. B. $(25; +\infty)$. C. $(31; +\infty)$. D. $(24; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(x+1) > 2 \Leftrightarrow x + 1 > 5^2 \Leftrightarrow x + 1 > 25 \Leftrightarrow x > 24$.

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $(24; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên loại $y = x^4 - 2x^2$ và $y = -x^3 + 3x$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên loại $y = -x^4 + 2x^2$. Chọn $y = x^3 - 3x$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Môđun của số phức $z = 3 + 4i$ bằng

A. 25. B. $\sqrt{7}$. C. 5. D. 7.

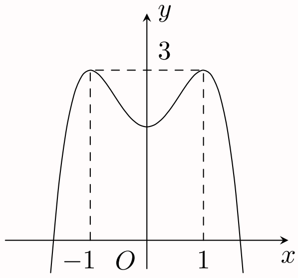
Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 15.

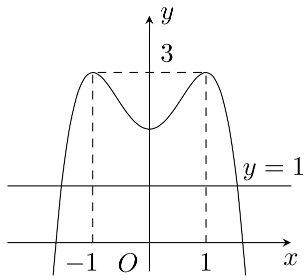
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.



Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x - 4)$ là

Ⓐ $(5; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; +\infty)$. Ⓒ $(4; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (4; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 17. Với a là số thực dương tùy ý, $4 \log \sqrt{a}$ bằng

Ⓐ $-2 \log a$. Ⓑ $2 \log a$. Ⓒ $-4 \log a$. Ⓓ $8 \log a$.

Lời giải.

Ta có $4 \log \sqrt{a} = 4 \log a^{\frac{1}{2}} = 4.\frac{1}{2} \log a = 2 \log a$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18. Số các tổ hợp chập 3 của 12 phần tử là

Ⓐ 1320. Ⓑ 36. Ⓒ 220. Ⓓ 1728.

Lời giải.

Số các tổ hợp chập 3 của 12 phần tử là $\mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. B. $x=2$. C. $x=-1$. D. $x=1$.

Lời giải.

Dựa vào BBT, ta có điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $z=0$. B. $x=0$. C. $x+y+z=0$. D. $y=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) nhận $\overrightarrow{i}=(1;0;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ có phương trình là $x=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1}=3^{2-x}$ là

A. $x=\dfrac{1}{3}$. B. $x=0$. C. $x=-1$. D. $x=1$.

Lời giải.

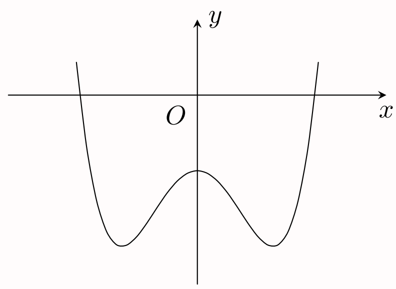
Ta có $3^{2x+1}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x+1=2-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(2;1;-1)$. B. $\vec{u}_2=(1;2;3)$. C. $\vec{u}_3=(1;-2;3)$. D. $\vec{u}_4=(2;1;1)$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Từ phương trình đường thẳng d ta thấy véc-tơ $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án (C) □

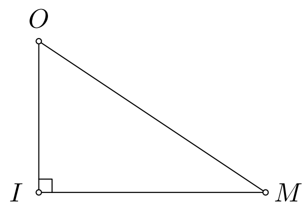
Câu 24. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 3$ và $IM = 4$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón có độ dài đường sinh bằng

(A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Xét tam giác OIM vuông tại I, ta có

$$OM^2 = OI^2 + IM^2 \Leftrightarrow OM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow OM = 5.$$



Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón có đường sinh là cạnh huyền OM.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là 5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 7i$ có tọa độ là

(A) $(2; 7)$. (B) $(-2; 7)$. (C) $(2; -7)$. (D) $(-7; 2)$.

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 7i$ có tọa độ là $(2; -7)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

(A) $5 + i$. (B) $3 + 2i$. (C) $1 + 4i$. (D) $3 + 4i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - i = 3 + 2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + 2x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là

(A) $y' = -x^{-4}$. (B) $y' = \dfrac{-1}{2}x^{-2}$. (C) $y' = -\dfrac{1}{3}x^{-4}$. (D) $y' = -3x^{-4}$.

Lời giải.

Ta có $y = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$ và $C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.
(B) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;-1)$.
Suy ra mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(ABC)}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;2;1)$.
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}_{(ABC)}=(2;4;2)$.
Ta chọn VTCP là $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

(A) -12. (B) 10. (C) 15. (D) -2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có
$f'(x)=3x^2-6x-9$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;2]\\x=3\notin[-2;2].\end{array}\right.$
$f(-2)=8; f(-1)=15; f(2)=-12$.
Suy ra $\max\limits_{[-2;2]}f(x)=f(-1)=15$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\log[(6-x)(x+2)]$?

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $(6-x)(x+2)>0\Leftrightarrow -2<x<6$ suy ra $\mathscr{D}=(-2;6)$.
Vậy có 7 số nguyên x thuộc tập xác định của hàm số đã cho.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1z_2$ bằng

(A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

Lời giải.

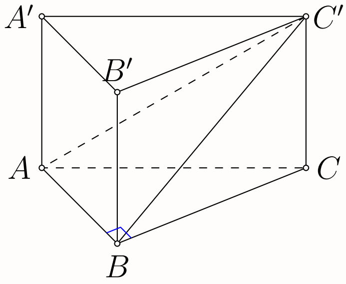
Ta có z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$.
Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}z_1+z_2=-1\\z_1z_2=6\end{cases}$.
Do đó $z_1+z_2+z_1z_2=-1+6=5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 33.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2$, $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng

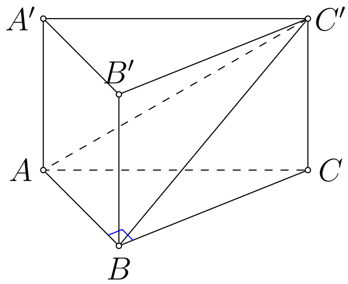
Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC, AB \perp BB' \\ BC, BB' \subset (BCC'B') \Rightarrow AB \perp (BCC'B'). \\ BC \cap BB' = B \end{cases}$

Mà $BC' \subset (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BC'$.



Lại có $\begin{cases} (ABC') \cap (ABC) = AB \\ BC' \subset (ABC'), BC' \perp AB \text{, suy ra } \big((ABC'), (ABC)\big) = (BC', BC) = \widehat{C'BC}. \\ BC \subset (ABC), BC \perp AB \end{cases}$

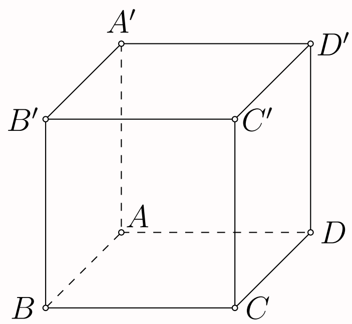
Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 = CC'$.

Do đó $\triangle BCC'$ vuông cân tại C nên $\widehat{C'BC} = 45^\circ$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

Ⓐ a. Ⓑ $\sqrt{2}a$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $3a$.



Lời giải.

Ta có $BD \subset (ABCD)$ và $A'C' \parallel (ABCD)$.

Suy ra $\mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}(A'C', (ABCD)) = \mathrm{d}(A', (ABCD)) = AA' = 3a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$.

Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\cot 2x + C$.

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 36. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^4 - x^2$. (B) $y = x^3 - x$. (C) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. (D) $y = x^3 + x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 + 1$ nên $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (D)

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 5 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

(A) $2x - y + 3z + 9 = 0$. (B) $2x + y + 3z - 3 = 0$.
(C) $2x + y + 3z + 3 = 0$. (D) $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.
Theo giả thiết $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q)\colon 2x - y + 3z + m = 0\,(m \neq 5)$.
Mà (Q) qua A nên $2.0 - (-3) + 3.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$.
Vậy mặt phẳng $(Q)\colon 2x - y + 3z - 9 = 0$.
Chọn đáp án (D)

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[40; 60]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

(A) $\dfrac{4}{7}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên chọn được theo yêu cầu có dạng $\overline{ab}$, ta có

- Với $a = 4 \Rightarrow b \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$.
- Với $a = 5 \Rightarrow b \in \{6; 7; 8; 9\}$.

Suy ra có 9 số thỏa mãn yêu cầu.
Vậy xác suất chọn được số theo yêu cầu đề bài là $P = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.
Chọn đáp án (D)

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng ba số nguyên b thỏa mãn $(3^b - 3)(a.2^b - 18) < 0$?

(A) 72. (B) 73. (C) 71. (D) 74.

Lời giải.

- **Trường hợp 1.** Với $3^b - 3 > 0 \Leftrightarrow b > 1$.
  Khi đó $a.2^b - 18 < 0 \Rightarrow 2^b < \frac{18}{a}$.
  Suy ra 3 giá trị nguyên b có thể là $b \in \{2; 3; 4\}$.
  Do đó $2^4 < \frac{18}{a} \leq 2^5 \Rightarrow \frac{9}{16} \leq a < \frac{9}{8} \Rightarrow a = 1$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Trường hợp 2. Với $3^b - 3 < 0 \Leftrightarrow b < 1$.
Khi đó $a.2^b - 18 > 0 \Rightarrow 2^b > \frac{18}{a}$.
Suy ra 3 giá trị nguyên b có thể là $b \in \{-2; -1; 0\}$.
Do đó $2^{-3} \leq \frac{18}{a} < 2^{-2} \Rightarrow 72 < a \leq 144$.
Số giá trị nguyên dương của a trong trường hợp này là $144 - 73 + 1 = 72$.
Vậy có tổng cộng $1 + 72 = 73$ giá trị a thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

(A) $-\dfrac{13}{3}$. (B) 4. (C) $-\dfrac{14}{3}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ nên $f'(x) = 4(m-1)x^3 - 4mx = 4x\left[(m-1)x^2 - m\right]$.
Do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (m-1)x^2 - m = 0. \qquad (*) \end{array}\right.$$

Điều kiện cần để $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ là phương trình $(*)$ có nghiệm $x = 2$
Tương đương $4(m-1) - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.
Khi đó $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{16}{3}x$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;3] \\ x = 2 \in [0;3] \\ x = -2 \notin [0;3]. \end{array}\right.$

Ta có $f(0) = 1$; $f(3) = 4$; $f(2) = -\frac{13}{3}$.
Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = -\frac{13}{3}$ và $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 4$ khi $x = 3$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng?

(A) 15. (B) 12. (C) 18. (D) 5.

Lời giải.

Giả thiết $F(x)$, $G(x)$ đều là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có

$$F(x) = G(x) + C \Rightarrow F(0) = G(0) + C.$$

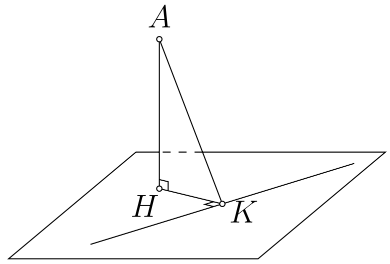
Ta có $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = F(3) - (G(0) + C) = F(3) - G(0) - C$.

Theo giả thiết $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - G(0) + a$ nên $C = -a$.
Suy ra $F(x) = G(x) - a \Leftrightarrow F(x) - G(x) = -a$.
Ta có $S = \displaystyle\int_0^3 |F(x) - G(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^3 |-a|\,\mathrm{d}x = ax\Big|_0^3 = 3a$.
Mà $S = 15$ nên ta có $a = 5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

(A) $2y+z=0$. (B) $2y-z=0$. (C) $y+z=0$. (D) $y-z=0$.

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;-2)$ lên trục Ox.
Ta có $K(1;0;0)$, $\overrightarrow{AK}=(0;-2;2)$.
Gọi H là điểm chiếu của A lên mặt phẳng (P).
Ta có $\mathrm{d}(A,(P))=AH\le AK=2\sqrt{2}$.
Suy ra $\max \mathrm{d}(A,(P))=2\sqrt{2}$, đạt được khi $H\equiv K(1;0;0)$.
Khi đó mặt phẳng (P) qua $O(0;0;0)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AK}=(0;-2;2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) là

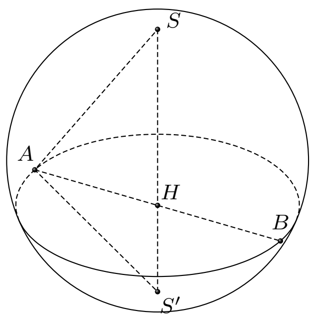
$$0.(x-1)-2(y-0)+2(z-0)=0\Leftrightarrow y-z=0.$$

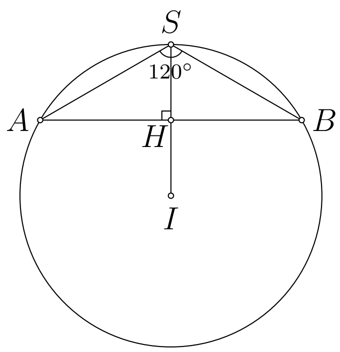
Vậy $(P)\colon y-z=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° và chiều cao bằng 4. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng

(A) 64π. (B) 256π. (C) 192π. (D) 96π.

Lời giải.





Gọi S là đỉnh của hình nón và gọi I là tâm mặt cầu.
Gọi đường kính đường tròn đáy của hình nón là AB; H là trung điểm của AB.
Ta có $\widehat{ASH}=\frac{1}{2}\widehat{ASB}=60^\circ$.

Vì $\begin{cases}AI=AS\\ \widehat{ASI}=60^\circ\end{cases}$ nên $\triangle AIS$ là tam giác đều.

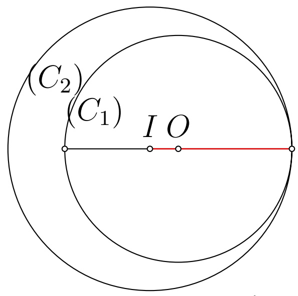
Suy ra $AI=R=2SH=8$.
Vậy $S_{mc}=4\pi R^2=256\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Xét tất cả các số thực x, y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

(A) $\dfrac{125}{2}$. (B) 80. (C) 60. (D) 20.

Lời giải.

Do a dương nên $a^{4x-\log_5 a^2} \leq 25^{40-y^2} \Leftrightarrow a^{4x-2\log_5 a} \leq 5^{2(40-y^2)}$. (1)
Đặt $\log_5 a = t$ thì $a = 5^t$.
Tacó



$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 5^{t(4x-2t)} \leq 5^{2(40-y^2)}\\ &\Leftrightarrow 2tx - t^2 \leq 40 - y^2\\ &\Leftrightarrow t^2 - 2tx + 40 - y^2 \geq 0. \quad (2)\end{aligned}$$

(1) đúng với mọi số thực dương a khi và chỉ khi (2) đúng với mọi số thực t khi và chỉ khi $\Delta' = x^2 + y^2 - 40 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 40$.
Theo bất đẳng thức Bunhia - Cốpxki, ta có

$$(x-3y)^2 \leq 10(x^2+y^2) \leq 10.40 = 400.$$

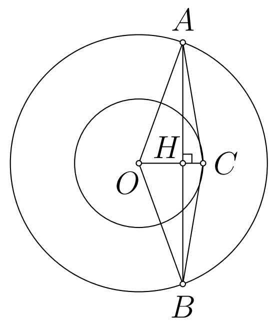
Suy ra $x - 3y \leq 20$.
Khi đó $P = x^2 + y^2 + x - 3y \leq 40 + 20 = 60$.
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^2+y^2 = 40 \\ x = \dfrac{y}{-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$.
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 60.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2|z_3| = 2$ và $8(z_1+z_2)z_3 = 3z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{55}}{32}$. B. $\dfrac{\sqrt{55}}{16}$. C. $\dfrac{\sqrt{55}}{24}$. D. $\dfrac{\sqrt{55}}{8}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}8(z_1+z_2)z_3 = 3z_1z_2 &\Leftrightarrow \frac{8}{z_2} + \frac{8}{z_1} = \frac{3}{z_3}\\ &\Leftrightarrow \frac{8\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} + \frac{8\overline{z}_1}{z_1\overline{z}_1} = \frac{3\overline{z}_3}{z_3\overline{z}_3}\\ &\Leftrightarrow \frac{8\overline{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{8\overline{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{3\overline{z}_3}{|z_3|^2}\\ &\Leftrightarrow \frac{8\overline{z}_2}{4} + \frac{8\overline{z}_1}{4} = \frac{3\overline{z}_3}{1}\\ &\Leftrightarrow \overline{z}_2 + \overline{z}_1 = \frac{3\overline{z}_3}{2}. \quad (1)\end{aligned}$$

Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm biểu diễn của $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$, $\overline{z}_3$.

Suy ra A', B', C' lần lượt đối xứng với A, B, C qua trục Ox.
Do đó $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$.

- Ta có (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD}$, trong đó $OA' = OB' = 2OC' = 2$, $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC'}$.
Suy ra tứ giác $OA'DB'$ là hình thoi có $OA' = OB' = 2$, $OD = \frac{3}{2}$ và $C' \in OD$; $OC' = 1$.
- Ta có $DC' = \frac{1}{2} \Rightarrow IC' = ID - DC' = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Do đó $IC' = \frac{1}{3}ID \Rightarrow S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{\triangle OA'B'}$.

$$S_{\triangle OA'B'} = 2S_{\triangle OA'I} = OI.\sqrt{OA'^2 - OI^2} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{4 - \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{55}}{16}.$$

Vậy $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} = \frac{\sqrt{55}}{16}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 46. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $3a^3$. (B) a^3. (C) $12\sqrt{2}a^3$. (D) $4\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

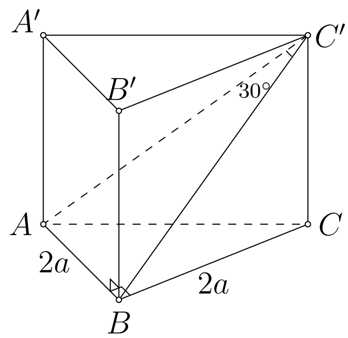
Ta có $BA \perp BC$ và $BA \perp AA' \Rightarrow BA \perp (ACC'A')$.

Suy ra góc $(BC', (AC'A')) = (BC', C'A) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

Tam giác ABC' vuông tại A, có $AC' = AB.\cot\widehat{AC'B} = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác CAC' vuông tại C, có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = 4a^3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (D)

Câu 47. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln\frac{43}{8}$ ↗	$\ln 6$ ↘	$\ln 2$ ↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(5;6)$. (B) $(4;5)$. (C) $(2;3)$. (D) $(3;4)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = \ln(f(x)) \Leftrightarrow f(x) = e^{g(x)}$.

Từ bảng biến thiên ta được

$$g(x_1) = \ln\frac{43}{8} \Rightarrow f(x_1) = \frac{43}{8}.$$
$$g(x_2) = \ln 6 \Rightarrow f(x_2) = 6.$$
$$g(x_3) = \ln 2 \Rightarrow f(x_3) = 2.$$

Ta có $f'(x) - g'(x) = g'(x).e^{g(x)} - g'(x) = g'(x)\left[e^{g(x)} - 1\right]$.

$$f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g'(x) = 0. \\ e^{g(x)} - 1 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g'(x) = 0. \\ g(x) = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ là.

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x_1}^{x_3} |f'(x) - g'(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} |f'(x) - g'(x)|\, \mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} |f'(x) - g'(x)|\, \mathrm{d}x \\
&= \left| \int_{x_1}^{x_2} [f'(x) - g'(x)]\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} [f'(x) - g'(x)]\, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| [f(x) - g(x)]|_{x_1}^{x_2} \right| + \left| [f(x) - g(x)]|_{x_2}^{x_3} \right| \\
&= \left| [f(x_2) - g(x_2)] - [f(x_1) - g(x_1)] \right| + \left| [f(x_3) - g(x_3)] - [f(x_2) - g(x_2)] \right| \\
&= \left| (6 - \ln 6) - \left(\frac{43}{8} - \ln \frac{43}{8} \right) \right| + |(2 - \ln 2) - (6 - \ln 6)| \approx 3,42 \in (3; 4).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2| = 2|z - \overline{z}|$ và $|(z-4)(\overline{z}-4i)| = |z+4|^2$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} - 4i = \overline{z + 4i} \Rightarrow |\overline{z} - 4i| = |\overline{z + 4i}| = |z + 4i|$.
Do đó

$$\begin{aligned}
|(z-4)(\overline{z}-4i)| = |z+4i|^2 &\Leftrightarrow |z-4|.|\overline{z}-4i| = |z+4i|^2 \\
&\Leftrightarrow |z-4|.|z+4i| = |z+4i|^2. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z+4i| = 0 \\ |z-4| = |z+4i|. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Xét (1) : $|z + 4i| = 0 \Leftrightarrow z + 4i = 0 \Leftrightarrow z = -4i \Rightarrow \overline{z} = 4i$.
  Khi đó $\begin{cases} z^2 = -16 \Rightarrow |z^2| = 16 \\ |z - \overline{z}| = |-8i| = 8 \end{cases}$.
  Suy ra $|z^2| = 2|z - \overline{z}|$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

- Xét (2) : $|z - 4| = |z + 4i|$.
  Giả sử $z = a + bi$, với $a,\ b \in \mathbb{R}$.
  Ta có (2) $\Leftrightarrow (a-4)^2 + b^2 = a^2 + (b+4)^2 \Leftrightarrow b = -a$.
  Hay $z = a - ai \Rightarrow z^2 = -2a^2 i \Rightarrow |z^2| = 2a^2$.
  Mặt khác $z - \overline{z} = -2ai$.
  Suy ra $|z - \overline{z}| = 2|a|$.

  Khi đó $|z^2| = 2|z - \overline{z}| \Leftrightarrow 2a^2 = 4|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 2 - 2i \\ z = -2 + 2i \end{array}\right.$.

Vậy có 4 số phức $z = 0$, $z = 2 - 2i$, $z = -2 + 2i$, $z = -4i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

A. 39. B. $12\sqrt{3}$. C. 18. D. $28\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $M(a;0;0)$ và $N(0;0;b)$.
Nhận xét: (S) tiếp xúc (Oxz) mà $MN \subset (Oxz)$ tiếp xúc (S).
Suy ra MN tiếp xúc (S) tại tiếp điểm của (S) và $(Oxz) \Rightarrow A(1;0;9)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(a-1;0;-9)\\ \overrightarrow{AN}=(-1;0;b-9)\end{cases} \Rightarrow \frac{a-1}{-1}=\frac{-9}{b-9} \Rightarrow (a-1)(b-9)=9.$$

Khi đó $OIMN$ có $\triangle OMN$ vuông tại O, $(IMN)\perp(OMN)$ (do $IA\subset(IMN)$, $IA\perp(OMN)$).
Suy ra Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ bằng $\frac{13}{2}$.
Suy ra $\frac{1}{2}\cdot 3.MN=\frac{IM.IN.MN}{4.\frac{13}{2}} \Leftrightarrow IM.IN=39.$ (1)
Mà $IM=\sqrt{(a-1)^2+3^2+9^2}=\sqrt{(a-1)^2+90}$.

$IN=\sqrt{1^2+3^2+(b-9)^2}=\sqrt{10+\dfrac{81}{(a-1)^2}}$.

Thay vào (1) ta được: $[(a-1)^2+90]\left[10+\frac{81}{(a-1)^2}\right]=1521 \Leftrightarrow (a-1)^2=27$.

Ta có $\begin{cases}AM=\sqrt{(a-1)^2+81}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}\\ AN=\sqrt{1+(b-9)^2}=\sqrt{1+3}=2\end{cases}$, suy ra $AM.AN=12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|x^4-2mx^2+64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A 5. B 6. C 12. D 11.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=x^4-2mx^2+64x$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3-2mx+64=0.\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm đơn phân biệt.
Do đó hàm số $y=|g(x)|$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị.
Ta có $g'(x)=4x^3-4mx+64$.
Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow m=x^2+\frac{16}{x}$ (vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $g'(x)=0$).
Xét hàm số $h(x)=x^2+\frac{16}{x}$.
Ta có $h'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}$.
Do đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le 12$.
Vậy có 12 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 39

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022
Môn: Toán
Năm học: 2021 – 2022
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x^2 + C$.
B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là

A. $y' = -x^{-4}$.
B. $y' = -3x^{-4}$.
C. $y' = -\frac{1}{3}x^{-4}$.
D. $y' = -\frac{1}{2}x^{-2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^{-4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $y = -x^3 + 3x$.
B. $y = x^3 - 3x$.
C. $y = -x^4 + 2x^2$.
D. $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có đây là đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $x = 0$.
B. $x + y + z = 0$.
C. $z = 0$.
D. $y = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{2x+4} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{2x+4} = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình $y = 1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0; +\infty)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $(0; 1)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm nghịch biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 7i$ có tọa độ là

Ⓐ $(2; -7)$. Ⓑ $(-7; 2)$. Ⓒ $(2; 7)$. Ⓓ $(-2; 7)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 7i$ có tọa độ là $(2; -7)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Cho 2 số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

Ⓐ $3 + 4i$. Ⓑ $1 + 4i$. Ⓒ $z = 5 + i$. Ⓓ $3 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - i = 3 + 2i$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

Ⓐ $-4\log a$. Ⓑ $8\log a$. Ⓒ $2\log a$. Ⓓ $-2\log a$.

Lời giải.

Ta có $4\log\sqrt{a} = 4\log a^{\frac{1}{2}} = 2\log a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(x) = -\sin x$. Ⓑ $f(x) = \cos x$. Ⓒ $f(x) = \sin x$. Ⓓ $f(x) = -\cos x$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (-\cos x + C)' = \sin x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Cho hình trụ có chiều cao $h = 1$ và bán kính đáy $r = 2$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 3π. Ⓑ 4π. Ⓒ 2π. Ⓓ 6π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ 15. Ⓑ 10. Ⓒ 2. Ⓓ 30.

Lời giải.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3} \cdot 3.10 = 10$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15. Mô đun của số phức $z = 3 + 4i$ bằng

(A) $\sqrt{7}$. (B) 5. (C) 7. (D) 25.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Chọn đáp án (B)

Câu 16. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là

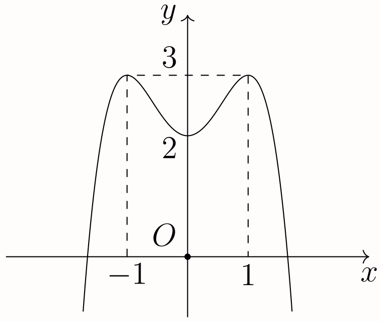
(A) $x = \dfrac{1}{3}$. (B) $x = 0$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 2x + 1 = 2 - x \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án (A)

Câu 17.
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.



Lời giải.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ bằng với số giao điểm của đường thẳng $(d) : y = 1$ và đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.
Dựa vào hình vẽ, ta thấy (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án (C)

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x + 1) > 2$ là

(A) $(24; +\infty)$. (B) $(9; +\infty)$. (C) $(25; +\infty)$. (D) $(31; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(x + 1) > 2 \Leftrightarrow x + 1 > 5^2 \Leftrightarrow x > 24$.
Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là $S = (24; +\infty)$.
Chọn đáp án (A)

Câu 19. Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\displaystyle\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2\right] \mathrm{d}x$ bằng

(A) 2. (B) 6. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

$$\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 2\mathrm{d}x = 2 + 4 = 6.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là

Ⓐ $(-\infty; 4)$. Ⓑ $(4; +\infty)$. Ⓒ $(5; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

ĐKXĐ $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

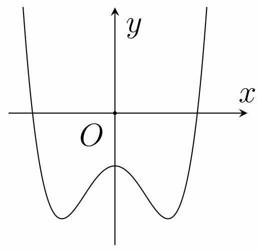
Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là $(4; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 22. Số các tổ hợp chập 3 của 12 phần tử là

Ⓐ 1728. Ⓑ 220. Ⓒ 1320. Ⓓ 36.

Lời giải.

Số các tổ hợp chập 3 của 12 phần tử là $C_{12}^3 = 220$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

Ⓐ $(1; 0; -3)$. Ⓑ $(1; 0; 0)$. Ⓒ $(1; 2; 0)$. Ⓓ $(0; 2; -3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $A(1; 2; -3)$ lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(1; 2; 0)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

Ⓐ 3. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $2\sqrt{6}$. Ⓓ 12.

Lời giải.

Đường kính của (S) bằng $2R = 2\sqrt{6}$.

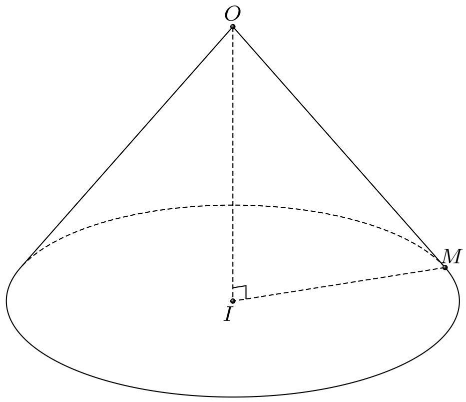
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 3$ và $IM = 4$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành hình nón có độ dài đường sinh bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Hình nón có chiều cao $h = OI = 3$, bán kính đáy $r = IM = 4$ nên độ dài đường sinh là $\ell = OM = \sqrt{IM^2 + OI^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $3a^3$. (B) $6a^3$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Ta có thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = 3a^2.2a = 6a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$ Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

(A) $\overrightarrow{u_4} = (2; 1; 1)$. (B) $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -1)$. (C) $\overrightarrow{u_3} = (1; -2; 3)$. (D) $\overrightarrow{u_3} = (1; 2; 3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_3} = (1; -2; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Nếu $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\displaystyle\int_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$\int_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$$

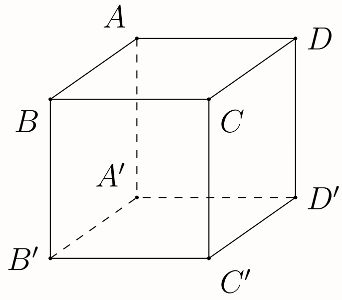
Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

Ⓐ $2a$. Ⓑ $\sqrt{2}a$. Ⓒ $3a$. Ⓓ a.



Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(BD, A'C') = \mathrm{d}\big(BD, (A'B'C'D')\big) = \mathrm{d}\big(B, (A'B'C'D')\big) = BB' = 3a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 30. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = x^4 - x^2$. Ⓑ $y = x^3 + x$. Ⓒ $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. Ⓓ $y = x^3 - x$.

Lời giải.

Nhận thấy hàm số $y = x^3 + x$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31. Giá trị trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

Ⓐ 15. Ⓑ 10. Ⓒ -1. Ⓓ -12.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9;$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = -1;$$

$$f(-2) = 8, f(-1) = 15, f(2) = -12.$$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 5 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và và song song với (P) có phương trình là

Ⓐ $2x - y + 3z + 9 = 0$. Ⓑ $2x + y + 3z - 3 = 0$.

Ⓒ $2x + y + 3z + 3 = 0$. Ⓓ $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Lời giải.

Vì mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng này nhận véc-tơ $\vec{n}_P = (2; -1; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến và do mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ nên có phương trình là

$$2(x - 0) - (y + 3) + 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z - 9 = 0.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 33. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[40; 60]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

Ⓐ $\frac{2}{5}$. Ⓑ $\frac{4}{7}$. Ⓒ $\frac{3}{7}$. Ⓓ $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Số cách chọn một số thuộc đoạn $[40; 60]$ có 21 cách chọn nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 21$.
Gọi A là biến cố : "Chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục".
Tìm $n(A)$.

- Trường hợp 1. Trên đoạn $[40; 49]$ gồm các số $\{45; 46; \ldots; 49\}$ nên có 5 cách chọn.
- Trường hợp 2. Trên đoạn $[50; 59]$ gồm các số $\{56; 57; \ldots; 59\}$ nên có 4 cách chọn.

Suy ra $n(A) = 4 + 5 = 9$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; 2; -2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 0; -1)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2; 4; 2) = 2\vec{u}$, $\vec{u} = (1; 2; 1)$.
Đường thẳng cần tìm vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng nhận véc-tơ $\vec{u} = (1; 2; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương và do đường thẳng đi qua $A(1; 2; -1)$ nên phương trình đường thẳng là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6 = 0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1.z_2$ bằng

Ⓐ -5. Ⓑ -7. Ⓒ 7. Ⓓ 5.

Lời giải.

Áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} = -1 \\ z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = 6. \end{cases}$

Vậy $z_1 + z_2 + z_1.z_2 = (z_1 + z_2) + (z_1.z_2) = -1 + 6 = 5$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. Ⓑ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Ⓒ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Ⓓ $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log\left[(6-x)(x+2)\right]$?

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ Vô số. Ⓓ 9.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $(6-x)(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

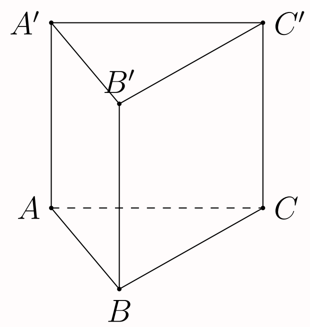
Vậy có 7 số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log\left[(6-x)(x+2)\right]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 38.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2$, $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $45°$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' (\text{do}\, CC' \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp C'B$.

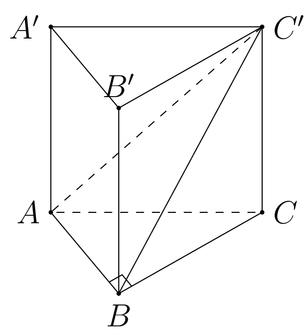
Do đó $\begin{cases} (C'AB) \cap (ABC) = AB \\ C'B \perp AB \\ CB \perp AB. \end{cases}$

$\Rightarrow \left((C'AB); (ABC)\right) = (C'B; BC) = \widehat{C'BC}$.

$\triangle ABC$ vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$.

Xét $\triangle C'BC$ vuông có $\tan\widehat{C'BC} = \dfrac{C'C}{BC} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \widehat{C'BC} = 45°$.

Vậy $\left((C'AB); (ABC)\right) = 45°$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + 2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -1. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 4(m-1)x$.

- Với $m = 0$ thì $f(x) = -2x^2$ là hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.
  Khi đó $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2)$ (không thỏa yêu cầu bài toán).

- Với $m \neq 0$ thì hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng và luôn có một điểm cực trị $x = 0$.
  Khi đó, từ yêu cầu bài toán ta suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m + 4(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.
  Do đó $f'(x) = 2x^3 - 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (0;2) \\ x = 0 \notin (0;2) \\ x = 1 \in (0;2). \end{array}\right.$
  Ta có $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$ tại $x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b - 1)(a.2^b - 5) < 0$?

A 20. B 21. C 22. D 19.

Lời giải.

Ta có $(5^b - 1)(a.2^b - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^b - 1 = 0 \\ a.2^b - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \log_2 \dfrac{5}{a}. \end{array}\right.$

- **TH1:** $\log_2 \dfrac{5}{a} < b < 0$.
  Khi đó để tồn tại đúng hai giá trị của b thì $b \in \{-2; -1\}$.
  Do đó $-3 \leq \log_2 \dfrac{5}{a} < -2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leq \dfrac{5}{a} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 20 < a \leq 40$.
  Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{21; 22; \ldots; 40\}$.

- **TH2:** $0 < b < \log_2 \dfrac{5}{a}$.
  Khi đó để tồn tại đúng hai giá trị của b thì $b \in \{1; 2\}$.
  Do đó $2 < \log_2 \dfrac{5}{a} \leq 3 \Leftrightarrow 4 < \dfrac{5}{a} \leq 8 \Leftrightarrow \dfrac{5}{8} \leq a < \dfrac{5}{4}$.
  Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a = 1$.

Vậy có 21 số nguyên dương a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

A 4. B 15. C 25. D 20.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Đặt $G(x) = F(x) + C$ (với C là hằng số).

Ta có $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(0) = F(5) - \big(G(0) - C\big) = F(5) - G(0) + C$.

Suy ra $C = a$.

Do đó
$$S = \int_0^5 |F(x) - G(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^5 |a|\,\mathrm{d}x = \int_0^5 a\,\mathrm{d}x = 5a.$$

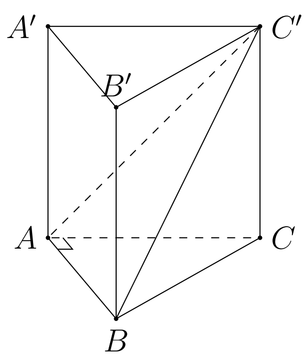
Theo giả thiết $S = 20 \Leftrightarrow 5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{1}{8}a^3$. (B) $\dfrac{3}{8}a^3$. (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải.



Diện tích đáy là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$.

Suy ra $\big(BC', (ACC'A')\big) = (BC', AC') = \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

Khi đó $AC' = AC.\cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

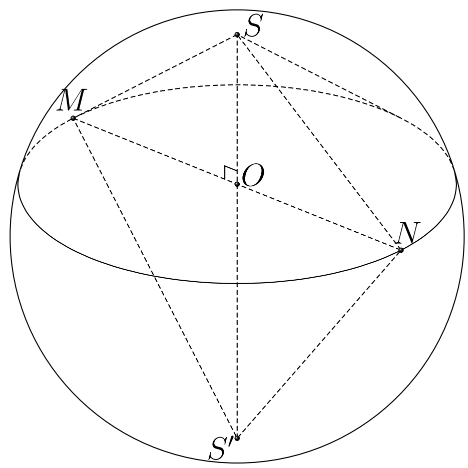
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là
$$V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° và chiều cao bằng 1. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng

(A) 16π. (B) 12π. (C) 4π. (D) 48π.

Lời giải.



Xét $\triangle SMO$ vuông có
$$\tan\widehat{MSO} = \frac{OM}{OS} \Rightarrow OM = OS.\tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Kẻ đường kính SS' của mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Tam giác SMS' vuông tại M có $MO \perp SS'$.

Suy ra $OM^2 = OS.OS' \Leftrightarrow OS' = \dfrac{OM^2}{OS} = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{1} = 3$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là
$$R = \frac{OS + OS'}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Vậy diện tích của (S) là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.2^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Xét các số thực x, y sao cho $49^{9-y^2} \geq a^{4x-\log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x - 3y$ bằng

(A) $\dfrac{121}{4}$. (B) $\dfrac{39}{4}$. (C) 24. (D) 39.

Lời giải.

Ta có

$$49^{9-y^2} \geq a^{4x-\log_7 a^2} \Leftrightarrow \log_7\left(49^{9-y^2}\right) \geq \log_7\left(a^{4x-\log_7 a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (9-y^2).\log_7(49) \geq (4x - \log_7 a^2).\log_7 a.$$

Do đó ta được $2.(9-y^2) \geq 2.(2x - \log_7 a).\log_7 a.$ (1)
Đặt $t = \log_7 a$ thì (1) trở thành $t^2 - 2x.t + 9 - y^2 \geq 0.$ (2)
Khi đó (1) đúng với mọi $a > 0 \Leftrightarrow$ (2) đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = x^2 - 9 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9.$$

Mặt khác $(4x-3y)^2 \leq (16+9).(x^2+y^2) = 225 \Rightarrow 4x - 3y \leq 15.$
Suy ra $P = x^2 + y^2 + 4x - 3y \leq 9 + 15 = 24.$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} > 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{12}{5};\ y = -\dfrac{9}{5}.$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 24.
Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2|z_3| = 2$ và $3z_1z_2 = 4z_3(z_1+z_2)$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3z_1z_2 = 4z_3(z_1+z_2)$, suy ra $|3z_1z_2| = |4z_3(z_1+z_2)| \Leftrightarrow |z_1+z_2| = 3.$
Mặt khác

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Leftrightarrow 9 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(2^2+2^2\right)$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{7} = AB.$$

Lại có $3z_1z_2 = 4z_3.(z_1+z_2) \Leftrightarrow z_1.(3z_2 - 4z_3) = 4z_2z_3.$
Suy ra

$$|z_1|.|3z_2 - 4z_3| = |4z_2z_3| \Leftrightarrow |3z_2 - 4z_3| = 4$$
$$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}\right| = 4$$
$$\Leftrightarrow 9.OB^2 + 16.OC^2 - 24.OB.OC.\cos\widehat{BOC} = 16$$
$$\Leftrightarrow \cos\widehat{BOC} = \frac{3}{4}.$$

Áp dụng định lí cosin cho $\triangle BOC$ ta có

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2.OB.OC.\cos\widehat{BOC}} = \sqrt{4 + 1 - 4.\frac{3}{4}} = \sqrt{2}.$$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Tương tự ta tính được $AC = \sqrt{2}\cdot$

Do đó nửa chu vi của $\triangle ABC$ là $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p.(p - AB).(p - AC).(p - BC)} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2| = |z - \overline{z}|$ và $|(z+2)(\overline{z} + 2i)| = |z - 2i|^2$?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z^2| = |z - \overline{z}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\,|b|$. (*)

Mặt khác $|(z+2)(\overline{z}+2i)| = |z-2i|^2 \Leftrightarrow |z+2|\,.\,|\overline{z}+2i| = |z-2i|^2$

$$\Leftrightarrow |z+2|\,.\,\left|\overline{z-2i}\right| = |z-2i|^2$$

$$\Leftrightarrow |z+2|\,.\,|z-2i| = |z-2i|^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z-2i| = 0 \\ |z+2| = |z-2i|. \end{array}\right.$$

Với $|z-2i| = 0 \Leftrightarrow z = 2i$, ta có $a = 0$, $b = 2$ (thoả mãn $(*)$).

Với $|z+2| = |z-2i|$, ta có $(a+2)^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = -b$, thay vào (*) ta được:

$$b^2 + b^2 = 2\,|b| \Leftrightarrow b^2 = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = -1 + i \\ z = 1 - i. \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

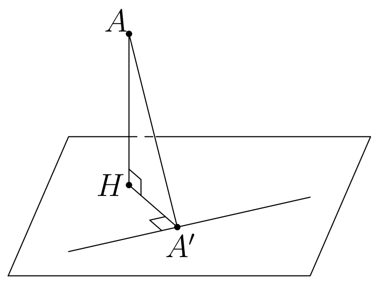
Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Phương trình của (P) là

(A) $2x - z = 0$. (B) $2x + z = 0$. (C) $x - z = 0$. (D) $x + z = 0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (P) và A' là hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Oy

$$\Rightarrow A'(0;1;0).$$



Khi đó khoảng cách từ A đến (P) là đoạn thẳng $AH \leq AA'$.

Độ dài đoạn thẳng AH dài nhất khi H và A' trùng nhau.

Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{A'A} = (2;0;-1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P): $\overrightarrow{A'A} = (2;0;-1)$ là

$$2(x-0) + 0(y-1) + (-1)(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln 10$ ↗	$\ln 42$ ↘	$\ln 37$ ↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(38; 39)$. **B** $(25; 26)$. **C** $(28; 29)$. **D** $(35; 36)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = \ln f(x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow g'(x).f(x) = g'(x) \Leftrightarrow g'(x).[f(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ là:

$$\begin{aligned} S = \int_{x_1}^{x_3} |f'(x) - g'(x)|\, \mathrm{d}x &= \left|\int_{x_1}^{x_2} \left(f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} \left(f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \mathrm{d}x\right| \\ &\overset{t=f(x)}{=} \left|\int_{10}^{42} \left(1 - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t\right| + \left|\int_{42}^{37} \left(1 - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t\right| \\ &\approx 35,438 \in (35; 36). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4; 1; 2)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

A $6\sqrt{2}$. **B** 14. **C** 8. **D** $9\sqrt{2}$.

Lời giải.

__Cách 1:__

Ta có $\mathrm{d}\big(I, (Oxy)\big) = 2$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4; 1; 0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4; 1; 0)$ do $MN \subset (Oxy)$.

Gọi $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$ ta có $\overrightarrow{AM} = (m - 4; -1; 0)$ và $\overrightarrow{AN} = (-4; n - 1; 0)$.

Do $A \in MN$ nên $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} m - 4 = -4k \\ -1 = k(n - 1) \end{cases} \Rightarrow (m - 4)(n - 1) = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{4n}{n - 1}, n - 1 \neq 0.$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn OI: $4x + y + 2z - \dfrac{21}{2} = 0$.

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn OM: $x = \dfrac{m}{2}$.

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn ON: $y = \dfrac{n}{2}$.

Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là $J\left(\dfrac{m}{2}; \dfrac{n}{2}; \dfrac{-n^2 + 6n - 21}{4n - 4}\right)$.

Theo giả thuyết cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$ nên $OJ=\dfrac{7}{2}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow OJ^2=\frac{49}{4}\\&\Leftrightarrow \frac{4n^2}{(n-1)^2}+\frac{n^2}{4}+\frac{\left(n^2-6n+21\right)^2}{16(n-1)^2}=\frac{49}{4}\\&\Leftrightarrow n^4-4n^3-10n^2+28n+49=0\\&\Leftrightarrow n=1\pm2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vì $n>0$ nên chọn $n=1+2\sqrt{2}$, suy ra $m=4+\sqrt{2}$.
Khi đó $AM.AN=6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Dễ thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(1;4;0)$ do $MN\subset(Oxy)$.
Gọi $M(m;0;0)$; $N(0;n;0)$ ta có $\overrightarrow{AM}=(m-4;-1;0)$ và $\overrightarrow{AN}=(-4;n-1;0)$.
Do $A\in MN$ nên $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AN}\Rightarrow\begin{cases}m-4=-4k\\-1=k(n-1)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{m}=1.$
Gọi J là trung điểm $MN\Rightarrow J\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{n}{2};0\right)$ và $I(4;1;2)$ thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (Oxy) tại điểm J. Phương trình Δ là $\begin{cases}x=\dfrac{m}{2}\\y=\dfrac{n}{2}\\z=t.\end{cases}$

Suy ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là điểm $K\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{n}{2};t\right)$.

Theo giả thiết ta có hệ $\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{m}=1\\OK=\dfrac{7}{2}\\IK=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{m}=1\\\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}\\\left(\dfrac{m}{2}-4\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^2+(t-2)^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4n}{n-1}\\4m+n+4t-21=0\\\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4n}{b-1}\\t=\dfrac{n^2-6n+21}{4(n-1)}\\\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}.\end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{4n^2}{(n-1)^2}+\dfrac{\left(n^2-6n+21\right)^2}{16(n-1)^2}=\dfrac{49}{4}$

$$\Leftrightarrow 4n^2+64\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2+\left(n-5+\frac{16}{n-1}\right)^2=196$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+64+\frac{128}{n-1}+\frac{64}{(n-1)^2}+(n-5)^2+32(n-5).\frac{1}{n-1}+\frac{256}{(n-1)^2}=196$$

$$\Leftrightarrow 5n^2-10n+25+\frac{320}{(n-1)^2}+32(n-5+4).\frac{1}{n-1}=132\Leftrightarrow(n-1)^2+\frac{64}{(n-1)^2}=16$$

$$\Leftrightarrow\left[(n-1)^2-8\right]^2=0\Leftrightarrow(n-1)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&n=1-2\sqrt{2}\\&n=1+2\sqrt{2}.\end{aligned}\right.$$

Với $n = 1 - 2\sqrt{2}$ ta được $m = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow AM.AN = 6\sqrt{2}$.
Với $n = 1 + 2\sqrt{2}$ ta được $m = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow AM.AN = 6\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + 2ax^2 + 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A 2. B 6. C 5. D 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 8x$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4ax + 8$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4ax + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -x^2 - \dfrac{2}{x}$.
(do $x = 0$ không thỏa mãn $f'(x) = 0$ nên $x \neq 0$).
Xét hàm số $g(x) = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ có $g'(x) = -2x + \dfrac{2}{x^2}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm đơn $x = 0$ nên

$$\begin{aligned} \text{yêu cầu của bài toán} &\Leftrightarrow \text{hàm số} f(x) \text{có đúng một điểm cực trị} \\ &\Leftrightarrow \text{phương trình} a = g(x) \text{có một nghiệm đơn duy nhất} \\ &\Leftrightarrow a \geq -3. \end{aligned}$$

Do a nguyên âm nên $a \in \{-3; -2; -1\}$.
Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D

— **HẾT** —

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 40

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022
Môn: Toán
Năm học: 2021 – 2022
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A $y = x^3 - 3x$. **B** $y = -x^3 + 3x$. **C** $y = x^2 - 2x$. **D** $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy:

- Đây là hàm số dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$.
- Có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ suy ra $a < 0$.

Vậy hàm số thỏa mãn là $y = -x^3 + 3x$.
Chọn đáp án B □

Câu 2. Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$ thì $\displaystyle\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2\right] \mathrm{d}x$ bằng

A 8. **B** 5. **C** 9. **D** 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 2\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = 8$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Phần ảo của số phức $z = (2 - i)(1 + i)$ bằng

A 3. **B** 1. **C** -1. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $z = (2 - i)(1 + i) = 3 + i$. Vậy phần ảo của số phức z là 1.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int e^x dx = xe^x + C$. Ⓑ $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

Ⓒ $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. Ⓓ $\int e^x dx = e^x + C$.

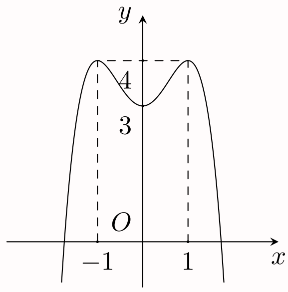
Lời giải.

Ta có $\int e^x dx = e^x + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ -1. Ⓓ 3.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy giá trị cực tiểu bằng 3.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$ mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a < c < b$. Ⓑ $a < b < c$. Ⓒ $b < a < c$. Ⓓ $c < a < b$.

Lời giải.

Ta có $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2 = 3^{\sqrt{4}}$, $c = 3^{\sqrt{6}}$ và $\begin{cases} \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} \\ 3 > 1 \end{cases} \Rightarrow b < a < c$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7. Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{2}^{5} f(x)dx = -5$ thì $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ bằng

Ⓐ -7. Ⓑ -3. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx = 2 - 5 = -3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau?

Ⓐ 120. Ⓑ 5. Ⓒ 3125. Ⓓ 1.

Lời giải.

Số các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5 là $5! = 120$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Cho khối nón có diện tích đáy bằng $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $3a^3$. Ⓑ $6a^3$. Ⓒ $2a^3$. Ⓓ $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón đã cho bằng $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a^2.2a = 2a^3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 11. Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

$$2^{x^2+1} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

Ⓐ $1 - \log a$. Ⓑ $2 + \log a$. Ⓒ $2 - \log a$. Ⓓ $1 + \log a$.

Lời giải.

Ta có $\log(100a) = \log(100) + \log a = 2 + \log a$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 15. Ⓓ 30.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S.h = \dfrac{1}{3} \cdot 6.5 = 10$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ⓐ $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. Ⓑ $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. Ⓒ $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Ⓓ $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

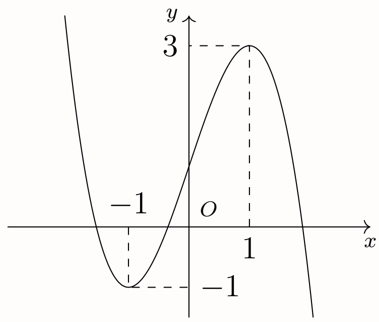
Lời giải.

Ta có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ

Ⓐ $(1; -1)$. Ⓑ $(3; 1)$. Ⓒ $(1; 3)$. Ⓓ $(-1; -1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(-1; -1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16. Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w = 1 - 4i$?

Ⓐ $z_2 = 3 + 4i$. Ⓑ $z_1 = 5 - 4i$. Ⓒ $z_3 = 1 - 5i$. Ⓓ $z_4 = 1 + 4i$.

Lời giải.

Số phức có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w = 1 - 4i$ là $z_1 = 5 - 4i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n $(n \geq 2)$ bằng

Ⓐ 3.2^{n-1}. Ⓑ 3.2^{n+2}. Ⓒ 3.2^n. Ⓓ 3.2^{n+1}.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$ có số hạng tổng quát $u_n = 3.2^{n-1}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

Ⓐ $(-4; 2; -6)$. Ⓑ $(4; -2; 6)$. Ⓒ $(2; -1; 3)$. Ⓓ $(-2; 1; -3)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm là $(2; -1; 3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi diện tích đáy và chiều cao tương ứng của khối chóp và khối lăng trụ là B và h.

Ta có $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3}Bh \\ V_2 = Bh \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $Q(2;1;1)$. B. $M(1;2;3)$. C. $P(2;1;-1)$. D. $N(1;-2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $P(2;1;-1)$.

Chọn đáp án C

Câu 21 (2H3Y2-3). Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oxy) là

A. $z = 0$. B. $x = 0$. C. $y = 0$. D. $x + y = 0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Chọn đáp án A

Câu 22. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM \leq R$. B. $OM > R$. C. $OM = R$. D. $OM < R$.

Lời giải.

Khẳng định đúng là $OM > R$.

Chọn đáp án B

Câu 23. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. B. $(2;7)$. C. $(7;2)$. D. $(-2;-7)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là $(2;7)$.

Chọn đáp án B

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$ là

A. $x = \dfrac{3}{4}$. B. $x = 1$. C. $x = \dfrac{1}{2}$. D. $x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Chọn đáp án B

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;+\infty)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Tập xác định của hàm số là $D = (1;+\infty)$
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = -2$. Ⓓ $x = -2$.

Lời giải.

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$.
Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là $x = -2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai vectơ $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-6;3)$. Ⓑ $(-4;-8;4)$. Ⓒ $(-2;-10;-3)$. Ⓓ $(-2;-10;3)$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u} = (1;-4;0)$; $3\vec{v} = (-3;-6;3)$.
Suy ra $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2;-10;3)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

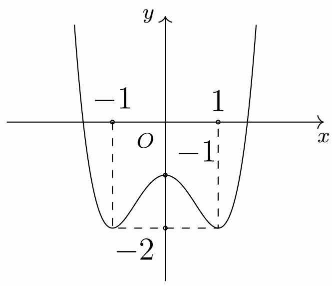
Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 29.
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?



A 1. **B** 6. **C** 7. **D** 5.

Lời giải.

Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Suy ra phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1. \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + C$.
B $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.
C $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.
D $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (1 + \mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Khi đó $z_1^2 + z_2^2$ bằng

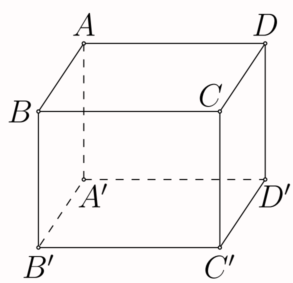
A 6. **B** $8i$. **C** $-8i$. **D** -6.

Lời giải.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1.z_2 = 5. \end{cases}$

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 4 - 10 = -6$.
Chọn đáp án D □

Câu 32.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



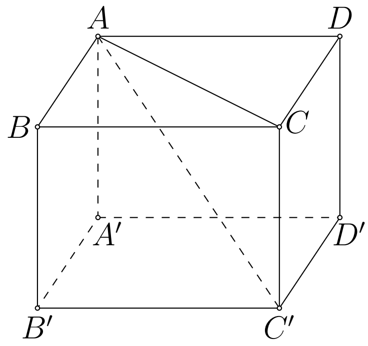
A $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là $a > 0$.
Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{3}$.
Do $CC' \perp (ABCD)$ nên $\left(\widehat{AC'; (ABCD)}\right) = (\widehat{AC'; AC}) = \widehat{CAC'}$.
Trong $\triangle ACC'$ vuông tại C ta có

$$\sin \widehat{CAC'} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2x + 3 = 0$ là

(A) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.
(B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
(C) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.
(D) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng đã cho nên

$$R = \frac{|1 - 2.2 + 2.3 + 3|}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Vậy phương trình của mặt cầu là $4(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3}$ bằng

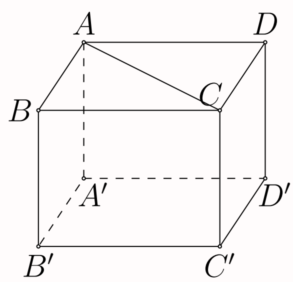
(A) $3\log_a b$.
(B) $\log_a b$.
(C) $-3\log_a b$.
(D) $\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3} = -\log_a b^{-3} = 3\log_a b$.
Chọn đáp án (A) □

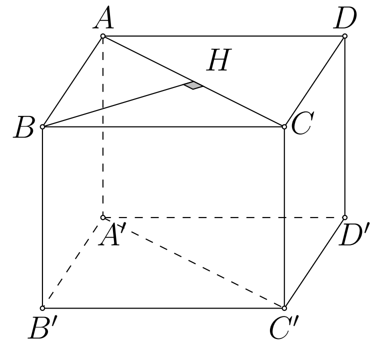
Câu 35.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
(B) $\frac{3}{2}$.
(C) $3\sqrt{2}$.
(D) 3.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BH \perp (ACC'A')$.
Suy ra $\mathrm{d}\big(B;(ACC'A')\big) = BH = \dfrac{1}{2}AC$.
Mà $ABCD$ là hình vuông cạnh 3 nên $AC = 3\sqrt{2}$.
Vậy $\mathrm{d}\big(B;(ACC'A')\big) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A)

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
(A) $(-1;+\infty)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$
Chọn đáp án (C)

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là
(A) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 2-3t \\ z = 1-t. \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2-3t \\ z = 1-t. \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2+3t \\ z = 1+t. \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3-2t \\ z = -1+t. \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P).
Do d vuông góc với (P) nên d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;-1)$.
Vậy phương trình của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2-3t \\ z = 1-t. \end{cases}$
Chọn đáp án (B)

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[30;50]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng
(A) $\dfrac{11}{21}$. (B) $\dfrac{8}{21}$. (C) $\dfrac{13}{21}$. (D) $\dfrac{10}{21}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 21$.
Gọi A là biến cố: "chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục". Khi đó $A = \{34; 35; 36; 37; 38; 39; 45; 46; 47; 48; 49\} \Rightarrow n(A) = 11$.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11}{21}$.
Chọn đáp án (A)

Câu 39. Biết $F(x)$; $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + a(a > 0).$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$; $y = G(x)$; $x = 0$; $x = 4$. Khi $S = 8$ thì a bằng

(A) 8. (B) 4. (C) 12. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $F(x) = G(x) + c$.
Từ giả thiết suy ra $S = \displaystyle\int_0^4 |F(x) - G(x)|\, dx = 8 \Rightarrow |F(x) - G(x)| = 2$ hay $|c| = 2$.
Ta có $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + a \Leftrightarrow F(4) - F(0) = F(4) - G(0) + a \Leftrightarrow -G(0) - c = -G(0) + a \Leftrightarrow a = -c \Rightarrow a = \pm 2$.
Mà $a > 0 \Rightarrow a = 2$
Chọn đáp án (D)

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

(A) -17. (B) -16. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 4(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ và $f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$.
Ta có $f(0) = -1,\ f(1) = 1,\ f(2) = -17$.
Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = -17$
Chọn đáp án (A)

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(4^b - 1\right)\left(a.3^b - 10\right) < 0$?

(A) 182. (B) 179. (C) 180. (D) 181.

Lời giải.

Theo đề bài $a \in \mathbb{Z}$; $a \geq 1$ và $b \in \mathbb{Z}$.
Trường hợp 1: $\begin{cases} 4^b - 1 < 0 \\ a3^b - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b > \log_3 \dfrac{10}{a} \end{cases}$.
Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b \in \{-2; -1\}$.
Do đó $-2 > \log_3 \dfrac{10}{a} \geq -3 \Leftrightarrow 270 \geq a > 90$ nên $a \in \{91; 92; ...; 270\}$. Suy ra có 180 giá trị của a thoả mãn trường hợp 1.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 4^b - 1 > 0 \\ a3^b - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b < \log_3 \dfrac{10}{a} \end{cases}$.

Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b \in \{1; 2\}$.

Do đó $3 \geq \log_3 \dfrac{10}{a} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{10}{9} > a \geq \dfrac{10}{27}$ nên $a = 1$.

Suy ra có 1 giá trị của a thoả mãn trường hợp 2.

Vậy có $180 + 1 = 181$ giá trị của a thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° và chiều cao bằng 3. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng

A 144π. **B** 108π. **C** 48π. **D** 96π.

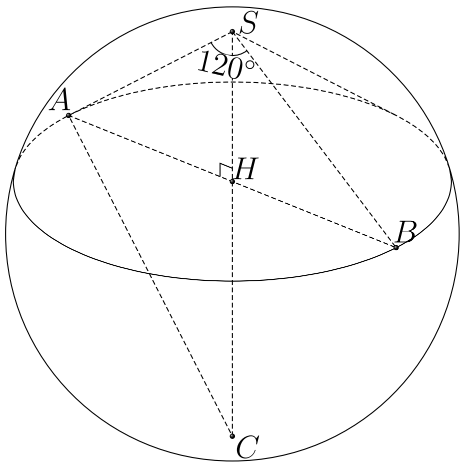
Lời giải.

Gọi H là tâm đáy, AB là đường kính của đáy hình nón và SC là đường kính của mặt cầu (S). Khi đó $SH = 3$ và $\widehat{ASC} = 60^\circ$.

$SA = \dfrac{SH}{\cos 60^\circ} = 6$ (đvdd).

$SA^2 = SH.SC \Leftrightarrow 6^2 = 3.SC \Leftrightarrow SC = 12$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = 6$ nên diện tích của (S) là $S = 4\pi.6^2 = 144\pi$ (đvdt).



Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 30$	$\nearrow$	$\ln 35$	$\searrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(33; 35)$. **B** $(37; 40)$. **C** $(29; 32)$. **D** $(24; 26)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên hàm số $g(x) = \ln f(x)$ ta có $\ln f(x) \geq \ln 3, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị là $A\left(x_1; \ln 30\right)$, $B\left(x_2; \ln 35\right)$, $C\left(x_3; \ln 3\right)$ nên $f'\left(x_1\right) = f'\left(x_2\right) = f'\left(x_3\right) = 0$ và $f\left(x_1\right) = 30$, $f\left(x_2\right) = 35$, $f\left(x_3\right) = 3$.

Do $y = f'(x)$ là hàm số bậc 3 nên phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $g'(x)$ ta có

$$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=1(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\\ x=x_3.\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$$\begin{aligned}S&=\int_{x_1}^{x_3}|g'(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

+ Tính $I_1=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\geq 0,\forall x\in\left(x_1;x_2\right)$)

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_1\Rightarrow t=f\left(x_1\right)=30$.

$x=x_2\Rightarrow t=f\left(x_2\right)=35$.

Suy ra $I_1=\displaystyle\int_{30}^{35}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=(t-\ln|t|)\Big|_{30}^{35}=35-\ln 35-30+\ln 30=5+\ln\frac{6}{7}$.

+ Tính $I_2=\displaystyle\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{x_2}^{x_3}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\leq 0$).

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_2\Rightarrow t=f\left(x_2\right)=35$.

$x=x_3\Rightarrow t=f\left(x_3\right)=3$.

Suy ra $I_2=-\displaystyle\int_{35}^{3}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=-(t-\ln|t|)\Big|_{35}^{3}=-(3-\ln 3-35+\ln 35)=32-\ln\frac{35}{3}$.

Vậy $S=5+\ln\dfrac{6}{7}+\left(32-\ln\dfrac{35}{3}\right)=37+\ln\dfrac{18}{245}\approx 34,39\in(33;35)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Xét tất cả số thực x,y sao cho $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-4x+8y$ bằng

(A) -15. (B) 25. (C) -5. (D) -20.

Lời giải.

Giả sử x,y thỏa $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a.

Ta có $P=x^2+y^2-4x+8y\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+8y-P=0$.

Suy ra điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn tâm $I(2;-4)$ và bán kính

$$R_1=\sqrt{2^2+(-4)^2+P}=\sqrt{20+P}$$

Mặt khác, $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}\Leftrightarrow\left(5-y^2\right).3\geq\left(6x-\log_3 a^3\right)\log_3 a$.

Suy ra, $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}\Leftrightarrow\left(5-y^2\right).3\geq\left(6x-3\log_3 a\right)\log_3 a$.

Đặt $t=\log_3 a, t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left(5-y^2\right).3\geq(6x-3t)t\Leftrightarrow -3t^2+6xt-15+3y^2\leq 0$.

Theo đề bài ta có $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ đúng với mọi số thực dương a nên $-3t^2+6xt-15+3y^2\leq 0$ đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Do đó $\begin{cases}-3<0\\ (3x)^2+3\left(-15+3y^2\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 9x^2+9y^2-45\leq 0\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 5$.

Suy ra tập hợp các điểm $M(x;y)$ là hình tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_2=\sqrt{5}$.
Vậy để tồn tại cặp $(x;y)$ thì đường tròn $\left(I;R_1\right)$ và hình tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$ phải có điểm chung.
Do đó $IO \le R_1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(-4)^2} \le \sqrt{20+P}+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{20+P} \Leftrightarrow P \ge -15$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -15.
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $2|z_1|=2|z_2|=|z_3|=2$ và $\left(z_1+z_2\right)z_3=3z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $\dfrac{5\sqrt{7}}{8}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{7}}{24}$. (D) $\dfrac{5\sqrt{7}}{32}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $z_3=2$.
Khi đó $\left(z_1+z_2\right)z_3=3z_1z_2$ trở thành $2\left(z_1+z_2\right)=3z_1z_2$ suy ra $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{3}{2}$.
Đặt $\dfrac{1}{z_1}=x+yi (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{1}{z_2}=\left(\dfrac{3}{2}-x\right)-yi$.
Ta có $z_3=2$ và $2|z_1|=2|z_2|=|z_3|=2$ nên $|z_1|=|z_2|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z_1}\right|=\left|\dfrac{1}{z_2}\right|=1$.

Suy ra $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{7}}{4} \\ y=-\dfrac{\sqrt{7}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}-x=\dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} -y=-\dfrac{\sqrt{7}}{4} \\ -y=+\dfrac{\sqrt{7}}{4} \end{array}\right. \end{cases}$.

Do đó $z_1=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}i; z_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$.
Nên tọa độ các điểm là $A\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right); B\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right); C(2;0)$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.\mathrm{d}(C;AB)=\dfrac{1}{2}\cdot 2.\dfrac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(2-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là:

(A) $2y-z=0$. (B) $2y+z=0$. (C) $y-z=0$. (D) $y+z=0$.

Lời giải.

Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;2)$ lên trục Ox là $M(1;0;0)$.
Khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MA}=(0;2;2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MA}=(0;2;2)$ nên $0.(x-1)+2(y-0)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow y+z=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\bar{z}|$ và $|(z-2)(\bar{z}-2i)|=|z+2i|^2$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

$$|(z-2)(\bar{z}-2i)| = |z+2i|^2 \Leftrightarrow |z-2||\bar{z}-2i| = |z+2i||\bar{z}-2i|$$
$$\Leftrightarrow |\bar{z}-2i|.(|z-2|-|z+2i|)$$

Trường hợp 1: $|\bar{z}-2i| = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 2i \Leftrightarrow z = -2i$.

Trường hợp 2: $|z-2| - |z+2i| = 0 \Leftrightarrow |z-2| = |z+2i| = 0$.

Đặt $z = x + yi$ ta có $z - 2 = x - 2 + yi$ và $z + 2i = x + (y+2)i$.

Khi đó: $|z-2| = |z+2i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y+2)^2$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow -4x = 4y \Leftrightarrow x = -y$$

Lại có: $|z^2| = |z - \bar{z}| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2|y| \Leftrightarrow 2y^2 = 2|y| \Leftrightarrow 2|y|.(|y|-1) = 0$.

$\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = \pm 1$

Do đó ta có các số $z \in \{0; 1-i; -1+i; -2i\}$ thỏa mãn.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $24a^3$. **B** $\frac{8}{3}a^3$. **C** $8a^3$. **D** $\frac{8}{9}a^3$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp BC$.

$AH \perp BC$ và $AA' \perp BC$ suy ra $BC \perp (AA'H) \Rightarrow A'H \perp BC$.

Suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'HA} \Rightarrow \widehat{A'HA} = 30°$.

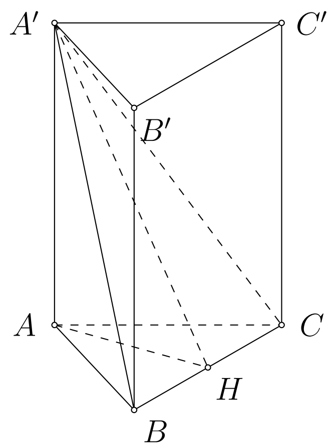
$\Delta A'AH$ vuông tại A có

$\tan \widehat{A'HA} = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow \tan 30° = \dfrac{2a}{AH} \Leftrightarrow AH = \dfrac{2a}{\tan 30°} = 2a\sqrt{3}$.

ΔABC vuông cân tại A nên $BC = 2AH = 4a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}2a\sqrt{3}\cdot 4a\sqrt{3} = 12a^2$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là $24a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A 5. **B** 6. **C** 11. **D** 10.

Lời giải.

Xét $g(x) = x^4 + ax^2 - 8x$.

$g'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$.

Xét $g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 2ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \dfrac{2x^3 - 4}{x} = 2x^2 - \dfrac{4}{x} = h(x)$ (do $x = 0$ không là nghiệm).

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 + ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \dfrac{x^3 - 8}{x} = x^2 - \dfrac{8}{x} = k(x). \end{array}\right.$$

$h'(x) = 4x + \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$k'(x) = 2x + \dfrac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$.

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{-4}$	-1	0		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$			$+\infty$ ‖		$+\infty$
		$h(-\sqrt[3]{-4})$				
			6	‖	$-\infty$	
$g(x)$	$+\infty$			$+\infty$ ‖		$+\infty$
			9			
		$k(-\sqrt[3]{-4})$		‖	$-\infty$	

Để hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a \leq 6 \Leftrightarrow a \geq -6$.
Mà a là số nguyên âm nên $a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9; 3; 1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

(A) $12\sqrt{3}$. (B) 18. (C) $28\sqrt{3}$. (D) 39.

Lời giải.

Do $I(9; 3; 1)$ nên $\mathrm{d}\big(I, (Oxz)\big) = 3 = R$.
Suy ra (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).
Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox$, $N(0; 0; b) \in Oz$. Đường MN tiếp xúc với (S) tại A nên A là hình chiếu của I lên (Oxz). Suy ra $A(9; 0; 1)$.
Gọi K là trung điểm MN. Khi đó, $K\left(\dfrac{a}{2}; 0; \dfrac{b}{2}\right)$.
Gọi H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$. Theo giả thuyết, ta suy ra $OH = \frac{13}{2}$.
Suy ra $HK \perp MN$.

Gọi T là trung điểm, ta có $OM \Rightarrow \left.\begin{matrix} OM \perp KT \\ OM \perp HT \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp (KHT) \Rightarrow OM \perp HK \Rightarrow HK \perp (OMN)$.
Mà $IA \perp (OMN)$ nên $HK \parallel IA$.
Ta có $\overrightarrow{AI} = (0; 3; 0)$, $\overrightarrow{KH} = \left(x_H - \dfrac{a}{2}; y_H - 0; z_H - \dfrac{b}{2}\right)$.

Do $\overrightarrow{AI}$ cùng phương $\overrightarrow{KH}$ nên $\begin{cases} x_H = \dfrac{a}{2} \\ y_H = c (c \neq 0) \\ z_H = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$

Suy ra $H\left(\dfrac{a}{2}; c; \dfrac{b}{2}\right)$.

Từ $OH = \dfrac{13}{2}$ suy ra $\dfrac{a^2}{4} + c^2 + \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{169}{4}$ (1)

Mặt khác, $HI = OH = \dfrac{13}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{2} - 9\right)^2 + (c-3)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{169}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a^2}{4} + c^2 + \dfrac{b^2}{4} = \left(\dfrac{a}{2} - 9\right)^2 + (c-3)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right)^2$. Do đó, $9a + b + 6c = 91$ (3)

Mặt khác, $AM = (a-9;0;-1)$, $AN = (-9;0;b-1)$.

A, M, N thẳng hàng $\Rightarrow \dfrac{a-9}{-9} = \dfrac{-1}{b-1} \Leftrightarrow (a-2)(b-1) = 9$

$$\Leftrightarrow ab - a - 9b + 9 = 9$$
$$\Leftrightarrow ab - a - 9b = 0$$
$$\Leftrightarrow a(b-1) = ab$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{9b}{b-1}$$

Từ (3) suy ra $9 \cdot \dfrac{9b}{b-1} + b + 6c = 91 \dfrac{81b}{b-1} + b + 6c$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+80b}{b-1} + 6c = 91$$
$$\Leftrightarrow 6c = 91 - \frac{b^2+80b}{b-1} = \frac{-b^2+11b-91}{b-1}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{-b^2+11b-91}{6(b-1)}$$

Ta có $a^2 + 4c^2 + b^2 = 169$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9b}{b-1}\right)^2 + 4\left(\frac{-b^2+11b-91}{6(b-1)}\right)^2 + b^2 = 169$$
$$\Leftrightarrow 9.81b^2 + \left(b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b\right) + 9b^2(b-1)^2 = 169.9.(b-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 729b^2 + b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b + 9b^4 - 18b^3 + 9b^2$$
$$= 1521b^2 - 3042b + 1521$$
$$\Leftrightarrow 10b^4 - 40b^3 - 480b^2 + 1040b + 6760 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1+3\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{9\left(1+3\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}} = 9+\sqrt{3} \\ b = 1-3\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{9\left(1-3\sqrt{3}\right)}{-3\sqrt{3}} = 9-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

- Trường hợp: $a = 9+\sqrt{3}; b = 1+3\sqrt{3}$. Khi đó, $\overrightarrow{AM} = \left(\sqrt{3};0;-1\right) \Rightarrow AM = 2$.
  $\overrightarrow{AN} = \left(-9;0;3\sqrt{3}\right) \Rightarrow AN = \sqrt{108}$.
  Do đó, $AM.AN = 2.\sqrt{108} = 12\sqrt{3}$.

- Trường hợp 2: $a = 9-\sqrt{3}; b = 1-3\sqrt{3}$.
  Khi đó, $\overrightarrow{AM} = \left(-\sqrt{3};0;-1\right) \Rightarrow AM = 2$.
  $\overrightarrow{AN} = \left(-9;0;-3\sqrt{3}\right) \Rightarrow AN = \sqrt{108}$.
  Do đó, $AM.AN = 2.\sqrt{108} = 12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 41

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2022
Môn: Toán
Năm học: 2021 – 2022
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w = 1 - 4i$?

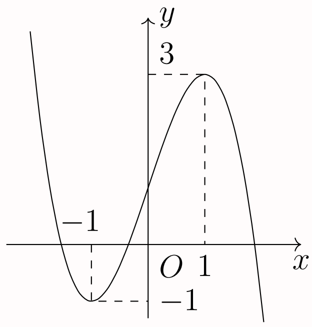
A. $z_1 = 5 - 4i$. B. $z_4 = 1 + 4i$. C. $z_3 = 1 - 5i$. D. $z_2 = 3 + 4i$.

Lời giải.

Số phức $w = 1 - 4i$ có phần ảo bằng -4.
Trong các số phức đã cho, số phức $z_1 = 5 - 4i$ cũng có phần ảo bằng -4.
Chọn đáp án A □

Câu 2.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

A. $(1; 3)$. B. $(3; 1)$. C. $(-1; -1)$. D. $(1; -1)$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$, ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là $(-1; -1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Phần ảo của số phức $z = (2 - i)(1 + i)$ bằng

A. -3. B. 1. C. 3. D. -1.

Lời giải.

Ta có $z = (2 - i)(1 + i) = 3 + i$.
Vậy phần ảo của số phức z bằng 1.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -5$ thì $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. B. -3. C. -7. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 2 + (-5) = -3$.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) 30. (B) 10. (C) 15. (D) 11.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 5.6 = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi đường cao, diện tích đáy lần lượt là h, B.

Khi đó áp dụng công thức thể tích khối chóp, khối lăng trụ ta được $V_1 = \frac{1}{3}B.h$ và $V_2 = B.h$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}B.h}{B.h} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log(100a)$ bằng

(A) $2 - \log a$. (B) $2 + \log a$. (C) $1 - \log a$. (D) $1 + \log a$.

Lời giải.

Với $a > 0$, ta có

$$\log(100a) = \log 100 + \log a = \log 10^2 + \log a = 2 + \log a.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = x^2 - 2x$. (C) $y = -x^3 + 3x$. (D) $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta nhận thấy đây là hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$.

Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Do đó có duy nhất hàm số $y = -x^3 + 3x$ thoả mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+1} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oxy) là

(A) $y = 0$. (B) $x = 0$. (C) $x + y = 0$. (D) $z = 0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

(A) $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. (B) $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. (C) $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. (D) $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int -\frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \cot x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(0; 3)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có đồ thị tăng trên khoảng $(-1; 0)$, nên đó là đáp án đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

(A) $P(2; 1; -1)$. (B) $M(1; 2; 3)$. (C) $Q(2; 1; 1)$. (D) $N(1; -2; 3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $P(2; 1; -1)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có:
$\frac{2-2}{1} = \frac{1-1}{-2} = \frac{-1+1}{3} \Leftrightarrow \frac{0}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{0}{3} = 0$ (thỏa mãn).

Thay tọa độ điểm $M(1; 2; 3)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có:
$\frac{1-2}{1} = \frac{2-1}{-2} = \frac{3+1}{3} \Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{1}{-2} = \frac{4}{3}$ (vô lí).

Thay tọa độ điểm $Q(2; 1; 1)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có:
$\frac{2-2}{1} = \frac{1-1}{-2} = \frac{1+1}{3} \Leftrightarrow \frac{0}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{2}{3}$ (vô lí).

Thay tọa độ điểm $N(1; -2; 3)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có:
$\frac{1-2}{1} = \frac{-2-1}{-2} = \frac{3+1}{3} \Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{-3}{-2} = \frac{4}{3}$ (vô lí).

Vậy điểm $P(2; 1; -1)$ thuộc đường thẳng (d).

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là

A. $(2; -7)$. B. $(-2; -7)$. C. $(7; 2)$. D. $(2; 7)$.

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là $(2; 7)$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM < R$. B. $OM = R$. C. $OM > R$. D. $OM \leq R$.

Lời giải.

M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R) \Leftrightarrow OM > R$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

B. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x + C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{x+1} + C$.

D. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1} + C$.

Lời giải.

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Véc-tơ $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Lời giải.

Ta có $3\vec{v} = (-3; -6; 3)$.

Do đó $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2; -10; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát $u_n (n \geq 2)$ bằng

A. 3.2^n. B. 3.2^{n+2}. C. 3.2^{n+1}. D. 3.2^{n-1}.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1.q^{n-1} = 3.2^{n-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < b < c$. B. $a < c < b$. C. $c < a < b$. D. $b < a < c$.

Lời giải.

Ta có $2 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$ mà cơ số $3 > 1$ nên $3^2 < 3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$ hay $b < a < c$.

Chọn đáp án D □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 20. Cho khối nón có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích của khối nón đã cho là

(A) $3a^3$. (B) $6a^3$. (C) $2a^3$. (D) $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\cdot 3a^2.2a = 2a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\displaystyle\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 5. (C) 9. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 2\,\mathrm{d}x = 2+6=8.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;+\infty)$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

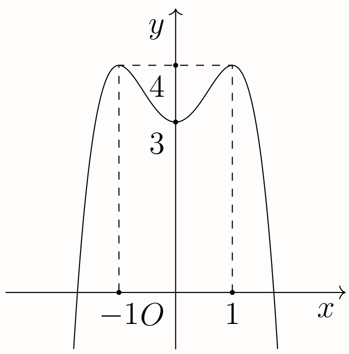
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) 3. (B) 4. (C) -1. (D) 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta dễ dàng thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0$ là

(A) $x=1$. (B) $x=\frac{3}{4}$. (C) $x=\frac{2}{3}$. (D) $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=1\\2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x=1$.

Chọn đáp án (A) □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị đã cho là đường thẳng có phương trình:

A. $y = -1$. B. $y = -2$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$. C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau?

A. 3125. B. 1. C. 120. D. 5.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ (số).

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải.

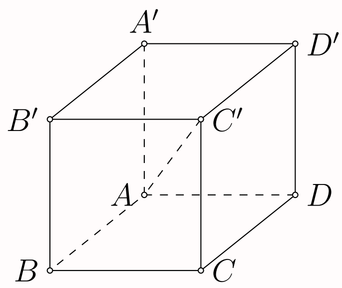
Ta vẽ đường thẳng $y = 1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

$y = 1$

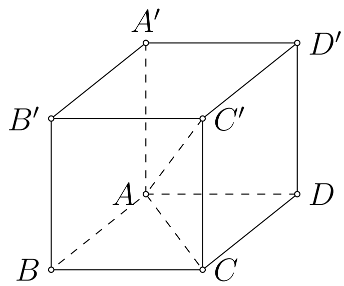
Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 giao điểm.
Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Hình chiếu của đường thẳng AC' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng AC suy ra $\left(CA', (ABCD)\right) = (CA, CA') = \widehat{CAC'}$.
Gọi cạnh hình lập phương bằng 1, suy ra $AC = \sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông CAC' vuông tại C ta có
$AC' = \sqrt{CC'^2 + AC'^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{3}$.
Suy ra $\sin\left(CA', (ABCD)\right) = \sin\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[30; 50]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

(A) $\dfrac{11}{21}$. (B) $\dfrac{13}{21}$. (C) $\dfrac{10}{21}$. (D) $\dfrac{8}{21}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[30; 50]$, nên ta có số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 50 - 30 + 1 = 21$.
Gọi A "Biến cố để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục".
Trường hợp 1: Chữ số hàng chục là 3, có 6 cách chọn số tự nhiên thỏa đề là $\{34, 35, 36, 37, 38, 39\}$.
Trường hợp 2: Chữ số hàng chục là 4, có 5 cách chọn số tự nhiên thỏa đề là $\{45, 46, 47, 48, 49\}$.
Suy ra $n(A) = 6 + 5 = 11$.
Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{11}{21}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{b^3}$ bằng

(A) $\log_a b$. (B) $-3\log_a b$. (C) $\dfrac{1}{3}\log_a b$. (D) $3\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{b^3} = \log_{a^{-1}} b^{-3} = 3\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + C$.

(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + 2\mathrm{e}^{2x} + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \mathrm{e}^{2x} + C$.

(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Khi đó $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 6. (B) $-8i$. (C) $8i$. (D) -6.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ nên ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ z_1 . z_2 = \dfrac{c}{a} = 5. \end{cases}$

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = \left(z_1 + z_2\right)^2 - 2z_1z_2 = 2^2 - 2.5 = -6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(-1; +\infty)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$ là

(A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

(B) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

(C) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

(D) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính $R = \dfrac{|1 - 2.2 + 2.3 + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

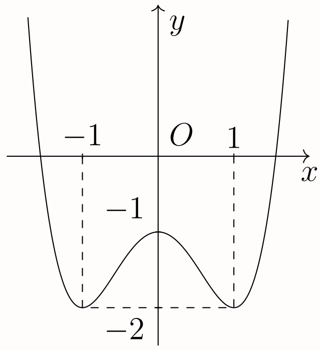
Chọn đáp án (D) □

Câu 36.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 1.



Lời giải.

Ta có yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1. \end{array}\right.$

Do $m \in [-2; 5]$ và m nguyên nên có 7 giá trị m cần tìm là -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - 3y - z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; -3; -1)$.

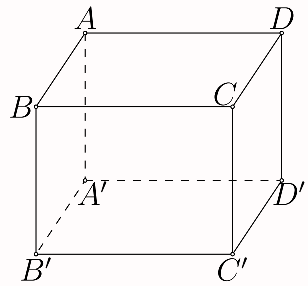
Đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 38.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ $3\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.



Lời giải.

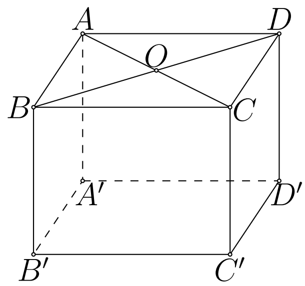
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow BD \perp AC$ tại O.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AA' \perp (ABCD)$.

Suy ra $AA' \perp BD$.

Do đó, $BO \perp (ACC'A')$ tại O.

Suy ra $\mathrm{d}\big(B; (ACC'A')\big) = BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$?

(A) 34. (B) 32. (C) 31. (D) 33.

Lời giải.

Trường hợp 1: $a=1 \Rightarrow \left(3^b-3\right)\left(2^b-16\right)<0$.
Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 4$ không thỏa mãn bất phương trình và $b \in \{2;3\}$ thỏa mãn.
Vậy $a=1$ thỏa mãn.
Trường hợp 2: $a=2 \Rightarrow \left(3^b-3\right)\left(2.2^b-16\right)<0 \Leftrightarrow \left(3^b-3\right)\left(2^{b+1}-16\right)<0$.
Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 3$ không thỏa mãn bất phương trình và $b=2$ thỏa mãn.
Vậy $a=2$ không thỏa mãn.
Trường hợp 3: $a=3 \Rightarrow \left(3^b-3\right)\left(3.2^b-16\right)<0$.
Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 3$ không thỏa mãn bất phương trình và $b=2$ thỏa mãn.
Vậy $a=3$ không thỏa mãn.
Trường hợp 4: $a>3$.
Ta cần tìm a để bất phương trình $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$ có 2 nghiệm b.
Nếu $b \geq 3 \Rightarrow \left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right) \geq 24.(3.8-16)>0$ không thỏa mãn bất phương trình.
Nếu $b=2 \Rightarrow \left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right) \geq 6(4.4-16) \geq 0$ không thỏa mãn bất phương trình.
Nếu $b=1$ không thỏa mãn.
Nếu $b<1 \Rightarrow \left(3^b-3\right)<0$. Bất phương trình tương đương $a.2^b-16>0$.
Hay $a>\dfrac{16}{2^b}$ có hai nghiệm b suy ra $33 \leq a \leq 64$.
Kết hợp lại suy ra có tất cả 33 số nguyên dương a thỏa mãn.
Cách 2:
Xét $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)=0$. Do $a \in \mathbb{N}^*$ nên $\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\log_2 \dfrac{16}{a} \end{array}\right.$.
Trường hợp 1: $\log_2 \dfrac{16}{a}>1 \Leftrightarrow a<8$.
Bất phương trình có đúng 2 nghiệm nguyên $b \Leftrightarrow 3<\log_2 \dfrac{16}{a} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq a<2 \Rightarrow a=1$ (thỏa mãn).
Trường hợp 2: $\log_2 \dfrac{16}{a}<1 \Leftrightarrow a>8$.
Bất phương trình có đúng 2 nghiệm nguyên b khi và chỉ khi

$$-2 \leq \log_2 \frac{16}{a}<-14 \Leftrightarrow 32<a \leq 64$$

Suy ra có 32 giá trị a.
Vậy có 33 giá trị của a thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

(A) -9. (B) 4. (C) 1. (D) -8.

Lời giải.

Xét hàm $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1 \Rightarrow f'(x)=4(a+3)x^3-4ax$.
Hàm số đạt GTLN tại $x=2$ và liên tục trên đoạn $[0;3]$.
Do đó $f'(2)=0 \Leftrightarrow 32(a+3)-8a=0 \Leftrightarrow a=-4$.
Với $a=-4$ ta có $f(x)=-x^4+8x^2+1$ với $x \in [0;3]$.

$$f'(x) = -4x^3 + 16x \text{ Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó $f(0) = 1,\ f(2) = 17,\ f(3) = -8$.
Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = 17$ (thỏa mãn giả thiết).
Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = -8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 2$. Khi $S = 6$ thì a bằng

(A) 4. (B) 6. (C) 3. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có
$\forall x \in \mathbb{R}$: $F(x) = G(x) + C$ (với C là hằng số).
Do đó $F(0) = G(0) + C \quad (1)$.

$$\begin{aligned} \text{Lại có} \quad & \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(0) \\ \Leftrightarrow \quad & F(2) - G(0) + a = F(2) - F(0) \\ \Leftrightarrow \quad & F(0) = G(0) - a \qquad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $C = -a$.
Khi đó $F(x) = G(x) - a,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |F(x) - G(x)| = a,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x),\ y = G(x),\ x = 0$ và $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 |F(x) - G(x)|\ \mathrm{d}x = \int_0^2 a.\mathrm{d}x = 2a = 6 \Rightarrow a = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ và $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{3}{8}$. (C) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

- Từ giả thiết ta được $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_3| = 2$.
- Theo giả thiết $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \Rightarrow |z_1 + z_2||z_3| = 2|z_1||z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2| = 1$.
- Từ đẳng thức $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Theo giả thuyết

$$\begin{aligned} & (z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \\ \Leftrightarrow \quad & (z_1 - z_2)z_3 = 2(z_1 - z_3)z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && |z_1 - z_2|\,|z_3| = 2\,|z_1 - z_3|\,|z_2| \\
&\Rightarrow && |z_1 - z_3| = \sqrt{3} \\
&\Rightarrow && AC = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& && \left(z_1 + z_2\right) z_3 = 2 z_1 z_2 \\
&\Leftrightarrow && \left(z_3 - z_2\right) z_1 = \left(z_1 - z_3\right) z_2 \\
&\Leftrightarrow && |z_3 - z_2|\,|z_1| = |z_1 - z_3|\,|z_2| \\
&\Leftrightarrow && |z_3 - z_2| = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow && AC = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

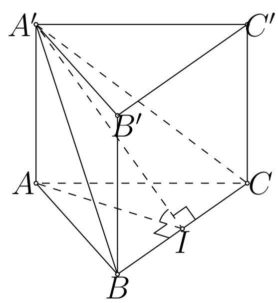
Suy ra tam giác ABC đều cạnh $\sqrt{3}$. Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{8}{9}a^3$. (B) $8a^3$. (C) $\dfrac{8}{3}a^3$. (D) $24a^3$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$ và $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng nên $AA' \perp BC$

suy ra $BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp A'I$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc giữa $A'I$ và AI, mà tam giác $AA'I$ vuông tại A nên ta có $\widehat{AIA'}$ là góc nhọn.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\widehat{AIA'} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông $AA'I$, ta có $AI = \dfrac{AA'}{\tan 60^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}\cdot$

Ta có ABC là tam giác vuông cân tại A nên

$BC = 2AI = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$, $AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\cdot$

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là

$$V = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\cdot 2a.\left(\frac{2a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{8a^3}{3}\cdot$$

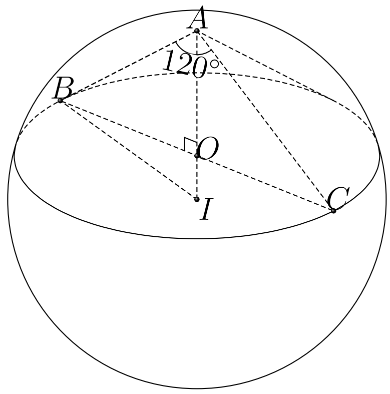
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° và chiều cao bằng 2. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng

(A) $\dfrac{16\pi}{3}$. (B) $\dfrac{64\pi}{3}$. (C) 64π. (D) 48π.

Lời giải.

Gọi hình nón đỉnh A, đường kính đáy hình nón là BC.
Gọi I là tâm mặt cầu (S).
Ta có $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AI \perp BC$ tại O nên $\widehat{BAI} = 60^\circ$ suy ra $\triangle IAB$ đều.
Tam giác IAB đều và $OB \perp IA$ tại O suy ra OB là đường trung tuyến của ΔIAB.
Mà $OA = 2$ suy ra $AI = 2OA = 4$.
Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S = 4\pi AI^2 = 64\pi$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Xét tất cả các số thực x, y sao cho $8^{9-y^2} \geq a^{6x-\log_2 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 8y$ bằng

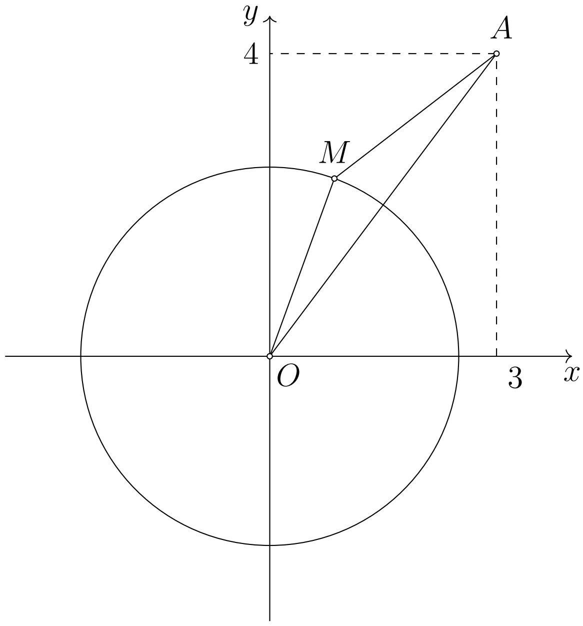
(A) -21. (B) -6. (C) -25. (D) 39.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 8^{9-y^2} \geq a^{6x-\log_2 a^3}, \forall a > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\left(9 - y^2\right) \geq \left(6x - 3\log_2 a\right)\log_2 a, \forall a > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2^2 a - 2x\log_2 a + 9 - y^2 \geq 0, \forall a > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \Delta' = x^2 + y^2 - 9 \leq 0. \end{aligned}$$

Gọi $M(x; y)$ thuộc hình tròn (C) tâm O, bán kính $R = 3$.
Gọi $A(3; 4)$, ta có $OA = 5 > R$. Do đó A nằm ngoài hình tròn (C).
Khi đó
$P = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 25 = MA^2 - 25 \geq (OA - R)^2 - 25 = -21$.
Vậy $\min P = -21$ khi O, M, A theo thứ tự thẳng hàng.



Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 12$	$\nearrow$	$\ln \frac{196}{16}$	$\searrow$	$\ln 12$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(7; 8)$. (B) $(6; 7)$. (C) $(8; 9)$. (D) $(10; 11)$.

Lời giải.

Từ BBT của $g(x)$ ta có $\ln f(x) \geq \ln 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 4;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0\ (*) \\ f(x) = 1\ (**). \end{array}\right.$

Do $f(x) \geq 4;\ \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình $(**)$ vô nghiệm.

Từ đó suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3. \end{array}\right.$

Mặt khác $f'(x) - g'(x) = f'(x).\left[1 - \dfrac{1}{f(x)}\right]$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)-g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

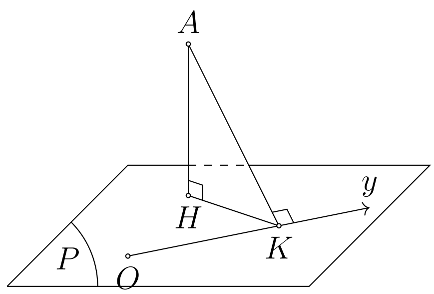
$$\begin{aligned} \text{Vậy} S = \int_{x_1}^{x_3} \left|f'(x) - g'(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} \left[f'(x) - g'(x)\right] \mathrm{d}x - \int_{x_2}^{x_3} \left[f'(x) - g'(x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \left[f(x) - g(x)\right]\Big|_{x_1}^{x_2} - \left[f(x) - g(x)\right]\Big|_{x_2}^{x_3} \\ &= 2f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) - f\left(x_3\right) - 2\ln f\left(x_2\right) + \ln f\left(x_1\right) + \ln f\left(x_3\right) \\ &= 2.\frac{199}{16} - 12 - 4 - 2\ln\frac{199}{16} + \ln 12 + \ln 4 \approx 7{,}704 \in (7;8). \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

A $x + z = 0$. **B** $x - z = 0$. **C** $2x + z = 0$. **D** $2x - z = 0$.

Lời giải.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trục Oy.

Ta có $\mathrm{d}\left(A,(P)\right) = AH \leq AK$. Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K(0;1;0)$.

Khi đó (P) đi qua $K(0;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AK} = (-2;0;-1) = -(2;0;1)$ nên có phương trình là $2x + z = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z^2| = 2|z - \overline{z}|$ và $|(z+4)(\overline{z}+4i)| = |z-4i|^2$?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Ta có $|z^2| = 2|z - \overline{z}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4|b| \quad (1)$.

$$\begin{aligned} |(z+4)(\overline{z}+4i)| = |z-4i|^2 &\Leftrightarrow |z+4|\,.\,|\overline{z}+4i| = |z-4i|^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}.\sqrt{a^2+(b-4)^2} = a^2+(b-4)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-4)^2}.\left(\sqrt{(a+4)^2+b^2} - \sqrt{a^2+(b-4)^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $\sqrt{a^2+(b-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$ thỏa (1).

  Vậy $z = 4i$.

- Trường hợp 2: $\sqrt{(a+4)^2+b^2} - \sqrt{a^2+(b-4)^2} = 0 \Leftrightarrow a = -b$.

  Thay vào ta được (1) : $2b^2 - 4|b| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |b| = 0 \\ |b| = 2. \end{array}\right.$

  Với $|b| = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$.

  Với $|b| = 2 \Leftrightarrow b = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow z = -2+2i \vee z = 2-2i$.

Kết luận có 4 số phức z.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

Ⓐ 23. Ⓑ 12. Ⓒ 24. Ⓓ 11.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - mx^2 - 64x$; $g'(x) = 4x^3 - 2mx - 64$; có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - mx - 64 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow g(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Do đó hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(x)$ có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow g'(x)$ đổi dấu đúng 1 lần (*).
Nhận xét nếu $x = 0 \Rightarrow g'(0) = -64 < 0 \Rightarrow g(x)$ không có cực trị (hay $x = 0$ không thỏa mãn).
Nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 2x^2 - \dfrac{32}{x}$. Đặt $h(x) = 2x^2 - \dfrac{32}{x}$.
Có $h'(x) = 4x + \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{4\left(x^3+8\right)}{x^2}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Bảng biến thiên

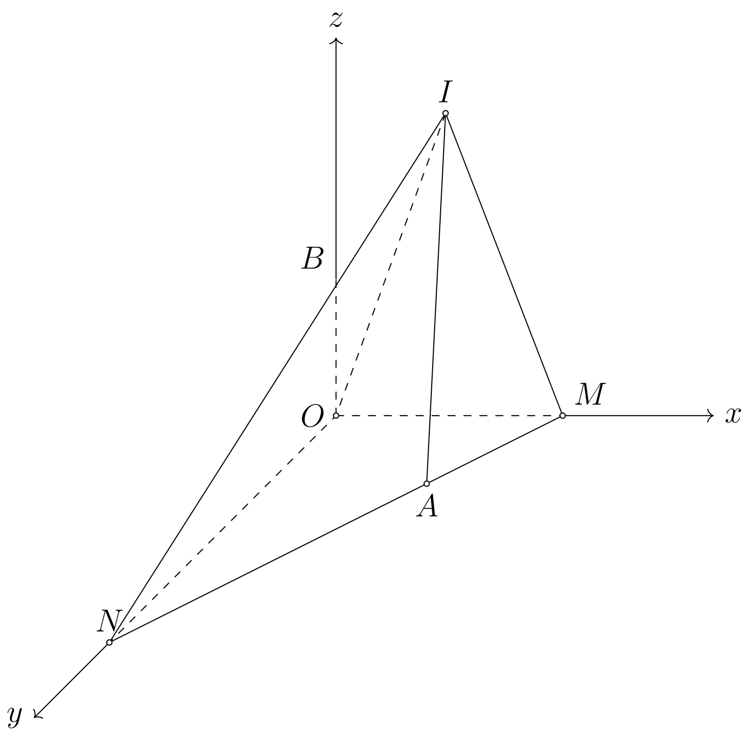
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	24	↗ $+\infty$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $(*) \Leftrightarrow m \leq 24$.
Kết hợp với điều kiện m nguyên dương suy ra $m \in \{1; 2; 3; ...; 24\}$.
Chọn đáp án C

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 4; 2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}\cdot$ Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

A. $9\sqrt{2}$. B. 14. C. $6\sqrt{2}$. D. 8.

Lời giải.



Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox, N(0; b; 0) \in Oy$.
Ta có $\mathrm{d}\big(I; (Oxy)\big) = 2 = R$ nên (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(1; 4; 0)$ và MN cũng đi qua A.
Lại có $\overrightarrow{AM} = (a-1; -4; 0)$, $\overrightarrow{AN} = (-1; b-4; 0)$ và 3 điểm A, M, N thẳng hàng nên ta được $\dfrac{a-1}{-1} = \dfrac{-4}{b-4} \Leftrightarrow (a-1)(b-4) = 4.$ (1)
Tứ diện $OIMN$ có $IA \perp (OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại O nên nếu gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thì $J \in (IMN)$.
Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.
Ta có $S_{\triangle IMN} = \dfrac{IM.IN.MN}{4r}$ (với $r = \frac{7}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$).

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} IA.MN = \frac{IM.IN.MN}{4 \cdot \frac{7}{2}}$$
$$\Leftrightarrow IM.IN = 7IA \Leftrightarrow IM.IN = 14$$
$$\Leftrightarrow \left[(a-1)^2 + 20\right] . \left[(b-4)^2 + 5\right] = 196. \quad (2)$$

Đặt $\begin{cases} m = a - 1 \\ n = b - 4. \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} m.n = 4 \\ \left(m^2+20\right)\left(n^2+5\right) = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{4}{m} & (3) \\ \left(m^2+20\right)\left(\dfrac{16}{m^2}+5\right) = 196. & (4) \end{cases}$

Từ (4) ta được $\left(m^2+20\right).\left(16+5m^2\right) = 196m^2$

$$\Leftrightarrow 5m^4 - 80m^2 + 320 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = \sqrt{2} \\ n = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a = 1 + 2\sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2} \\ a = 1 - 2\sqrt{2}, b = 4 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy $AM.AN = 6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 42

ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2023
Môn: Toán
Năm học: 2022 – 2023
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: MH 2023

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

Ⓐ $(-6; 7)$. Ⓑ $(6; 7)$. Ⓒ $(7; 6)$. Ⓓ $(7; -6)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là $(7; -6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

Ⓐ $y' = \frac{1}{x}$. Ⓑ $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. Ⓒ $y' = \frac{\ln 2}{x}$. Ⓓ $y' = -\frac{1}{x \ln 3}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^\pi$ là

Ⓐ $y' = \pi x^{\pi - 1}$. Ⓑ $y' = x^{\pi - 1}$. Ⓒ $y' = \frac{1}{\pi} x^{\pi - 1}$. Ⓓ $y' = \pi x^\pi$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = x^\pi$ là $y' = \pi x^{\pi - 1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

Ⓐ $(-\infty; 1]$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $[1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

$2^{x+1} < 4 \iff 2^{x+1} < 2^2 \iff x + 1 < 2 \iff x < 1$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Giá trị của u_3 bằng

Ⓐ 3. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ $\frac{1}{4}$. Ⓓ $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

$u_3 = u_1 . q^{3-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ có một véctơ pháp tuyến là

Ⓐ $\overrightarrow{n_1}=(-1;1;1)$. Ⓑ $\overrightarrow{n_4}=(1;1;-1)$. Ⓒ $\overrightarrow{n_3}=(1;1;1)$. Ⓓ $\overrightarrow{n_2}=(1;-1;1)$.

Lời giải.

$(P): x+y+z+1=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_3}=(1;1;1)$.

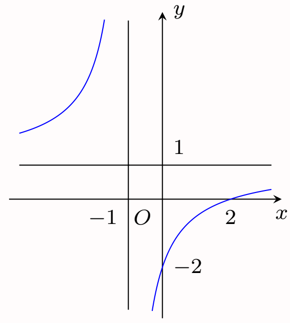
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7.

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

Ⓐ $(0;-2)$. Ⓑ $(2;0)$.

Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(0;2)$.



Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là $(2;0)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8. Nếu $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^{4} g(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_{-1}^{4}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Lời giải.

$\int\limits_{-1}^{4}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{4} g(x)\mathrm{d}x=2+3=5.$

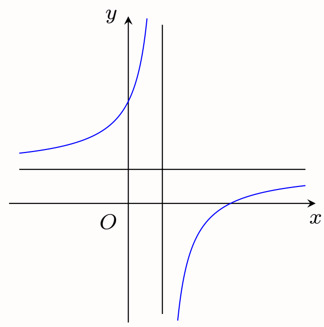
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên

Ⓐ $y=x^4-3x^2+2$. Ⓑ $y=\frac{x-3}{x-1}$.

Ⓒ $y=x^2-4x+1$. Ⓓ $y=x^3-3x-5$.



Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-3}{x-1}$ có dạng như đường cong trong hình.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+1=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

Ⓐ $(-1;-2;-3)$. Ⓑ $(2;4;6)$. Ⓒ $(-2;-4;-6)$. Ⓓ $(1;2;3)$.

Lời giải.

Tâm của $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+1=0$ có tọa độ là $(1;2;3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng
(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $90°$.

Lời giải.

góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng $\widehat{xOz}=90°$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho số phức $z=2+9i$, phần thực của số phức z^2 bằng
(A) -77. (B) 4. (C) 36. (D) 85.

Lời giải.

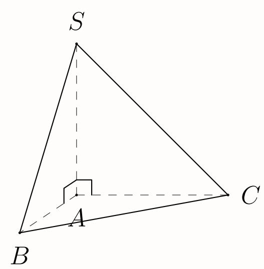
Phần thực của số phức z^2 bằng $2^2-9^2=-77$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho khối lập phương có cạnh bằng 2. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng
(A) 6. (B) 8. (C) $\frac{8}{3}$. (D) 4.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng 2 là $V=2^3=8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14.
Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB=2$, SA vuông góc với đáy và $SA=3$ (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp đã cho bằng
(A) 12. (B) 2.
(C) 6. (D) 4.



Lời giải.

Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}SA\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{3}\times 3\times\frac{1}{2}\times 2^2=2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến (P). Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
(A) $d>R$. (B) $d>R$. (C) $d=R$. (D) $d=0$.

Lời giải.

Khẳng định **đúng** là $d=R$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Phần ảo của số phức $z=2-3i$ là
(A) -3. (B) -2. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z=2-3i$ là -3.
Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 17. Cho hình nón có đường kính đáy $2r$ và độ dài đường sinh l. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $2\pi rl$. (B) $\frac{2}{3}\pi rl^2$. (C) πrl. (D) $\frac{1}{3}\pi r^2 l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $2\pi \times r \times l$.

Chọn đáp án (A)

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

(A) $P(1;2;3)$. (B) $Q(1;2;-3)$. (C) $N(2;1;2)$. (D) $M(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Điểm $Q(1;2;-3)$ thuộc $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

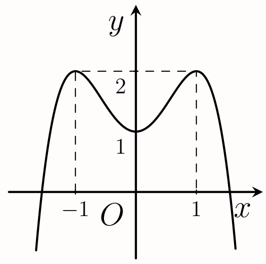
Chọn đáp án (B)

Câu 19.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

(A) $(-1;2)$. (B) $(0;1)$.

(C) $(1;2)$. (D) $(1;0)$.



Lời giải.

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là $(0;1)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 20. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $y = \frac{1}{3}$. (B) $y = -\frac{2}{3}$. (C) $y = -\frac{1}{3}$. (D) $y = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình $y = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2) > 0$ là

(A) $(2;3)$. (B) $(-\infty;3)$. (C) $(3;+\infty)$. (D) $(12;+\infty)$.

Lời giải.

$\log(x-2) > 0 \iff x-2 > 0 \wedge x-2 > 1 \iff x > 3$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 22. Cho tập hợp A có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của A bằng

(A) 226. (B) 30. (C) 210. (D) 105.

Lời giải.

Số tập con gồm hai phần tử của A bằng $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$.

Chọn đáp án (D)

Câu 23. Cho $\int \frac{1}{x}\,dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x) = \frac{2}{x^2}$. B. $F'(x) = \ln x$. C. $F'(x) = \frac{1}{x}$. D. $F'(x) = -\frac{2}{x^2}$.

Lời giải.

Khẳng định **đúng** là $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Chọn đáp án C

Câu 24. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4$ thì $\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}f(x) - 2\right)\,dx$ bằng

A. 0. B. 6. C. 8. D. -2.

Lời giải.

$\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}f(x) - 2\right)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,dx - 2(2-0) = 2 - 4 = -2$.

Chọn đáp án D

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\,dx = -\sin x + x^2 + C$. B. $\int f(x)\,dx = \sin x + x^2 + C$.

C. $\int f(x)\,dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C$. D. $\int f(x)\,dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

$\int (\cos x + x)\,dx = \int \cos x\,dx + \int x\,dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án D

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. B. $(3;+\infty)$. C. $(-\infty;1)$. D. $(1;3)$.

Lời giải.

$\forall x \in (1;3) f'(x) < 0$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

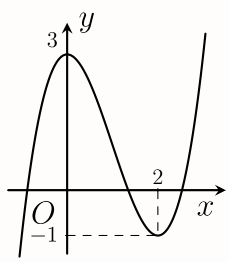
Chọn đáp án D

Câu 27.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. -1. B. 3.

C. 2. D. 0.



Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Chọn đáp án B

Câu 28. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a) - \ln(2a)$ bằng

A $\ln a$. **B** $\ln \frac{2}{3}$. **C** $\ln(6a^2)$. **D** $\ln \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$\ln(3a) - \ln(2a) = \ln \frac{3a}{2a} = \ln \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 29. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 2x$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A $\frac{16}{15}$. **B** $\frac{16\pi}{9}$. **C** $\frac{16}{9}$. **D** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

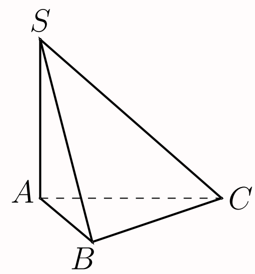
Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2 + 2x = 0 \iff x = 0$ hay $x = 2$.

Thể tích là $V = \pi \int\limits_0^2 (-x^2 + 2x)^2 \, dx = \pi \int\limits_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \, dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án D

Câu 30.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $SA = AB$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



A 60°. **B** 30°.

C 90°. **D** 45°.

Lời giải.

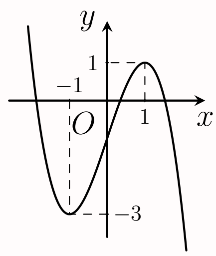
Ta có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$ nên $SB \perp BC$

suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SBA} = 45^\circ$ ($\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB$).

Chọn đáp án D

Câu 31.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

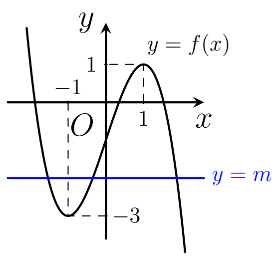


A 2. **B** 5.

C 3. **D** 4.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt tức là $-3 < m < 1$. Mà m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.



Chọn đáp án C

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(1-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;2)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-2)^2(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 6 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6 và 9 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai quả từ hộp đó, xác suất để lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn bằng

(A) $\frac{9}{35}$. (B) $\frac{18}{35}$. (C) $\frac{4}{35}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Lời giải.

Số cách lấy ngẫu nhiên hai quả cầu từ hộp là $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$ cách.

Để tổng hai số ghi trên hai quả cầu là số chẵn ta có 2 trường hợp sau:

TH1: Hai quả cầu cùng có số lẻ: $\mathrm{C}_3^1.\mathrm{C}_5^1 = 15$ cách.

TH2: Hai quả cầu cùng có số chẵn: $\mathrm{C}_3^1.\mathrm{C}_4^1 = 12$ cách.

Xác suất cần tính là: $\mathrm{P} = \frac{15+12}{105} = \frac{9}{35}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$ bằng

(A) $\frac{1}{\mathrm{e}^3}$. (B) -2. (C) -3. (D) $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

$$\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0 \iff (\ln x - 1)(\ln x + 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\ln x = 1\\ \ln x = -3\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \mathrm{e}\\ x = \mathrm{e}^{-3}\end{array}\right..$$

Vậy tích hai nghiệm của phương trình là $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2i| = 1$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(0;2)$. (B) $(-2;0)$. (C) $(0;-2)$. (D) $(2;0)$.

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$.Ta có $|z+2i| = 1 \iff |x + i(y+2)| = 1$ suy ra $x^2 + (y+2)^2 = 1$.

Nên tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2i| = 1$ là một đường tròn tâm $(0;-2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;-1)$ và $N(5;5;1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua $M(1;-1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{MN}=2(2;3;1)$ làm véctơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Chọn đáp án C

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. B. $(1;2;-3)$. C. $(-1;-2;-3)$. D. $(-1;2;3)$.

Lời giải.

Điểm chiếu của $A(1;2;3)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1;0;3)$

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1;-2;3)$.

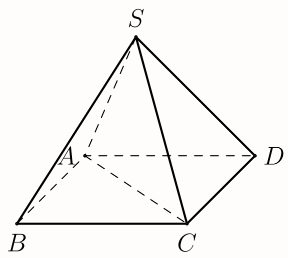
Chọn đáp án A

Câu 38.

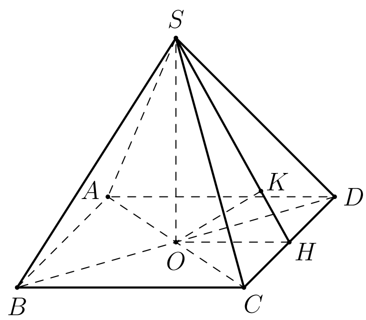
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC=2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BD\cap(SCD)=D \\ BD=2OD \end{cases} \implies \mathrm{d}(B,(SCD))=2\mathrm{d}(O,(SCD))$.

Dựng $OH\perp CD$, $OK\perp SH$, ta có $\begin{cases} OH\perp CD \\ SO\perp CD \end{cases}$

$\implies CD\perp(SOH)\supset OK \implies CD\perp OK$.

Mặt khác $OK\perp SH$, suy ra $OK\perp(SCD)$. Nên $\mathrm{d}(O,(SCD))=OK$.

Hình vuông $ABCD$ có đường chéo $AC=2a$

nên cạnh bằng $\frac{2a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SOH có $SO=a$, $OH=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$,

suy ra $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OH^2} \iff OK^2=\frac{OH^2.OS^2}{OS^2+OH^2} \implies OK^2=\frac{\frac{a^2}{2}a^2}{a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{a^2}{3}$

Vậy $\mathrm{d}(O,(SCD))=2OK=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\frac{x^2-16}{343}<\log_7\frac{x^2-16}{27}$?

A. 193. B. 92. C. 186. D. 184.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-16>0 \iff x\in(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $\log_3(x^2-16)-\log_3 343<\frac{\log_3(x^2-16)-\log_3 27}{\log_3 7}$.

Đặt $t=\log_3(x^2-16)$ ta được $t-3\log_3 7<\frac{t-3}{\log_3 7}$

$$\iff t\log_3 7 - 3\log_3^2 7 < t - 3 \iff t\left(\log_3 7 - 1\right) < 3\left(\log_3^2 7 - 1\right) \iff t < 3\left(\log_3 7 + 1\right).$$

Khi đó $\quad \log_3\left(x^2 - 16\right) < 3\left(\log_3 7 + 1\right) \iff x^2 - 16 < 3^{3(\log_3 7 + 1)}$

$$\iff x^2 - 16 < 7^3 3^3 \iff x^2 < 9277 \iff -\sqrt{9277} < x < \sqrt{9277}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \left(-\sqrt{9277}; -4\right) \cup \left(4; \sqrt{9277}\right)$.

Vì x là số nguyên nên $x \in \{-96; -95; ...; -6; -5; 5; 6; ...; 95; 96\}$ có 184 giá trị x thỏa bài toán..

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) + G(4) = 4$ và $F(0) + G(0) = 1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ $\frac{3}{4}$. Ⓒ 6. Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $G(x) = F(x) + C$.

Giả thiết $\begin{cases} F(4) + G(4) = 4 \\ F(0) + G(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2F(4) + C = 4 \\ 2F(0) + C = 1 \end{cases} \iff F(4) - F(0) = \frac{3}{2}$

Vậy $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(F(4) - F(0)\right) = \frac{3}{4}$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có ba điểm cực trị?

Ⓐ 17. Ⓑ 15. Ⓒ 3. Ⓓ 7.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có $y' = -4x^3 + 12x + m$.
Để hàm số có ba điểm cực trị thì $-4x^3 + 12x + m = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt tức là đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $g(x) = 4x^3 - 12x$ tại 3 điểm phân biệt.
Hàm số $g(x) = 4x^3 - 12x$ có $g'(x) = 12x^2 - 12$ và bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Nên $-8 < m < 8$. Các giá trị nguyên của m là $\{-7; -6; ...; 6; 7\}$.
Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 - 3 - 4i| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

Ⓐ 28. Ⓑ $18 + 4\sqrt{6}$. Ⓒ 14. Ⓓ $11 + 4\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $2|z| = |z^2 - 3 - 4i| \geq ||z^2| - |3 + 4i|| = ||z|^2 - 5|$. Dấu "=" xảy ra khi $z^2 = k(-3 - 4i)$.
Suy ra $4|z|^2 \geq (|z| - 5)^2 \iff |z|^4 - 14|z|^2 + 25 \geq 0 \iff 7 - 2\sqrt{6} \leq |z|^2 \leq 7 + 2\sqrt{6}$
$\implies \sqrt{6} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{6} + 1$. Do đó $M = \sqrt{6} + 1$, $m = \sqrt{6} - 1$. Vậy $M^2 + m^2 = 14$

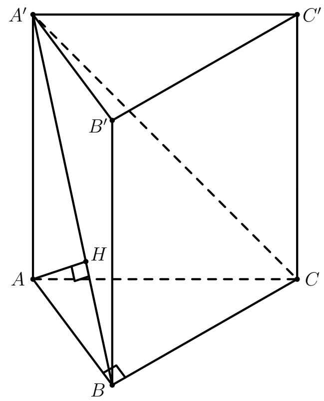
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (C) $a^3\sqrt{2}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp A'B, H \in A'B$. Ta có $AA' \perp (ABC) \supset BC$ nên $BC \perp AH$; mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp A'B$.
Do đó, $AH \perp (A'BC)$, hay $AH = \mathrm{d}[A,(A'BC)] = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
Tam giác $A'AB$ vuông tại A có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2}$ nên $A'A = a\sqrt{2}$.
Mà $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.
Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V = A'A \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn
$$f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2 \iff [xf(x)]' = 4x^3 + 4x + 2$
$\iff xf(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + C \iff f(x) = x^3 + 2x + 2 + \frac{C}{x}$.
Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C = 0$. Do đó $f(x) = x^3 + 2x + 2,\ f'(x) = 3x^2 + 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là
$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \iff x(x^2 - 3x + 2) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. .$$
Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\int\limits_0^2 |f(x) - f'(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2$?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 2m + 2$.
$\star$ $\Delta' < 0 \iff m < -1$. Phương trình có 2 nghiệm phức $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{m^2}$
Suy ra $|z_1| + |z_2| = 2 \iff 2\sqrt{m^2} = 2 \iff \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$
$\star$ $\Delta' > 0 \iff m > -1$. Phương trình có 2 nghiệm thực z_1, z_2.
Vì $ac = m^2 \geq 0$ nên $z_1.z_2 \geq 0$ hoặc $z_1.z_2 \leq 0$

Suy ra $|z_1|+|z_2|=2 \iff |z_1+z_2|=2 \iff |3m+2|=2 \iff \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A 5. B $\frac{1}{3}$. C 1. D $\frac{11}{3}$.

Lời giải.

d đi qua điểm $B(2;1;1)$ và có $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-3)$, ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$ và $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)=2\overrightarrow{n_P}$.
Phương trình mặt phẳng (P) qua A và chứa d là $x+2y+2z-6=0$
Vậy $d\left[M,(P)\right]=\frac{|5+2(-1)+2.3-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A 89. B 48. C 90. D 49.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$
$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$$
$$\iff \log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\iff \log_3\left(\frac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\frac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)$$
$$\iff \log_3\left(\frac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1-\frac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0 \quad (*)$$
Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{x}$ $(t>0)$, bất phương trình $(*)$ trở thành $\log_3(t+1)-\log_2\left(1-\frac{24}{t}\right)\le 0 \quad (**)$.
Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+1)-\log_2\left(1-\frac{24}{t}\right)$ trên $(0;+\infty)$,
có đạo hàm $f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 3}+\frac{24}{(t^2+24t)\ln 2}>0$, $\forall t>0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Ta có $f(8)=\log_3(8+1)-\log_2\left(1-\frac{24}{8}\right)=0$,
suy ra bất phương trình $(**) \iff f(t)\le f(8) \iff t\le 8$
Tức là $\frac{x^2+y^2}{x}\le 8 \iff x^2+y^2-8\le 0 \iff (x-4)^2+y^2\le 16$
Các cặp giá trị nguyên:
$(1;-2),(1;-1),(1;0),(1;1),(1;2)$
$(2;-3),(2;-2),(2;-1),(2;0),(2;1),(2;2),(2;3)$
$(3;-3),(3;-2),(3;-1),(3;0),(3;1),(3;2),(3;3)$
$(4;-4),(4;-3),(4;-2),(4;-1),(4;0),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4)$
$(5;-3),(5;-2),(5;-1),(5;0),(5;1),(5;2),(5;3)$
$(6;-3),(6;-2),(6;-1),(6;0),(6;1),(6;2),(6;3)$
$(7;-2),(7;-1),(7;0),(7;1),(7;2)$
$(8;0)$
Vậy có 48 cặp
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A $8\sqrt{2}$. B $\frac{24}{5}$. C $4\sqrt{2}$. D $\frac{5}{24}$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn đáy khối nón. Ta có $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \iff \frac{800\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 \times 8 \iff R = 10$
Gọi O là tâm đường tròn đáy và I là trung điểm AB ta có $OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 64$.
Gọi H là hình chiếu của O lên SI, ta được OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).
OH là đường cao trong tam giác vuông SOI nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \iff OH^2 = 32$
Vậy khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) là $4\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không có góc tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. B. $(3;4)$. C. $(2;3)$. D. $(6;7)$.

Lời giải.

Hình chiếu của B lên Oz là $H(0;0;6)$, $A \in Oz$ nên $d(B, OA) = BH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$S_{\triangle OAM} = 15$, $OA = 10$ nên $d(M, OA) = 3 = d(M, Oz)$, suy ra M thuộc mặt trụ trục Oz bán kính 3.
Phương trình mặt trụ $x^2 + y^2 = 9 \quad (1)$
Để MB ngắn nhất, thì M thuộc mặt phẳng (OAB) và $\widehat{OMA} = 90^\circ$ ($\triangle OAM$ không có góc tù).
Phương trình mặt cầu đường kính OA là $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25 \quad (2)$
Phương trình mặt phẳng (OAB) là $4x - 3y = 0 \quad (3)$
Tọa độ M là nghiệm của hệ $(1), (2), (3)$ giải được $M\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}; 9\right)$
suy ra $MB = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \in (3;4)$
Chọn đáp án B □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. B. 11. C. 6. D. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2$. Có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + (a+2)$
$\star$ Nếu $a + 2 \geqslant 0$ thì $f'(x) > 0\ \forall x \in (0;1)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$.
Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in (0;1)$
$\iff f(0) \geqslant 0 \iff 9 - a^2 \geqslant 0 \iff -3 \leqslant a \leqslant 3$. Lấy $a \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
$\star$ Nếu $a + 2 < 0$ thì $f'(x) = 0 \iff 3x^2 + (a+2) = 0 \iff x = \sqrt{-\frac{a+2}{3}}$ hay $x = -\sqrt{-\frac{a+2}{3}}$
Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in (0;1)$ và $1 \leqslant \sqrt{-\frac{a+2}{3}}$
$\iff f(0) \leqslant 0$ và $-3 \geqslant a + 2 \iff 9 - a^2 \leqslant 0$ và $a \leqslant -5$. Lấy $a \in \{-9; -8; -7; -6; -5\}$
Vậy có 11 giá trị nguyên của tham số a
Chọn đáp án B □

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 43

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023
Môn: Toán
Năm học: 2022 – 2023
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 8$ là

A. $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$. B. $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 8 \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^3 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = x^{\frac{4}{3}} + C$.

B. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

C. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = x^{\frac{2}{3}} + C$.

D. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được lấy từ các đỉnh của một lục giác đều?

A. 729. B. 20. C. 120. D. 216.

Lời giải.

Số tam giác mà ba đỉnh của nó được lấy từ các đỉnh của một lục giác đều là $\mathrm{C}_6^3 = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \cos x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + x^2 + C$.

B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - x^2 + C$.

D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\cos x - x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

(A) $y' = \dfrac{x-1}{\ln 2}$. (B) $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$. (C) $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. (D) $y' = \dfrac{1}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(x-1)'}{(x-1)\ln 2} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Với b, c là hai số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_5 b \geq \log_5 c$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $b \geq c$. (B) $b \leq c$. (C) $b > c$. (D) $b < c$.

Lời giải.

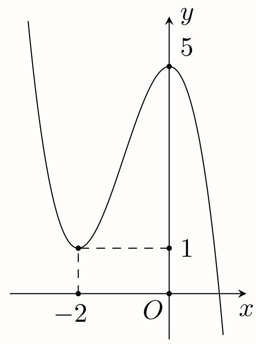
Ta có $\log_5 b \geq \log_5 c \Leftrightarrow b \geq c$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

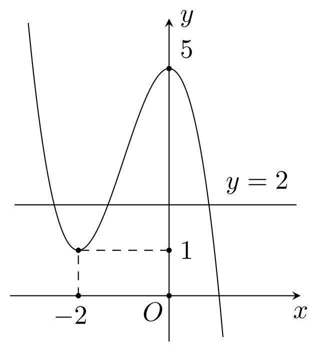
(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.



Lời giải.

Ta có $f(x) = 2$ là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$.

Dựa vào hình vẽ, phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm.



Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

(A) $x = 2$. (B) $x = -2$. (C) $x = 3$. (D) $x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-1}{x-2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x-1}{x-2} = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là $x = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Nếu khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V thì khối chóp $A'.ABC$ có thể tích bằng

(A) $\dfrac{V}{3}$. (B) V. (C) $\dfrac{2V}{3}$. (D) $3V$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = h \cdot S_{ABC}$.
Thể tích của khối chóp $A'.ABC$ là $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}V$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(2) = 6$, $F(4) = 12$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 2. (B) 6. (C) 18. (D) -6.

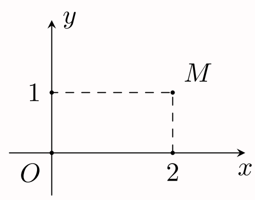
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 12 - 6 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.
Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

(A) $2 - i$. (B) $1 + 2i$. (C) $1 - 2i$. (D) $2 + i$.



Lời giải.

Điểm $M(2;1)$ điểm biểu diễn của số phức $2 + i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 0)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình trụ có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 48π. B. 16π. C. 24π. D. 56π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho khối nón có thể tích bằng 12 và diện tích đáy bằng 9. Chiều cao của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\pi}{3}$. B. $\dfrac{4}{3}$. C. 4π. D. 4.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Suy ra chiều cao của khối nón là $h = \dfrac{3V}{B} = \dfrac{3 \cdot 12}{9} = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. 3. B. -4. C. 1. D. -1.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (2 - i) - (1 + 3i) = 1 - 4i$.

Vậy phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng 1.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 4 và đáy $ABCD$ có diện tích bằng 3. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 7. B. 5. C. 4. D. 12.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hàm số $y = (2x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x = 2$ bằng

A. 3. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{3}$. D. 7.

Lời giải.

Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x = 2$ bằng $(2 \cdot 2^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho dãy số $(u_n) = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Giá trị của u_3 bằng

A. 4. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=2$. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.
Ⓑ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.
Ⓒ $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$.
Ⓓ $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

Lời giải.

Phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=2$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}=(1;2;-2)$ và $\vec{v}=(2;-2;3)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

Ⓐ $(-1;4;-5)$.
Ⓑ $(1;-4;5)$.
Ⓒ $(3;0;1)$.
Ⓓ $(3;0;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=(3;0;1)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21. Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

Ⓐ -1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 1.
Ⓓ -2.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=1+2i$. Vậy phần ảo của $\overline{z}$ là 2.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10.
Ⓑ 3.
Ⓒ 7.
Ⓓ -3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2+5=7$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x)\geq\log_3 2$ là

Ⓐ $(0;+\infty)$.
Ⓑ $[1;+\infty)$.
Ⓒ $(1;+\infty)$.
Ⓓ $(0;1]$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.
Ta có $\log_3(2x)\geq\log_3 2\Leftrightarrow 2x\geq 2\Leftrightarrow x\geq 1$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ $y = \dfrac{x+2}{x}$.

Ⓑ $y = -x^3 + 3x + 1$.

Ⓒ $y = x^4 - 3x^2$.

Ⓓ $y = -2x^2 + 1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho là hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với hệ số $a < 0$. Trong bốn phương án, chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $z = 0$. Ⓒ $x + y + z = 0$. Ⓓ $y = 0$.

Lời giải.

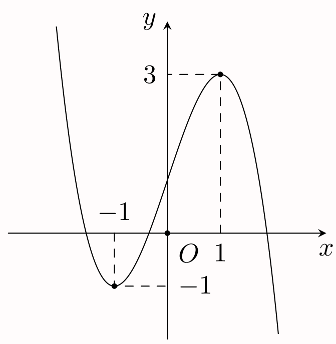
Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y = 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ -1.



Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27. Trong không gia $Oxyz$ phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;3)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$.

Ⓓ $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$.

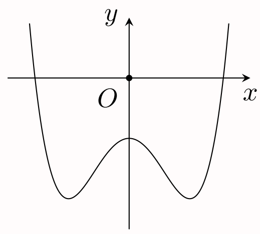
Lời giải.

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;3)$ là $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 2.



Lời giải.

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a \neq 1$ và $\log_a b = 2$, giá trị của $\log_{a^2}(ab^2)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(ab^2) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b^2 = \log_{a^2} a + \log_a b = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;2;1)$ và $B(1;0;1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

Ⓐ $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$. Ⓑ $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$.
Ⓒ $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$. Ⓓ $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20$.

Lời giải.

Do AB là đường kính của mặt cầu nên trung điểm $I(3;1;1)$ của AB là tâm mặt cầu, bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2}}{2} = \sqrt{5}$.

Ta có phương trình mặt cầu (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z = 0$ nên nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;1)$ của (P) là véc-tơ chỉ phương.

Mặt khác đường thẳng đi qua $A(1;2;-1)$ nên ta có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

(A) -1. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x - 1 = \frac{-x+5}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (x-1)(x-2) + x - 5 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + x - 5 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Suy ra $x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $f(4) > f(0)$. (B) $f(0) > f(2)$. (C) $f(5) > f(6)$. (D) $f(4) > f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x(x-4)$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

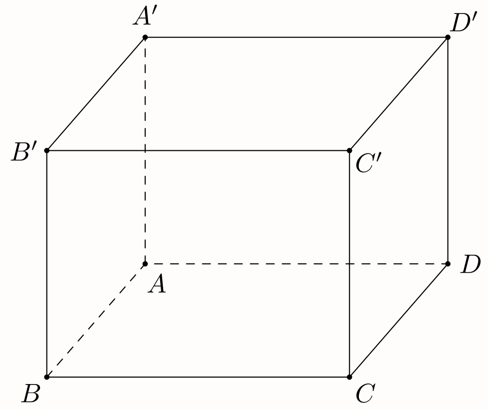
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0, 4)$, do đó $f(0) > f(2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $BC = 2$, $AA' = 2$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' bằng

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



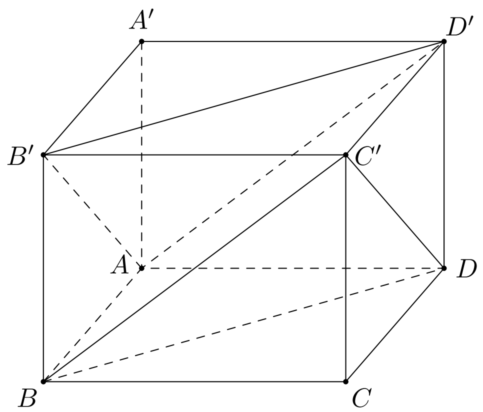
Lời giải.

Ta có $AD' \subset (AD'B')$, $DC' \subset (DC'B)$ và $(AD'B') \parallel (DC'B)$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' bằng khoảng cách giữa $(AD'B')$ và $(DC'B)$.

$\mathrm{d}\left((AD'B'),(DC'B)\right) = \mathrm{d}(A,(DC'B)) = \mathrm{d}(C,(DC'B)) = h$.

Xét tứ diện $C.BC'D$ có các cạnh CD, CB, CC' đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Từ một nhóm học sinh gồm 5 nam và 8 nữ, chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ bằng

(A) $\dfrac{72}{143}$. (B) $\dfrac{15}{143}$. (C) $\dfrac{128}{143}$. (D) $\dfrac{71}{143}$.

Lời giải.

Số cách để chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ $5 + 8 = 13$ học sinh là C_{13}^4.

Khi đó $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^4$.

Gọi A là biến cố để 4 học sinh được Chọn Có cả nam và nữ.

Khi nó $n(A) = \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_8^3 + \mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_8^1 = 640$.

Nên $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_8^3 + \mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_8^1}{\mathrm{C}_{13}^4} = \dfrac{128}{143}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$ và M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng toạ độ.Trung điểm của đoạn MN có toạ độ là

(A) $(3;7)$. (B) $(-3;0)$. (C) $(3;0)$. (D) $(-3;7)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + \sqrt{5}i \\ z = 3 - \sqrt{5}i. \end{array}\right.$

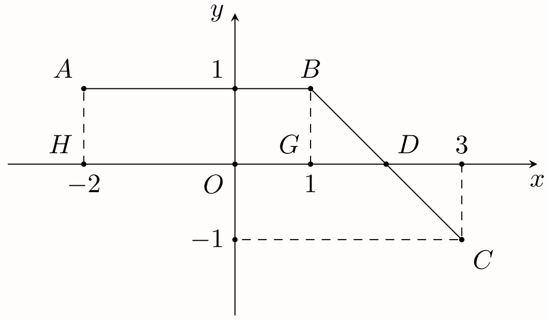
Vậy tọa độ $M(3;\sqrt{5}); N(3;-\sqrt{5})$.

Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $(3;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 37. Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{3} f(x)\,dx$ bằng



Ⓐ 4. Ⓑ $\dfrac{9}{2}$. Ⓒ $\dfrac{7}{2}$. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{3} f(x)\,dx = S_{ABGH} + S_{BGD} - S_{CDE} = 3 \cdot 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3.$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 38. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy bằng a chiều cao bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng

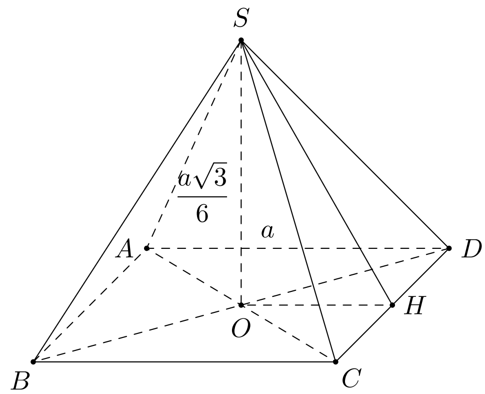
Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.

Lời giải.

Gọi O là tâm mặt đáy, H là trung điểm cạnh CD.
Suy ra $(SOH) \perp CD \Rightarrow SHO = ((SCD), (ABCD))$.

$SO = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}; OH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \tan(SHO) = \dfrac{SO}{OH} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{6}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Suy ra $\widehat{SHO} = 30^\circ$.
Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là 30°.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(7^x - 49)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6\right) < 0$?

Ⓐ 728. Ⓑ 726. Ⓒ 725. Ⓓ 729.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.
Ta có $7^x - 49 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và

$$\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^6 = 729. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g(x) = (7^x - 49)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6\right)$.

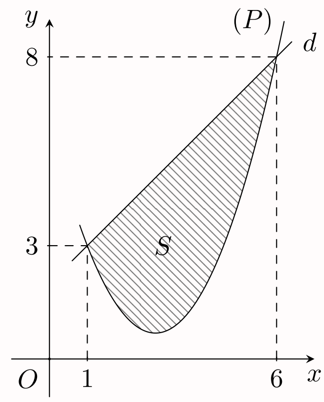
x	0		2		3		729
$g(x)$	0	−	0	+	0	−	0

Từ bảng xét dấu suy ra $g(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 3 < x < 729. \end{array}\right.$

Vậy ta có 726 số thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

Câu 40.
Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \dfrac{125}{9}$. Tích phân $\displaystyle\int_1^6 (2x-5)f'(x)\,dx$ bằng



(A) $\dfrac{830}{9}$.
(B) $\dfrac{178}{9}$.
(C) $\dfrac{340}{9}$.
(D) $\dfrac{925}{18}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(1;3)$ và $(6;8)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $(d)\colon y = x + 2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 2, y = f(x), x = 1, x = 6$ là

$$S = \int_1^6 [(x+2) - f(x)]\,dx = \frac{55}{2} - \int_1^6 f(x)\,dx = \frac{125}{9}.$$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_1^6 f(x)\,dx = \frac{245}{18}$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^6 (2x-5)f'(x)\,dx = \int_1^6 (2x-5)\mathrm{d}(f(x)) \\ &= (2x-5)f(x)\Big|_1^6 - \int_1^6 2f(x)\,dx \\ &= 7f(6) + 3f(1) - 2\int_1^6 f(x)\,dx \\ &= 7\cdot 8 + 3\cdot 3 - 2\cdot\frac{245}{18} \\ &= \frac{340}{9}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{340}{9}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \dfrac{5}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$?

(A) 16. (B) 6. (C) 17. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3m$; $y' = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 2x$. (1)
Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x$ trên khoảng $(-2; 5)$.
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	-2		1		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-8	$\nearrow$	1	$\searrow$	-15

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng một nghiệm bội lẻ thuộc $(-2; 5)$, suy ra $-15 < m \leq -8$.
Mặt khác, m nguyên suy ra $m \in \{-14; -13; \ldots; -8\}$.
Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x\left(f(x) - f'(x)\right), \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(12; 14)$. (B) $(4; 6)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(6; 8)$.

Lời giải.

Với $x \in (0; +\infty)$, ta có

$$\begin{aligned}
& f(x)\ln f(x) = x\left(f(x) - f'(x)\right) \\
\Leftrightarrow\ & \ln f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)} = x \\
\Leftrightarrow\ & \left(x \ln f(x)\right)' = x \\
\Rightarrow\ & \int \left(x\ln f(x)\right)' \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & x\ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C \\
\Leftrightarrow\ & \ln f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + C}{x}.
\end{aligned}$$

Theo giả thiết

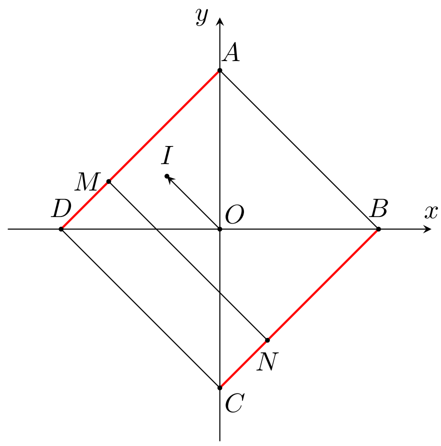
$$f(1) = f(3) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} + C}{1} = \frac{\frac{9}{2} + C}{3} \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+3}{2x}}$.
Vậy $f(2) = \mathrm{e}^{\frac{7}{4}} \approx 5{,}75 \in (4; 6)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Gọi S là tập hợp các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 6$ và $ab \leq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1 - z_2}{-1 + i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + 3i| + |z_2|$ bằng

(A) $3\sqrt{2}$. (B) 3. (C) $3\sqrt{5}$. (D) $3 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có $\overline{z} = a - bi$.
Mà $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 6 \Leftrightarrow |2a| + |2b| = 6 \Leftrightarrow |a| + |b| = 3$.

Ta có $|a| + |b| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b - 3 = 0 \text{ khi } a, b \geq 0 \\ a - b - 3 = 0 \text{ khi } a \geq 0, b < 0 \\ a - b + 3 = 0 \text{ khi } a < 0, b \geq 0 \\ a + b + 3 = 0 \text{ khi } a, b < 0. \end{array}\right.$

Vì $ab \leq 0$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm trên hai cạnh AD và BC của hình vuông $ABCD$ như hình vẽ bên, với $A(0; 3)$, $B(3; 0)$, $C(0; -3)$, $D(-3; 0)$, $AD\colon x - y + 3 = 0$ và $BC\colon x - y - 3 = 0$.
Gọi M, N và $I(-1; 1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 và $-1 + i$.
Vì $\dfrac{z_1 - z_2}{-1 + i}$ là số thực dương nên $z_1 - z_2 = k(-1 + i)$ với $k \in \mathbb{R}, k > 0$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{NM} = k\overrightarrow{OI}$ hay $\overrightarrow{NM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OI}$. Vậy suy ra M thuộc cạnh AD và N thuộc cạnh BC.
Lại có $\overrightarrow{OI}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB nên ta suy ra $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BA} = (-3; 3)$.
Giả sử $M(m; m + 3)$ $(-3 \leq m \leq 0)$ thuộc cạnh AD, suy ra $N(m + 3; m)$.
Ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + 3i| + |z_2| &= \sqrt{m^2 + (m + 6)^2} + \sqrt{(m + 3)^2 + m^2} \\ &= \sqrt{m^2 + (m + 6)^2} + \sqrt{(-3 - m)^2 + (-m)^2} \\ &\geq \sqrt{(m - 3 - m)^2 + (m + 6 - m)^2} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

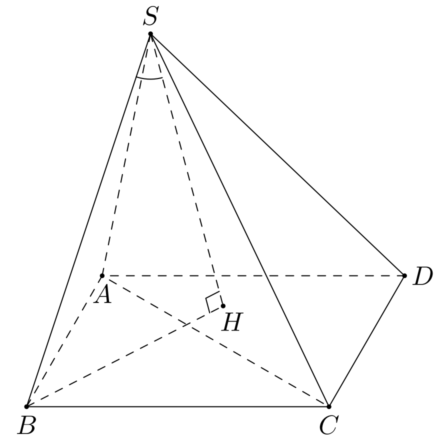
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $3\sqrt{5}$, dấu bằng xảy ra khi $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 - 2i$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = SC = AC = a$, SB tạo với mặt phẳng (SAC) một góc 30°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3}{4}$. (B) $\dfrac{a^3}{8}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (SAC). Khi đó SH là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAC).
Vậy $(SB,(SAC)) = (SB, SH) = \widehat{BSH} = 30^\circ$.
Ta có $BH = SB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \dfrac{1}{3} BH \cdot S_{SAC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.
Mà $V_{S.ABCD} = 2S_{S.ABC}$ nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



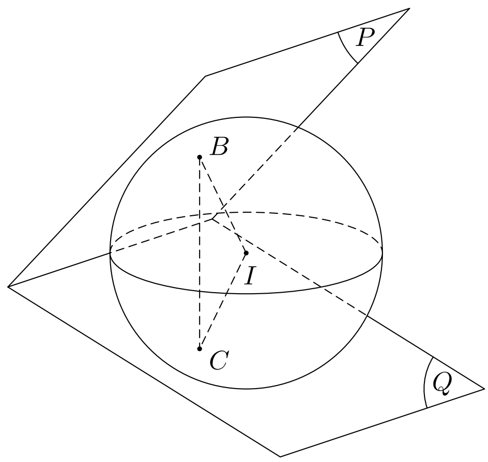
Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$ và đường thẳng d đi qua $A(1;0;-2)$, nhận véc-tơ $\overrightarrow{u} = (1;a;1-a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm véc-tơ chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà các tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Hỏi a^2 thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. (B) $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. (C) $\left(7;\dfrac{15}{2}\right)$. (D) $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R = 2$.
Giả sử đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt B, C. Gọi (P), (Q) lần lượt là các tiếp diện của (S) tại B và C. Khi đó $IB \perp (P)$, $IC \perp (Q)$ nên góc (IB, IC) là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
Theo bài ra $(P) \perp (Q)$ nên $\widehat{BIC} = 90^\circ$ hay tam giác IBC vuông cân tại I, suy ra $BC = 2\sqrt{2}$.
Đường thẳng d đi qua $A(1;0;-2)$, có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1;a;1-a)$ nên có phương trình $d\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = at \\ z = -2+(1-a)t. \end{cases}$



Tham số t của tọa độ giao điểm của d và (S) là nghiệm của phương trình

$$t^2 + (at+2)^2 + [(1-a)t-1]^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \left(2a^2 - 2a + 2\right)t^2 + 2(3a-1) + 1 = 0. \quad (1)$$

Vì $2a^2 - 2a + 2 > 0, \forall a$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt B, C sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại B và C vuông góc với nhau khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 và $BC = 2\sqrt{2}$. Do đó ta có

$$\Delta' = (3a-1)^2 - \left(2a^2 - 2a + 2\right) > 0 \Leftrightarrow 7a^2 - 4a - 1 > 0. \quad (2)$$

và $BC = \sqrt{(t_2-t_1)^2 + (at_2 - at_1)^2 + ((1-a)t_2 - (1-a)t_1)^2} = 2\sqrt{2}$ với $t_1 + t_2 = \dfrac{1-3a}{a^2-a+1}$, $t_1t_2 = \dfrac{1}{2a^2-2a+2}$.
Suy ra

$$(2a^2-2a+2)\left[(t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2\right] = 8 \Leftrightarrow \left(2a^2-2a+2\right) \cdot \frac{7a^2-4a-1}{\left(a^2-a+1\right)^2} = 8 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{3}.$$

Thử lại vào (2) ta thấy $a = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ thỏa mãn. Vậy $a^2 \in \left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Cách khác: Tam giác IBC vuông cân tại I nên $\mathrm{d}(I,d) = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (0;2;-1)$, $\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right] = (2-a;-1;-2)$ và $\mathrm{d}(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{a^2-4a+9}}{\sqrt{2a^2-2a+2}}$. Suy ra

$$\mathrm{d}(I,d) = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2-4a+9 = 4a^2-4a+4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{3} \in \left(\frac{3}{2};2\right).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=2$ và $|z_2+1-4i|=4$?

(A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Do phương trình $z^2+az+b=0$ có các hệ số thực nên phương trình luôn có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn z_1, z_2 cùng là số thực hoặc z_1, z_2 là hai số phức liên hợp.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a^2-4b \neq 0$. $\quad(*)$
Trường hợp 1: z_1, z_2 là các số thực. Khi đó ta có

$$\begin{cases}|z_1-2|=2\\|z_2+1-4i|=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}z_1=0\\z_1=4\end{array}\right.\\(z_2+1)^2+16=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}z_1=0\\z_1=4\end{array}\right.\\z_2=-1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=1;b=0 \text{ (thỏa mãn)}\\a=-3\ b=-4 \text{ (thỏa mãn)}.\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: z_1, z_2 là hai số phức liên hợp. Đặt $z_1 = x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}|z_1-2|=2\\|z_2+1-4i|=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\(x+1)^2+(y+4)^2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x+y^2=0\\6x+8y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}100x^2-244x+1=0\\6x+8y=-1.\end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = \dfrac{61+4\sqrt{231}}{50}$, $y = -\dfrac{52+3\sqrt{231}}{50}$ hoặc $x = \dfrac{61-4\sqrt{231}}{50}$, $y = -\dfrac{52-3\sqrt{231}}{50}$.
Với $a=-2x$, $b=x^2+y^2$ từ đó ta tìm được hai cặp $(a;b)$ thỏa mãn.
Vậy có 4 cặp $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right) = \log_2\left(-x^2+6x-5\right)$. Số phần tử của S là

(A) 7. (B) 1. (C) 8. (D) 3.

Lời giải.

Với $x \in \left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right]$, ta có $-x^2+6x-5>0$.

Khi đó

$$\begin{aligned}&\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right) = \log_2\left(-x^2+6x-5\right)\\ \Leftrightarrow\ & x^3-6x^2+9x+y = 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)}\\ \Leftrightarrow\ & y = 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} - x^3+6x^2-9x.\end{aligned}$$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Xét hàm số $f(x) = 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} - x^3 + 6x^2 - 9x$.
Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x+6}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2} \cdot 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} \cdot \ln 3 - 3x^2 + 12x - 9 \\ &= \frac{-2(x-3)}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2} \cdot 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} \cdot \ln 3 - 3(x-1)(x-3) \\ &= (x-3)\left[\frac{-2}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2} \cdot 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} \cdot \ln 3 - 3(x-1)\right]. \end{aligned}$$

Với $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$, ta có $\frac{-2}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2} \cdot 3^{\log_2\left(-x^2+6x-5\right)} \cdot \ln 3 - 3(x-1) < 0$.
Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$\frac{3}{2}$		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	9	↘	$f\left(\frac{9}{2}\right)$

Ta có $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0{,}9$ và $f\left(\frac{9}{2}\right) \approx -7{,}7$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} y = 9 \\ f\left(\frac{9}{2}\right) \leqslant y < f\left(\frac{3}{2}\right) \end{array}\right.$.

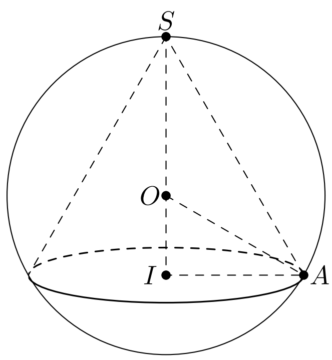
Suy ra $S = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 9\}$.
Vậy số phần tử của S là 8.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Xét khối nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh và đường tròn đáy cùng nằm trên một mặt cầu bán kính bằng 2. Khi $(\mathcal{N})$ có độ dài đường sinh bằng $2\sqrt{3}$, thể tích của nó bằng

A $2\sqrt{3}\pi$. **B** 3π. **C** $6\sqrt{3}\pi$. **D** π.

Lời giải.

Trường hợp 1.
Xét mặt cầu và khối nón như hình vẽ.
Xét tam giác OAI vuông tại I, ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{4 - IA^2}$.
Xét tam giác SAI vuông tại I, ta có



$$\begin{aligned} & SI^2 + IA^2 = SA^2 \Leftrightarrow (SO + OI)^2 + IA^2 = SA^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(2 + \sqrt{4 - IA^2}\right)^2 + IA^2 = 12 \Leftrightarrow 8 + 4\sqrt{4 - IA^2} = 12 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{4 - IA^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - IA^2 = 1 \Leftrightarrow IA^2 = 3. \end{aligned}$$

Suy ra $OI = 1 \Rightarrow SI = 3$.
Vậy thể tích của khối nón $(\mathcal{N})$ là $V = \frac{\pi}{3} \cdot IA^2 \cdot SI = 3\pi$.

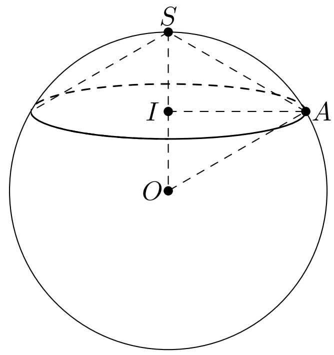
Trường hợp 2.

Xét mặt cầu và khối nón như hình vẽ.

Xét tam giác OAI vuông tại I, ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{4 - IA^2}$.

Xét tam giác SAI vuông tại I, ta có

$$SI^2 + IA^2 = SA^2 \Leftrightarrow (SO - OI)^2 + IA^2 = SA^2$$
$$\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{4 - IA^2}\right)^2 + IA^2 = 12 \Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{4 - IA^2} = 12$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - IA^2} = -1 \text{ (vô lý)}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(4; 8; 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn $60°$?

(A) 6. (B) 2. (C) 10. (D) 5.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 + (z - 12)^2 = R^2.$$

Giao tuyến của (S) và mặt phẳng (Oyz) là đường tròn (C) có tâm $I'(0; 8; 12)$ và có phương trình

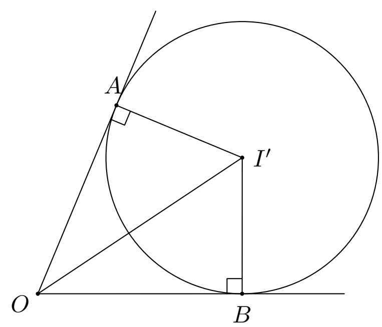
$$\begin{cases} x = 0 \\ (0 - 4)^2 + (y - 8)^2 + (z - 12)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (y - 8)^2 + (z - 12)^2 = R^2 - 16. \end{cases}$$

OA, OB là hai tiếp tuyến của (C) (A, B là các tiếp điểm) mà góc AOB lớn hơn hoặc bằng $60°$.

Ta có bán kính của (C) là $r = \sqrt{R^2 - 16}$ và $OI' = 4\sqrt{13}$.

Xét tam giác OAI', ta có

$$\sin 30° \leq \sin \widehat{AOI'} < \sin 60° \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{I'A}{I'O} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{R^2 - 16}}{4\sqrt{13}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 68 \leq R^2 < 172 \Leftrightarrow 2\sqrt{17} \leq R < 2\sqrt{43}.$$



Mà R nguyên nên có 6 giá trị của R thỏa mãn là $R \in \{9; 10; 11; 12; 13\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng các giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f\left(x^2 + 2x + 3\right) = m$ bằng -4?

(A) 145. (B) 142. (C) 144. (D) 143.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 + 2x + 3$, ta có $t' = 2x + 2$. $t' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Bảng biến thiên của t theo x như hình bên.
Suy ra $t \in [2; 11)$ với $x \in (-3; 2)$.
Mặt khác, ứng với mỗi $t \in (2; 6)$ thì phương trình $x^2+2x+3 = t$ có 2 nghiệm phân biệt và tổng của chúng bằng -2.

x	-3		-1		2
t'		$-$	0	$+$	
t	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	11

Phương trình $f\left(x^2 + 2x + 3\right) = m$ có tổng các giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ bằng -4 khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2; 6)$.

Ta có $f'(t) = 4t^3 - 64t$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $f(t)$ như sau

t	2		4		6
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-108	$\searrow$	-252	$\nearrow$	148

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $-252 < m < -108$, do m nguyên nên có 143 số m thỏa mãn là

$$m \in \{-251; -250; \ldots; -110; -109\}.$$

Chọn đáp án D $\square$

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 44

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023
Môn: Toán
Năm học: 2022 – 2023
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-102

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $-2+2i$. B. $2-2i$. C. $2i$. D. $2+2i$.

Lời giải.

Điểm $M(-2;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-2+2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Khẳng định nào sau dưới đây đúng?

A. $\int x^5\,\mathrm{d}x = 5x^4 + C$. B. $\int x^5\,\mathrm{d}x = x^6 + C$.

C. $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + C$. D. $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{\ln 5} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. B. 4. C. 12. D. 8.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 6 = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > \log_2 5$ là

A. $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. B. $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. C. $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$. D. $\left(0;\frac{3}{5}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x) > \log_2 5 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_7(7a)$ bằng

(A) $1-\log_7 a$. (B) $1+\log_7 a$. (C) $1+a$. (D) a.

Lời giải.

Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log_7(7a)=\log_7 7+\log_7 a=1+\log_7 a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=9a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $3a^2$. (B) $6a^3$. (C) $18a^3$. (D) $24a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp đã cho là $V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\cdot 9a^2\cdot 2a=6a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(1)=3$, $F(3)=6$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 9. (B) -3. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=F(3)-F(1)=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Diện tích đáy của khối lăng trụ có thể tích V và chiều cao h bằng

(A) $\dfrac{V}{h}$. (B) $\dfrac{3V}{h}$. (C) $\dfrac{V}{3h}$. (D) Vh.

Lời giải.

Gọi diện tích đáy của khối lăng trụ là B, ta có $V=Bh\Rightarrow B=\dfrac{V}{h}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;\infty)$. (B) $(-\infty;1)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Xét $f'(x)\le 0\Leftrightarrow x^3\le 0\Leftrightarrow x\le 0$. Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(x+1)$ là

(A) $y'=\dfrac{1}{\ln 3}$. (B) $y'=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}$. (C) $y'=\dfrac{1}{x+1}$. (D) $y'=\dfrac{x+1}{\ln 3}$.

Lời giải.

Với mọi $x>-1$, ta có $[\log_3(x+1)]'=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án (B) □

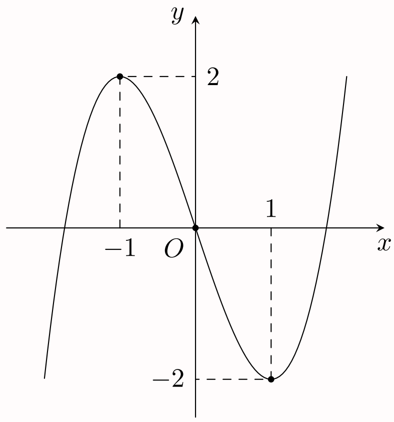
Câu 11. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp $\{1;2;3;4;5;6\}$?

Ⓐ 18. Ⓑ 216. Ⓒ 20. Ⓓ 120.

Lời giải.

Số các số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$ là $\mathrm{A}_6^3 = 120$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho. Suy ra điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.
Chọn đáp án Ⓐ □

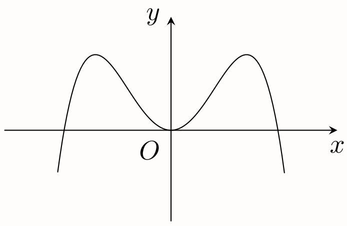
Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \geq 8$ là

Ⓐ $[-3; +\infty)$. Ⓑ $[3; +\infty)$. Ⓒ $(3; +\infty)$. Ⓓ $(-3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \log_2 8 = 3$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [3; +\infty)$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



Ⓐ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Dựa vào đồ thị như hình đã cho. Suy ra hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$. Hơn nữa, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

Vậy hàm số cần tìm có dạng $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ 3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

(A) $x = -1$. (B) $x = -3$. (C) $x = 3$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$.

Suy ra $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Với a là số thực dương tuỳ ý biểu thức $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ bằng

(A) a^5. (B) $a^{\frac{5}{9}}$. (C) $a^{\frac{4}{3}}$. (D) a^2.

Lời giải.

Với a là số thực dương tùy ý ta có $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} = a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

(A) $\sqrt{2}a$. (B) $2a$. (C) $\sqrt{10}a$. (D) $4a$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh $\ell = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) $8\pi a^2$. (B) $7\pi a^2$. (C) $6\pi a^2$. (D) $14\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rh = 2 \cdot a \cdot 3a = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2;3;1)$ trên trục Ox có toạ độ là

(A) $(0;0;1)$. (B) $(-2;0;0)$. (C) $(0;3;1)$. (D) $(0;3;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2;3;1)$ trên trục Ox có tọa độ là $(-2;0;0)$.
Chọn đáp án (B)

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{2}=1$ cắt trục Oy tại điểm có toạ độ là

(A) $(0;5;0)$. (B) $(0;3;0)$. (C) $(0;-1;0)$. (D) $(0;2;0)$.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{2}=1$ cắt trục Oy. Suy ra $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=0. \end{cases}$

Chọn đáp án (A)

Câu 21. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

(A) $-i$. (B) 2. (C) $1-i$. (D) $1+i$.

Lời giải.

Số phức thuần ảo là $-i$.
Chọn đáp án (A)

Câu 22. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành là

$$x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành là 2.
Chọn đáp án (B)

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Phương trình của (S) là

(A) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\sqrt{2}$. (B) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

(C) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2$. (D) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2$.
Chọn đáp án (C)

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-1), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x+2)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho các số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = i$. Số phức $z_1 \cdot z_2$ bằng

(A) $-3+2i$. (B) $2+4i$. (C) $2-3i$. (D) $3-2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot i = -3+2i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = 1 + 2\cos 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \sin 2x + C$. (B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + 2\sin 2x + C$.

(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \sin 2x + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - 2\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (1+2\cos 2x)\,\mathrm{d}x = x + 2\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x + C = x + \sin 2x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;-1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (4;3;-2)$ là

(A) $\dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$. (B) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$.

(C) $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$. (D) $\dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

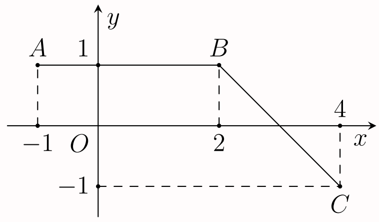
(A) 4. (B) -6. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



(A) $\dfrac{7}{2}$. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

- Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Đường thẳng AB có phương trình là $y = 1$.
- Đường thẳng BC đi qua $B(2;1)$, $C(4;-1)$ có phương trình là $y = -x + 3$.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1;2) \\ -x+3, x \in [2;4]. \end{cases}$

Vậy $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 1\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} (-x+3)\,\mathrm{d}x = 3 + 0 = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(-\infty;-1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

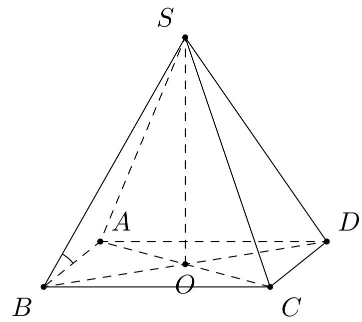
Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

(A) 30°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.

Vì $CD \parallel AB$ nên góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng góc giữa SB và AB. Góc cần tìm là $\widehat{SBA}$.
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên tam giác SAB đều. Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-5=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = 1+t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = 1+t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = -1+t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-3t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Lời giải.

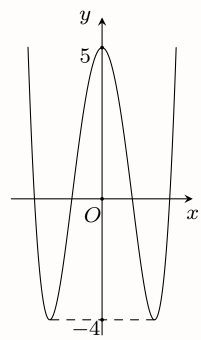
Gọi d là đường thẳng qua A và $d \perp (P)$, suy ra d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2;3;1)$.

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = 1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

(A) 4. (B) 16. (C) 17. (D) 8.



Lời giải.

Ta có $2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{m}{2}$.
Để phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt, suy ra $-4 < \dfrac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow -8 < m < 10$.
Do m nguyên nên $m \in \{-7;-6;\ldots;8;9\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $x^2+(y-1)^2+(z-4)^2 = 3$. (B) $x^2+(y-1)^2+(z-4)^2 = 12$.
(C) $x^2+(y+1)^2+(z+4)^2 = 3$. (D) $x^2+(y+1)^2+(z+4)^2 = 12$.

Lời giải.

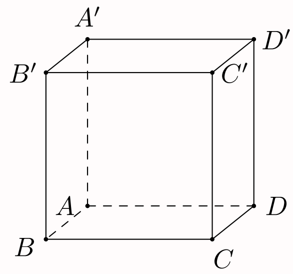
Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB, suy ra I là trung điểm của AB, $I(0;1;4)$.

Đường kính $AB = \sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{3}$. Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2+(y-1)^2+(z-4)^2 = 3$.

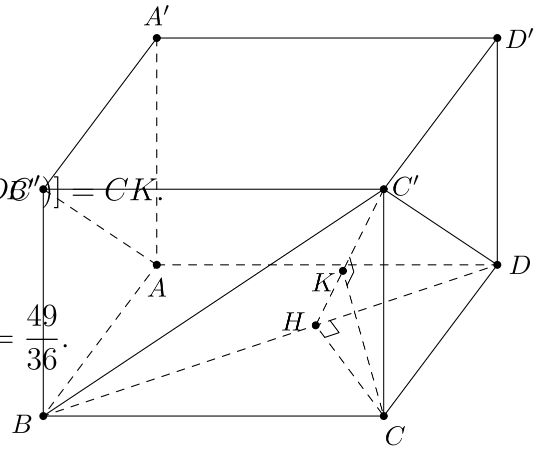
Chọn đáp án A □

Câu 35.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $BC = 2$, $AA' = 3$ (*tham khảo hình bên*). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $\dfrac{6}{7}$. B. $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$. C. $\dfrac{7}{6}$. D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.



Kẻ $CH \perp BD$, $CK \perp C'H$.
Vì $BD \perp (CC'H)$ nên $BD \perp CK$.
Từ đó, $CK \perp (BDC')$. Hay $\mathrm{d}[C,(BDC')] = CK$.
Do $AB' \parallel C'D$ nên $AB' \parallel (BDC')$, suy ra

$$\mathrm{d}[AB', BC'] = \mathrm{d}[AB', (BDC')] = \mathrm{d}[A, (BDC')] = \mathrm{d}[C, (BDC')] = CK.$$

Ta có

$$\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}.$$

Vậy $CK = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tập xác định của hàm số $f(x) = \log_5(30 - x^2)$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 11. B. 5. C. 6. D. 10.

Lời giải.

Điều kiện xác định $30 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{30} < x < \sqrt{30}$.

Do x nguyên nên $x \in \{-5;-4;-3;-2;-2;0;1;2;3;4;5\}$, vậy có 11 giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $z - 2\overline{z} = 1 + 6i$. Mô-đun của z bằng

A. 5. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$a + bi - 2(a - bi) = 1 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2a = 1 \\ b + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $z = -1 + 2i$ nên $|z| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

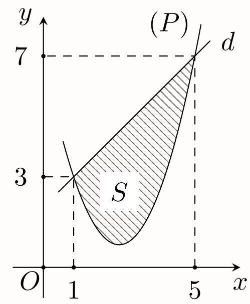
Câu 38. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, xác suất để chọn được số có tổng hai chữ số bằng 8 là

Ⓐ $\dfrac{4}{81}$. Ⓑ $\dfrac{1}{9}$. Ⓒ $\dfrac{7}{81}$. Ⓓ $\dfrac{8}{81}$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có hai chữ số là $\overline{ab}$.
Chọn a có 9 cách, chọn b có 9 cách.
Số các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau là 81. Suy ra $n(\Omega) = 81$.
Các bộ số có tổng hai chữ số khác nhau bằng 8 là $\{1;7\}$, $\{2;6\}$, $\{3;5\}$, $\{0;8\}$.
Số các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau mà tổng hai chữ số bằng 8 là 7 số gồm: 71;17;26;62;35;53;80.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{7}{81}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39.
Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \dfrac{32}{3}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^5 (2x-5)\, f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



Ⓐ $\dfrac{104}{3}$. Ⓑ $\dfrac{76}{3}$. Ⓒ $\dfrac{22}{3}$. Ⓓ $\dfrac{188}{3}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(1) = 3$, $f(5) = 7$.
Gọi $d\colon y = ax + b$, vì d qua $A(1;3)$ và $B(5;7)$ nên ta có

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 5a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow d\colon y = x+2.$$

Ta có

$$S = \int\limits_1^5 (x+2-f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 (x+2)\,\mathrm{d}x - \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{3} = 20 - \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{28}{3}.$$

Xét $I = \displaystyle\int\limits_1^5 (2x-5)f'(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = 2x-5 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= (2x-5)f(x)\Big|_1^5 - 2\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 5f(5) + 3f(1) - 2\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5\cdot 7 + 3\cdot 3 - 2\cdot\frac{28}{3} = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0;6)$?

(A) 24. (B) 25. (C) 26. (D) 23.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3} \Rightarrow y' = x^2 - 2x - m$.
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 2x \quad (1)$.
Vì hàm số bậc ba hoặc không có cực trị hoặc có hai cực trị. Do đó, để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0;6)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt mà có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0;6)$. Suy ra đường thẳng $\Delta\colon y = m$ cắt parabol $(P)\colon y = x^2 - 2x$ tại hai điểm phân biệt mà có đúng một giao điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;6)$.
Xét $g(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực trị thuộc khoảng $(0;6)$ khi $0 \le m < 24$. Mà m nguyên nên $m \in \{0;1;\ldots;23\}$. Vậy có 24 số nguyên m thoả yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $(3^x - 27)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 10\right) < 0$?

(A) 242. (B) 235. (C) 233. (D) 238.

Lời giải.

Điệu kiện $x > 0$.
Ta có

- $3^x - 27 \Leftrightarrow x = 3$;
- $\log_3^2 x - 7\log_3 x + 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = 243.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của vế trái bất phương trình đã cho

x	$-\infty$		3		9		243		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

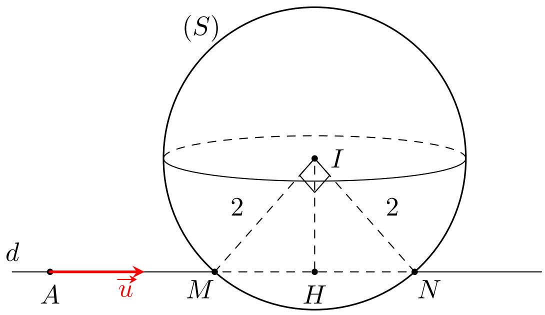
Kết hợp điều kiện và bảng xét dấu, bất phương trình tương đương $x \in (0;3) \cup (9;243)$.
Vậy có 235 giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;-2)$, nhận $\vec{u} = (1;a;4-a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm véc-tơ chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà các tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Hỏi a^2 thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $\left(8; \dfrac{17}{2}\right)$. Ⓑ $\left(25; \dfrac{51}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{23}{2}; 12\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 2$. Gọi $\{M, N\} = d \cap (S)$. Khi đó $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của 2 tiếp diện tương ứng. Theo giả thiết, 2 tiếp diện này vuông góc nhau nên $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IN}$ hay $\triangle IMN$ vuông cân tại I có $IM = IN = 2$, nên $MN = 2\sqrt{2}$.



Gọi H là trung điểm của MN, ta được $\mathrm{d}(I, d) = IH = \sqrt{IM^2 - HM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$.

Mặt khác $\mathrm{d}(I, d) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{AI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, với $\vec{u} = (1; a; 4 - a)$, $\overrightarrow{AI} = (0; -2; 1)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{AI}\right] = (8 - a, -1, -2)$.

Do đó $\mathrm{d}^2(I, d) = \dfrac{(8-a)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}{1^2 + a^2 + (4-a)^2} = 2 \Rightarrow a^2 - 16a + 69 = 2(2a^2 - 8a + 17) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{35}{3}$.

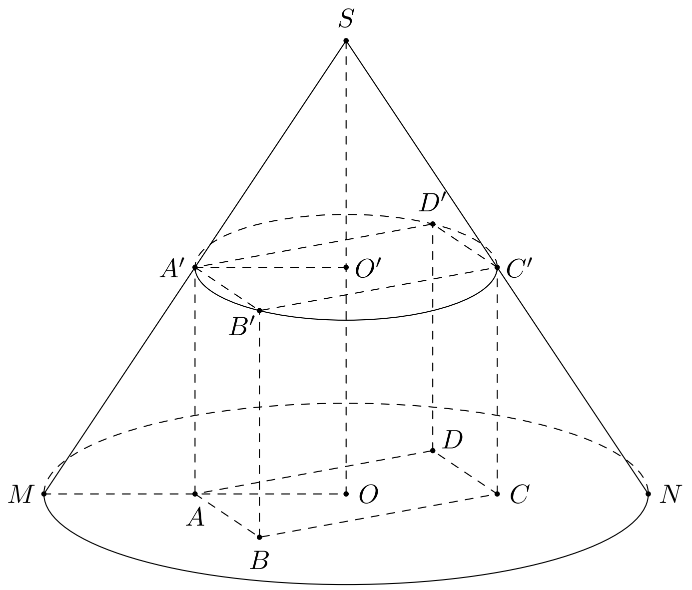
Vậy $a^2 \in \left(\dfrac{23}{2}; 12\right)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Hình nón $(\mathcal{N})$ có đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt xung quanh đi qua bốn điểm A', B', C', D'. Khi bán kính đáy của $(\mathcal{N})$ bằng $2\sqrt{2}$, diện tích xung quanh của $(\mathcal{N})$ bằng

Ⓐ $8\sqrt{2}\pi$. Ⓑ $8\sqrt{3}\pi$. Ⓒ $8\sqrt{6}\pi$. Ⓓ $4\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có $O'A' = \dfrac{1}{2}A'C' = \sqrt{2}$; $OM = 2\sqrt{2}$ và $OO' = 2$.

Ta có $O'A' \parallel OM$ suy ra $\dfrac{OM}{O'A'} = \dfrac{SO}{SO'} \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{SO' + OO'}{SO'} = 1 + \dfrac{2}{SO'} \Leftrightarrow SO' = 2 \Rightarrow SO = 4$.

Xét $\triangle SOM$ có $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$.

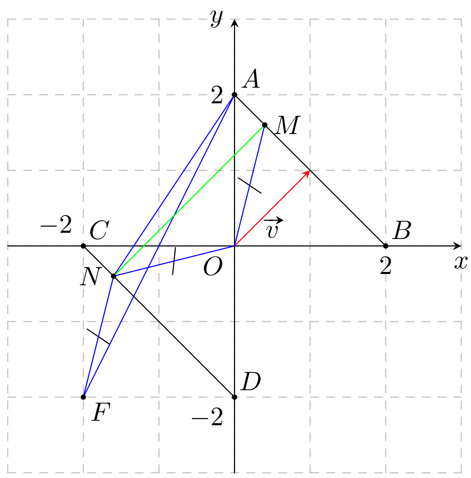
Vậy $S_{xq} = \pi \cdot Rl = \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Gọi S là tập hợp các số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$ và $ab \geq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1 - z_2}{1 + i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2 - 2i|$ bằng

A $2\sqrt{2}$. **B** 2. **C** $2\sqrt{5}$. **D** $2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Số phức z thỏa mãn

$$
\begin{aligned}
& |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |2a| + |2b| = 4 \\
\Leftrightarrow\ & |a| + |b| = 2 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} a + b = 2\,(\text{khi}\, a \geq 0, b \geq 0) & (\Delta_1) \\ -a - b = 2\,(\text{khi}\, a \leq 0, b \leq 0) & (\Delta_2). \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1, N là điểm biểu diễn số phức z_2.

Ta có $\dfrac{z_1 - z_2}{1+i}$ là số thực dương$\Rightarrow \dfrac{z_1 - z_2}{1+i} = k\,(k > 0) \Rightarrow z_1 - z_2 = k(1+i)$.

Suy ra $\overrightarrow{NM}$ cùng hướng với vec-tơ $\vec{v} = (1, 1)$. Khi đó ta có M thuộc đoạn thẳng $AB\colon x + y - 2 = 0$, N thuộc đoạn thẳng $CD\colon x + y + 2 = 0$.

Ta có $P = |z_1| + |z_2 - 2i| = OM + NA$ với $A(0, 2)$.

$P = |z_1| + |z_2 - 2i| = OM + NA = ON + NA = NF + NA \geq AF = 2\sqrt{5}$ với $F(-2, -2)$.

Vậy $P_{min} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C

Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 + az + b = 0\,(a, b \in \mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số (a, b) để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1| = 2$ và $|z_2 - 3 + 2i| = 4$?

A 2. **B** 4. **C** 6. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $\Delta = a^2 - 4b$.

(1) Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b > 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2. Khi đó

- $|z_1 + 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_1 = -3. \end{array}\right.$
- $|z_2 - 3 + 2i| = 4 \Leftrightarrow (z_2 - 3)^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow (z_2 - 3)^2 = 12$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_2 = 3 + 2\sqrt{3} \\ z_2 = 3 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Chúng ta có 4 cặp z_1, z_2 thỏa mãn giả thiết bài toán là $(1; 3 + 2\sqrt{3})$, $(1; 3 - 2\sqrt{3})$, $(-3; 3 + 2\sqrt{3})$ và $(-3; 3 - 2\sqrt{3})$. Theo định lý Vi-et ta có $z_1 + z_2 = -a$ và $z_1 z_2 = b$. Do đó, mỗi cặp giá trị (z_1, z_2) tương ứng với duy nhất một cặp giá trị (a, b) thỏa mãn $a^2 - 4b > 0$.
Vậy trường hợp này có 4 cặp giá trị (a, b) thỏa mãn bài toán.

(2) Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b < 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 $(z_1, z_2 \notin \mathbb{R})$. Đặt $z_1 = x + yi$ thì $z_2 = x - yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{cases} |z_1 + 1| = 2 \\ |z_2 - 3 + 2i| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (-y+2)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ 8x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 2x = 3 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{6}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Nhận xét, ta có 2 cặp (x, y) thỏa mãn hệ phương trình trên, điều này tương đương có hai cặp giá trị (z_1, z_2) thỏa mãn giả thiết bài toán. Lập luận tương tự trường hợp **(1)** ta được 2 cặp giá trị (a, b) thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả 6 cặp giá trị (a, b) thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C

Câu 46. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AC' = 8$, diện tích của tam giác $A'BC$ bằng 9 và đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(A'BC)$ một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 6. (B) 18. (C) $6\sqrt{6}$. (D) $18\sqrt{3}$.

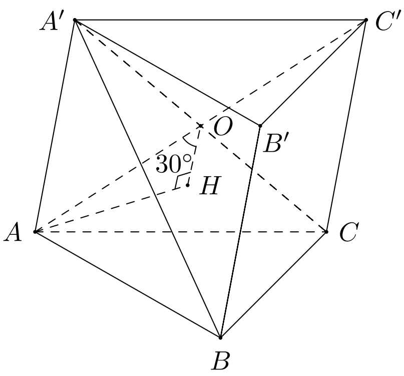
Lời giải.

Gọi $O = AC' \cap A'C$. Vì $AA'C'C$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC'. Từ đó ta có $AO = \dfrac{AC'}{2} = 4$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $(A'BC)$, suy ra $AH \perp (A'BC)$ tại H và OH là hình chiếu của AO trên $(A'BC)$. Từ đó ta có $30° = \left(\widehat{AC', (A'BC)}\right) = \left(\widehat{AO, (A'BC)}\right) = \left(\widehat{AO, OH}\right) = \widehat{AOH}$.

Xét $\triangle AHO$ vuông tại H, có $AH = AO \sin \widehat{AOH} = 4 \sin 30° = 2$.

Từ đó ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'ABC} = 3 \cdot \dfrac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle A'BC} = 2 \cdot 9 = 18$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{11}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2 (x^3 - 9x^2 + 24x + y) = \log_3 (-x^2 + 8x - 7)$. Số phần tử của S là

(A) 8. (B) 7. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 + 24x + y = 2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)} \\ \Leftrightarrow\ & y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)} \\ \Leftrightarrow\ & y = -x^3 + 9x^2 - 24x + \left(-x^2 + 8x - 7\right)^{\log_3 2}. \end{aligned}$$

Xét $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + (-x^2 + 8x - 7)^{\log_3 2}$ với $x \in \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{11}{2}\right]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 18x - 24 - 2(x-4)\log_3 2 \cdot \left(-x^2 + 8x - 7\right)^{\log_3 2 - 1} \\ &= -3(x-4)(x-2) - 2(x-4)\log_3 2 \cdot \left(-x^2 + 8x - 7\right)^{\log_3 2 - 1} \\ &= (x-4)\left[-3(x-2) - 2\log_3 2 \cdot \left(-x^2 + 8x - 7\right)^{\log_3 2 - 1}\right]. \end{aligned}$$

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ vì $-3(x-2) - 2\log_3 2 \cdot (-x^2 + 8x - 7)^{\log_3 2 - 1} < 0$, $\forall x \in \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{11}{2}\right]$.

x	$\frac{5}{2}$		4		$\frac{11}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-16{,}4$	↗	-12	↘	$-22{,}79$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-12 \\ -22{,}79<y<-16{,}4. \end{array}\right.$

Do y nguyên nên chọn $y \in \{-12,-17,-18,-19,-20,-21,-22\}$.
Vậy số phần tử của S là 7.

Chọn đáp án B

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right),\ \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(1;3)$. B $(8;10)$. C $(6;8)$. D $(13;15)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right) \\ \Leftrightarrow\ & xf'(x)+f(x)\ln f(x)=xf(x) \\ \Leftrightarrow\ & x\frac{f'(x)}{f(x)}+\ln f(x)=x \\ \Leftrightarrow\ & [x\ln f(x)]'=x \\ \Rightarrow\ & x\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+C \\ \Leftrightarrow\ & f(x)=e^{\frac{x}{2}+\frac{C}{x}}. \end{aligned}$$

Ta có $f(1)=f(4)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}+\frac{C}{1}}=e^{\frac{4}{2}+\frac{C}{4}}\Leftrightarrow C=2$.
Do đó $f(2)=e^{\frac{2}{2}+\frac{2}{2}}=e^2$.

Chọn đáp án C

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(3;7;12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn $60°$?

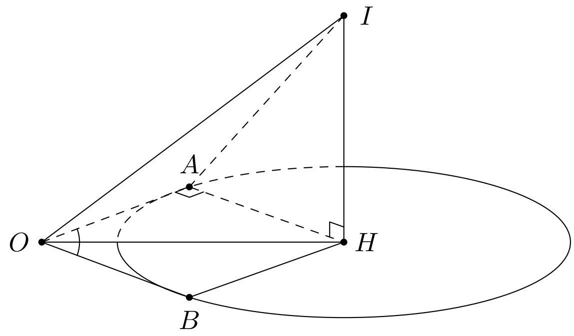
A 11. B 7. C 5. D 3.

Lời giải.

Để có hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) cùng đi qua O thì có hai trường hợp sau

- **Trường hợp 1**: (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) tại O:
  Khi đó $R=OI=\sqrt{202}\notin\mathbb{Z}$, loại.

- **Trường hợp 2**: (S) cắt (Oyz) theo một đường tròn (C):



Khi đó $\mathrm{d}(I,(Oyz)) < R \Leftrightarrow R > 3$.
Gọi H là tâm của (C) thì H là hình chiếu của I trên (Oyz) nên $H(0;7;12)$. Ta có $IH = 3$, $OH = \sqrt{193}$. Gọi A, B là tiếp điểm của hai tiếp tuyến đi qua O của (S).

Ta có $\sin^2\widehat{AOH} = \dfrac{AH^2}{OH^2} = \dfrac{IA^2 - IH^2}{OH^2} = \dfrac{R^2-9}{193}$.

Vì góc giữa hai tiếp tuyến không nhỏ hơn 60° nên

$60^\circ \le \widehat{AOB} \le 120^\circ \Rightarrow 30^\circ \le \widehat{AOH} \le 60^\circ$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \sin^2\widehat{AOH} \le \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{R^2-9}{193} \le \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow 7{,}6 \approx \dfrac{\sqrt{229}}{2} \le R \le \dfrac{\sqrt{615}}{2} \approx 12{,}4$.

Vì $R \in \mathbb{Z}$ nên $R \in \{8;9;10;11;12\}$.
Vậy có 5 giá trị R thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4;1)$ của phương trình $f\left(x^2+4x+5\right) = m$ bằng -8?

A 63. B 65. C 62. D 64.

Lời giải.

Xét phương trình $f(x^2+4x+5) = m$ (1), với $x \in (-4;1)$.
Đặt $t = x^2+4x+5$, $x \in (-4;1)$.
Ta có bảng biến thiên của hàm số $t = x^2+4x+5$.

x	-4		-2		1
t'		$-$	0	$+$	
t	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

Do đó với $x \in (-4;1)$ thì $t \in (1;10)$.
Phương trình (1) trở thành $f(t) = m$. (2) với $t \in (1;10)$.
Ta có $f(t) = t^4 - 18t^2 + 4 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 36t = 4t(t^2-9)$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.

t	1		3		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-13	$\searrow$	-77	$\nearrow$	8204

Từ bảng biến thiên ta có các trường hợp sau

- **Trường hợp 1**: $\left[\begin{array}{l} m < -77 \\ m \geq 8204 \end{array}\right.$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

- **Trường hợp 2**: $\left[\begin{array}{l} m = -77 \\ -13 \leq m < 8204 \end{array}\right.$ thì phương trình (2) có đúng một nghiệm $t = t_0$. Ta được phương trình $x^2 + 4x + 5 = t_0$, tổng các nghiệm bằng -4, (loại).

- **Trường hợp 3**: $-77 < m < -13$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2. Ta được phương trình
$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 5 = t_1 \\ x^2 + 4x + 5 = t_2. \end{array}\right.$$
Tổng các nghiệm của phương trình là $-4 + (-4) = -8$ (thỏa mãn).

Vậy $-77 < m < -13$, $m \in \mathbb{Z}$ nên số các giá trị m thỏa mãn là 63.
Chọn đáp án A □

— **HẾT** —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 45

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023
Môn: Toán
Năm học: 2022 – 2023
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-103

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

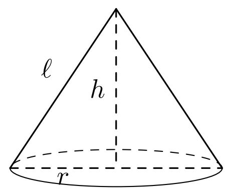
Nội dung đề

Câu 1. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $4a$. B. $2a$. C. $\sqrt{10}a$. D. $\sqrt{2}a$.

Lời giải.

Ta có $\ell = \sqrt{R^2+h^2} = \sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2} = 2a$.



Chọn đáp án B □

Câu 2. Diện tích đáy của khối lăng trụ có thể tích V và chiều cao h bằng

A. $\dfrac{V}{3h}$. B. $\dfrac{V}{h}$. C. Vh. D. $\dfrac{3V}{h}$.

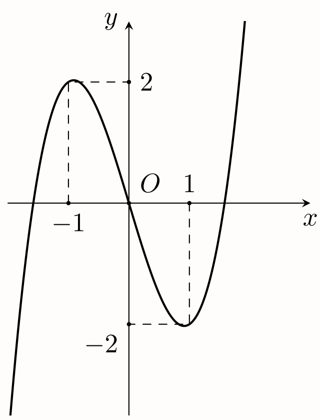
Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $V = S\cdot h \Rightarrow S = \dfrac{V}{h}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3.
Cho hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=1$. B. $x=-2$. C. $x=-1$. D. $x=2$.



Lời giải.

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=1$.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + C$. Ⓑ $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{\ln 5} + C$.

Ⓒ $\int x^5\,\mathrm{d}x = 5x^4 + C$. Ⓓ $\int x^5\,\mathrm{d}x = x^6 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 5. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 12. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 9a^2$ và chiều cao $h = 2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $3a^3$. Ⓑ $24a^3$. Ⓒ $18a^3$. Ⓓ $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 9a^2\cdot 2a = 6a^3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$ bằng

Ⓐ $a^{\frac{4}{3}}$. Ⓑ a^5. Ⓒ a^2. Ⓓ $a^{\frac{5}{9}}$.

Lời giải.

Với $a > 0$, ta có $a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

Ⓐ $(0;-1;0)$. Ⓑ $(0;3;0)$. Ⓒ $(0;2;0)$. Ⓓ $(0;5;0)$.

Lời giải.

Gọi M là giao của mặt phẳng (P) và trục Oy.

Do $M \in Oy \Rightarrow M(0;y_M;0)$.

$M \in (P) \Rightarrow \frac{0}{3} + \frac{y_M}{5} + \frac{0}{2} = 1 \Leftrightarrow y_M = 5$.

Vậy $M(0;5;0)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;-1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;3;-2)$ là

Ⓐ $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Ⓑ $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Ⓒ $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. Ⓓ $\dfrac{x+4}{-3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;-1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;3;-2)$ có phương trình

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.
Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Cho các số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=i$. Số phức z_1z_2 bằng

Ⓐ $3-2i$. Ⓑ $2-3i$. Ⓒ $-3+2i$. Ⓓ $2+4i$.

Lời giải.

Ta có $z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot i=2i+3i^2=2i+3\cdot(-1)=-3+2i$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

Ⓐ 2. Ⓑ $1-i$. Ⓒ $1+i$. Ⓓ $-i$.

Lời giải.

Ta có $z=-i=0-1\cdot i$.
Số phức này có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1 nên nó là số thuần ảo.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 13. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_7(7a)$ bằng

Ⓐ $1+a$. Ⓑ a. Ⓒ $1-\log_7 a$. Ⓓ $1+\log_7 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_7(7a)=\log_7 7+\log_7 a=1+\log_7 a$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(1) = 3$, $F(3) = 6$. Tích phân $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. B. 9. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^3 = F(3) - F(1) = 6 - 3 = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \geq 8$ là

A. $(-3; +\infty)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x \geq 8 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 1 + 2\cos 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \sin 2x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\sin 2x + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (1 + 2\cos 2x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int 2\cos 2x\mathrm{d}x = x + 2\int \dfrac{\cos 2x\mathrm{d}(2x)}{2} = x + \sin 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $7\pi a^2$. B. $14\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. $8\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot a \cdot 3a = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$ là $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = -3$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình là $x = 1$.

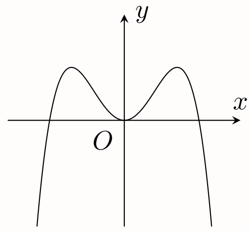
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

Ⓐ $y = -x^4 + 2x^2$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2$.

Ⓒ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 2)(x - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Do $f'(x) = (x + 2)(x - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = (x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta lập được bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 22. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

Ⓐ $2 - 2i$. Ⓑ $2i$. Ⓒ $-2 + 2i$. Ⓓ $2 + 2i$.

Lời giải.

Điểm $M(-2; 2)$ biểu diễn số phức $-2 + 2i$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x+1)$ là

Ⓐ $y' = \dfrac{1}{(x+1)\ln 3}$. Ⓑ $y' = \dfrac{1}{x+1}$. Ⓒ $y' = \dfrac{1}{\ln 3}$. Ⓓ $y' = \dfrac{x+1}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(x+1)'}{(x+1)\ln 3} = \dfrac{1}{(x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2;3;1)$ trên trục Ox có tọa độ là

Ⓐ $(0;3;0)$. Ⓑ $(-2;0;0)$. Ⓒ $(0;3;1)$. Ⓓ $(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2;3;1)$ trên trục Ox có tọa độ là $(-2;0;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > \log_2 5$ là

Ⓐ $\left(\dfrac{3}{5};+\infty\right)$. Ⓑ $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. Ⓓ $\left(0;\dfrac{3}{5}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2(3x) > \log_2 5 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ -6. Ⓒ 6. Ⓓ 4.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân bằng $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp $\{1,2,3,4,5,6\}$?

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

(A) 120. (B) 20. (C) 216. (D) 18.

Lời giải.

Từ tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, có thể lập được $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau.
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 5)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

(A) $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 3$.
(B) $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 12$.
(C) $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.
(D) $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 12$.

Lời giải.

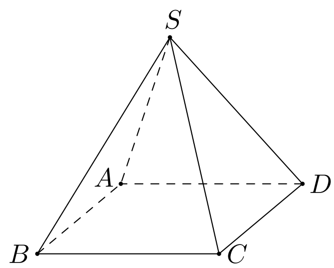
Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm I của đoạn AB.
Ta có $I = \left(\dfrac{1+(-1)}{2}; \dfrac{2+0}{2}; \dfrac{3+5}{2}\right) = (0; 1; 4)$.
Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{3}$.
Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

(A) 60°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 45°.

Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Mà hình chóp có tất cả các cạnh bằng a nên tam giác SBA là tam giác đều. Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa SB và CD bằng 60°.



Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Tập xác định của hàm số $f(x) = \log_5(30 - x^2)$ chứa bao nhiêu số nguyên?

(A) 10. (B) 11. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $30 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{30}; \sqrt{30}\right)$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\sqrt{30}; \sqrt{30}\right)$ nên các số nguyên thỏa mãn là $\{0; \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm5\}$.
Vậy có 11 số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

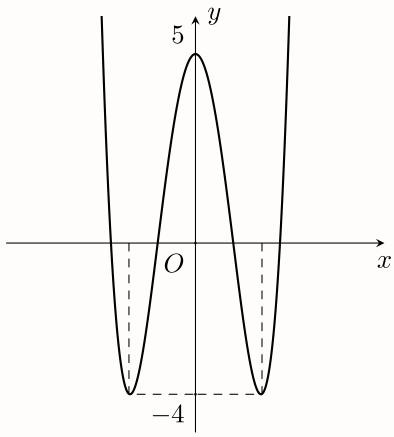
Câu 32. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, xác suất để chọn được số có tổng hai chữ số bằng 8 là

(A) $\dfrac{1}{9}$. (B) $\dfrac{4}{81}$. (C) $\dfrac{8}{81}$. (D) $\dfrac{7}{81}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có tổng hai chữ số là 8".
Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 81$.
Ta có $A = \{80; 17; 71; 26; 62; 35; 53\}$ nên $n(A) = 7$.
Suy ra xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{81}$.
Chọn đáp án D □

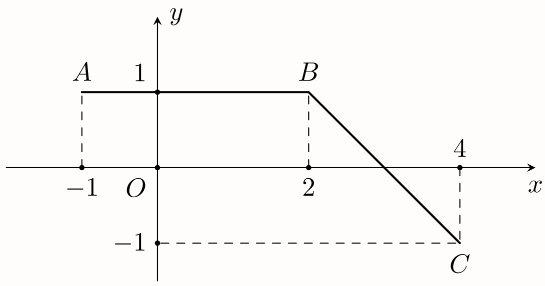
Câu 33.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?



A 4. B 17. C 16. D 8.

Lời giải.
Xét phương trình
$$2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{2}$$
có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi
$$-4 < \frac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow -8 < m < 10.$$
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6; \ldots; 8; 9\}$ nên có 17 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 34.
Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$. Tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



A 4. B 3. C $\dfrac{9}{2}$. D $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = 3$. Ta có $S_1 = \dfrac{7}{2}$.
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 4$, $x = 3$. Ta có $S_1 = \dfrac{1}{2}$.
Khi đó
$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = S_1 - S_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3.$$
Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-5=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-3t \\ z=1+t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=1+t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải.

(P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;3;1)$.
Đường thẳng d vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}(2;3;1)$ làm một véc-tơ chỉ phương, d đi qua A nên d có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Hàm số $y=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4x$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $z-2\overline{z}=1+6i$. Môđun của z bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) 3. (C) 5. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Ta có

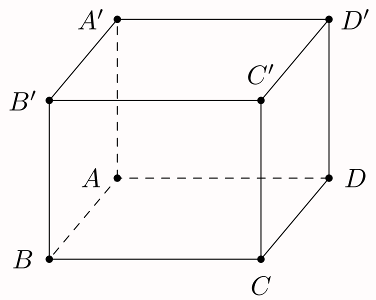
$$\begin{aligned} z-2\overline{z}=1+6i &\Leftrightarrow a+bi-2(a-bi)=1+6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra môđun của số phức z là $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$.
Chọn đáp án (D) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 38.

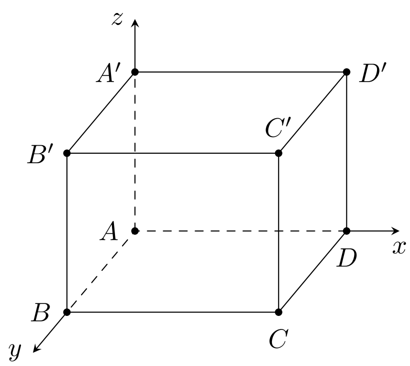
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $BC = 2$, $AA' = 3$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Ⓑ $\dfrac{6}{7}$. Ⓒ $\dfrac{7}{6}$. Ⓓ $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

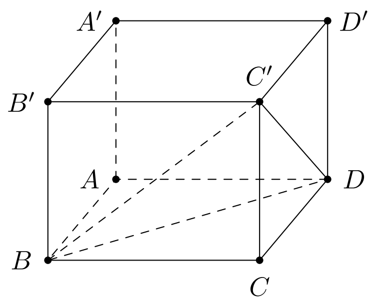
Cách 1. Gắn vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình sau



Ta có $A(0;0;0)$, $B'(0;1;3)$, $B(0;1;0)$, $C'(2;1;3)$.
Khi đó $\overrightarrow{AB'} = (0;1;3)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;0;3)$, $\overrightarrow{AB} = (0;1;0)$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' là

$$\mathrm{d}(AB', BC') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \frac{6}{7}.$$

Cách 2.



Gọi H là hình chiếu của C xuống mặt phẳng (BDC'). Khi đó ta có

$$\mathrm{d}(AB', BC') = \mathrm{d}(AB', (BDC')) = \mathrm{d}(A, (BDC')) = \mathrm{d}(C, (BDC')) = CH.$$

Xét tam diện vuông $C.BDC'$ có

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CB^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{49}{36}.$$

Suy ra $CH = \sqrt{\dfrac{36}{49}} = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;8)$?

(A) 26. (B) 36. (C) 35. (D) 27.

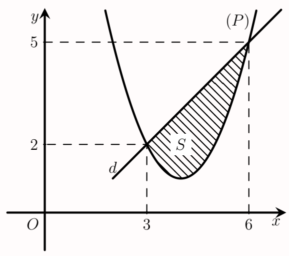
Lời giải.

Ta có $y' = -x^2 + 4x + m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 4x$.
Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x \Rightarrow g'(x) = 2x - 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Bảng biến thiên

x	-1		2		8
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	32

Để hàm số có 1 cực trị thuộc khoảng $(-1;8)$ khi phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm bội lẻ thuộc khoảng $(-1;8)$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \in [5;32)$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5, 6, \ldots, 31\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 40.
Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{9}{2}$. Tích phân $\int\limits_3^6 (2x-3)f'(x)\,dx$ bằng



(A) 33. (B) 51. (C) 39. (D) 27.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng d đi qua 2 điểm có tọa độ là $(3;2)$ và $(6;5)$ nên phương trình đường thẳng d là $y = x - 1$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và đồ thị (P) là

$$S = \int\limits_3^6 (x - 1 - f(x))\,dx = \frac{9}{2} \Rightarrow \int\limits_3^6 (x-1)\,dx - \int\limits_3^6 f(x)\,dx = \frac{9}{2} \Rightarrow \int\limits_3^6 f(x)\,dx = 6.$$

Đặt $I = \int\limits_3^6 (2x-3)f'(x)\,dx$.

Chọn $\begin{cases} u = 2x - 3 \\ dv = f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \\ v = f(x). \end{cases}$ Vậy $I = (2x-3)f(x)\Big|_3^6 - 2\int\limits_3^6 f(x)\,dx = 9f(6) - 3f(3) - 12 = 27$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^x - 16)\left(\log_3^2 x - 9\log_3 x + 18\right) < 0$?

(A) 704. (B) 701. (C) 707. (D) 728.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$$(2^x - 16)\left(\log_3^2 x - 9\log_3 x + 18\right) < 0 \Leftrightarrow (2^x - 16)(\log_3 x - 6)(\log_3 x - 3) < 0. \quad (*)$$

Ta có $(2^x - 16)(\log_3 x - 6)(\log_3 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 16 = 0 \\ \log_3 x - 6 = 0 \\ \log_3 x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 729 \\ x = 27. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu vế trái của $(*)$

x	0		4		27		729		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $(*)$ có tập nghiệm $S = (0; 4) \cup (27; 729)$.
Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 3\} \cup \{28; 29; \ldots; 728\}$.
Vậy có tất cả 704 số thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Gọi S là tập hợp các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $ab \leq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1 - z_2}{-1 + i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2 - i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. B. $1 + \sqrt{2}$. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

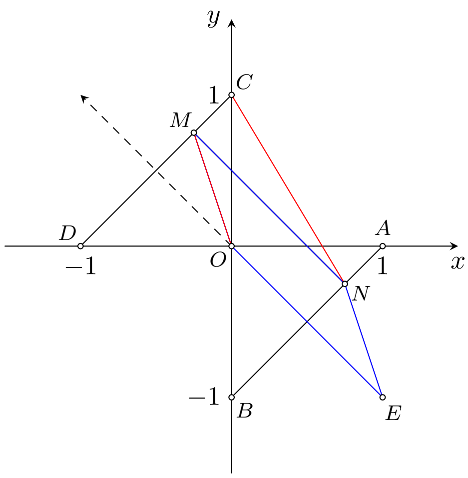
Lời giải.

$z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, ab \leq 0)$.

Ta có $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |2a| + |2bi| = 2 \Leftrightarrow |a| + |b| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 1, a > 0, b > 0 \,(\text{loại}) \\ a - b = 1, a \geq 0, b \leq 0 \,(\text{nhận}) \\ -a + b = 1, a \leq 0, b \geq 0 \,(\text{nhận}) \\ -a - b = 1, a < 0, b < 0 \,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là 2 đoạn thẳng:

- Đoạn AB giới hạn bởi đường thẳng $(d_1)\colon x - y = 1$ nằm ở góc phần tư thứ tư.
- Đoạn CD giới hạn bởi đường thẳng $(d_2)\colon -x + y = 1$ nằm ở góc phần tư thứ hai.



Gọi M là điểm biểu diễn của z_1, N là điểm biểu diễn của z_2.
Ta có $\dfrac{z_1 - z_2}{-1 + i}$ là số thực dương $\dfrac{z_1 - z_2}{-1 + i} = k \Rightarrow z_1 - z_2 = k(-1 + i), k > 0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}$ cùng hướng với $\vec{v} = (-1;1)$.

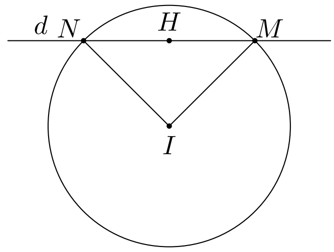
$\Rightarrow NM \perp AB \Rightarrow NM = \mathrm{d}(AB;CD) = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = (-1;1) \Rightarrow \begin{cases} N \in AB \\ M \in CD. \end{cases}$

$T = |z_1| + |z_2 - i| = OM + NC$ (với $C(0;1)$ là điểm biểu diễn của số phức i).
Gọi E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMNE \Rightarrow \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{NM} = (-1;1) \Rightarrow E(1;-1)$.
Khi đó $T = OM + NC = NE + NC \geq CE = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2 - i|$ là $\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;-2)$, nhận $\vec{u} = (1;a;2-a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm véc-tơ chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà các tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Hỏi a^2 thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right)$. B $\left(\frac{19}{2};10\right)$. C $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. D $\left(\frac{7}{2};4\right)$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R = 2$.
Gọi M, N là các giao điểm của d và (S).
Do tiếp diện của (S) tại M và N vuông góc với nhau nên $IM \perp IN$, cũng tức là tam giác IMN vuông cân tại I.
Từ đó $\mathrm{d}(I,d) = \mathrm{d}(I,MN) = \dfrac{IM}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (1;a;2-a) \\ \overrightarrow{IA} = (0;2;-1) \end{cases}$, suy ra $\left[\vec{u},\overrightarrow{IA}\right] = (a-4;1;2)$

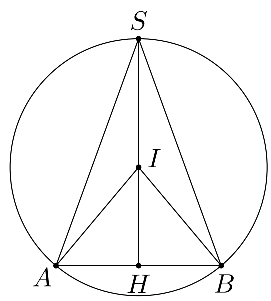
$$\text{và } \mathrm{d}(I,d) = \frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IA}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(a-4)^2+5}}{\sqrt{1+a^2+(2-a)^2}}.$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{(a-4)^2+5}}{\sqrt{1+a^2+(2-a)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 3a^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{11}{3} \in \left(\dfrac{7}{2};4\right)$.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Xét khối nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh và đường tròn đáy cùng nằm trên một mặt cầu bán kính bằng $2\sqrt{3}$. Khi $(\mathcal{N})$ có độ dài đường sinh bằng 6, thể tích của nó bằng

A 18π. B $9\sqrt{3}\pi$. C $27\sqrt{3}\pi$. D 54π.

Lời giải.



Gọi I là tâm của mặt cầu, S là đỉnh hình nón $(\mathcal{N})$, AB là đường kính của đường tròn đáy hình nón và H là trung điểm của đường kính AB.

Theo giả thiết $\begin{cases} \ell = SA = SB = 6 \\ SI = IA = IB = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Do $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = \dfrac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot IA}$ nên ta tính được đường cao của $(\mathcal{N})$

$$h = SH = \frac{SA \cdot SB}{2 \cdot IA} = \frac{6 \cdot 6}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Bán kính mặt đáy của $(\mathcal{N})$ là $r = \sqrt{\ell^2 - h^2} = 3$.
Vậy $(\mathcal{N})$ có thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án (B)

Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 + az + b = 0\,(a, b \in \mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số (a, b) để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1| = 2$ và $|z_2 - 3 - 2i| = 3$?

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $\Delta = a^2 - 4b < 0$ suy ra z_1, z_2 là hai số phức liên hợp.
  Đặt $z_1 = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ suy ra $z_2 = x - yi$.
  Theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -a \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$
  Ta có $|z_1 - 1| = 2 \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4.$ (1)
  $|z_2 - 3 - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x - 3 - (y+2)i| = 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9.$ (2)
  Lấy (2) − (1) ta được $-4x + 4y = -7 \Rightarrow y = \dfrac{4x - 7}{4}$.
  $$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(4x-7)^2}{16} = 4 \Leftrightarrow 32x^2 - 88x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11 - \sqrt{119}}{8} \\ x = \dfrac{11 + \sqrt{119}}{8}. \end{array}\right.$$
  — Với $x = \dfrac{11 - \sqrt{119}}{8} \Rightarrow y = \dfrac{-3 - \sqrt{119}}{8}$.
  Khi đó $\begin{cases} a = -2x = \dfrac{-11 + \sqrt{119}}{4} \\ b = x^2 + y^2 = \dfrac{23 - \sqrt{119}}{4} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).
  — Với $x = \dfrac{11 + \sqrt{119}}{8} \Rightarrow y = \dfrac{-3 + \sqrt{119}}{8}$.
  Khi đó $\begin{cases} a = -2x = \dfrac{-11 - \sqrt{119}}{4} \\ b = x^2 + y^2 = \dfrac{23 + \sqrt{119}}{4} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).
  Trường hợp này có 2 cặp số $(a; b)$ thỏa đề bài.
- Trường hợp 2: $\Delta = a^2 - 4b > 0$ suy ra z_1, z_2 là số thực.
  Theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b. \end{cases}$
  Ta có $|z_1 - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 - 1 = 2 \\ z_1 - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 3 \\ z_1 = -1. \end{array}\right.$
  $|z_2 - 3 - 2i| = 3 \Leftrightarrow (z_2 - 3)^2 + 4 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_2 = 3 + \sqrt{5} \\ z_2 = 3 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$
  — Với $z_1 = 3$ và $z_2 = 3 + \sqrt{5}$ suy ra $\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -6 - \sqrt{5} \\ b = z_1 z_2 = 9 + 3\sqrt{5} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).
  — Với $z_1 = 3$ và $z_2 = 3 - \sqrt{5}$ suy ra $\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -6 + \sqrt{5} \\ b = z_1 z_2 = 9 - 3\sqrt{5} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).

— Với $z_1 = -1$ và $z_2 = 3 + \sqrt{5}$ suy ra $\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -2 - \sqrt{5} \\ b = z_1 z_2 = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).

— Với $z_1 = -1$ và $z_2 = 3 - \sqrt{5}$ suy ra $\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -2 + \sqrt{5} \\ b = z_1 z_2 = -3 + \sqrt{5} \end{cases}$ (thỏa điều kiện).

Trường hợp này có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa đề bài.

Vậy có tất cả 6 cặp số $(a; b)$ thỏa đề bài.
Chọn đáp án D □

Câu 46. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3 - 9x^2 + 24x + y\right) = \log_2\left(-x^2 + 8x - 12\right)$. Số phần tử của S là

A 3. **B** 8. **C** 1. **D** 7.

Lời giải.

Đặt $\log_3\left(x^3 - 9x^2 + 24x + y\right) = \log_2\left(-x^2 + 8x - 12\right) = t \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 24x + y = 3^t \\ -x^2 + 8x - 12 = 2^t. \end{cases}$

Ta có $x^3 - 9x^2 + 24x + y = 3^t = \left(2^{\log_2 3}\right)^t = \left(2^t\right)^{\log_2 3} = \left(-x^2 + 8x - 12\right)^{\log_2 3}$.
Suy ra $y = \left(-x^2 + 8x - 12\right)^{\log_2 3} - \left(x^3 - 9x^2 + 24x\right) = f(x)$.
Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log_2 3)\left(-x^2 + 8x - 12\right)^{\log_2 3 - 1}(-2x + 8) - \left(3x^2 - 18x + 24\right) \\ &= -2(\log_2 3)\left(-x^2 + 8x - 12\right)^{\log_2 3 - 1}(x - 4) - 3(x - 2)(x - 4) \\ &= -(x - 4)\left[2(\log_2 3)\left(-x^2 + 8x - 12\right)^{\log_2 3 - 1} + 3(x - 2)\right]. \end{aligned}$$

Vì $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right]$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

x	$\frac{5}{2}$		4		$\frac{11}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-16{,}95$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-23{,}69$

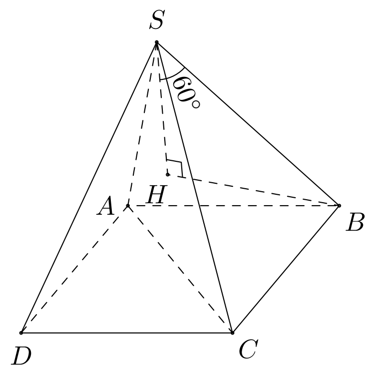
Để ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right]$ ta có $\left[\begin{array}{l} y = -7 \\ -23{,}69 < y < -16{,}95. \end{array}\right.$

Suy ra $y \in \{-23; -22; -21; -20; -19; -18; -17; -7\}$.
Vậy số phần tử của S là 8.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = SC = AC = a$, SB tạo với mặt phẳng (SAC) một góc $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C** $\frac{a^3}{8}$. **D** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $V_{\text{S.ABCD}} = 2V_{\text{B.SAC}}$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (SAC). Suy ra SH là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC). Vậy góc giữa SB và (SAC) là $\widehat{BSH} = 60^\circ$.
Xét $\triangle SHB$ vuông tại H, ta có

$$BH = SB \cdot \sin \widehat{BSH} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do $\triangle SAC$ đều cạnh a nên $S_{\text{SAC}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Thể tích khối chóp $B.SAC$ là $V_{\text{B.SAC}} = \dfrac{1}{3}BH \cdot S_{\text{SAC}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.
Vậy $V_{\text{S.ABCD}} = 2V_{\text{B.SAC}} = \dfrac{a^3}{4}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thoả mãn $f(x)\ln f(x) = x\left(2f(x) - f'(x)\right)$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?
(A) $(40; 42)$. (B) $(3; 5)$. (C) $(32; 34)$. (D) $(1; 3)$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có

$$\begin{aligned} & f(x)\ln f(x) = x\left(2f(x) - f'(x)\right) \\ \Leftrightarrow\ & f(x)\ln f(x) + xf'(x) = 2xf(x) \\ \Leftrightarrow\ & \ln f(x) + x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \\ \Leftrightarrow\ & [x\ln f(x)]' = 2x \\ \Rightarrow\ & x\ln f(x) = x^2 + C. \quad (*) \end{aligned}$$

Thay $x = 1$, $x = 3$ lần lượt vào $(*)$ ta có hệ $\begin{cases} \ln f(1) = 1 + C & (1) \\ 3\ln f(3) = 9 + C. & (2) \end{cases}$
Vì $f(1) = f(3)$ nên $\ln f(1) = \ln f(3)$, do đó từ (1) và (2) ta có $3(1 + C) = 9 + C \Leftrightarrow C = 3$.
Thay $C = 3$ vào $(*)$ ta được $x\ln f(x) = x^2 + 3$.
Khi $x = 2$, ta có $2\ln f(2) = 7 \Leftrightarrow \ln f(2) = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow f(2) = \mathrm{e}^{\frac{7}{2}} \approx 33{,}115 \in (32; 34)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8.
(A) 81. (B) 82. (C) 80. (D) 79.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 64x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$. Ta có

x	-4		2		1
t	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

Nhận xét, với mỗi $t \in (1; 5)$ cho 2 nghiệm $x \in (-4; 1)$.
Xét $y = f(t)$ với $t \in (1; 5)$, ta có bảng biến thiên

t	1		4		5	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	|	
$f(t)$	-27	$\searrow$	-252	$\nearrow$	-171	$\nearrow$ -27

Nhận xét: Phương trình $f(t) = m$ có một nghiệm t_0, nghĩa là $x^2 + 4x + 5 = t_0$. (1)
Khi đó tổng hai nghiệm của phương trình (1) luôn bằng -4 và phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $t_0 > 1$.
Do đó với yêu cầu bài toán, phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(1; 5)$.
Suy ra $-252 < m < -171$.
Mà $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{-251; -250; \ldots; -172\}$.
Vậy có tất cả 80 giá trị của tham số m.
Chọn đáp án C □

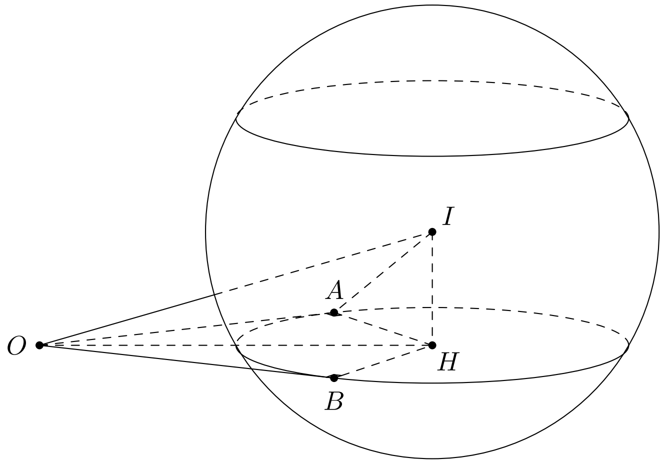
Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(5; 6; 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn $60°$.

A 9. **B** 4. **C** 2. **D** 6.

Lời giải.

Trường hợp 1. (S) tiếp xúc với (Oyz) tại $O \Rightarrow R = OI = \sqrt{205} \notin \mathbb{Z}$. Loại.

Trường hợp 2. (S) cắt (Oyz) theo giao tuyến là đường tròn (C).
Gọi $H(0; 6; 12)$ là hình chiếu của I lên (Oyz). Khi đó H là tâm của đường tròn (C).
Gọi A, B lần lượt là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến của (S) trong (Oyz) cùng đi qua O.
Khi đó, A và B cùng thuộc đường tròn (C).



Theo giả thiết

$$
\begin{aligned}
& 60^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 120^\circ \Leftrightarrow 30^\circ \leq \widehat{AOH} \leq 60^\circ \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \leq \sin \widehat{AOH} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{AH}{OH} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{R^2-25}}{6\sqrt{5}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 70 \leq R^2 \leq 160 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{70} \leq R \leq \sqrt{160} \Rightarrow R \in \{9; 10; 11; 12\}.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án B □

— HẾT —

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 46

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2023
Môn: Toán
Năm học: 2022 – 2023
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-104

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 2i \Rightarrow \overline{z} = 1 + 2i$.
Vậy phần ảo của $\overline{z}$ bằng 2.
Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; 2; -2)$ và $\vec{v} = (2; -2; 3)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

A. $(1;\ -4;\ 5)$. B. $(3;\ 0;\ -1)$. C. $(3;\ 0;\ 1)$. D. $(-1;\ 4;\ -5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (3; 0; 1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) \geq \log_3 2$ là

A. $[1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 1]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.
Ta có $\log_3(2x) \geq \log_3 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. -1. B. 3. C. -4. D. 1.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = 2 - i - 1 - 3i = 1 - 4i$.
Vậy phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng 1.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. B. 10. C. 7. D. -3.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 5 = 7$.

Chọn đáp án C □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \cos x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + x^2 + C$.

Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - x^2 + C$.

Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(2) = 6$, $F(4) = 12$. Tích phân $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -6.
Ⓑ 2.
Ⓒ 18.
Ⓓ 6.

Lời giải.

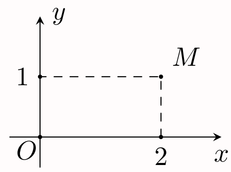
Ta có $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 12 - 6 = 6$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8.

Điểm M trong hình bên biểu diễn số phức nào dưới đây?

Ⓐ $1 - 2i$.
Ⓑ $1 + 2i$.
Ⓒ $2 - i$.
Ⓓ $2 + i$.



Lời giải.

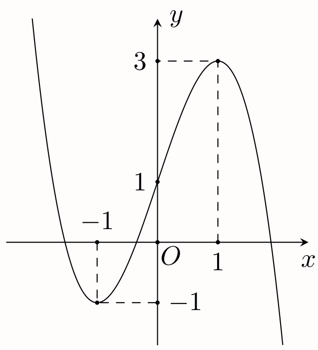
Điểm $M(2;1)$ nên biểu diễn số phức $2 + i$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 3.
Ⓑ 0.
Ⓒ -1.
Ⓓ 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

Ⓐ $z = 0$. Ⓑ $y = 0$. Ⓒ $x + y + z = 0$. Ⓓ $y = 0$.

Lời giải.

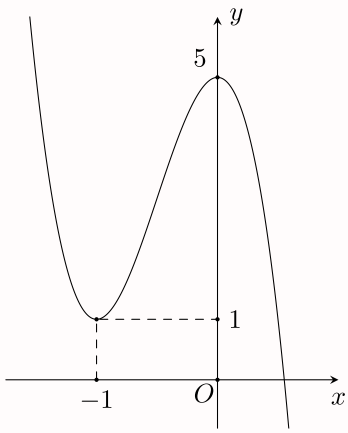
Mặt phẳng (Oxz) đi qua gốc $O(0;0;0)$, nhận $\vec{j} = (0;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $y = 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11.

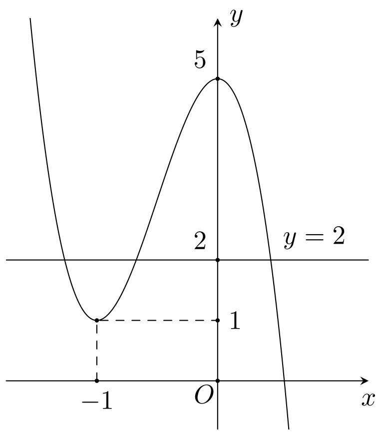
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.



Lời giải.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị đường thẳng $y = 2$. Do đó phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ $y = -2x^2 + 1$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{x}$.

Ⓒ $y = x^4 - 3x^2$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên đã cho là bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = x^{\frac{4}{3}} + C$.
(B) $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = x^{\frac{2}{3}} + C$.
(C) $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.
(D) $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$, ta có $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Với b, c là hai số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_5 b \geq \log_5 c$, khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $b \geq c$. (B) $b > c$. (C) $b < c$. (D) $b \leq c$.

Lời giải.

Vì cơ số $5 > 1$ nên nếu $\log_5 b \geq \log_5 c$ thì $b \geq c$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được lấy từ các đỉnh của một lục giác đều?

(A) 729. (B) 216. (C) 120. (D) 20.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 3 trong 6 đỉnh của lục giác đều sẽ tạo được một tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Vậy có $\mathrm{C}_6^3 = 20$ tam giác.
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $y = (2x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x = 2$ bằng

(A) 3. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) 7.

Lời giải.

$y(2) = (2 \cdot 2^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 8$ là

(A) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. (B) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. (C) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. (D) $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định của bất phương trình là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có

$$2^{2x} < 8 \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^3 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

A $y'=\dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. **B** $y'=\dfrac{x-1}{\ln 2}$. **C** $y'=\dfrac{1}{x-1}$. **D** $y'=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $(\log_2(x-1))'=\dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình trụ có chiều cao $h=3$ và bán kính đáy $r=4$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A 16π. **B** 56π. **C** 24π. **D** 48π.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}}=2\pi rh=2\pi\cdot 4\cdot 3=24\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;3)$ là

A $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. **B** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.

C $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;3)$ là

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Nếu khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V thì khối chóp $A'.ABC$ có thể tích bằng

A $\dfrac{2V}{3}$. **B** $3V$. **C** $\dfrac{V}{3}$. **D** V.

Lời giải.

Khối chóp $A'.ABC$ có chung đáy ABC và chiều cao bằng với chiều cao của khối lăng trụ nên theo công thức thể tích khối chóp nó có thể tích là $\dfrac{V}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của u_3 bằng

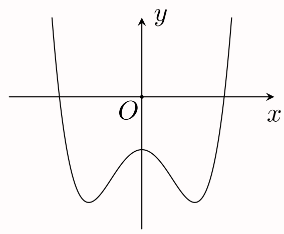
A $\dfrac{1}{3}$. **B** 4. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Với $n=3$, ta có $u_3=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

Ⓐ $x = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{x-2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-1}{x-2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 25. Cho khối nón có thể tích bằng 12 và diện tích đáy bằng 9. Chiều cao của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 4π. Ⓑ $\dfrac{4\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{3V_{\text{nón}}}{S_{\text{đáy}}} = \dfrac{3 \cdot 12}{9} = 4$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26. Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 4 và đáy $ABCD$ có diện tích bằng 3. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 12. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

$V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R = 2$. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. Ⓑ $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.
Ⓒ $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ⓓ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Lời giải.

Phương trình của (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-\infty; 0)$. (D) $(-1; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 2; 1)$ và $B(1; 0; 1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5$.
(B) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.
(C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 20$.
(D) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 20$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I(3; 1; 1)$ và $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2} = 2\sqrt{5}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I và bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.

Chọn đáp án (B) □

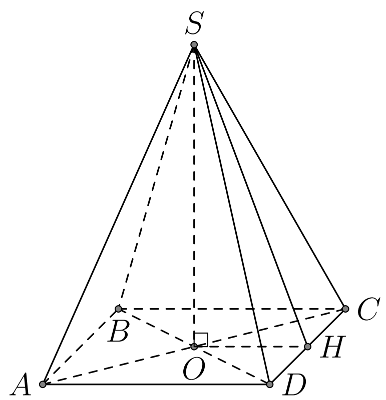
Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 90°.

Lời giải.

Gọi O là tâm của $ABCD$ và H là trung điểm của CD. Ta có

- $(SCD) \cap (ABCD) = CD$;
- $OH \subset (ABCD)$ và $OH \perp CD$;
- $SH \subset (SCD)$ và $SH \perp CD$.



Từ những điều trên, suy ra góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc giữa OH và SH, đó là góc $\widehat{SHO}$.

Ta có $SO = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$ và $OH = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}a$.

Xét tam giác vuông SOH, ta có $\tan\widehat{SHO} = \dfrac{SH}{OH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra $\widehat{SHO} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 30°.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=-1+t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=-1+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;1)$.
Gọi d là đường thẳng cần tìm.
Do $d\perp(P)$ nên d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\vec{n}=(1;2;1)$.
Phương trình của d là $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=-1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a\neq 1$ và $\log_a b=2$, giá trị của $\log_{a^2}(ab^2)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

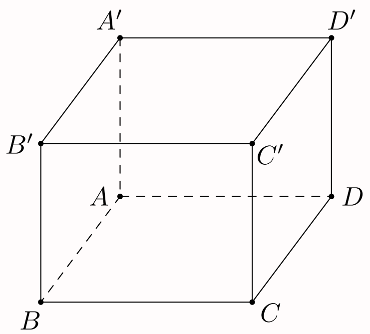
Ta có

$$\begin{aligned}\log_{a^2}(ab^2)&=\frac{1}{2}\log_a\left(ab^2\right)=\frac{1}{2}\left(\log_a a+\log_a b^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+2\log_a b\right)=\frac{1}{2}(1+2\cdot 2)=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1$, $BC=2$, $AA'=2$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' bằng

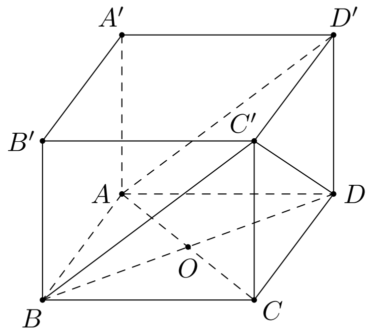
Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



Lời giải.

Dễ thấy $AD' \parallel BC'$ nên $AD' \parallel (BC'D)$.
Ta có

$$\mathrm{d}\left(AD', DC'\right) = \mathrm{d}\left(AD', (BC'D)\right) = \mathrm{d}\left(A, (BC'D)\right).$$



Đặt O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $AC \cap (BC'D) = O$.
Ta có

$$\frac{\mathrm{d}\left(A, (BC'D)\right)}{\mathrm{d}\left(C, (BC'D)\right)} = \frac{AO}{CO} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}\left(A, (BC'D)\right) = \mathrm{d}\left(C, (BC'D)\right).$$

Tứ diện $BCDC'$ có CB, CD, CC' vuông góc với nhau từng đôi một nên sử dụng công thức tính nhanh ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left[\mathrm{d}\left(C, (BC'D)\right)\right]^2} &= \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \text{ (do } CD = AB = 1 \text{ và } CC' = AA' = 2)\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{d}\left(C, (BC'D)\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ nên $\mathrm{d}\left(AD', DC'\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$ và M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là

A $(-3; 0)$. **B** $(3; 0)$. **C** $(3; 7)$. **D** $(-3; 7)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có $a = 1$, $b' = -3$, $c = 14$.
Xét $\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - 1 \cdot 14 = -5$. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{5}i}{1} = 3 + \sqrt{5}i; \quad z_2 = \frac{3 - \sqrt{5}i}{1} = 3 - \sqrt{5}i.$$

Đặt $M\left(3; \sqrt{5}\right)$ và $N\left(3; -\sqrt{5}\right)$. Khi đó trung điểm I của MN có tọa độ là $(3; 0)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x + 5}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A 2. **B** 3. **C** -1. **D** 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$\begin{aligned} x - 1 = \frac{-x + 5}{x - 2} &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = -x + 5 \ (x \neq 2)\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -1 \text{ (nhận)}\\ &x = 3 \text{ (nhận)}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đặt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, khi đó $x_1 + x_2 = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Từ một nhóm học sinh gồm 5 nam và 8 nữ, chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ bằng

Ⓐ $\dfrac{71}{143}$. Ⓑ $\dfrac{72}{143}$. Ⓒ $\dfrac{128}{143}$. Ⓓ $\dfrac{15}{143}$.

Lời giải.

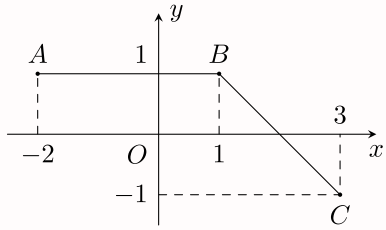
Số cách chọn 4 học sinh từ 13 học sinh là $C_{13}^4 = 715$.
Số cách chọn 4 học sinh từ 13 học sinh để các học sinh có cả nam và nữ là

$$C_{13}^5 - C_5^4 - C_8^4 = 640.$$

Xác suất cần tìm là $\dfrac{640}{715} = \dfrac{128}{143}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

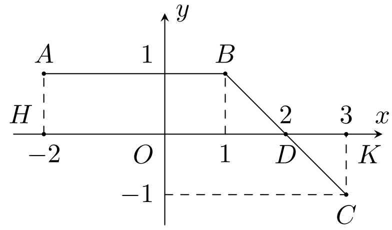
Câu 37.
Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ bằng



Ⓐ $\dfrac{9}{2}$. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Đặt $H(-2;0)$, $K(3;0)$ và $D(2;0)$.
Ta có



$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx - \int_{2}^{3} |f(x)|\,dx \\ &= S_{ABDH} - S_{CDK} \\ &= \frac{1\cdot(3+4)}{2} - \frac{1\cdot 1}{2} = 3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(5) > f(6)$. Ⓑ $f(0) > f(2)$. Ⓒ $f(4) > f(0)$. Ⓓ $f(4) > f(2)$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(0) > f(2)$ là đúng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(5^x - 125)\left(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15\right) < 0$?

(A) 242. (B) 217. (C) 220. (D) 215.

Lời giải.

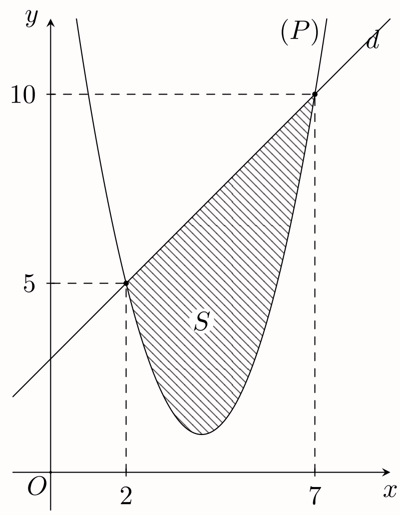
Điều kiện $x > 0$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&(5^x - 125)\left(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15\right) < 0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}5^x - 125 < 0\\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 > 0\end{cases} \text{hay} \begin{cases}5^x - 125 > 0\\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 < 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}5^x < 5^3\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x < 3\\ \log_3 x > 5\end{array}\right.\end{cases} \text{hay} \begin{cases}5^x > 5^3\\ 3 < \log_3 x < 5\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x < 3\\ \left[\begin{array}{l}x < 27\\ x > 243\end{array}\right.\end{cases} \text{hay} \begin{cases}x > 3\\ 27 < x < 243\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & x < 3 \text{ hay } 27 < x < 243.
\end{aligned}$$

Mà x là số nguyên nên $x \in \{1; 2; 28; 29; \cdots; 242\}$.
Vậy có 217 số nguyên x thỏa mãn.
Chọn đáp án (B) □

Câu 40.
Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \dfrac{125}{6}$. Tích phân $\displaystyle\int_2^7 (2x - 3)f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{215}{3}$. (B) $\dfrac{265}{3}$. (C) $\dfrac{245}{3}$. (D) $\dfrac{415}{3}$.



Lời giải.
Đồ thị hàm số d đi qua hai điểm $(2; 5)$ và $(7; 10)$ nên có phương trình $d\colon y = x + 3$.

Ta có $S = \displaystyle\int_2^7 |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^7 g(x)\,\mathrm{d}x - S = \int_2^7 (x+3)\,\mathrm{d}x - \frac{125}{6} = \frac{50}{3}$.

Đặt $\begin{cases}u = 2x - 3\\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x\\ v = f(x).\end{cases}$

Ta có $\displaystyle\int_2^7 (2x-3)f'(x)\,\mathrm{d}x = [(2x-3)f(x)]\Big|_2^7 - 2\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 11f(7) - f(2) - 2\cdot\frac{50}{3} = \frac{215}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;5)$?

(A) 17. (B) 12. (C) 16. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$.
Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 2x$.
Hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;5)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1;5)$ hay $m = -x^2 + 2x$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1;5)$.
Xét hàm số $h(x) = -x^2 + 2x$ trên khoảng $(-1;5)$.
Ta có $h'(x) = -2x + 2$.
Phương trình $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Bảng biến thiên của $h(x)$

x	-1		1		5
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-15

Từ bảng biến thiên trên, phương trình $m = -x^2 + 2x$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1;5) \Leftrightarrow -15 < m \leq -3$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-14; -13; \ldots; -3\}$.
Vậy có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x\left(2f(x) - f'(x)\right)$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1) = f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(54;56)$. (B) $(74;76)$. (C) $(10;12)$. (D) $(3;5)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x)\ln f(x) = x\left(2f(x) - f'(x)\right) \\ \Leftrightarrow\ & \ln f(x) = 2x - x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + \ln f(x) = 2x \\ \Leftrightarrow\ & [x \cdot \ln(f(x))]' = 2x. \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $x \cdot \ln(f(x)) = x^2 + C$. $(*)$

Thay $x = 1$ và $x = 4$ vào $(*)$, ta được $\begin{cases} \ln(f(1)) = 1 + C \\ \ln(f(4)) = \dfrac{16 + C}{4}. \end{cases}$

Theo giả thiết $f(1) = f(4) \Leftrightarrow 1 + C = \dfrac{16 + C}{4} \Leftrightarrow C = 4$.

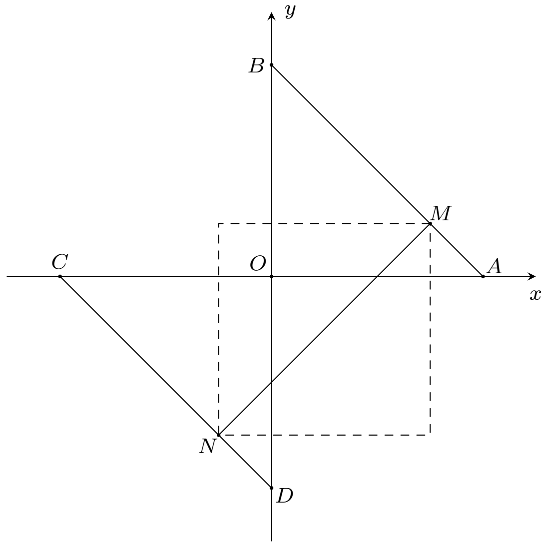
Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+4}{x}}$.

Do đó $f(2) = \mathrm{e}^4 \approx 54{,}5982 \in (54;56)$.
Vậy $f(2) \in (54;56)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Gọi S là tập hợp các số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 8$ và $ab \geq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1 - z_2}{1 + i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + 4i| + |z_2|$ bằng

(A) 4. (B) $4\sqrt{2}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} z + \overline{z} = 2a \\ z - \overline{z} = 2bi \end{cases}$ nên $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 8 \Leftrightarrow |a| + |b| = 8$.

Ta lại có $ab \geq 0$ nên $\left[\begin{array}{l} a + b = 4 \\ a + b = -4. \end{array}\right.$

Do đó, điểm biểu diễn của z thuộc đoạn thẳng AB hoặc CD, với $A(4;0)$, $B(0;4)$, $C(0;-4)$, $D(0;-4)$.

Mặt khác, theo giả thiết, tồn tại số thực $k > 0$ sao cho $\dfrac{z_1 - z_2}{1 + i} = k$.

Suy ra $z_1 - z_2 = k(1 + i) \Rightarrow z_1 = z_2 + k(1 + i)$.

Gọi $z_2 = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0)$.

Khi đó, ta có $z_1 = (x + k) + (y + k)i$.

Giả sử $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Vì z_1, $z_2 \in S$ nên ta có

$$\begin{cases} |x + k| + |y + k| = 4 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + k + y + k = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \,(\text{mâu thuẫn}).$$

Do đó $x \leq 0$ và $y \leq 0$ hay điểm biểu diễn $N(x;y)$ của z_2 thuộc CD và điểm biểu diễn $M(x+k;y+k)$ của z_1 thuộc AB.

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ (x + k) + (y + k) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 4 \\ k = 4. \end{cases}$$

Do đó $z_1 = (x + 4) - xi$ và $z_2 = xi + (-x - 4)i$.

Suy ra

$$\begin{aligned} |z_1 + 4i| + |z_2| &= \sqrt{(x+4)^2 + (-x+4)^2} + \sqrt{x^2 + (-x-4)^2} \\ &= \sqrt{(x+4)^2 + (-x+4)^2} + \sqrt{(-x)^2 + (x+4)^2} \\ &\geq \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức $|z_1 + 4i| + |z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x+4}{-x} = \dfrac{-x+4}{x+4} \\ -4 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2\left(x^3 - 6x^2 + 9x + y\right) = \log_3\left(-x^2 + 6x\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. B. 8. C. 7. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x + y > 0 \\ -x^2 + 6x > 0. \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = \log_2\left(x^3 - 6x^2 + 9x + y\right) - \log_3\left(-x^2 + 6x\right)$ trên $\left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 - 12x + 9}{(x^3 - 6x^2 + 9x + y)\ln 2} - \frac{-2x + 6}{(-x^2 + 6x)\ln 3} \\ &= \frac{3(x-1)(x-3)}{(x^3 - 6x^2 + 9x + y)\ln 2} + \frac{2(x-3)}{(-x^2 + 6x)\ln 3} \\ &= (x-3)\left[\frac{3(x-1)}{(x^3 - 6x^2 + 9x + y)\ln 2} + \frac{2}{(-x^2 + 6x)\ln 3}\right]. \end{aligned}$$

Vì $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x + y > 0 \\ -x^2 + 6x > 0 \end{cases}$ nên $\left[\frac{3(x-1)}{(x^3 - 6x^2 + 9x + y)\ln 2} + \frac{2}{(-x^2 + 6x)\ln 3}\right] > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

Do đó, phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$ như sau

x	$\frac{3}{2}$		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{9}{2}\right)$

Trong đó

- $f(3) = \log_2 y - 2$;
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \log_2\left(\frac{27}{8} + y\right) - \log_3\frac{27}{4} = \log_2\left(\frac{27}{8} + y\right) - (3 - 2\log_3 2)$;
- $f\left(\frac{9}{2}\right) = \log_2\left(\frac{81}{8} + y\right) - \log_3\frac{27}{4} = \log_2\left(\frac{81}{8} + y\right) - (3 - 2\log_3 2)$.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 y - 2 = 0\\ \begin{cases}\log_2\left(\frac{27}{8}+y\right) - (3-2\log_3 2) < 0\\ \log_2\left(\frac{81}{8}+y\right) - (3-2\log_3 2)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 y = 2\\ \begin{cases}\frac{27}{8}+y < 2^{3-2\log_3 2}\\ \frac{81}{8}+y \geq 2^{3-2\log_3 2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=4\\ 2^{3-2\log_3 2} - \frac{81}{8} \leq y < 2^{3-2\log_3 2} - \frac{27}{8}.\end{array}\right.$$

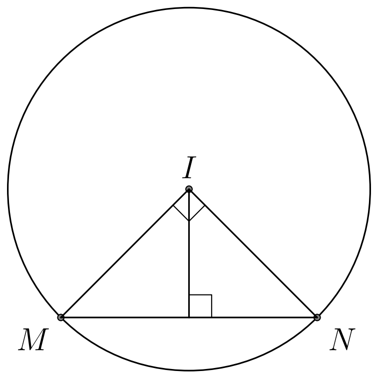
Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên ta được $y \in \{-6; -5; \ldots; -1\} \cup \{4\}$.
Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của y thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;-2)$, nhận $\vec{u}=(1;a;3-a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm véc-tơ chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà các tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Hỏi a^2 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{2}; \frac{15}{2}\right)$. B. $\left(24; \frac{49}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{31}{2}; \frac{33}{2}\right)$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ bán kính $R=2$.
Gọi M và N lần lượt là hai giao điểm của d với (S).
Gọi (α), (β) lần lượt là các mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M và N.
Ta có $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ lần lượt là các véc-tơ pháp tuyến của (α) và (β).
Theo đề bài ta có $IM \perp IN \Rightarrow \triangle IMN$ vuông cân tại $I \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$.



Lại có $\overrightarrow{IA}=(0;2;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IA};\vec{u}\right]=(6-a;-1;-2)$.

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,MN)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IA};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{MN}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(6-a)^2+1+4}{1+a^2+(3-a)^2}}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2-12a+41=2\left(2a^2-6a+10\right) \Leftrightarrow 3a^2=21 \Leftrightarrow a^2=7 \in \left(\frac{13}{2};\frac{15}{2}\right).$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+az+b=0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-1|=2$ và $|z_2-2+3i|=3$?

A. 4. B. 3. C. 6. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\Delta = a^2-4b$.

- **Trường hợp 1:** $\Delta > 0$. Khi đó z_1, z_2 là các số thực.

  Ta có $|z_1 - 1| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 3 \\ z_1 = -1. \end{array}\right.$

  Lại có $|z_2 - 2 + 3i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(z_2-2)^2 + 9} = 3 \Leftrightarrow z_2 = 2$.

  Với $\begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = z_1 + z_2 = -a \\ 6 = z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 6. \end{cases}$

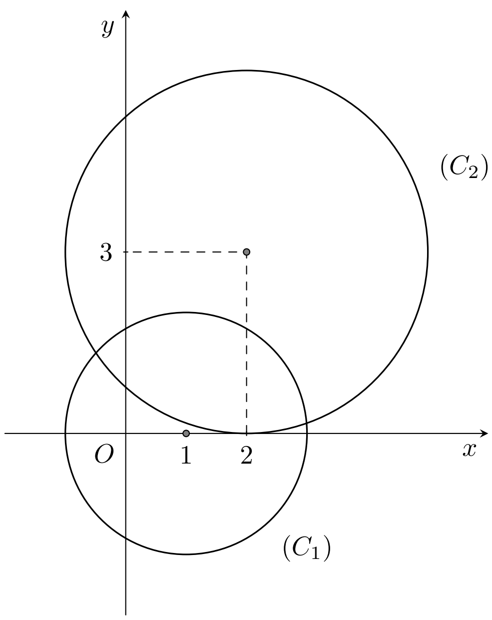
  Với $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = z_1 + z_2 = -a \\ -2 = z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2. \end{cases}$

  So sánh điều kiện ta được $(a;b) \in \{(-5;6), (-1;-2)\}$.

- **Trường hợp 2:** $\Delta < 0$. Khi đó, ta có z_1, $z_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = \overline{z}_1$.

  Đặt $z_1 = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_2 = x - yi$. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} |z_1 - 1| = 2 \\ |\overline{z}_1 - 2 + 3i| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 & (C_1) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9. & (C_2) \end{cases}$$



  Hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt, do đó hệ phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

  Suy ra có hai cặp số $(a;b)$ thỏa yêu cầu bài toán trong trường hợp này.

Vậy có 4 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AC' = 8$, diện tích của tam giác $A'BC$ bằng 9 và đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(A'BC)$ một góc 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

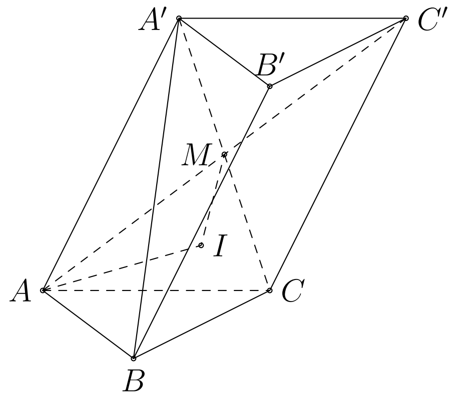
(A) 12. (B) 18. (C) $18\sqrt{3}$. (D) $12\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'BC)$ và M là giao điểm của $A'C$ và AC'.
Vì $AC' = 8$ nên $AM = 4$.
Ta có $(AC', (A'BC)) = \widehat{AMI} = 60°$.

Từ đó ta có $AI = AM \cdot \sin 60° = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3} AI \cdot S_{\triangle A'BC} = \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

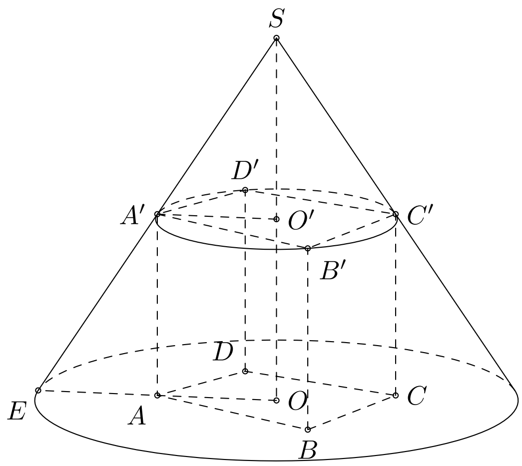
Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4. Xét hình nón $(\mathscr{N})$ có đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt xung quanh đi qua bốn điểm A', B', C', D'. Khi bán kính đáy của $(\mathscr{N})$ bằng $3\sqrt{2}$, diện tích xung quanh của $(\mathscr{N})$ bằng

A 72π. **B** 54π. **C** $36\sqrt{2}\pi$. **D** 108π.

Lời giải.

Gọi S là đỉnh của hình nón, O và O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.
Ta thấy $S \in OO'$. Gọi E là giao điểm của SA' với $(ABCD)$.
Suy ra $A \in OE$.
$(\mathscr{N})$ có bán kính OE và đường cao SO.
Ta có $\Delta SOE \sim \Delta SO'A'$ nên suy ra

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OE} \Leftrightarrow \frac{SO'}{SO' + OO'} = \frac{O'A'}{OE}$$
$$\Leftrightarrow \frac{SO'}{SO' + 4} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow SO' = 8$$
$$\Rightarrow SO = 8 + 4 = 12.$$



Do đó độ dài đường sinh của $(\mathscr{N})$ là
$SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{12^2 + 18} = 9\sqrt{2}$.
Vậy diện tích xung quanh của $(\mathscr{N})$ là
$S_{xq} = \pi \cdot 9\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 54\pi$.

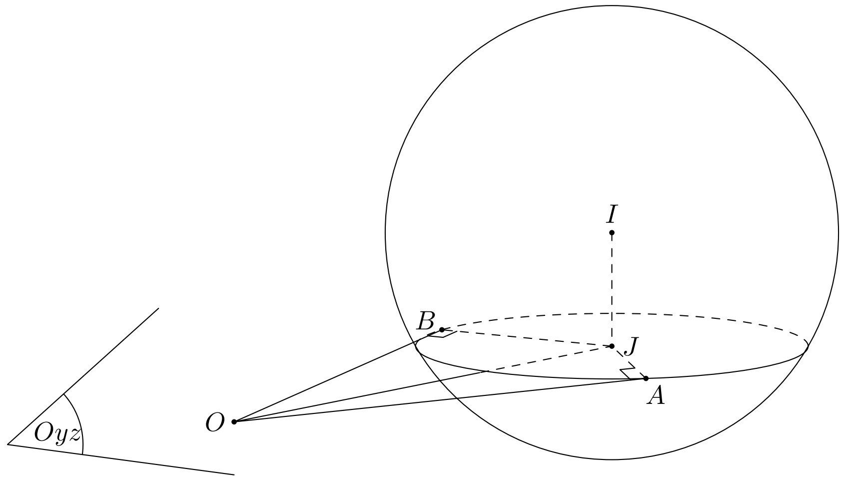
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(3; 5; 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn $60°$?

A 4. **B** 2. **C** 10. **D** 6.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên (Oyz) suy ra $J(0;5;12)$ và $IJ=3$, $OI=\sqrt{178}$, $OJ=13$.
Để tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O thì $R>IJ=3$. (1)
Gọi hai tiếp tuyến đó là OA và OB suy ra $JA=\sqrt{R^2-3^2}$.
Theo bài ra góc giữa hai tiếp tuyến không nhỏ hơn 60° nên ta có

$$\sin\frac{120^\circ}{2}\geq\sin\widehat{JOA}\geq\sin\frac{60^\circ}{2}\Leftrightarrow\sin 60^\circ\geq\frac{JA}{JO}\geq\sin 30^\circ\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\geq\frac{\sqrt{R^2-9}}{13}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 11{,}65\geq R\geq 7{,}15.\quad(2)$$

Từ (1), (2) và $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{8;9;10;11\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=x^4-18x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ bằng -4?

(A) 24. (B) 23. (C) 26. (D) 25.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$.
Bảng biến thiên

x	-3	-1	2
t	6 ↘	2	↗ 11

Với mỗi $t\in(2;6)$ có 2 giá trị x_1, x_2 phân biệt sao cho $x_1+x_2=-2$.
Với $t=2$ có duy nhất giá trị $x=-1$.
Với $t\in[6;11)$ có duy nhất giá trị $x\in(-1;2)$.
Yêu cầu bài toán trở thành phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;6)$.
Xét hàm số $f(t)=t^4-18t^2+4$ với $t\in(2;6)$.

Phương trình $f'(t)=4t^3-36t$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin(2;6)\\t=-3\notin(2;6)\\t=3\in(2;6).\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	2		3		6
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-52	$\searrow$	-77	$\nearrow$	652

Từ bảng biến thiên suy ra $-77 < m < -52$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-76, -75, \ldots, -53\}$.
Vậy có 24 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án A □

—— HẾT ——

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR Thầy Nguyễn Hoàng Việt **ĐỀ SỐ 47**	ĐỀ MINH HỌA TNTHPT 2024 Môn: Toán Năm học: 2023 – 2024 Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề) **MÃ ĐỀ: MH 2024**

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. B. -2. C. 2. D. -1.

Lời giải.

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

Chọn đáp án B

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 5 - 6x^2$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 5 - 2x^3 + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = 5x - 2x^3 + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 5x - 6x^3 + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = 5 - 3x^3 + C$.

Lời giải.

Khẳng định $\int f(x)\mathrm{d}x = 5x - 2x^3 + C$ **đúng**.

Chọn đáp án B

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là

A. $\{-4; 4\}$. B. $\{4\}$. C. $\{2\}$. D. $\{16\}$.

Lời giải.

$\log_3(x^2 - 7) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) = 0$.

Nên tập nghiệm của phương trình là $\{-4; 4\}$.

Chọn đáp án A

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(3; -1; 2)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(2; -2; 4)$. B. $(2; 0; 0)$. C. $(1; -1; 2)$. D. $(-2; 2; -4)$.

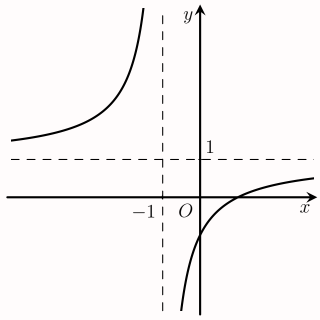
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4)$.

Chọn đáp án A

Câu 5.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là



Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $y = 1$.

Câu 6. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^3 - 4x^2 - 2$.

Ⓒ $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Ⓓ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải.

Trong bốn phương án, ta thấy bảng biến thiên phù hợp với hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$. Do đó, bảng biến thiên là của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{\sqrt{2}}$ là

Ⓐ $\mathbb{R}$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(-1; +\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$. Véc-tơ nào sau đây làm một véc-tơ chỉ phương của d?

Ⓐ $\overrightarrow{u_2} = (1; 0; -2)$. Ⓑ $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -3)$. Ⓒ $\overrightarrow{u_3} = (2; 1; 3)$. Ⓓ $\overrightarrow{u_4} = (1; 0; 2)$.

Lời giải.

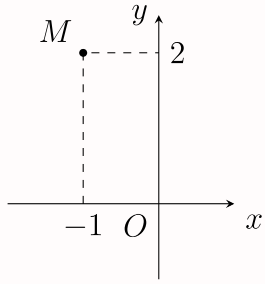
Véc-tơ $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -3)$ làm một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 9.

Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

Ⓐ $2+i$. Ⓑ $-1+2i$. Ⓒ $2-i$. Ⓓ $-1-2i$.



Lời giải.

Vì $M(-1;2) \Rightarrow M$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=5$. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Ⓑ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

Ⓒ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$. Ⓓ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=5$ nên có phương trình

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^{\frac{1}{3}}$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{2}\log_2 a$. Ⓑ $3\log_2 a$. Ⓒ $\frac{1}{3}\log_2 a$. Ⓓ $\frac{2}{3}\log_2 a$.

Lời giải.

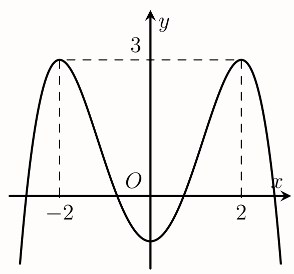
Ta có $\log_2 a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_2 a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12.

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-2;2)$. Ⓑ $(-\infty;2)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(0;2)$.



Lời giải.

Dựa và đồ thị như hình vẽ, ta có trên hàm số nghịch trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$ vì trên hai khoảng này, đồ thị có chiều đi xuống.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $5a^2$ và chiều cao bằng $6a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $15a^3$. **B** $5a^3$. **C** $10a^3$. **D** $30a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ $V = 5a^2 \times 6a = 30a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là

A $(-\infty; \log_2 5]$. **B** $(-\infty; \log_2 5)$. **C** $(-\infty; \log_5 2]$. **D** $(-\infty; \log_5 2)$.

Lời giải.

Ta có $2^x < 5 \Leftrightarrow x < \log_2 5$.
Vậy $S = (-\infty; \log_2 5)$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A $y = \ln x$. **B** $y = \log_3 x$. **C** $y = \log x$. **D** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Lời giải.

Vì $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A $\vec{n} = (1; 1; 0)$. **B** $\vec{j} = (0; 1; 0)$. **C** $\vec{i} = (1; 0; 0)$. **D** $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy).
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_1^2 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 2. (B) -2. (C) 8. (D) $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

$\int\limits_1^2 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3-5=-2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) -3. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\int_{2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $7a^2$ và chiều cao bằng $9a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $9a^3$. (B) $21a^3$. (C) $84a^3$. (D) $63a^3$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}\cdot B\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot 7a^2\cdot 9a = 21a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = -4+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

(A) $-3-3i$. (B) $3-4i$. (C) $3-2i$. (D) $-3-2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1+z_2 = 1-3i-4+i = -3-2i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và độ dài đường sinh ℓ. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\ell = \sqrt{h+r}$. (B) $\ell = \sqrt{h^2+r^2}$. (C) $\ell = hr$. (D) $\ell = h^2+r^2$.

Lời giải.

Hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và độ dài đường sinh ℓ nên ta có $\ell = \sqrt{h^2+r^2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh ngồi vào một dãy gồm 5 chiếc ghế sao cho mỗi chiếc ghế có đúng một học sinh ngồi?

(A) 600. (B) 120. (C) 3125. (D) 25.

Lời giải.

Mỗi cách xếp 5 học sinh ngồi vào dãy gồm 5 chiếc ghế là một hoán vị của 5 phần tử.

Số cách xếp là $\mathrm{P}_5 = 5! = 120$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Hàm số $F(x) = e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $f_4(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Ⓑ $f_1(x) = e^{2x}$. Ⓒ $f_2(x) = e^{x^2}$. Ⓓ $f_3(x) = 2e^{2x}$.

Lời giải.

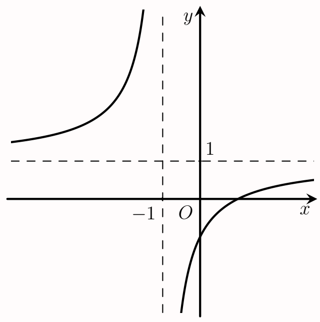
Ta có $F'(x) = f(x)$ nên $f(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$

Chọn đáp án Ⓓ

Câu 25.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy số giao điểm của đồ thị với trục tung bằng 1.

Chọn đáp án Ⓒ

Câu 26. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng r và diện tích xung quanh bằng S. Chiều cao của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{S}{2\pi r}$. Ⓑ $\dfrac{S}{\pi r}$. Ⓒ $\dfrac{2S}{\pi r}$. Ⓓ $\dfrac{S}{2r}$.

Lời giải.

$S = 2\pi r l \Rightarrow l = \dfrac{S}{2\pi r} \Rightarrow h = \dfrac{S}{2\pi r}$.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{3}$. Ⓑ $\dfrac{3}{7}$. Ⓒ -4. Ⓓ 4.

Lời giải.

Công sai của cấp số cộng $d = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ

Câu 28. Số phức $z = 4 - 5i$ có phần ảo bằng

Ⓐ -5. Ⓑ -4. Ⓒ $-5i$. Ⓓ 4.

Lời giải.

Số phức $z = 4 - 5i$ có phần ảo bằng -5.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 29. Cho số phức $z = 3 - i$, phần thực của số phức $(1 - i)\bar{z}$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -4. Ⓓ -2.

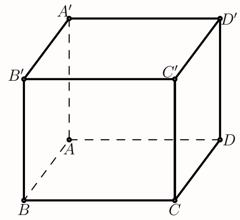
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Ta có $(1-i)\,\overline{z} = (1-i)\,(3+i) = 4-2i$.
Suy ra phần thực của số phức $(1-i)\,\overline{z}$ bằng 4.
Chọn đáp án (A) □

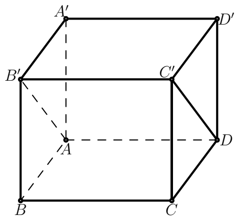
Câu 30.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng CD và AB' bằng

(A) 90°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 45°.



Lời giải.

Ta có $AB' \parallel DC' \Rightarrow (AB', DC) = (DC', DC) = \widehat{CDC'} = 45^\circ$.

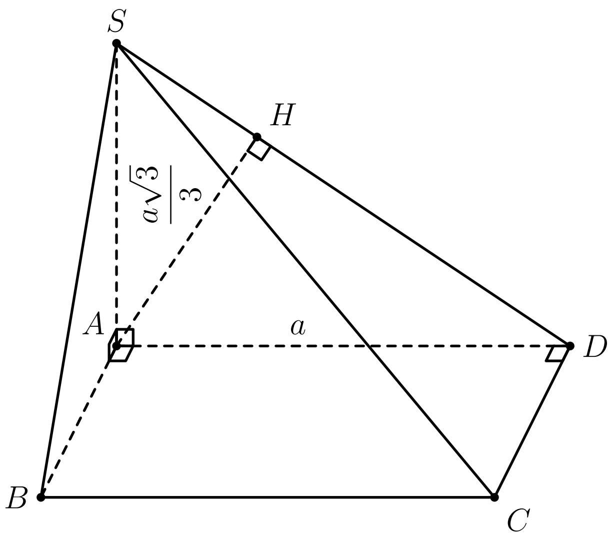


Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{14}a}{7}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAD), gọi H là hình chiếu của A đến đường thẳng SD. Khi đó, $AH \perp SD$ (1).
Mặt khác, $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\,(A, (SCD)) = AH = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \dfrac{a}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $(3;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;2)$. Ⓓ $(1;3)$.

Lời giải.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 33. Từ một hộp chứa 12 viên bi gồm 3 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh và 5 viên bi vàng, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi. Xác suất để trong bốn viên bi được lấy có ít nhất 1 viên bi đỏ bằng

Ⓐ $\dfrac{13}{55}$. Ⓑ $\dfrac{41}{55}$. Ⓒ $\dfrac{14}{55}$. Ⓓ $\dfrac{42}{55}$.
.

Lời giải.

Không gian mẫu là Ω, ta có: $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$. Biến cố A : "trong bốn viên bi được lấy có ít nhất một viên bi đỏ."
Khi đó: $\overline{A}$: "trong bốn viên bi được lấy không có viên bi đỏ."
Ta có: $n\left(\overline{A}\right) = C_9^4 = 126$, suy ra $n(A) = 495 - 126 = 369$.
Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{369}{495} = \dfrac{41}{55}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Nếu $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 13. Ⓒ 5. Ⓓ -1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} (3 - f(x))\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} 3\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 9 - 4 = 5.$
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$ bằng

Ⓐ $-\sqrt{3}$. Ⓑ -4. Ⓒ 5. Ⓓ $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$ có $f'(x) = -4x^3 + 12x = -4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$ bằng 5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 (32a^4)$ bằng

(A) $5 - 4\log_2 a$. (B) $5 + 4a$. (C) $5 - 4a$. (D) $5 + 4\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 (32a^4) = \log_2 32 + \log_2 a^4 = 5 + 4\log_2 a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(4;0;0)$ và đi qua điểm $M(0;-3;0)$ có phương trình là

(A) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 5$. (B) $(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

(C) $(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 25$. (D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu $R = IM = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-0)^2 + 0^2} = 5$.

Phương trình mặt cầu có tâm $I(4;0;0)$ và bán kính $R = 5$ là $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;0;2)$ và $C(3;2;3)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;2;1)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng. Phương trình tham số của đường thẳng đã cho là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^2b\right)\cdot\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right)+4=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_a^2\left(a^2b\right)\cdot\log_a\left(\frac{b}{a}\right)+4=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+2\right)^2\left(\log_a b-1\right)+4=0.$$

Đặt $t=\log_a b$ $(t\neq 0)$. Ta có phương trình

$$\begin{aligned}(t+2)^2(t-1)+4=0&\Leftrightarrow(t^2+4t+4)(t-1)+4=0\\&\Leftrightarrow t^3+3t^2=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\text{ (loại)}\\t=-3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $\log_a b=-3$ hay $\log_b a=-\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

Ⓐ 17. Ⓑ 14. Ⓒ 15. Ⓓ 13.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq\dfrac{m}{3}$.

Ta có $y'=\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi

$$\frac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}\geq 0;\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+2mx+3\geq 0;\forall x\in(2;3) & (1)\\ \dfrac{m}{3}\notin(2;3). & (2)\end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}\geq 3\\ \dfrac{m}{3}\leq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\m\leq 6.\end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2m\geq 3x-\dfrac{3}{x},\forall x\in(2;3)$.

Đặt $g(x)=3x-\dfrac{3}{x}$ với $x\in(2;3)$.

Ta có $g'(x)=3+\dfrac{3}{x^2}>0,\forall x\in(2;3)\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó $2m\geq g(x),\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow 2m\geq g(3)\Leftrightarrow 2m\geq 8\Leftrightarrow m\geq 4$.

Kết hợp hai điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\4\leq m\leq 6.\end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{4;5;6;9;10;\ldots;20\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 41. Xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0)$ sao cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C\left(1; -\dfrac{3}{5}\right)$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ có diện tích bằng $\dfrac{2}{5}$, tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) -1. (C) $-\dfrac{17}{15}$. (D) $\dfrac{17}{15}$.

Lời giải.

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ suy ra $f'(x) = 4ax(x^2 - 1)$.

Từ đó ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = ax^4 - 2ax^2 + c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x = \pm 1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x = 0$ nên $f(x) - g(x) = ax^2(x^2 - 1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ có diện tích bằng $\dfrac{2}{5}$ ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|ax^2(x^2 - 1)\right|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\\
\Leftrightarrow\ & a\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\\
\Leftrightarrow\ & a = 3 \quad \text{(TM)}.\\
\Rightarrow\ & f(x) = 3x^4 - 6x^2 + \frac{12}{5}\\
\Rightarrow\ & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^4 - 6x^2 + \frac{12}{5}\right)\,\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Xét các số phức $z, w\,(w \neq 2)$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $\dfrac{w+2}{w-2}$ là số thuần ảo. Khi $|z - w| = \sqrt{3}$, giá trị của $|2z + w|$ bằng

(A) $\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{w+2}{w-2}$ là số thuần ảo nên

$$\begin{aligned}
&\frac{w+2}{w-2} + \frac{\overline{w}+2}{\overline{w}-2} = 0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{(w+2)(\overline{w}-2) + (w-2)(\overline{w}+2)}{(w-2)(\overline{w}-2)} = 0\\
\Leftrightarrow\ & (w+2)(\overline{w}-2) + (w-2)(\overline{w}+2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2w\overline{w} - 8 = 0\\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} = 4\\
\Leftrightarrow\ & |w| = 2.
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
&|z-w|=\sqrt{3}\\
\Rightarrow\ &|z-w|^2=3\\
\Rightarrow\ &(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=3\\
\Rightarrow\ &|z|^2-(z\overline{w}+\overline{z}w)+|w|^2=3\\
\Rightarrow\ &1-(z\overline{w}+\overline{z}w)+4=3\\
\Rightarrow\ &z\overline{w}+\overline{z}w=2.
\end{aligned}$$

Ta có:

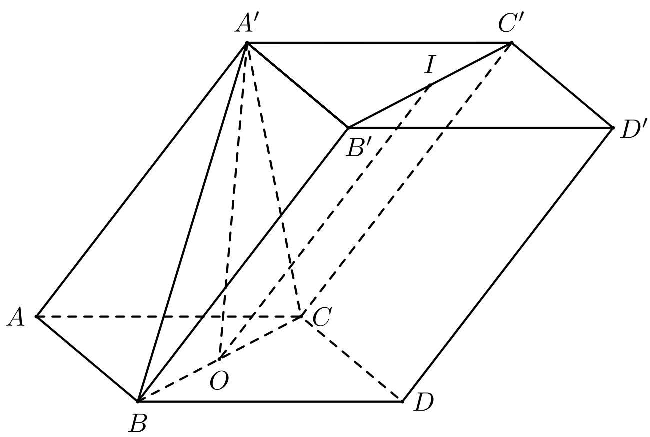
$$\begin{aligned}
P^2 &= |2z+w|^2=(2z+w)(2\overline{z}+\overline{w})\\
&= 4|z|^2+2(z\overline{w}+\overline{z}w)+|w|^2\\
&= 4\cdot 1+2\cdot 2+4=12\\
\Rightarrow P &= 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $A'A=A'B=A'C=a$. Biết góc giữa $(BCC'B')$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. (C) $\dfrac{3a^3}{8}$. (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.



Do ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $A'A=A'B=A'C=a$.
Gọi O là trung điểm của BC.
$\Rightarrow O$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Khi đó hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy là điểm O.
Gọi D sao cho $ABCD$ là hình vuông và I là trung điểm của $B'C'$.
$(BCC'B')\cap(ABC)=BC$.
$(ABC): OD\perp BC$.
$(BCC'B'): IO\perp BC$.
$\Rightarrow \widehat{IOD}=30^0$.
Do $\widehat{A'OD}=90°\Rightarrow \widehat{A'OI}=90°-30°=60°$.
$OI \parallel A'A \Rightarrow \widehat{AA'O}=\widehat{A'OI}=60°$ (so le trong).

Ta có $\Delta AA'O$ vuông tại O nên $\sin 60°=\dfrac{AO}{A'A}\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$A'O=\sqrt{a^2-\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{1}{2}a$.

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB=AO\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}\cdot A'O=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot A'O=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}a=\dfrac{3}{8}a^3$.

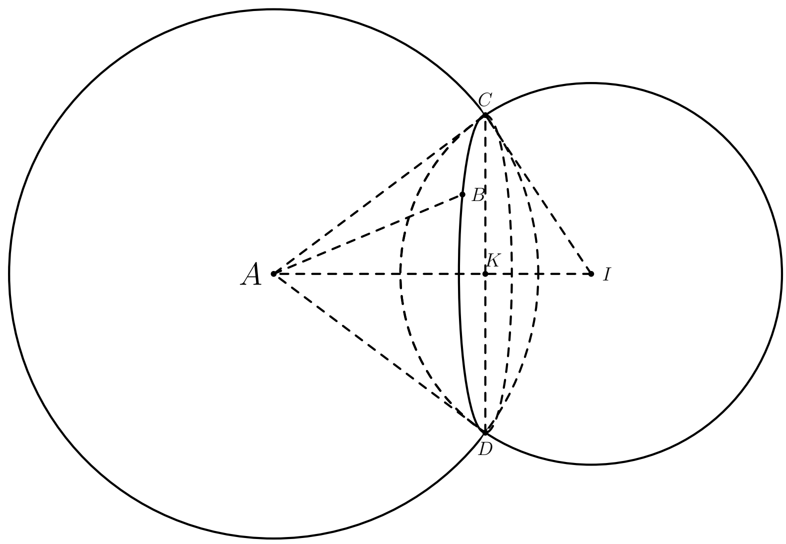
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$. Biết B, C, D là ba điểm phân biệt trên (S) sao cho các tiếp diện của (S) tại mỗi điểm đó đều đi qua A. Hỏi mặt phẳng (BCD) đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $M(1;1;1)$. (B) $P(-3;1;1)$. (C) $N(-1;1;1)$. (D) $Q(1;1;-1)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $I(0;0;0)$ và bán kính $R=1$.
Ta có $AO=3>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu.
Do $\widehat{ACI}=\widehat{ABI}=\widehat{ADI}=90^\circ$ nên B, C, D thuộc mặt cầu (S_2) tâm $K\left(\dfrac{1}{2};-1;1\right)$ và bán kính $\dfrac{AI}{2}=\dfrac{3}{2}$.



$$(S_2): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0.$$

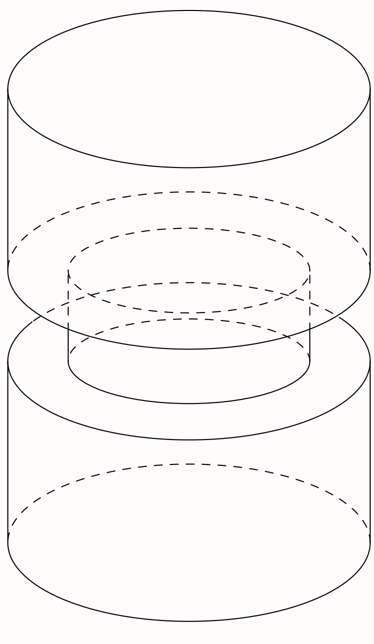
Khi đó mặt phẳng (BCD) là giao của 2 mặt cầu (S), (S_2).

Từ hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ suy ra $x-2y+2z-1=0$.

Ta có $M(1;1;1)$ thuộc (BCD) vì $1-2\cdot 1+2\cdot 1-1=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Để chế tạo một chi tiết máy, từ một khối thép hình trụ có bán kính 10 cm và chiều cao 30 cm, người ta khoét bỏ một rãnh xung quanh rộng 1 cm và sâu 1 cm (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích của chi tiết máy đó, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.



(A) $9110,619\text{ cm}^3$. (B) $9170,309\text{ cm}^3$. (C) $9365,088\text{ cm}^3$. (D) $8997,521\text{ cm}^3$.

Lời giải.

Thể tích của cái rãnh bỏ bị khoét bỏ đi là: $\pi 10^2.1 - \pi.9^2.1 = 19\pi\text{cm}^3$.
Thể tích của chi tiết máy đó là: $\pi.10^2.30 - 19\pi = 2981\pi \approx\ 9365,088\text{ cm}^3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $y\log_3(3x+y+9) = (x^2+3x+y)\log_3(x+3)$. Khi biểu thức $y-5x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x-2y$ bằng

(A) -1. (B) 2. (C) -7. (D) -31.

Lời giải.

Ta có $\quad y\log_3(3(x+3)+y) = x(x+3)\log_3(x+3) + y\log_3(x+3)$

$$\Leftrightarrow y\left[\log_3(3(x+3)+y) - \log_3(x+3)\right] = x(x+3)\log_3(x+3)$$

$$\Leftrightarrow y\left[\log_3\frac{3(x+3)+y}{x+3}\right] = x(x+3)\log_3(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+3}\left[\log_3\left(3+\frac{y}{x+3}\right)\right] = x\log_3(x+3)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{x+3}\right) = f(x) \quad (*).$$

Xét $f(t) = t\log_3(t+3)$ đồng biến trên $(-3;+\infty)$.

Từ đó, $(*) \Leftrightarrow \dfrac{y}{x+3} = x$

$$\Leftrightarrow y = x^2+3x.$$

Với $P = y-5x = x^2+3x-5x = x^2-2x = (x-1)^2-1 \geq -1$.
Suy ra $P_{\min} = -1$ khi $x = 1 \Rightarrow y = 4$.
Vậy giá trị của biểu thức $x-2y = 1-2\cdot 4 = -7$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z-w| = 2|z| = 2$ và số phức $\overline{z}\cdot w$ có phần thực bằng 1. Giá trị lớn nhất của $P = |z+w-1+2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(4;5)$. (B) $(3;4)$. (C) $(5;6)$. (D) $(6;7)$.

Lời giải.

Đặt $\overline{z}\cdot w = 1+bi$, suy ra $z\cdot\overline{w} = \overline{\overline{z}\cdot w} = \overline{1+bi} = 1-bi$ nên $\overline{z}\cdot w + z\cdot\overline{w} = 2$.

Ta có $|z-w| = 2 \Rightarrow 4 = |z-w|^2 = (z-w)(\overline{z-w})$

$$\begin{aligned} &= (z-w)(\overline{z}-\overline{w})\\ &= z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} - (z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w)\\ &= |z|^2+|w|^2-(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w) = 1+|w|^2-2 = |w|^2-1.\end{aligned}$$

$\Rightarrow |w| = \sqrt{5}$.

Mặt khác, ta có $|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z+w})$

$$\begin{aligned} &= (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w})\\ &= |z|^2+|w|^2+(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w) = 1+5+2 = 8.\end{aligned}$$

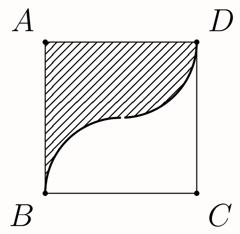
$\Rightarrow |z+w| = 2\sqrt{2}$.

Khi đó $P = |z+w-1+2i| = |(z+w)+(-1+2i)| \leqslant |z+w|+|-1+2i| = 2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

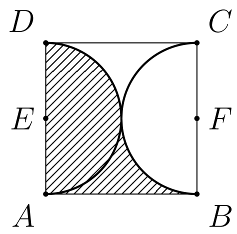
Câu 48.
Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



(A) $20{,}3\text{ cm}^3$. (B) $10{,}5\text{ cm}^3$. (C) $12{,}6\text{ cm}^3$. (D) $8{,}4\text{ cm}^3$.

Lời giải.

Chọn AB chứa trong trục Ox và $A \equiv O(0;0)$. Khi đó $E(0;1)$ và $F(2;1)$ với E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC.
Khi đó đường tròn tâm E chứa cung tròn AD là $x^2+(y-1)^2=1$ và đường tròn tâm F chứa cung tròn BC là $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.
Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là



$$y=\sqrt{1-x^2}+1,$$

và phương trình cung dưới của của đường tròn tâm F là $y=-\sqrt{1-(x-2)^2}+1$.
Khi đó, thể tích vật thể trang trí là

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int\limits_1^2\left(-\sqrt{1-(x-2)^2}+1\right)^2\ \mathrm{d}x\approx 10{,}5\text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 cực trị.

(A) 83. (B) 81. (C) 80. (D) 84.

Lời giải.

Ta có:

$$y'=\left(4x^3-36x\right)\cdot f'\left(x^4-18x^2+m\right).$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0\\4x^3-36x=0\end{array}\right.$$

- Với $4x^3-36x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\end{array}\right.$ có 3 nghiệm đơn.

- $f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-18x^2+m=0\\x^4-18x^2+m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-18x^2=-m\\x^4-18x^2=-m+82\end{array}\right.$.

  Xét hàm số: $g(x)=x^4-18x^2$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\end{array}\right.$.

  Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^4-18x^2$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-81	$\nearrow$	0	$\searrow$	-81	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y = f\left(x^4 - 18x^2 + m\right)$ có đúng 7 cực trị thì $y = f'\left(x^4 - 18x^2 + m\right) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt khác 0 và khác ± 3.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{m \le -81 \\ -81 < -m + 82 < 0 \\ -m + 82 > -m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 82 < m < 163 \\ m \le 0 \end{array}\right.$$

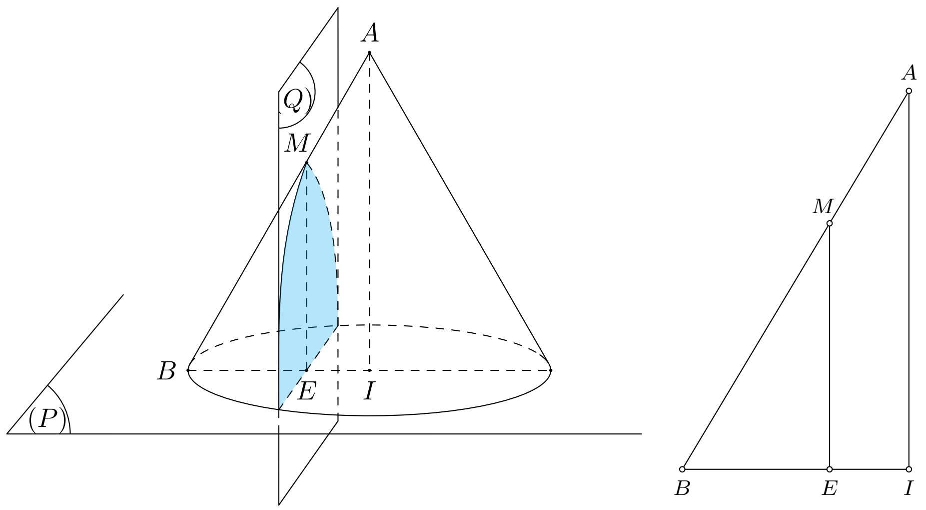
Vì $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{83, 84, \ldots\ldots.., 161, 162\}$. Nên có 80 giá trị m thỏa ycbt.

Chọn đáp án C

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh $A(2; 3; 0)$, độ dài đường sinh bằng 5 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + 2z - 1 = 0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của $(\mathcal{N})$ với mặt phẳng $(Q)\colon x - 4y + z + 4 = 0$ và M là một điểm di động trên (C). Hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.　　B $(0; 1)$.　　C $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.　　D $(2; 3)$.

Lời giải.



- Gọi I là tâm của đường tròn đáy hình nón $(\mathcal{N})$.
  E là hình chiếu của điểm M lên (P).
  Ta có
  $$AI = \mathrm{d}\left(A, (P)\right) = \frac{|4 + 3 - 1|}{3} = 2.$$
- Ta có
  $$IE = \mathrm{d}\left(I, (Q)\right) = \mathrm{d}\left(A, (Q)\right) = \frac{|2 - 12 + 4|}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$
  Và
  $$IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{21}.$$

Do $(P) \perp (Q)$ nên AM nhỏ nhất khi và chỉ khi 3 điểm A, M, B thẳng hàng hay

$$\frac{AM}{AB} = \frac{IE}{IB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \cdot 5 \approx 1{,}54.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng $AM \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án A □

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA
VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 48

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024
Môn: Toán
Năm học: 2023 – 2024
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho số phức $\overline{z}=-5+6i$. Phần ảo của z bằng

(A) -5. (B) -6. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=-5+6i \Rightarrow z=-5-6i$.
Phần ảo của z là -6.
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int(2x+3)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+3x+C$.

(B) $\displaystyle\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+C$.

(C) $\displaystyle\int(2x+3)\mathrm{d}x=2x^2+3x+C$.

(D) $\displaystyle\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int(2x+3)\,\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-3}$. Vec-tơ chỉ phương của d là

(A) $\vec{u}_1=(2;0;0)$. (B) $\vec{u}_2=(-1;2;0)$. (C) $\vec{u}_3=(1;-1;-3)$. (D) $\vec{u}_4=(1;1;3)$.

Lời giải.

Một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;-3)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{\text{xq}}=36\pi$ và chiều cao $h=6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

(A) 6. (B) 12. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}}=2\pi rh=12\pi r=36\pi \Rightarrow r=3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?

(A) 1; 3; 5; 7. (B) 1; 0; 2; 4. (C) 1; 3; 1; 5; 10. (D) 1; 2; 3; 4.

Lời giải.

Dãy số là cấp số cộng là 1; 3; 5; 7.
Chọn đáp án (A) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 6. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b^2$ bằng

Ⓐ $\log_a b$. Ⓑ $\log_a a^b$. Ⓒ $\log_a b^2$. Ⓓ $\log_a b^4$.

Lời giải.

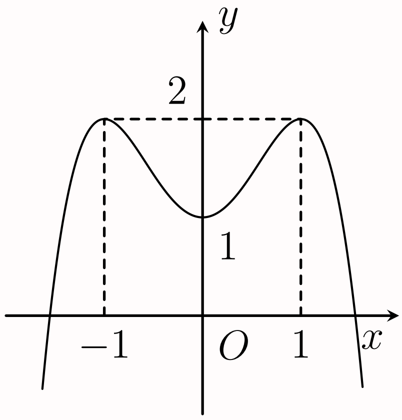
Ta có $\log_{a^2} b^2 = \log_a b$.

Chọn đáp án (A) □

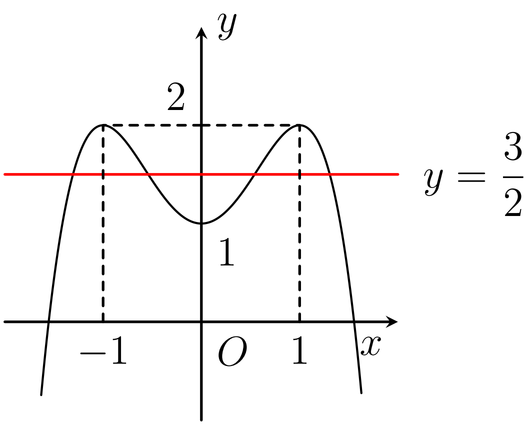
Câu 7.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = \dfrac{3}{2}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 2.



Lời giải.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ cắt nhau tại 4 điểm nên phương trình $f(x) = \dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ 24. Ⓑ 6. Ⓒ 12. Ⓓ 18.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = Bh = 6 \cdot 3 = 18$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 3$, $f(2) = 1$. Giá trị của

$\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)dx = f(2) - f(1) = 1 - 3 = -2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

Ⓐ $x = -\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $x = \dfrac{4}{3}$. Ⓒ $y = \dfrac{4}{3}$. Ⓓ $y = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là $x = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Số phức $z = i + i^2 + i^3$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ $-1 + 2i$. Ⓒ 1. Ⓓ i.

Lời giải.

Ta có $z = i + i^2 + i^3 = i + i^2 + i \cdot i^2 = i - 1 - i = -1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 12. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, hàm số $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x$. Ⓑ $f_2(x) = \dfrac{1}{4}\cos 2x$. Ⓒ $f_3(x) = \cos 2x$. Ⓓ $f_4(x) = -\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13. Nếu $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -1$ và $\int\limits_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -4. Ⓑ 5. Ⓒ -6. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -1 - 5 = -6$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A $x = 2$. **B** $x = -1$. **C** $x = 1$. **D** $x = -2$.

Lời giải.

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1$ là

A $(-2; 1)$. **B** $(0; +\infty)$. **C** $(-2; 0)$. **D** $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Điều kiện $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1 \Rightarrow x + 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x + 2 < 2 \Leftrightarrow x < 0.$$

Kết hợp điều kiện $x > -2$ thì bất phương trình có nghiệm $-2 < x < 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2; 0)$.

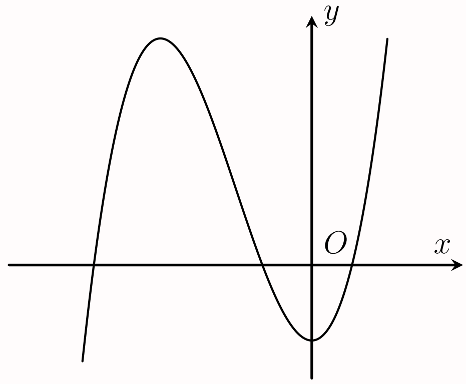
Chọn đáp án C □

Câu 16.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. **B** $y = x^4 - 2x^2 - 4$.

C $y = 2x - 2$. **D** $y = x^3 + 3x^2 - 1$.



Lời giải.

Ta có dạng đồ thị của hàm số là hàm số bậc ba.

Nhánh ngoài cùng đi lên nên hệ số $a > 0$. Nên chọn $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$ và $B(3; 0; 1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

A $(2; -1; 2)$. **B** $(1; 2; -3)$. **C** $(4; -2; 4)$. **D** $(1; 1; -1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu là trung điểm I của AB. Khi đó $I(2;-1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Nghiệm của phương trình $2^{2x}=2^{x+6}$ là

(A) $x=-6$. (B) $x=2$. (C) $x=6$. (D) $x=-2$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x}=2^{x+6}\Leftrightarrow 2x=x+6\Leftrightarrow x=6$.

Vậy nghiệm của phương trình $2^{2x}=2^{x+6}$ là $x=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-2)$. (B) $(2;4)$. (C) $(-2;+\infty)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

(A) $y=x^2$. (B) $y=2024^x$. (C) $y=\log_3 x$. (D) $y=x^{-4}$.

Lời giải.

Hàm số mũ có dạng $y=a^x$ nên chọn $y=2024^x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{7}}$ là

(A) $y'=\dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$. (B) $y'=\dfrac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$. (C) $y'=x^{-\frac{6}{7}}$. (D) $y'=\dfrac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $y'=\dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình nón có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

(A) 4. (B) 5. (C) $\sqrt{34}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	0	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec-tơ $\vec{a} = (2; 3; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 2; -4)$. Vec-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(-1; -3; 5)$. B. $(5; -1; 3)$. C. $(1; 5; -5)$. D. $(1; 1; -3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 5; -5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3; 4; -2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

A. $y - 4 = 0$. B. $z + 2 = 0$.

C. $x + y + z - 5 = 0$. D. $z - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng vuông góc với trục Oz nhận $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng đi qua $M(3; 4; -2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là $z + 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V = 3a^3$ và diện tích đáy $B = a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. a. B. $6a$. C. $3a$. D. $9a$.

Lời giải.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow 3a^3 = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \Rightarrow h = 9a$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

A. 36. B. 720. C. 1. D. 6.

Lời giải.

Có $6! = 720$ cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Trên mặt phẳng tọa độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. -5. B. -2. C. 2. D. 5.

Lời giải.

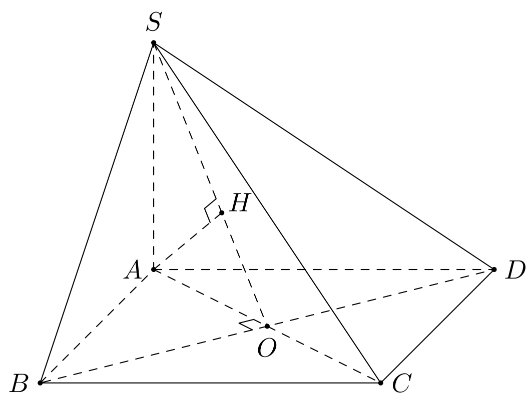
$M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z, suy ra $z=2-5i$. Vậy phần thực của z bằng 2.

Chọn đáp án C

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. C. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}a$. D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$.

Lời giải.



$\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right)=\mathrm{d}\left(A,(SBD)\right)=AH$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AO^2}+\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{\left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow AK=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a.$

Chọn đáp án D

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+1=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=2t\\z=-1-t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2\\z=1-t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=-1-t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $(2;0;-1)$ và đi qua $A(1;2;-1)$ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=-1-t.\end{cases}$

Chọn đáp án D

Câu 31. Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức iz bằng

A. 7. B. 49. C. 25. D. 5.

Lời giải.

Ta có $|iz|=|i(3+4i)|=|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$.

Chọn đáp án D

Câu 32. Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

Ⓐ $\dfrac{19}{22}$. Ⓑ $\dfrac{27}{44}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{39}{44}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3$.
Gọi A là biến cố "3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác".

TH1. 3 điểm được chọn có điểm O, khi đó ta chọn 1 điểm trên Ox và 1 điểm trên Oy. Số cách chọn là $6 \cdot 5 = 30$.

TH2. 3 điểm được chọn không có điểm O, khi đó ta chọn 2 điểm trên Ox và 1 điểm trên Oy. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 60$.

TH3. 3 điểm được chọn không có điểm O, khi đó ta chọn 1 điểm trên Ox và 2 điểm trên Oy. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 75$.

Suy ra $n(A) = 30 + 60 + 75 = 165$.
Vậy xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{165}{\mathrm{C}_{12}^3} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t) = -4t + 20$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

Ⓐ 32 m. Ⓑ 50 m. Ⓒ 48 m. Ⓓ 30 m.

Lời giải.

Gọi t_0; t_1 lần lượt là thời điểm người lái xe đạp phanh và thời điểm ô tô dừng hẳn.
Khi đó, $t_0 = 0$ và $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1 + 20 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 5$.
Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^5 (-4t + 20)\,\mathrm{d}t = 50 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; 2; 5)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ 8. Ⓓ $2\sqrt{14}$.

Lời giải.

Gọi $M\,(x; y; z)$.
Ta có $\overrightarrow{MB} = (3 - x; 2 - y; 5 - z)$; $\overrightarrow{MA} = (1 - x; 2 - y; 3 - z)$.

Theo bài ra $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 3\,(1 - x) \\ 2 - y = 3\,(2 - y) \\ 5 - z = 3\,(3 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 2. \end{cases}$

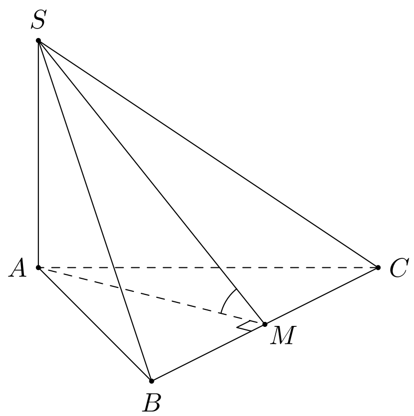
Suy ra $M\,(0; 2; 2)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

Ⓐ 60°. Ⓑ 90°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.
Mặt khác, $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Khi đó $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.
Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SMA}$.
Ta có $AM = \dfrac{1}{2}BC = a$, $SA = \sqrt{3}a$.
Xét tam giác vuông SAM có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$.
Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -6x^3 + 27x^2 - 16x + 1$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ $\dfrac{329}{9}$. Ⓒ $-\dfrac{14}{9}$. Ⓓ -154.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -18x^2 + 54x - 16$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -18x^2 + 54x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{3} \in [1;5] \\ x = \dfrac{1}{3} \notin [1;5]. \end{array}\right.$$

Khi đó $f(1) = 6$, $f(5) = -154$, $f\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{329}{9}$.

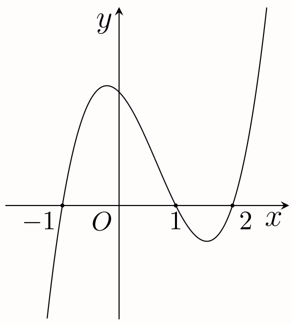
Suy ra $\max\limits_{[1;5]} f(x) = f\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{329}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} b$ bằng

(A) $\dfrac{1}{1 + \log_b a}$. (B) $\dfrac{1}{\log_b a}$. (C) $1 - \log_b a$. (D) $1 + \log_b a$.

Lời giải.

Ta có $\log_{ab} b = \dfrac{1}{\log_b ab} = \dfrac{1}{\log_b a + \log_b b} = \dfrac{1}{1 + \log_b a}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{5}$ và $f'(x) = \dfrac{1}{3}\ln x$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \dfrac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^{-3} + b\mathrm{e}^{-1} + c$, với a, b, c là số hữu tỉ, giá trị của $a - b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. (B) $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{3}{4}; 1\right)$. (D) $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left(x\ln x - \displaystyle\int \mathrm{d}x\right) = \dfrac{1}{3}(x\ln x - x + C)$.

Do $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow C = \dfrac{3}{5}$ hay $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x\ln x - x + \dfrac{3}{5}\right)$.

Khi đó $f\left(e^3\right)=\dfrac{2e^3}{3}+\dfrac{1}{5}$.

Ta có

$$\int_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}\,dx=-\int_e^{e^3}f(x)\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\int_e^{e^3}\frac{f'(x)}{x}\,dx=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{3}\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{6}\ln^2 x\Big|_e^{e^3}=-\frac{1}{e^3}\left(\frac{2e^3}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5e}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{5}e^{-3}+\frac{1}{5}e^{-1}+\frac{2}{3}.$$

Vậy $a=-\dfrac{1}{5};\ b=\dfrac{1}{5};\ c=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a-b+c=\dfrac{4}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi số a tồn tại không quá 4 số nguyên b thỏa mãn $5^{b^2}<25^{-b}\cdot a^{b+2}$?

(A) 125. (B) 100. (C) 99. (D) 124.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}5^{b^2}<25^{-b}\cdot a^{b+2}&\Leftrightarrow 5^{b^2}25^{b}<a^{b+2}\\&\Leftrightarrow 5^{b^2+2b}<a^{b+2}\\&\Leftrightarrow b\left(b+2\right)<\left(b+2\right)\log_5 a\\&\Leftrightarrow \left(b+2\right)\left(b-\log_5 a\right)<0\\&\Leftrightarrow -2<b<\log_5 a\ (\text{do } \log_5 a>0).\end{aligned}$$

Để thỏa mãn thì $\log_5 a\le 3\Leftrightarrow a\le 125$.

Do a nguyên và lớn hơn 1 nên có 124 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\dfrac{3}{2};2;\dfrac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

(A) $m\ge f(3)$. (B) $f(2)\ge m\ge f(3)$. (C) $m\ge f(0)$. (D) $m\ge f(2)$.

Lời giải.

$f(x)$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow a>0\Rightarrow f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e.$

Ta có $f'(x)=4a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)=a(2x+3)(x-2)(2x-11)=4ax^3-24ax^2-ax+66a$

$\Rightarrow f(x)=ax^4-8ax^3-\dfrac{a}{2}x^2+66ax+e.$

Ta có $f(0)=e,\ f(3)=\dfrac{117a}{2}+e\Rightarrow f(0)<f(3)$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		2		3		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$					
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	f(0)	↗		↘	f(3)	↘		↗	$+\infty$

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

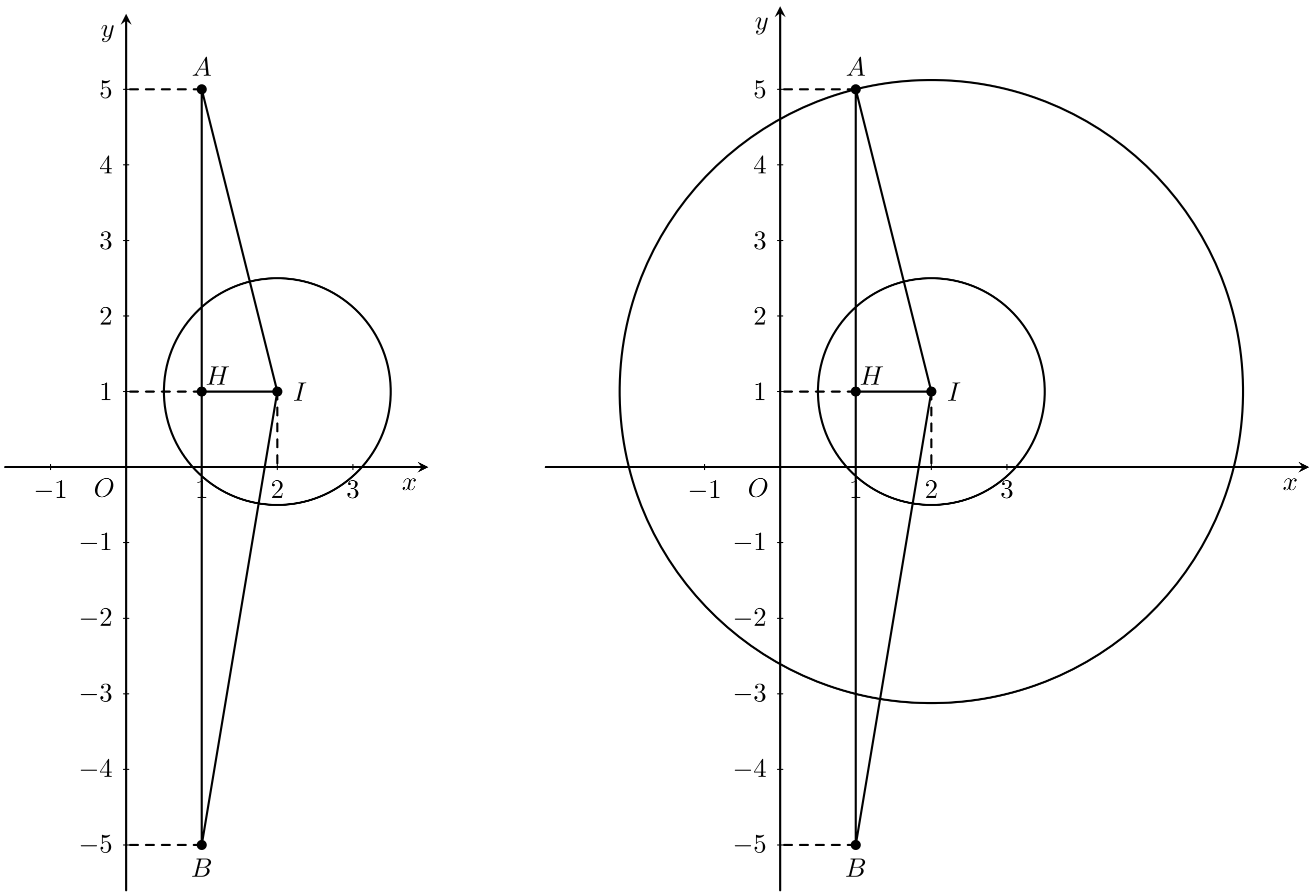
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f(0)$.
Chọn đáp án C

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho mỗi m tồn tại đúng hai hàm số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

A 5. B 4. C 2. D 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ và M là điểm biểu diễn số phức z.
Đặt $A(1;5)$, $B(1;-5)$.
Ta có $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10 \Rightarrow \begin{cases} MA+MB=10 \\ AB=10 \end{cases} \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB.
Mặt khác $|z-2-i|=m \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=m^2$.
Với $m>0$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R=m$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(2;1)$ trên đoạn AB, suy ra $IH=1$.



Ta có $IA < IB$.
Theo yêu cầu bài toán $1 < m \leq IA \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{17}$.
Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m>0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{2;3;4\}$.
Chọn đáp án D

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a>0)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)\cdot f''(x)$

và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,dx = -\frac{7}{2}$ giá trị của $\int\limits_0^{x_2} (x+2)f''(x)\,dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(6;7)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(0;1)$. (D) $(-7;-6)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax \Rightarrow f''(x)$ là hàm số lẻ.

Vì $x_1 + x_2 = 0$ nên $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Do đó $f'(x) = 3ax^2 + c$ là hàm số chẵn và $ac < 0$, $x_1 = -x_2$.

Xét phương trình $f'(x)\cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f''(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pm x_2 \\ x = 0 \end{array}\right.$, vì $x_1 = -x_2$.

Ta có $S = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \int\limits_{-x_2}^{x_2} \left|f'(x)\cdot f''(x)\right| dx = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2\int\limits_0^{x_2} \left|f'(x)\cdot f''(x)\right| dx = \frac{9}{4}$, vì $\left|f'(x)\cdot f''(x)\right|$ là hàm số chẵn

$$\Leftrightarrow \left|2\int\limits_0^{x_2} [f'(x)\cdot f''(x)]\,dx\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|[f'(x)]^2\Big|_0^{x_2}\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|[f'(x_2)]^2 - [f'(0)]^2\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow [f'(0)]^2 = \frac{9}{4}.$$

Vì $f'(0) = c < 0$ nên $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

Xét tích phân $I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,dx = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,dx = -\frac{7}{2}$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dx = -dt$, với $x = -x_2 \Rightarrow t = x_2$; $x = x_2 \Rightarrow t = -x_2$ nên

$$I = -\int\limits_{x_2}^{-x_2} \frac{f'(-t)}{3^{-t}+1}\,dt = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{3^t\cdot f'(t)}{3^t+1}\,dt = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{3^x\cdot f'(x)}{3^x+1}\,dx$$ vì $f'(x)$ là hàm số chẵn

$$\Rightarrow 2I = \int\limits_{-x_2}^{x_2} f'(x)\,dx = -7 \Leftrightarrow 2\int\limits_0^{x_2} f'(x)\,dx = -7 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_2} f'(x)\,dx = -\frac{7}{2}.$$

Xét tích phân $K = \int\limits_0^{x_2} (x+2)f''(x)\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ dv = f''(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x). \end{cases}$

Khi đó $K = (x+2)f'(x)\Big|_0^{x_2} - \int\limits_0^{x_2} f'(x)\,dx = -2f'(0) - \int\limits_0^{x_2} f'(x)\,dx = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$.

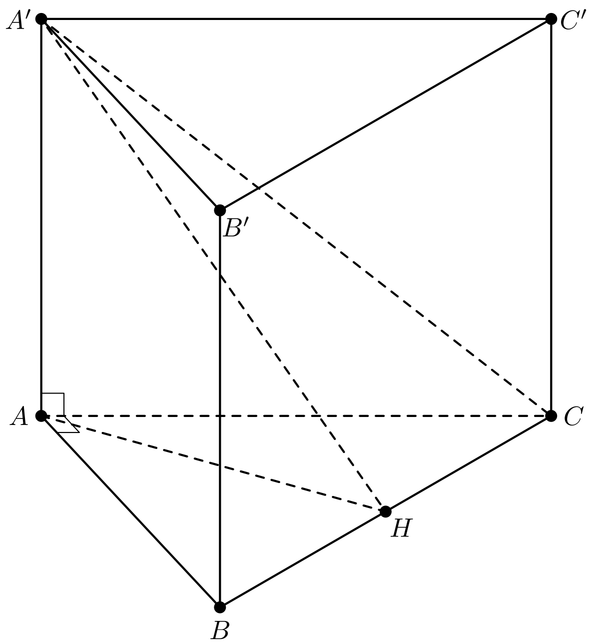
Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$. (D) $\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



Gọi H là trung điểm BC, $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$.

Xét $\triangle A'HA$ vuông tại A có $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\tan \widehat{A'HA} = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $V = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+3}{-5}$ và $d_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là

(A) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.

(B) $(x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 6$.

(C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+31)^2 = 6$.

(D) $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;3;-5)$.
Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;-1;-1)$.
Giả sử $M(2+a;4+3a;-3-5a) \in d_1$, $N(-2+b;-2-b;-1-b) \in d_2$ và MN là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (-4+b-a;-6-b-3a;2-b+5a)$.

Suy ra $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (-4+b-a) + 3 \cdot (-6-b-3a) - 5 \cdot (2-b+5a) = 0 \\ 1 \cdot (-4+b-a) - 1 \cdot (-6-b-3a) - 1 \cdot (2-b+5a) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1;2), N(-3;-1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-4;-2;-2) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}$.
Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 và có bán kính nhỏ nhất nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Khi đó, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;1)$ và bán kính $R = \dfrac{MN}{2} = \sqrt{6}$.
Vậy mặt cầu (S) cần tìm là $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \ln \dfrac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-\infty; 2100)$ thoả mãn $f(a-2024) + f(6a-27) \geq 0$.

(A) 2096. (B) 288. (C) 1807. (D) 360.

Lời giải.

Xét $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \ln \dfrac{x+3}{x-3}$ có tập xác định $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
Ta có $f'(x) = -\dfrac{6}{x^4} - \dfrac{6}{(x-3)^2} \cdot \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right) < 0,\ \forall x \in D$.
Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; -3)$ và $(3; +\infty)$.
Ta lại có $f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^3} + \ln\left(\dfrac{-x+3}{-x-3}\right) = -\left(\dfrac{2}{x^3} + \ln \dfrac{x+3}{x-3}\right) = -f(x)$.
Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ và nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định.
Từ đó suy ra $f(a-2024) + f(6a-27) \geq 0$ điều kiện $a \in (-\infty; 4) \cup (5; 2021) \cup (2027; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f(a-2024) \geq -f(6a-27) = f(-6a+27) \ \ (1)$$

Lập BBT có: $\forall x \in (3; +\infty)$ thì $f(x) > 0$.
Trường hợp 1: $\begin{cases} a - 2024 > 3 \\ 6a - 27 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2027 \\ a > 5 \end{cases}$, suy ra $a \in [2028; 2099]$ bất phương trình được nghiệm đúng.
Trường hợp này có 72 giá trị nguyên của a.
Trường hợp 2: $a < 2027$ bất phương trình trở thành $f(a-2024) \geq -f(6a-27) = f(-6a+27)$ (2).
Khi đó (2) $\Leftrightarrow a - 2024 \leq -6a + 27 \Leftrightarrow 7a \leq 2051 \Leftrightarrow a \leq 293$ (3).
Từ (2) và (3) suy ra $5 < a \leq 293$ mà $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{6; \ldots; 293\}$.
Có $293 - 6 + 1 = 288$ giá trị a.
Vậy có tất cả $288 + 72 = 360$ giá trị nguyên của a thoả đề.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1 - \dfrac{1}{9}\right| = |z_1 - z_2|$. Giả sử $|z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $cw^2 + bw + a = 0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3 - w$ là số thuần ảo và $|z_3| \leq |w|$?

(A) 23. (B) 22. (C) 11. (D) 12.

Lời giải.

Gọi $z_1 = x + yi; z_2 = x - yi,\ \forall x; y \in \mathbb{R} \Rightarrow \left|2z_1 - \dfrac{1}{9}\right| = |z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z_1}| \Leftrightarrow \left(2x - \dfrac{1}{9}\right)^2 + 4y^2 = 4y^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{18}$.

Mặt khác $\begin{cases} az^2 + bz + c = 0 \\ cw^2 + bw + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \dfrac{1}{z} \\ |w| = \dfrac{1}{|z|} = \sqrt{k} \end{cases}$.

Ta có $z_1 = \dfrac{1}{18} + yi$, suy ra $z_1\overline{z_1} = \dfrac{1}{k} = y^2 + \dfrac{1}{324}$, $w = \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = k\left(\dfrac{1}{18} - yi\right)$.

Gọi $z_3 = m + ni\ (n \in \mathbb{Z}), k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow Re(z_3 - w) = 0; |z_3| \le |w| = \sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 \le k \\ m = \dfrac{1}{18}k \end{cases} \Rightarrow n^2 \le$ $k - \dfrac{k^2}{324}. \Rightarrow f(k) = k - \dfrac{k^2}{324}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow$ 9 số phức $z_3 \Rightarrow 16 \le f(k) < 25 \Leftrightarrow \begin{cases} f(k) \ge 16 \\ f(k) < 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - \dfrac{k^2}{324} \ge 16 \\ k - \dfrac{k^2}{324} < 25 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{17; \ldots .27; 297; \ldots; 307\}$.

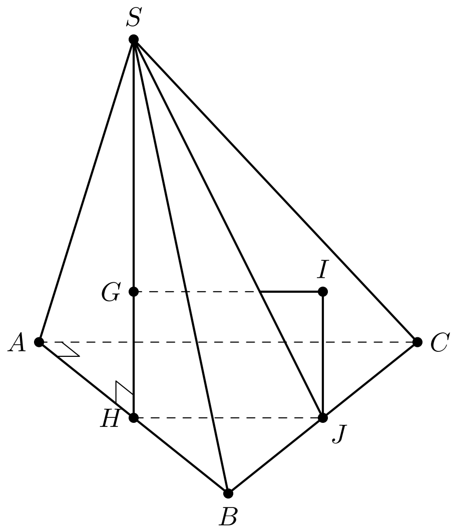
Vậy có 22 số nguyên dương k.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{25\pi}{9}a^2$. (B) $\dfrac{25\pi}{3}a^2$. (C) $\dfrac{28\pi}{3}a^2$. (D) $\dfrac{28\pi}{9}a^2$.

Lời giải.



$\triangle ABC$ vuông tại $A, AB = 2a$ nên $BC = 2a\sqrt{2}$.

Gọi G là tâm tam giác đều SAB và H, J lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Ta có $GH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ đường thẳng $Gx \parallel HJ$, $Jy \parallel SH$.

Do mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp AB$ và vì vậy $SH \perp (ABC)$.

Mà $\triangle ABC$ vuông tại A nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy nên Jy là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Hoàn toàn tương tự, Gx là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Trong mặt phẳng qua H, vuông góc với AB hai đường thẳng Gx và Jy cắt nhau tại I.

Dễ dàng có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng: $R = \sqrt{JI^2 + JB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

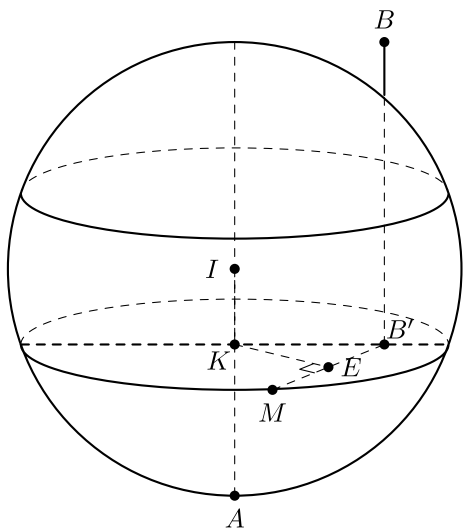
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng $S_{mc} = 4\pi R^2 = \dfrac{28\pi}{3}a^2$.

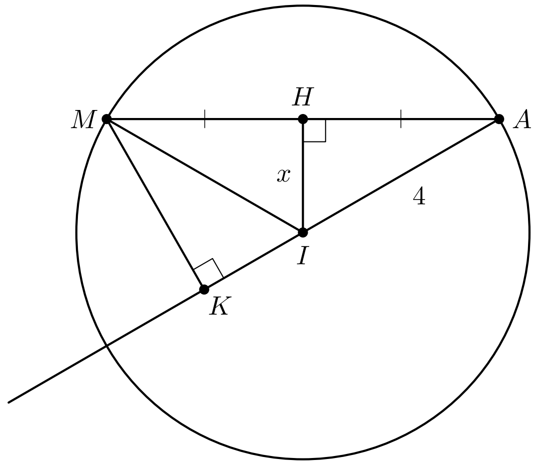
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ $(c>0)$ thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AI lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **D** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải.





Ta có: $\overrightarrow{IA}=(0;4;0)\Rightarrow IA=4$.
Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A nên bán kính của (S) là $R=IA=4$.
Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
Nhận thấy $B(2;-4;-1)$ nằm ngoài (S).
Gọi H là trung điểm MA suy ra $IH\perp MA$. Đặt $IH=x$ $(0<x<4)$.
Diện tích tam giác IAM bằng $2\sqrt{7}$, suy ra: $\dfrac{1}{2}IH\cdot MA=2\sqrt{7}\Rightarrow\dfrac{1}{2}IH\cdot 2\cdot HA=2\sqrt{7}\Rightarrow IH\cdot HA=2\sqrt{7}$

$$\Rightarrow x\sqrt{16-x^2}=2\sqrt{7}\Rightarrow x^4-16x^2+28=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=14\\x^2=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{14}\\x=\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

+ Với $x=\sqrt{14}\Rightarrow HA=\sqrt{2}\Rightarrow MA=2\sqrt{2}<IA$ (loại do tam giác IAM tù).

+ Với $x=\sqrt{2}\Rightarrow HA=\sqrt{14}\Rightarrow MA=2\sqrt{14}>IA$ (thỏa mãn).

Gọi K là hình chiếu của M lên IA.
Ta có: $\sin\widehat{IAH}=\dfrac{IH}{IA}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sin\widehat{KAM}=\dfrac{MK}{AM}=\dfrac{MK}{2\sqrt{14}}\Rightarrow MK=\sqrt{7}$.
Ta có điểm A, I cố định, điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) sao cho $MK=\sqrt{7}$, suy ra M thuộc mặt trụ (T) trục là AI, bán kính $MK=\sqrt{7}$.
Vậy M thuộc giao tuyến của mặt trụ (T) và mặt cầu (S) là đường tròn (C) tâm K, bán kính $MK=\sqrt{7}$.
Ta có: $AK=\sqrt{AM^2-MK^2}=7\Rightarrow IK=3\Rightarrow\overrightarrow{IK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AI}\Rightarrow K(1;-1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (C), suy ra (P) đi qua $K(1;-1;-1)$ và nhận $\vec{n}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}=(0;1;0)$ làm VTPT.
Phương trình mặt phẳng (P): $y+1=0$.
Gọi B' là hình chiếu của B lên (P), suy ra $B'(2;-1;-1)$, $KB'=1<\sqrt{7}=MK\Rightarrow B'$ nằm trong (C).

Ta có: $\overrightarrow{KB'} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{B'M} = (a-2;b+1;c+1)$.
Khi đó: $d(IA;BM) = KE \leq KB' = 1 \Rightarrow d(IA;BM)_{\max} = 1 \Leftrightarrow KB' \perp B'M \Rightarrow \overrightarrow{KB'}.\overrightarrow{B'M} = 0 \Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$.
Lại có: $M(a;b;c) \in (P) \Rightarrow b+1=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow M(2;-1;c)$.

Mà $MK = \sqrt{7} \Leftrightarrow 1^2+0^2+(c+1)^2 = 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=\sqrt{6}-1 \text{ (thỏa mãn)} \\ c=-\sqrt{6}-1 \text{ (loại do } c>0) \end{array}\right.$.

Vậy $a+b+c = 2-1+\sqrt{6}-1 = \sqrt{6} \approx 2,45 \in \left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=5$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

(A) 9. (B) 89. (C) 10. (D) 90.

Lời giải.

Do hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$ nên ta có bảng biến thiên của các hàm số $f'(x)$, $f(x)$ trên $(-1;+\infty)$ như sau:

x	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$	a ↗	0 ↗	$+\infty$
$f(x)$	-5 ↘	$f(-4)$ ↗	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = f(x) + \dfrac{5}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.
Ta có $h'(x) = f'(x) - \dfrac{10}{x^3} = 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{10}{x^3}$ (1).
Xét hàm số $g(x) = \dfrac{10}{x^3}$. Ta có: $g'(x) = \dfrac{-30}{x^4} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Bảng biến thiên:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	-10 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Dễ thấy rằng $g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\alpha$ trên $(4;+\infty)$.
Bảng biến thiên hàm số $h(x)$ trên $(0;+\infty)$:

x	0		a		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác $h(\alpha) = f(\alpha) + \dfrac{5}{\alpha^2} < -5 + \dfrac{5}{\alpha^2} < 0$ do $\alpha > 4$.

Khi đó hàm số $h(x) = f(x) + \dfrac{5}{x^2}$ có một điểm cực trị và hai nghiệm phân biệt trên $(0; +\infty)$.

Nên để hàm số $y = \left|f(x) + \dfrac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; +\infty)$ thì hàm số $h(x) = f(x) + \dfrac{5}{x^2}$ không có nghiệm hoặc điểm cực trị trên $(-1; 0)$ hay $a \geq -10$.

Mà a là số nguyên và $a \in (-100; 0)$ nên $a \in \{-10; -9; \ldots; -1\}$.

Chọn đáp án C □

— HẾT —

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 49

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024
Môn: Toán
Năm học: 2023 – 2024
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức $2z$ bằng

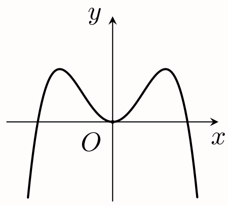
A. $2 + 4i$. B. $-3 + 4i$. C. $3 + 4i$. D. $3 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 + 2i \Rightarrow 2z = 2(1 + 2i) = 2 + 4i$.

Chọn đáp án A

Câu 2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên?



A. $y = 2x^3 + x^2$. B. $y = x^2 - 2x$.

C. $y = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy là hình dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a < 0$.
Nên chọn $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn đáp án D

Câu 3. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 5i$ có tọa độ là

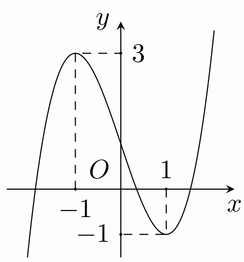
A. $(3; -5)$. B. $(5; -3)$. C. $(5; 3)$. D. $(3; 5)$.

Lời giải.

Ta có điểm biểu diễn số phức $z = 3 + 5i$ là $M(3; 5)$.

Chọn đáp án D

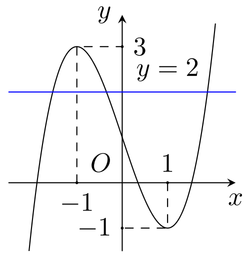
Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là



A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Xét phương trình $f(x) = 2$.
Ta kẻ đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.
Do đó phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm thực.



Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho số phức $z = 2024 - 2i$. Số phức liên hợp của z là

(A) $2 + 2024i$. (B) $2024 + 2i$. (C) $-2 + 2024i$. (D) $-2024 + 2i$.

Lời giải.

Ta có số phức liên hợp của $z = 2024 - 2i$ là $\overline{z} = 2024 + 2i$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho khối nón có diện tích đáy $B = 8$ và chiều cao $h = 9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 24. (B) 216. (C) 192. (D) 72.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 9 = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(1; -2; 1)$. (B) $(2; -4; 2)$. (C) $(-2; 4; -2)$. (D) $(-1; 2; -1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$ là $I\,(1; -2; 1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V = 36a^3$ và diện tích đáy $B = 4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $27a$. (B) $3a$. (C) $9a$. (D) $6a$.

Lời giải.

Ta có $V = 36a^3 \Leftrightarrow Bh = 36a^3 \Leftrightarrow 4a^2h = 36a^3 \Rightarrow h = 9a$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 5)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-\infty; 2)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
Chọn đáp án (C) □

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

Ⓐ Điểm $N\,(2;5;-1)$.
Ⓑ Điểm $P\,(-2;-5;1)$.
Ⓒ Điểm $M\,(-1;2;3)$.
Ⓓ Điểm $Q\,(1;3;2)$.

Lời giải.

Điểm thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ là $(2;5;-1)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$ là

Ⓐ $(-\infty;+\infty)$.
Ⓑ $(1;+\infty)$.
Ⓒ $(-\infty;1)$.
Ⓓ $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.
Vậy tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 2.
Ⓑ -1.
Ⓒ 1.
Ⓓ -2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Nếu $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ thì $\displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$.
Ⓑ -2.
Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$.
Ⓓ 2.

Lời giải.

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-2 \Rightarrow \int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

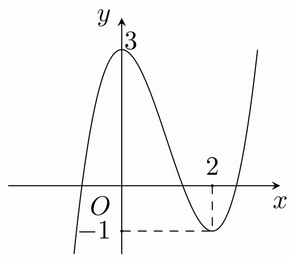
Câu 14. Với a, b là các số thực dương tuỳ ý, $\log_2(ab)$ bằng

Ⓐ $\log_2 a\cdot\log_2 b$.
Ⓑ $\log_2 a-\log_2 b$.
Ⓒ $\log_2 a+\log_2 b$.
Ⓓ $b\log_2 a$.

Lời giải.

Với $a>0$, $b>0$, ta có $\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A $x = 2$. **B** $x = 3$. **C** $x = -1$. **D** $x = 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có điểm trị cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = 4^x$ là

A $y' = \dfrac{4^{x+1}}{x+1}$. **B** $y' = \dfrac{4^x}{\ln x}$. **C** $y' = x \cdot 4^{x-1}$. **D** $y' = 4^x \ln 4$.

Lời giải.

$y = 4^x \Rightarrow y' = 4^x \ln 4$.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

A 55. **B** 110. **C** 30. **D** 11.

Lời giải.

Số cách chọn một bạn nam để hát song ca là 6 (cách).
Ứng với mỗi một cách chọn bạn nam ta có 5 cách chọn bạn nữ để hát song ca.
Áp dụng quy tắc nhân ta có số cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau là $6 \cdot 5 = 30$ (cách).
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ công sai $d = 6$. Giá trị của u_2 bằng

A 18. **B** 3. **C** 9. **D** -3.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ công sai $d = 6 \Rightarrow u_2 = u_1 + d \Rightarrow u_2 = 9$.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(3; -2; 0)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A $(4; 0; -4)$. **B** $(2; -4; 4)$. **C** $(2; 0; -2)$. **D** $(-2; 4; -4)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (2; -4; 4)$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) 30π. (B) 20π. (C) 15π. (D) 9π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow S_{xq} = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{5^{x+1}}{\ln 5} + C$.
(B) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$.
(C) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$.
(D) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x = 5^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1$ là

(A) $(1; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1 \Leftrightarrow x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$.
Vậy nghiệm của bất phương trình $S = (-1; 1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

(A) Điểm $P(2; 0; 5)$.
(B) Điểm $Q(0; 3; 1)$.
(C) Điểm $N(-1; 0; 5)$.
(D) Điểm $M(2; 3; 0)$.

Lời giải.

Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) là điểm $M(2; 3; 0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2) = -5$, $f(3) = 7$. Giá trị của $\displaystyle\int_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -35. (B) -12. (C) 12. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(3) - f(-2) = 12$.
Chọn đáp án (C) □

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

Câu 25. Nghiệm của phương trình $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}$ là

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=2$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow 2x+1=-3\Leftrightarrow x=-2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 26. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. Ⓑ $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

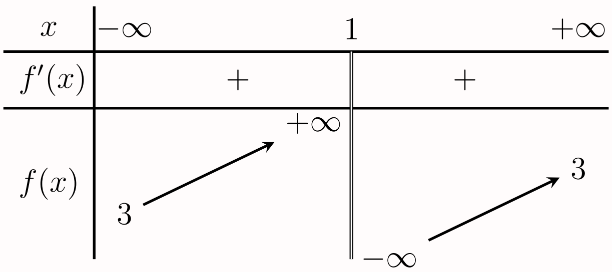
Ⓒ $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$. Ⓓ $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-2\cos 2x+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $y=3$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là $x=1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28. Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ 24. Ⓑ 12. Ⓒ 6. Ⓓ 18.

Lời giải.

$V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\cdot 3\cdot 6=6$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-2)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-2;2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Hàm số đồng biến khi $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}>0\Rightarrow x>0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng d nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;2;-1)$ và đi qua $M(1;-2;1)$ có phương trình $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $z \cdot \overline{z} = 4$. Môđun của z bằng

Ⓐ $2\sqrt{2}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = 4 \Rightarrow |z| = 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 32. Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} a$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{1+\log_a b}$. Ⓑ $1-\log_b a$. Ⓒ $\dfrac{1}{\log_b a}$. Ⓓ $1+\log_a b$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{ab} a = \dfrac{1}{\log_a (ab)} = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a b} = \dfrac{1}{1+\log_a b}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

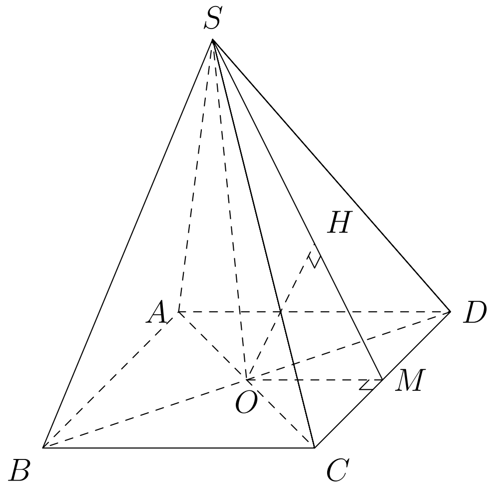
Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của CD. Ta có

$$\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp CD \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM).$$

Gọi H là hình chiếu của O lên SM thì $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$ tại H.



Do đó $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O,(SCD)\right) = 2OH$.

Ta lại có $\begin{cases} OM = \dfrac{1}{2}AB = a \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}. \end{cases}$

Xét tam giác SOM vuông tại O ta có

$$OH = \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A $\dfrac{5}{7}$. B $\dfrac{75}{91}$. C $\dfrac{149}{182}$. D $\dfrac{55}{91}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^{3} = 364$.
Gọi A là biến cố "3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác".
Xét 13 điểm nằm trên hai tia Ox, Oy không tính điểm O.

TH 1. Tam giác có 2 đỉnh thuộc Ox và 1 đỉnh thuộc Oy có $\mathrm{C}_5^2 \cdot 8 = 80$.

TH 2. Tam giác có 2 đỉnh thuộc Oy và 1 đỉnh thuộc Ox có $\mathrm{C}_8^2 \cdot 5 = 140$.

Xét tam giác có 1 đỉnh là O, 1 đỉnh thuộc Oy, 1 đỉnh thuộc Ox có $1 \cdot 5 \cdot 8 = 40$.
Vậy $n(A) = 260$.
Nên $P(A) = \dfrac{260}{364} = \dfrac{5}{7}$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 24 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t) = -4t + 24$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A 42 (m). B 64 (m). C 72 (m). D 50 (m).

Lời giải.

Khi xe dừng hẳn ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -4t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ (s).

Ta có quãng đường ô tô đi được là $s(t) = \displaystyle\int_0^6 (-4t + 24)\,\mathrm{d}t = 72$ (m).

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M(3;1;-1)$, $N(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-1=0$ có phương trình là

(A) $2x-11y-5z=0$.
(B) $x-13y-5z+5=0$.
(C) $x-13y-5z-5=0$.
(D) $x+2y+z-4=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm có cặp véc-tơ chỉ phương $\begin{cases}\vec{u}=(2;-1;3)\\ \overrightarrow{MN}=(-1;-2;5)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(1;-13;-5)$.

Phương trình mặt phẳng là $1\cdot(x-3)-13\cdot(y-1)-5\cdot(z+1)=0 \Leftrightarrow x-13y-5z+5=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

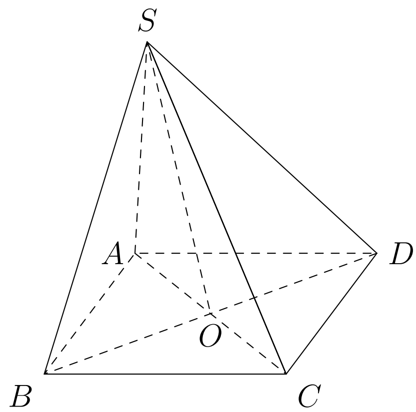
(A) 45°.
(B) 30°.
(C) 60°.
(D) 90°.

Lời giải.

Ta có $OA=\dfrac{BD}{2}=a$.

$\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ BD\perp OA\\ BD\perp SO\end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD))=\widehat{SOA}$.

Xét $\triangle SOA$ ta có $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{OA}=1\Rightarrow \widehat{SOA}=45^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=6x^3-21x^2+20x+1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

(A) $\dfrac{34}{9}$.
(B) 6.
(C) $\dfrac{61}{9}$.
(D) 129.

Lời giải.

Ta có $f(x)=6x^3-21x^2+20x+1$.

$f'(x)=18x^2-42x+20$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 18x^2-42x+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{3}\\ x=\dfrac{2}{3}\notin[1;4].\end{array}\right.$

Có $f(1)=6$; $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{34}{9}$; $f(4)=129$.

Vậy $\min\limits_{[1;4]} f(x)=\dfrac{34}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 7 số nguyên b thỏa mãn $2^{b^2}<8^{-b}\cdot a^{b+3}$?

(A) 32. (B) 16. (C) 15. (D) 31.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{b^2} < 8^{-b} \cdot a^{b+3} &\Leftrightarrow 2^{b^2+3b} < a^{b+3} \\ &\Leftrightarrow b^2 + 3b < (b+3)\log_2 a \\ &\Leftrightarrow (b+3)\left(b - \log_2 a\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow -3 < b < \log_2 a \left(\text{vì } \log_2 a > 0\right). \end{aligned}$$

Để có không quá 7 số nguyên b thì $\log_2 a \le 5 \Leftrightarrow 1 < a \le 32$.
Mà a là số nguyên lớn hơn 1 nên $a \in \{2; 3; 4; ...32\}$.
Có 31 số nguyên thõa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -\dfrac{7}{2}$, $x = -1$, $x = \dfrac{3}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) \ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 0]$ khi và chỉ khi

(A) $m \le f(-1)$. (B) $f(-1) \le m \le f(0)$.
(C) $m \le f(0)$. (D) $m \le f(-3)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \ne 0)$. Vì $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Rightarrow a < 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4a\left(x + \dfrac{7}{2}\right)(x+1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 4ax^3 + 12ax^2 - 13ax - 21a$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} b = 4a \\ c = -\dfrac{13}{2}a \\ d = -21a \\ a < 0 \end{cases}$. Chọn $a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x^4 - 8x^3 + 13a^2 + 42x + e$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	-3	-1	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		0		0		0	
y	$-\infty$ ↗	$\frac{441}{8}+e$ ↘	$45+e$ ↘	$-23+e$ ↗	e ↗	$\frac{441}{8}+e$ ↘	$-\infty$

Xét trên đoạn $[-3; 0]$, để bất phương trình $m \le f(x)$ có nghiệm thì $m \le 45 + e = f(-3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)f(x)\mathrm{d}x = a\pi\sqrt{3} + b\sqrt{3} + c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ, giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. (B) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. (C) $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. (D) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có
$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(\tan^3 x + \tan x\right)\mathrm{d}x = \int \tan x\left(\tan^2 x + 1\right)\mathrm{d}x = \int \tan x\,\mathrm{d}\left(\tan x\right) = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$$

Khi $x = 0$, ta có $f(0) = \frac{\tan^2 0}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Do đó $f(x) = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\tan^2 x + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

Theo đề bài $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\,f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(x+1)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+1) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ v = \tan x. \end{cases}$

Suy ra
$$I = \left(\frac{1}{2}(x+1)\tan x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\tan x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\tan\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+1\right)\tan\frac{\pi}{6} + \left(\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{36}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{5}{36}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\ln 3.$$

Nên $a = \frac{5}{36}$, $b = \frac{1}{3}$ và $c = -\frac{1}{4}$.

Khi đó $a + b + c = \frac{2}{9} \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$, giá trị của $\int\limits_0^{x_2} (x+2)f''(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{7}{2};2\right)$. Ⓒ $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

$= 3a\left(x-x_1\right)\left(x+x_1\right)$

$= 3a\left(x^2-x_1^2\right)$

$\Rightarrow f'(0) < 0$.

Suy ra $f'(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f'(x) = f'\left(-x\right)$.

Ta có $f''(x) = 6ax$.

Xét $f'(x)\cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_2 \\ x = -x_2. \end{array}\right.$

Suy ra $\int\limits_{x_1}^{x_2} \left|f'(x)f''(x)\right|\mathrm{d}x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left|\int\limits_{x_1}^{0} f'(x)f''(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{0}^{x_2} f'(x)f''(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{9}{16}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\left[f'(x)\right]^2\Big|_{x_1}^{0}\right| + \left|\frac{1}{2}\left[f'(x)\right]^2\Big|_{0}^{x_2}\right| = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\left[f'(0)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[f'\left(x_1\right)\right]^2\right| + \left|\frac{1}{2}\left[f'\left(x_2\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[f'(0)\right]^2\right| = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left|\left[f'(0)\right]^2\right| = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = -\frac{3}{4}.$$

Xét $I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Ta có $I = -\int\limits_{x_2}^{-x_2} \frac{f'\left(-t\right)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^{-x}+1}\mathrm{d}x = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{2^x f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$ (vì $f'(x)$ là hàm chẵn).

Suy ra $\int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x + \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{2^x f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = -5 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_2} f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}$.

Xét $I_1 = \int\limits_{0}^{x_2} \left(x+2\right)f''(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = x+2 \\ \mathrm{d}v = f''(x)\mathrm{d}x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}u = \mathrm{d}v \\ v = f'(x). \end{array}\right.$

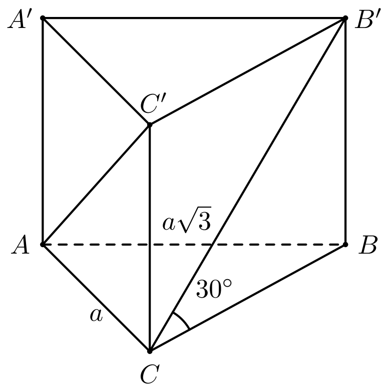
$$I_1 = (x+2)f'(x)\Big|_0^{x_2} - \int\limits_0^{x_2} f'(x)\mathrm{d}x = \left(x_2+2\right)f'\left(x_2\right) - 2f'(0) - \left(-\frac{5}{2}\right) = -2\left(\frac{-3}{4}\right) + \frac{5}{2} = 4.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = \sqrt{3}a$ và $AC = a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. B $\sqrt{3}a^3$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^3$.

Lời giải.



- Thể tích của khối lăng trụ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB'$.
- Tam giác ABC vuông tại C nên $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.
  Diện tích $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
- Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc giữa $B'C$ và $BC \Rightarrow \widehat{B'CB} = 30^\circ$.
- Ta có $BB' = BC \cdot \tan \widehat{B'CB} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1 - \dfrac{1}{7}\right| = |z_1 - z_2|$. Giả sử $|z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2 + bw + a = 0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3 - w$ là số thuần ảo và $|z_3| \leq |w|$?

A 11. B 5. C 6. D 10.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\left|2z_1 - \dfrac{1}{7}\right| = |z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z}_1| \Leftrightarrow \left|2z_1 - \dfrac{1}{7}\right|^2 = |z_1 - \overline{z}_1|^2$.

Đặt $z_1 = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, thay vào biểu thức trên ta được

$$\left(2x - \frac{1}{7}\right)^2 + 4y^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{14} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{14} \pm yi, (y \in \mathbb{R}).$$

Bài toán phụ: Nếu phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 thì khi đó phương trình $cz^2 + bz + a = 0$ có 2 nghiệm là $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}$.

Áp dụng: Phương trình $az^2+bz+c=0$ có 2 nghiệm z_1,z_2 thì phương trình $cw^2+bw+a=0$ có nghiệm $w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow |w|=\dfrac{1}{|z|}=\sqrt{k}\Rightarrow |w|^2=\dfrac{1}{|z|^2}=k$.

Mà $z_1=\dfrac{1}{14}+yi,(y\in\mathbb{R})$ nên ta suy ra $w=\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{\overline{z}_1}{z_1\cdot\overline{z}_1}=\dfrac{\overline{z}_1}{|z_1|^2}=\dfrac{1}{|z_1|^2}\cdot\overline{z}_1=k\overline{z}_1=k\left(\dfrac{1}{14}-yi\right)$ với k là số nguyên dương.

Mặt khác, đặt $z_3=m+ni$, $(m\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$.

Do z_3-w là số thuần ảo, nên $\operatorname{Re}(z_3-w)=0$ hay $m=\dfrac{k}{14}$.

Theo giả thiết: $|z_3|\le|w|\Leftrightarrow|z_3|^2\le|w|^2=k$,

nên ta có: $m^2+n^2=\dfrac{k^2}{196}+n^2\le k\Rightarrow n^2\le k-\dfrac{k^2}{196}=f(k)$.

Do có đúng 5 số phức z_3, nghĩa là tồn tại đúng 5 giá trị $n\in\mathbb{Z}$ lần lượt là $\{-2;-1;0;1;2\}$ nên $n^2\in[4;9)$, suy ra $f(k)\in[4;9)$ hay $4\le k-\dfrac{k^2}{196}<9$.

Sử dụng máy tính CASIO ta tìm được $\begin{cases}4{,}09<k<191{,}91\\ \left[\begin{array}{l}k<9{,}45\\k>186{,}54\end{array}\right.\end{cases}$; mà $k\in\mathbb{N}^*$ nên: $\left[\begin{array}{l}5\le k\le 9\\187\le k\le 191\end{array}\right.$ hay $k\in\{5;6;7;8;9;187;188;189;190;191\}$, tức là có 10 giá trị k nguyên dương thỏa mãn đầu bài.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z=0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

B. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+t\\y=3+5t\\z=1-t.\end{cases}$

Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của Δ và (P).

$$\begin{cases}x=1+t\\y=3+5t\\z=1-t\\2x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\\z=2\\t=-1\end{cases}\Rightarrow (P)\cap\Delta=A(0;-2;2).$$

Lấy điểm $M(1;3;1)\in\Delta$, gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) suy ra d có phương trình tham số là $d\colon\begin{cases}x=1+2t_1\\y=3+t_1\\z=1+t_1.\end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) thì $H=d\cap(P)$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t_1\\y=3+t_1\\z=1+t_1\\2x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=0\\t_1=-1\end{cases}\Rightarrow H(-1;2;0)$.

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua (P) nên H là trung điểm của $MM'\Rightarrow M'(-3;1;-1)$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM'}=(-3;3;-3)=-3(1;-1;1).$$

Đường thẳng Δ' có một phương trình tham số là $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

- Đường thẳng $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ đi qua điểm $(-4; 2; -2)$.
  Ta có $\begin{cases} -4 = -3 + t \\ 2 = 1 - t \\ -2 = -1 + t \end{cases} \Rightarrow t = -1$ (thoả mãn)
- Đường thẳng $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ đi qua điểm $(-2; -2; 2)$.
  Ta có $\begin{cases} -2 = -2 + t \\ -2 = 2 - t \\ 2 = -1 + t \end{cases} \Rightarrow t \in \varnothing$ (không thoả)
- Đường thẳng $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ khác vec-tơ chỉ phương.
- Đường thẳng $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ khác vec-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 7i| + |z + 1 + 7i| = 14$ và $|z - 1 - i| = m$?

A 3. B 2. C 5. D 4.

Lời giải.

Gọi $M(z)$ và $A(-1; 7)$, $B(-1; -7) \Rightarrow AB = 14$.
Ta có $|z + 1 - 7i| + |z + 1 + 7i| = 14 \Leftrightarrow MA + MB = 14 = AB$, suy ra $M(z)$ thuộc đoạn AB.
Mặt khác $|z - 1 - i| = m$.

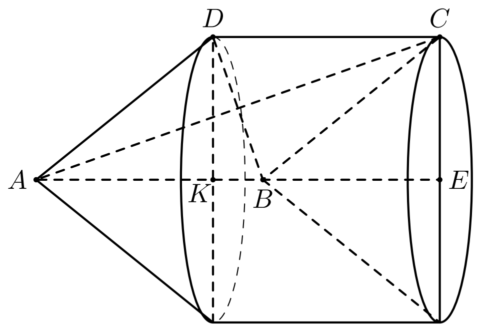
- Nếu $m = 0 \Leftrightarrow z = 1 + i$ (không thỏa)
- Với $m > 0$ thì $M(z)$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = m$.
  Ta có phương trình đoạn AB: $x + 1 = 0$, với $-7 \le y \le 7$; $IA = 2\sqrt{10}$, $IB = 2\sqrt{17}$.
  Để tồn tại đúng hai số phức z thì đoạn AB và đường tròn (C) có 2 điểm chung
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}(I, AB) < R \\ R \le IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m \\ m \le 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 2\sqrt{10}.$$
  Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 6$ và $BD = 4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

A $\dfrac{8704\pi}{81}$. B $\dfrac{256\pi}{3}$. C $\dfrac{64\pi}{3}$. D $\dfrac{2368\pi}{27}$.

Lời giải.



Ta có $S_{\triangle ABD} = 8\sqrt{2}$.

Gọi E, K lần lượt là hình chiếu của C, D lên $AB \Rightarrow CE = DK = \dfrac{2S_{\triangle ABD}}{AB} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.
Do hai khối nón đỉnh A, đáy là đường tròn bán kính DK và khối nón đỉnh B đáy là đường tròn bán kính CE có thể tích bằng nhau nên thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

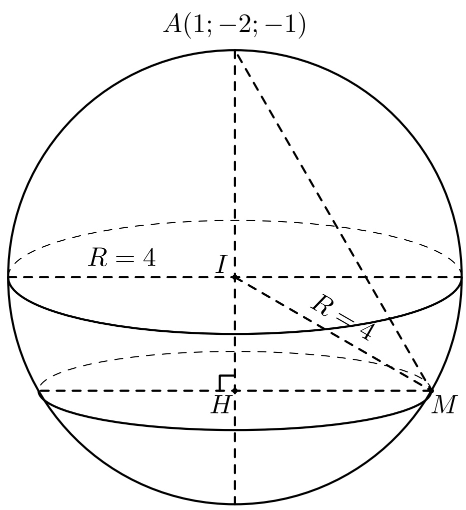
$$V = \pi \cdot DK^2 \cdot CD = \frac{256\pi}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(8;\dfrac{17}{2}\right)$. (B) $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. (C) $(17;9)$. (D) $\left(5;\dfrac{7}{2}\right)$.

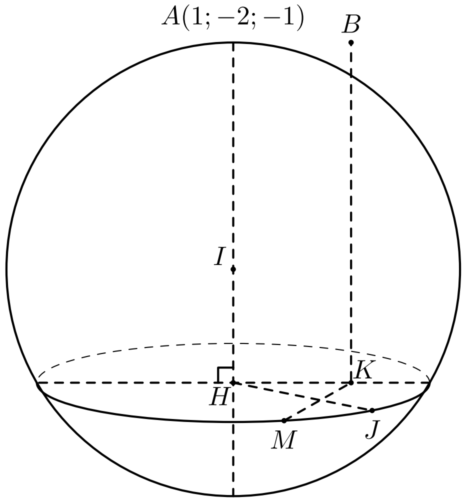
Lời giải.



Mặt cầu có tâm I bán kính $R=4$; $S_{AIM} = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin\widehat{AIM} = 2\sqrt{7} \Rightarrow \sin\widehat{AIM} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
Gọi H là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AI.
Ta có $\sin\widehat{HIM} = \sin\left(180^\circ - \widehat{AIM}\right) \Rightarrow HM = \sqrt{7}$.

$$\overrightarrow{IH} = \frac{IH}{IA}\overrightarrow{AI} \Rightarrow H(1;5;-1).$$

Vậy M thuộc giao tuyến (C) của mặt phẳng (P) đi qua H vuông góc với AI và mặt cầu (S).



Mặt phẳng $(P)\colon y-5=0$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow K(2;5;-1)$.
K nằm trong đường tròn giao tuyến, suy ra $\mathrm{d}\,(IA, BM) \leq HK = 1$.

Khoảng cách $\mathrm{d}\,(IA, BM)_{\max} = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} HK \perp KM \\ M \in \left(H;\sqrt{7}\right) \end{cases}.$

Suy ra $M\left(2;5;-1+\sqrt{6}\right)$.
Vậy $a+b+c = 6+\sqrt{6}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-6$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

(A) 88. (B) 12. (C) 11. (D) 87.

Lời giải.

Do $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba, đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$ nên ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
f'				$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↘	-6	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Xét $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}$, $g'(x)=f'(x)-\dfrac{12}{x^3}$, xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Với $g(-1)=f(-1)+6=0$ và $g(4)=f(4)+\dfrac{3}{8} < -6+\dfrac{3}{8} = -\dfrac{45}{8}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$.

nên $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0.

Vậy hàm số $y = \left|f(x) + \dfrac{6}{x^2}\right|$ có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0; +\infty)$.
Suy ra, để hàm $y = \left|f(x) + \dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; +\infty)$ thì $g(x) = f(x) + \dfrac{6}{x^2}$ không có cực trị trong khoảng $(-1; 0)$, suy ra $g'(x) = f'(x) - \dfrac{12}{x^3}$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.
Vậy $f'(x)$ không cắt $h(x) = \dfrac{12}{x^3}$ trong khoảng $(-1; 0)$
Suy ra $f'(-1) = a \geq h(-1) = \dfrac{12}{(-1)^3} = -12$.
Kết hợp với điều kiện, ta có $a \in [-12; 0)$.
Như vậy có 12 giá trị nguyên của a.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \ln\dfrac{x+2}{x-2}$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-\infty; 2100)$ thỏa mãn $f(a-2023) + f(5a-29) \geq 0$?

A. 1758. B. 2093. C. 336. D. 410.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x+2}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) = \mathscr{D}$.

Ta có $f(-x) = \dfrac{5}{(-x)^3} + \ln\dfrac{-x+2}{-x-2} = -\dfrac{5}{x^3} - \ln\dfrac{x+2}{x-2} = -\left(\dfrac{5}{x^3} + \ln\dfrac{x+2}{x-2}\right) = -f(x), \forall x \in \mathscr{D}$
Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định $\mathscr{D}$.
Ta có $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \ln\dfrac{x+2}{x-2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{15}{x^4} - \dfrac{4}{x^2-4} < 0$ với $\forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.
Và $f(x) < 0, \forall x < -2$; $f(x) > 0, \forall x > 2$.
Khi đó $f(a-2023) + f(5a-29) \geq 0 \Leftrightarrow f(a-2023) \geq -f(5a-29)$
$\Leftrightarrow f(a-2023) \geq f(-5a+29)$ $(*)$.

- **Trường hợp 1.** $\begin{cases} a - 2023 < -2 \\ -5a + 29 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{31}{5} < a < 2025$.
  Khi đó $(*) \Leftrightarrow a - 2023 \leq -5a + 29 \Leftrightarrow a \leq 342$.
  Do đó, $\dfrac{31}{5} < a \leq 342$.
  Mà a nguyên, $a \in (-\infty; 2100) \Rightarrow a \in \{7; 8; 9; \ldots; 342\}$.

- **Trường hợp 2.**
  $\begin{cases} a - 2023 > 2 \\ -5a + 29 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2025 \\ a < \dfrac{27}{5} \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm.

- **Trường hợp 3.**
  $a - 2023$ và $-5a + 29$ mỗi số thuộc 1 tập $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.
  Do $f(x) < 0, \forall x < -2$; $f(x) > 0, \forall x > 2$
  nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2023 > 2 \\ -5a + 29 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2025 \\ a > \dfrac{31}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a > 2025$.
  Mà a nguyên, $a \in (-\infty; 2100) \Rightarrow a \in \{2026; 2027; 2028; \ldots; 2099\}$.

Vậy có 410 số nguyên a thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án D □

—— HẾT ——

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 50

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024
Môn: Toán
Năm học: 2023 – 2024
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
Chọn đáp án D

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1$ là

A. $(-2; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
& \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1 \\
\Leftrightarrow\ & x + 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & x + 2 < 2 \\
\Leftrightarrow\ & x < 0.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, ta được $-2 < x < 0$.
Vậy tập nghiệm là $(-2; 0)$.
Chọn đáp án C

Câu 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

A. $x = \dfrac{4}{3}$. B. $y = \dfrac{4}{3}$. C. $x = -\dfrac{2}{3}$. D. $y = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{2}{3}\right)^+} \dfrac{4x-1}{3x+2} = -\infty$.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là $x = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

(A) 36. (B) 720. (C) 1. (D) 6.

Lời giải.

Số cách xếp 6 người thành một hàng ngang là $6! = 720$ (cách).

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V = 3a^3$ và diện tích đáy $B = a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

(A) $3a$. (B) $6a$. (C) $9a$. (D) a.

Lời giải.

Thể tích khối chóp có công thức $V = \dfrac{1}{3}Bh \Rightarrow h = \dfrac{3V}{B} = \dfrac{3 \cdot 3a^3}{a^2} = 9a$ (đvđd).

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Nếu $\displaystyle\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx = -1$ và $\displaystyle\int\limits_{1}^{7} f(x)\,dx = -5$ thì $\displaystyle\int\limits_{-2}^{7} f(x)\,dx$ bằng

(A) -6. (B) 5. (C) -4. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{-2}^{7} f(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{7} f(x)\,dx = (-1) + (-5) = -6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;3;-1)$ và $\vec{b} = (-3;2;-4)$. Vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

(A) $(1;-5;5)$. (B) $(-5;-1;-3)$. (C) $(-1;-5;5)$. (D) $(-1;5;-5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (2-3; 3+2; -1-4) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (-1;5;-5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Số phức $z = i + i^2 + i^3$ bằng

(A) 1. (B) i. (C) $-1+2i$. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $i + i^2 + i^3 = i - 1 - i = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

(A) $y = \log_3 x$. (B) $y = x^{-4}$. (C) $y = x^{2024}$. (D) $y = 2024^x$.

Lời giải.

Hàm số mũ là $y = 2024^x$.

Chọn đáp án (D)

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(1;1;-1)$. (B) $(-1;-1;1)$. (C) $(2;-1;2)$. (D) $(4;-2;4)$.

Lời giải.

Mặt cầu nhận AB làm đường kính nên có tâm là trung điểm AB.

Khi đó, trung điểm AB có tọa độ là $(2;-1;2)$.

Suy ra, tâm mặt cầu là $(2;-1;2)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 11. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 5. (D) $\sqrt{34}$.

Lời giải.

Chiều cao của hình nón đã cho là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ (đvđd).

Chọn đáp án (A)

Câu 12. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = 2x^2 + 3x + C$.

(B) $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$.

(C) $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

(D) $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3x + C = x^2 + 3x + C$.

Chọn đáp án (D)

Câu 13. Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

(B) $f_4(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$.

(C) $f_1(x) = -\cos 2x$.

(D) $f_2(x) = \cos 2x$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ nên $f(x) = F'(x) = \cos 2x$.

Chọn đáp án (D)

Câu 14. Nghiệm của phương trình $2^{2x} = 2^{x+6}$ là

(A) $x = 2$. (B) $x = -2$. (C) $x = 6$. (D) $x = -6$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} = 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x = x + 6 \Leftrightarrow x = 6$.

Chọn đáp án (C)

Câu 15. Trên mặt phẳng toạ độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

(A) 2. (B) 5. (C) -5. (D) -2.

Lời giải.

Điểm $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=2-5i$.
Do đó phần thực của z bằng 2.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{7}}$ là

(A) $y'=\frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$. (B) $y'=\frac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$. (C) $y'=\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$. (D) $y'=x^{-\frac{6}{7}}$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $y'=\frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1}=\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=3$; $f(2)=1$. Giá trị của $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 4. (B) -2. (C) 2. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1)=1-3=-2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{\text{xq}}=36\pi$ và chiều cao $h=6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

(A) 9. (B) 3. (C) 6. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}}=2\pi rh \Leftrightarrow 36\pi=2\pi\cdot r\cdot 6 \Leftrightarrow r=3$ (đvđd).
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u}_4=(1;1;3)$. (B) $\vec{u}_2=(-1;2;0)$. (C) $\vec{u}_3=(1;-1;-3)$. (D) $\vec{u}_1=(1;2;0)$.

Lời giải.

Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_3=(1;-1;-3)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-2;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-2)$. Ⓓ $(2;4)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x+4$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

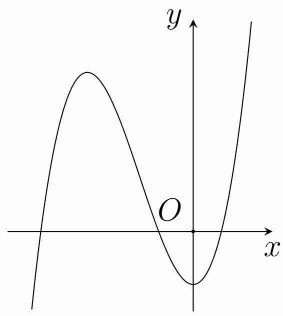
Dựa vào bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^2} b^2$ bằng
Ⓐ $\log_a b$. Ⓑ $\log_a b^4$. Ⓒ $(\log_a b)^2$. Ⓓ $\log_{a^4} b$.

Lời giải.

Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, ta có $\log_{a^2} b^2=\dfrac{2}{2}\log_a b=\log_a b$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?
Ⓐ $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$. Ⓑ $y=x^3+3x^2-1$.
Ⓒ $y=x^4-2x^2-4$. Ⓓ $y=-x^3+3x^2+3$.



Lời giải.

Đường cong trong hình đã cho là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số của x^3 dương.
Do đó, hàm số $y=x^3+3x^2-1$ thỏa mãn.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23. Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng
Ⓐ 6. Ⓑ 24. Ⓒ 18. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có thể tích khối lăng trụ là $V=B\cdot h=6\cdot 3=18$ (đvtt).
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?
Ⓐ $1,\ 2,\ 3,\ -4$. Ⓑ $1,\ 3,\ 5,\ 10$. Ⓒ $1,\ 0,\ 2,\ 4$. Ⓓ $1,\ 3,\ 5,\ 7$.

Lời giải.

Vì $1+2=3$; $3+2=5$; $5+2=7$ nên $1,\ 3,\ 5,\ 7$ là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;4;-2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

Ⓐ $x-3=0$. Ⓑ $y-4=0$.

Ⓒ $x+y+z-5=0$. Ⓓ $z+2=0$.

Lời giải.

Trục Oz có một vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua $M(3;4;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$ có phương trình $z+2=0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

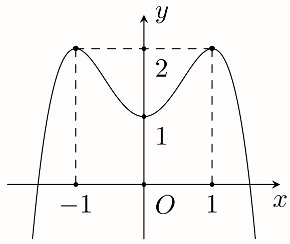
Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Chọn đáp án Ⓒ □

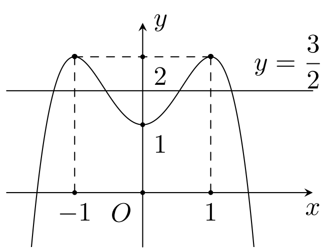
Câu 27. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{3}{2}$ là



Ⓐ 0. Ⓑ 2.

Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.



Đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ đi qua điểm có tọa độ $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và song song với trục Ox cắt đồ thị hàm số đã cho tại 4 điểm phân biệt.

Do đó, phương trình $f(x)=\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28. Cho số phức z có $\overline{z} = -5 + 6i$. Phần ảo của z bằng

(A) 5. (B) -6. (C) 6. (D) -5.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = -5 + 6i$ nên $z = -5 - 6i$.
Vậy phần ảo của z là -6.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} b$ bằng

(A) $1 - \log_b a$. (B) $1 + \log_b a$. (C) $\dfrac{1}{\log_b a}$. (D) $\dfrac{1}{1 + \log_b a}$.

Lời giải.

Với a, b là hai số thực lớn hơn 1. Ta có

$$\log_{ab} b = \frac{1}{\log_b ab} = \frac{1}{\log_b a + \log_b b} = \frac{1}{\log_b a + 1}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 1 - t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

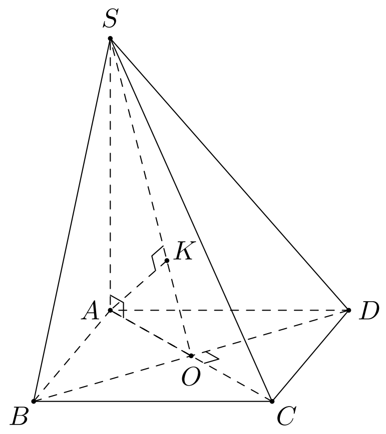
Ta có vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = (2;0;-1)$.
Vì đường thẳng vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2;0;-1)$.
Phương trình đường thẳng có dạng $\begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 \\ z = z_0 - t. \end{cases}$
Mà $A(1;2;-1)$ thuộc đường thẳng nên phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 - t. \end{cases}$
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$. (B) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a$. (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}\big(C,(SBD)\big)}{\mathrm{d}\big(A,(SBD)\big)} = \dfrac{OC}{OA} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}\big(C,(SBD)\big) = \mathrm{d}\big(A,(SBD)\big)$.

Ta có $BD \perp SA$, $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAO), kẻ $AK \perp SO$ tại K, ta có $\begin{cases} AK \perp SO \\ AK \perp BD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBD)$ tại K.

Do đó $\mathrm{d}\big(A,(SBD)\big) = AK$.

Tam giác SAO vuông tại A, có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{4}{2a^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{10}}{5}a$.

Vậy $\mathrm{d}\big(C,(SBD)\big) = AK = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;2;5)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

A $2\sqrt{2}$. B $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$. C $2\sqrt{14}$. D 8.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = 3\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OA}\right)$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OM} = (0;2;2)$ nên độ dài vectơ $\overrightarrow{OM}$ là $\left|\overrightarrow{OM}\right| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Môđun của số phức iz bằng

A 25. B 49. C 7. D 5.

Lời giải.

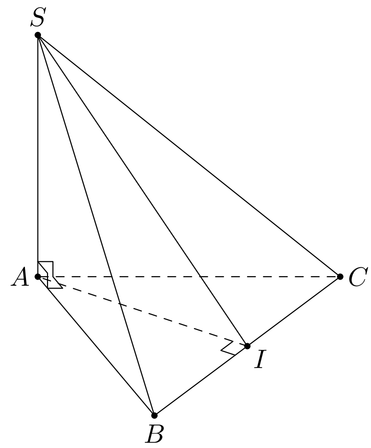
Ta có $iz = i(3+4i) = -4 + 3i$ nên $|iz| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A 45°. B 60°. C 90°. D 30°.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC vuông cân đỉnh A nên $AI \perp BC$.
Mà $SA \perp (ABC)$ nên suy ra $BC \perp (SAI)$ và $SI \perp BC$.
Vì BC là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) nên góc giữa chúng bằng góc giữa hai đường thẳng SI và AI, chính là góc $\widehat{SIA}$.
Do $\triangle ABC$ vuông cân đỉnh A nên $AI = \dfrac{1}{2}BC = a$.
Xét tam giác vuông SAI ta có $\tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{3}$ nên $\widehat{SIA} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -6x^3 + 27x^2 - 16x + 1$ trên đoạn $[1;5]$ bằng
A 6. **B** $-\dfrac{14}{9}$. **C** -154. **D** $\dfrac{329}{9}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -18x^2 + 54x - 16$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -18x^2 + 54x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \notin [1;5] \\ x = \dfrac{8}{3} \in [1;5]. \end{array}\right.$

Ta có $f(1) = 6$, $f\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{329}{9}$, $f(5) = -154$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;5]$ bằng $\dfrac{329}{9}$ tại $x = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $20\,\mathrm{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t) = -4t + 20$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng
A 50 m. **B** 30 m. **C** 32 m. **D** 48 m.

Lời giải.

Ô tô dừng hẳn khi vận tốc $v(t) = -4t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

Do đó, quãng đường ô tô đi được là $s = \displaystyle\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 (-4t + 20)\,\mathrm{d}t = \left(-2t^2 + 20t\right)\Big|_0^5 = 50$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A $\dfrac{27}{44}$. **B** $\dfrac{3}{4}$. **C** $\dfrac{39}{44}$. **D** $\dfrac{19}{22}$.

Lời giải.

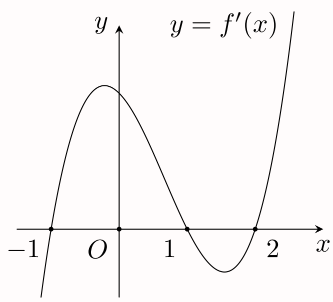
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^{3} = 220$.
Gọi A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm đã cho được tam giác".
Khi đó, ta xét hai khả năng xảy ra A như sau:

- Trường hợp 1: Tam giác được chọn chứa đỉnh O, khi đó ta có $5 \cdot 6 = 30$ khả năng.
- Trường hợp 2: Tam giác được chọn không chứa điểm O, khi đó ta có $6 \cdot \mathrm{C}_5^2 + 5 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 135$ khả năng.

Suy ra, số phần tử của biến cố A là $n(A) = 30 + 135 = 165$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{165}{220} = \dfrac{3}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1; 2)$. **B** $(-1; 1)$.
C $(-\infty; -1)$. **D** $(1; 2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(2; +\infty)$.
Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\dfrac{7}{2}; -1; \dfrac{3}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 0]$ khi và chỉ khi

A $m \leq f(-1)$. **B** $f(-1) \leq m \leq f(0)$.
C $m \leq f(0)$. **D** $m \leq f(-3)$.

Lời giải.

Gọi a là hệ số cao nhất của hàm số $y = f(x)$, ta có hai trường hợp:

- Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{7}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dễ thấy rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, trái với giả thiết hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

- Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-3		-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{7}{2}\right)$	$\searrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn có ba điểm cực trị là $-\dfrac{7}{2}; -1; \dfrac{3}{2}$ nên $y = f'(x)$ là hàm đa thức bậc ba có ba nghiệm là $-\dfrac{7}{2}; -1; \dfrac{3}{2}$. Đặt $f'(x) = a\left(x+\dfrac{7}{2}\right)(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, khi đó ta có

$$f(0) - f(-3) = f(x)\Big|_{-3}^{0} = \int\limits_{-3}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x = a\int\limits_{-3}^{0}\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{45}{8}a < 0.$$

Vậy $f(0) < f(-3)$, do đó $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Để bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm trên $[-3;0]$ thì $m \leq \max\limits_{[-3;0]} f(x)$ hay là $m \leq f(-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = \dfrac{1}{2}$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x$, $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)f(x)\,\mathrm{d}x = a\pi\sqrt{3} + b\sqrt{3} + c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ, giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. B $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$. C $\left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$. D $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \tan^3 x + \tan x = \tan x\left(\tan^2 x + 1\right) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, ta có $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$.

Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + C$.

Mặt khác $f(0)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2\cos^2 0}+C=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=0$, suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}$.

Ta có $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)\dfrac{1}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \dfrac{1}{2}\left[(x+1)\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \dfrac{1}{2}\left[(x+1)\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right] \\ &= \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\pi}{3}+1\right)\sqrt{3}-\left(\dfrac{\pi}{6}+1\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{36}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \dfrac{5\sqrt{3}}{36}\pi+\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}\ln 3. \end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{5}{36}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{5}{36}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 7 số nguyên b thoả mãn $2^{b^2}<8^{-b}\cdot a^{b+3}$?

A 15. B 31. C 16. D 32.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2^{b^2}<8^{-b}\cdot a^{b+3} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{b^2}<2^{-3b}\cdot a^{b+3} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{b^2+3b}<a^{b+3} \\ \Leftrightarrow\ & \left(b^2+3b\right)\cdot\log_a 2<b+3 \\ \Leftrightarrow\ & b(b+3)\cdot\dfrac{1}{\log_2 a}<b+3 \quad (\text{vì } a>1) \\ \Leftrightarrow\ & b\,(b+3)<(b+3)\log_2 a \\ \Leftrightarrow\ & b\,(b+3)-(b+3)\log_2 a<0 \\ \Leftrightarrow\ & (b+3)(b-\log_2 a)<0. \end{aligned}$$

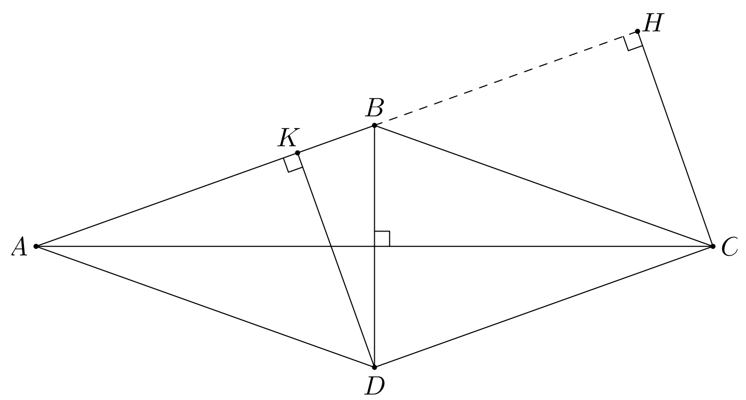
Vì a là số nguyên lớn hơn 1 nên $\log_2 a>0$. Khi đó sẽ trở thành $-3<b<\log_2 a \Leftrightarrow b\in(-3;\log_2 a)$.
Vì tồn tại không quá 7 giá trị b nguyên nên $\log_2 a\le 5 \Rightarrow a\le 2^5=32$.
Vậy có 31 số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 7 số nguyên b thoả mãn $2^{b^2}<8^{-b}\cdot a^{b+3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 6$ và $BD = 4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

(A) $\dfrac{256\pi}{3}$. (B) $\dfrac{8\,704\pi}{81}$. (C) $\dfrac{2\,368\pi}{27}$. (D) $\dfrac{64\pi}{3}$.

Lời giải.



Nửa chu vi tam giác ABD là $p = \dfrac{6+6+4}{2} = 8$.
Khi đó diện tích tam giác ABD là

$$S_{ABD} = \sqrt{p(p-6)(p-6)(p-4)} = 8\sqrt{2}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D lên đường thẳng AB.
Khi đó $CDKH$ là hình chữ nhật nên

$$CH = DK = \frac{2 \cdot S_{ABD}}{AB} = \frac{16\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Vì khi quay AD và BC quanh trục AB tạo hai hình nón bằng nhau nên thể tích cần tìm bằng thể tích khối trụ do CD quay quanh AB tạo ra.

$$V = \pi \cdot CH^2 \cdot CD = \frac{256}{3}\pi.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ $(a,\, b,\, c \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1 - \dfrac{1}{7}\right| = |z_1 - z_2|$. Giả sử $|z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2 + bw + a = 0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3 - w$ là số thuần ảo và $|z_3| \leq |w|$?

(A) 10. (B) 5. (C) 6. (D) 11.

Lời giải.

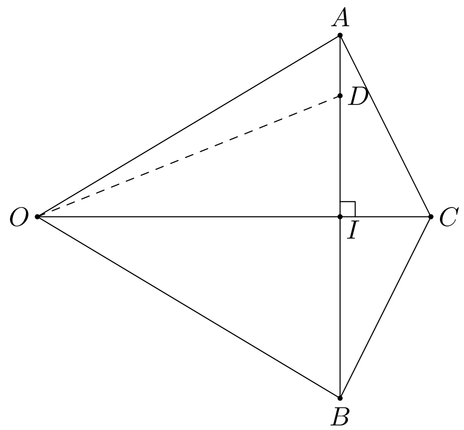
Ta thấy mỗi nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ sẽ là nghịch đảo của nghiệm của phương trình $cw^2 + bw + a = 0$.
Do z_1, z_2 có phần ảo khác không nên z_1, z_2 là hai số phức liên hợp.

Vì thế nên đặt w_1, w_2 là nghiệm của $cw^2 + bw + a = 0$, trong đó $w_1 = \dfrac{1}{z_1}$ và $w_2 = \dfrac{1}{z_2}$.

Suy ra $|w_1| = \left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \sqrt{k}$ và

$$\left|\frac{2}{w_1} - \frac{1}{7}\right| = \left|\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}\right| \Leftrightarrow |14w_2 - w_1w_2| = 7|w_1 - w_2|.$$

Vì a, b, $c \in \mathbb{R}$ nên $|w_1| = |w_2| = \sqrt{k}$ nên $\sqrt{k}|14 - w_1| = 7|w_1 - w_2|$.



Trong mặt phẳng toạ độ, gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn w_1, w_2 và $C(14;0)$ thì theo tính chất hình học của số phức, ta có

$$AB = \frac{\sqrt{k}}{7} \cdot AC. \qquad (*)$$

và $OA = OB = \sqrt{k}$, ngoài ra A, B đối xứng nhau qua Ox. Vì thế, tam giác ABC cân tại C có cạnh đáy AB.

Vì $OC = 14$ nên $(*)$ có thể viết lại là $\dfrac{1}{2}AB \cdot OC = OA \cdot AC$, mà

$$\frac{1}{2}AB \cdot OC = S_{OACB} = 2S_{AOC} \leq OA \cdot AC.$$

Đẳng thức xảy ra chứng tỏ tam giác OAC vuông tại A.
Xét điểm D biểu diễn z_3, vì z_3, w cùng phần thực nên A, B, D thẳng hàng.
Ngoài ra $|z_3| \leq |w|$ nên D sẽ thuộc đoạn AB và D có tung độ nguyên.
Để có 5 số phức z_3 thoả mãn thì phải có 5 điểm D có tung độ nguyên nằm trên đoạn AB. Điều này cho thấy $4 \leq AB < 6$.
Gọi I là trung điểm AB thì I thuộc đoạn OC.
Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OAC thì

$$OA^2 = OI \cdot OC \Leftrightarrow k = 14OI \Rightarrow OI = \frac{k}{14}.$$

Theo định lý Pythagoras, ta có $IA^2 = OA^2 - OI^2 = k - \dfrac{k^2}{14^2}$.
Mà $2 \leq IA < 3$ nên được bất phương trình

$$4 \leq k - \frac{k^2}{14^2} < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{14^2} - k + 4 \leq 0 \\ \dfrac{k^2}{14^2} - k + 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4{,}08 \leq k \leq 191{,}91 \\ k < 9{,}45; k > 186{,}54. \end{cases}$$

Từ các bất phương trình này và k nguyên, ta thu được $5 \leq k \leq 9$ hoặc $187 \leq k \leq 191$.
Như thế, có tất cả 10 giá trị k nguyên dương thoả mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + z = 0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

(B) $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

(C) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(D) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Xét đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 5; -1)$.
Xét mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + z = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$.
Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ nên Δ cắt (P).
Gọi $M = \Delta \cap (P)$ suy ra $M(1+t; 3+5t; 1-t)$.
Ta có $M \in (P) \Leftrightarrow 2(1+t) + 3 + 5t + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = -1$, suy ra $M(0; -2; 2)$.
Lấy điểm $N(1; 3; 1) \in \Delta$ và gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của N lên (P).
Ta có $H \in (P) \Leftrightarrow 2a + b + c = 0$ và $\overrightarrow{NH} = (a-1; b-3; c-1)$.

Ta có $\overrightarrow{NH}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $\dfrac{a-1}{2} = \dfrac{b-3}{1} = \dfrac{c-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{b-3}{1} \\ \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{c-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = -5 \\ a - 2c = -1. \end{cases}$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - 2b = -5 \\ a - 2c = -1 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 2; 0).$$

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua H suy ra H là trung điểm của NN', nghĩa là

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_N + x_{N'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_N + y_{N'}}{2} \\ z_H = \dfrac{z_N + z_{N'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{1 + x_{N'}}{2} \\ 2 = \dfrac{3 + y_{N'}}{2} \\ 0 = \dfrac{1 + z_{N'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'} = -3 \\ y_{N'} = 1 \\ z_{N'} = -1 \end{cases} \Rightarrow N'(-3; 1; -1).$$

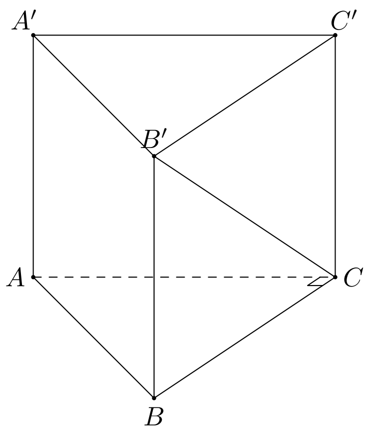
Ta có $\overrightarrow{MN'} = (-3; 3; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đối xứng với Δ qua (P).
Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) đi qua $N'(-3; 1; -1)$ và nhận $\vec{u}_1 = (1; -1; 1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\Delta'\colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Ta thấy đường thẳng Δ' đi qua điểm $(-4; 2; -2)$ nên đường thẳng Δ' có thể viết dưới dạng chính tắc sau $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = a\sqrt{3}$ và $AC = a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^3$. (D) $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



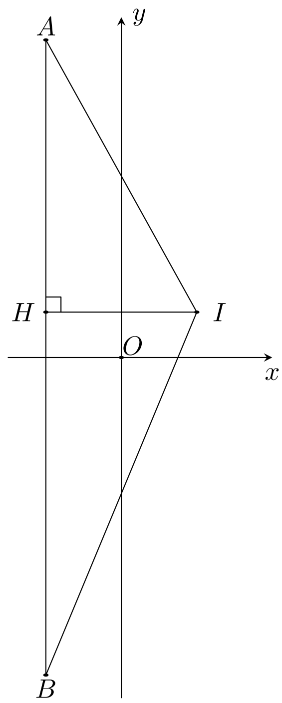
Vì $BB' \perp (ABC)$ nên BC là hình chiếu của $B'C$ trên (ABC).
Suy ra $\left(B'C,(ABC)\right) = (B'C, BC) = \widehat{B'CB} = 30^\circ$.
Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có $BC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.
Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác $BB'C$ vuông tại B nên $\tan \widehat{B'CB} = \dfrac{BB'}{BC} \Rightarrow BB' = BC \cdot \tan \widehat{B'CB} = a\sqrt{2} \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Thể tích khối lăng trụ là $V = S \cdot BB' = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 7i| + |z + 1 + 7i| = 14$ và $|z - 1 - i| = m$?
(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.
Đặt $z_1 = -1 + 7i$ có điểm biểu diễn là $A(-1; 7)$ và $z_2 = -1 - 7i$ có điểm biểu diễn là $B(-1; -7)$.



Vì $\overrightarrow{AB} = (0; -14)$ nên $AB = 14$, kết hợp với $|z+1-7i| + |z+1+7i| = 14$, suy ra $MA + MB = AB$.
Do đó M thuộc đoạn thẳng AB $\quad(1)$.
Mặt khác $|z-1-i| = m$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = m > 0 \quad (2)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB, khi đó $AB\colon x = -1$ nên $IH = 2$.
Mặt khác $\overrightarrow{IA} = (-2; 6) \Rightarrow IA = 2\sqrt{10}$ và $\overrightarrow{IB} = (-2; -8) \Rightarrow IB = 2\sqrt{17}$.
Ứng với mỗi m có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán, kết hợp (1) và (2) suy ra

$$IH < m \le IA \Leftrightarrow 2 < m \le 2\sqrt{10}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.
Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn bài.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ a > 0)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x) \cdot f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\dfrac{9}{16}$. Biết $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \dfrac{f'(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{5}{2}$, giá trị của $\displaystyle\int\limits_{0}^{x_2} (x+2) f''(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$. **B** $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$. **C** $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$. **D** $\left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$.

Lời giải.

Vì $x_1 < x_2$ và $x_1 + x_2 = 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$.
Ta có $f'(x) = 3a(x^2 - x_2^2)$ với $x_2 > 0 \Rightarrow f'(x)$ là hàm số chẵn.
Theo giả thiết

$$-\frac{5}{2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} = \int\limits_{-x_2}^{0} \frac{f'(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int\limits_{-x_2}^{0} \frac{f'(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_2}^{0} \frac{f'(-t)}{2^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(t)}{2^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(t)\cdot 2^t}{2^t+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(x)\cdot 2^x}{2^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{2} = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(x)\cdot 2^x}{2^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{5}{2} = \int\limits_{0}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x = a\left(x^3 - 3x\cdot x_2^2\right)\Big|_0^{x_2} \\ \Leftrightarrow\ & a x_2^3 = \frac{5}{4}. \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $f''(x) = 6ax \Rightarrow f'(x)\cdot f''(x)$ là hàm số lẻ.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)\cdot f''(x)$ và trục hoành là

$$\begin{aligned} & \frac{9}{16} = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \left|f'(x)\cdot f''(x)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{x_2} 2f'(x)\,\mathrm{d}\left(f'(x)\right) \\ = \ & \left[f'(x)\right]^2\Big|_0^{x_2} = 9a^2x_2^4 \\ \Rightarrow\ & a x_2^2 = \frac{1}{4}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = 5 \Rightarrow a = \dfrac{1}{100}$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_{0}^{x_2} (x+2)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{5} (x+2)\cdot\frac{3x}{50}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{5}\left(\frac{3x^2}{50} + \frac{6x}{50}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{50} + \frac{3x^2}{50}\right)\Bigg|_0^5 = 4.$

Chọn đáp án (A) □

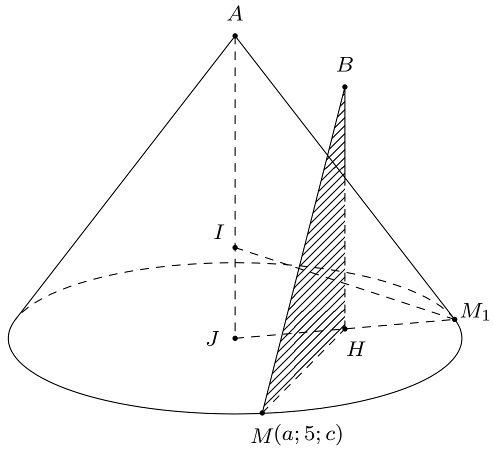
Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c > 0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\dfrac{17}{2};9\right)$. (B) $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. (D) $\left(8;\dfrac{17}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $R = IA = 4 \Rightarrow IM = 4 \Rightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 = 16$ (1)

Gọi J là hình chiếu của M lên IA.



Vì $S_{\triangle IAM} = 2\sqrt{7} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot IM \cdot \sin \widehat{AIM} \Rightarrow \sin \widehat{AIM} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\Rightarrow \cos \widehat{AIM} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{AIM}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = -\dfrac{3}{4}$ (do tam giác IAM tù).

Với $\cos \widehat{AIM} = \dfrac{AI^2 + IM^2 - AM^2}{2 \cdot AI \cdot AM} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AM = 2\sqrt{14}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 2\sqrt{14}; JM = \sqrt{7} \\ AJ = 7 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \dfrac{IJ}{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AI}.$$

Với $\overrightarrow{AI} = (0; 4; 0)$ và $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AI}$ suy ra $\overrightarrow{IJ} = (0; 3; 0) \Rightarrow J(1; 5; -1)$.

Vậy M thuộc đường tròn $C\left(J, \sqrt{7}\right)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa $C\left(J, \sqrt{7}\right) \Rightarrow (P)\colon y = 5 \Rightarrow M(a; 5; c)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(2; 5; -1) \Rightarrow JH = 1$.

Vì AJ song song với (BHM) nên $\mathrm{d}\left(AJ, BM\right) = \mathrm{d}\left(AJ, (BMH)\right) = \mathrm{d}\left(J, MH\right) \leq JH$.

Khoảng cách lớn nhất giữa AI và BM lớn nhất bằng JH khi và chỉ khi $JH \perp HM$, do đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{JH} = 0 \\ JM^2 = (a-1)^2 + (c+1)^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ (a-1)^2 + (c+1)^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \pm \sqrt{6}. \end{cases}$$

Theo bài ra $c > 0$ nên $c = -1 + \sqrt{6}$.

Suy ra, $a + b + c = 6 + \sqrt{6} \in \left(8; \dfrac{17}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Xét hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(-1) = -6$. Hàm số $y = f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, $f'(4) = 0$ và $f'(-1) = a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-100; 0)$ sao cho ứng với mỗi số a, hàm số $y = \left|f(x) + \dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

A 11. B 12. C 87. D 88.

Lời giải.

Do $f'(x)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ và $f'(4) = 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	-6		$f(4)$		$+\infty$

Xét $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{12}{x^3}$.

Do $g''(x)=f''(x)+\dfrac{36}{x^4}>0$ với mọi $x\neq 0$ nên hàm số $g'(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=0\\ g(4)=f(4)+\dfrac{6}{16}<f(-1)+\dfrac{6}{16}=-6+\dfrac{6}{16}<0\end{cases}$ và $g'(4)=f'(4)-\dfrac{12}{4^3}<0$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$, nên phương trình $g'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_2\in(4;+\infty)$.

Với $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}g'(x)=+\infty\\ g'(-1)=a+12.\end{cases}$

- Trường hợp 1: $a+12\geq 0\Leftrightarrow a\geq -12\Rightarrow g'(x)=0$ không có nghiệm trên $(-1;0)$.

x	-1		0		4	x_2	$+\infty$
$g(x)$	0		$+\infty$ ‖ $+\infty$		$g(4)$	$g(x_2)$	$+\infty$

Phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác x_2 thuộc khoảng $(0;+\infty)$ nên hàm số $|g(x)|$ có 3 điểm cực trị trên khoảng $(-1;+\infty)$.
Suy ra $a\in\{-12;-11;-10;\ldots;-1\}$.

- Trường hợp 2: $a+12<0\Leftrightarrow a<-12\Rightarrow g'(x)=0$ có nghiệm $x_1\in(-1;0)$.

x	-1	x_1	0	4	x_2	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(x_1)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$g(4)$	$g(x_2)$	$+\infty$

Phương trình $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt khác x_1, x_2 thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ nên hàm số $|g(x)|$ có 5 điểm cực trị, trường hợp này không thoả mãn.

Vậy có 12 giá trị nguyên của a để hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1,+\infty)$.

Chọn đáp án B

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5}{x^3}+\ln\dfrac{x+2}{x-2}$ có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2\,100)$ thỏa mãn $f(a-2\,023)+f(5a-29)\geq 0$?

A. 336. B. 410. C. 2 093. D. 1 758.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

Xét $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \ln\dfrac{x+2}{x-2}$ có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \end{cases}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{-15}{x^4} - \dfrac{4}{x^2-4} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Mặt khác dễ thấy $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên ta có

$$f(a - 2\,023) + f(5a - 29) \geq 0 \Leftrightarrow f(a - 2\,023) \geq f(29 - 5a). \quad (*)$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} a - 2\,023 > 2 \\ 29 - 5a < -2 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2\,025$ khi đó $f(a - 2\,023) > 0$; $f(29 - 5a) < 0$ nên $(*)$ đúng.

TH2: $\begin{cases} a - 2\,023 < -2 \\ 29 - 5a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a < \dfrac{31}{5}$ dễ thấy không thỏa mãn $(*)$ do $f(a - 2\,023) < 0$, $f(29 - 5a) > 0$.

TH3: $\begin{cases} a - 2\,023 > 2 \\ 29 - 5a > 2 \end{cases}$ (không có giá trị a thỏa mãn).

TH4: $\begin{cases} a - 2\,023 < -2 \\ 29 - 5a < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{31}{5} < a < 2\,021$ khi đó $(*) \Leftrightarrow a - 2\,023 \leq 29 - 5a \Leftrightarrow a \leq 342$.

Suy ra $\dfrac{31}{5} < a \leq 342$.

Do a là số nguyên thuộc khoảng $(-\infty; 2\,100)$ nên $a \in \{7; 8; \ldots; 342; 2\,026; 2\,027; \ldots; 2\,099\}$.

Vậy số số nguyên a thỏa mãn là 410.

Chọn đáp án B □

—— HẾT ——

TRUNG TÂM LUYỆN THI QUỐC GIA VIỆT STAR
Thầy Nguyễn Hoàng Việt

ĐỀ SỐ 51

ĐỀ CHÍNH THỨC TNTHPT 2024
Môn: Toán
Năm học: 2023 – 2024
Thời gian: *90 phút* (không kể phát đề)

MÃ ĐỀ: CT-101

Họ và tên thí sinh: .... *Lớp:* ....

Nội dung đề

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức $2z$ bằng

A. $3 + 2i$. B. $3 + 4i$. C. $-3 + 4i$. D. $2 + 4i$.

Lời giải.

Số phức $2z = 2(1 + 2i) = 2 + 4i$.

Chọn đáp án D

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. Điểm $M(1; 2; 3)$. B. Điểm $Q(1; 3; 2)$.
C. Điểm $P(-2; -5; 1)$. D. Điểm $N(2; 5; -1)$.

Lời giải.

Điểm $N(2; 5; -1) \in d$ vì $\dfrac{2-2}{-1} = \dfrac{5-5}{2} = \dfrac{-1+1}{3} = 0$.

Chọn đáp án D

Câu 3. Nếu $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. B. -2. C. $-\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -(-2) = 2.$$

Chọn đáp án A

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

(A) $y = 3$. (B) $x = 1$. (C) $x = 3$. (D) $y = 1$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình $x = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

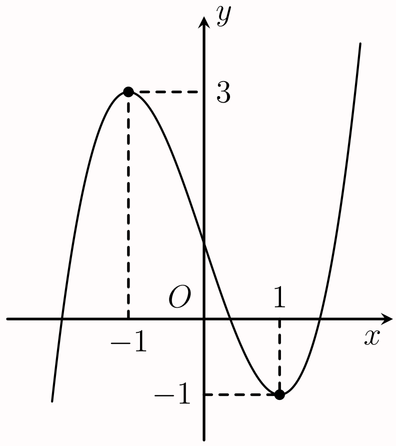
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng
(A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

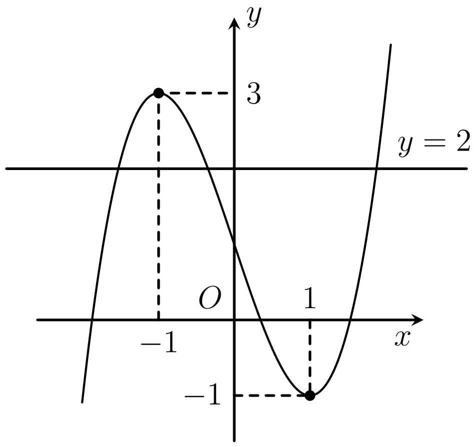
Giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{\text{CĐ}} = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là
(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.



Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ qua đồ thị ta có



Ta có 3 giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = 2$ nên phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm.
Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A 12. B 24. C 6. D 18.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\cos 2x + C$.
B $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.
C $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.
D $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = 4^x$ là

A $y' = x \cdot 4^{x-1}$. B $y' = \dfrac{4^{x+1}}{x+1}$. C $y' = 4^x \cdot \ln 4$. D $y' = \dfrac{4^x}{\ln 4}$.

Lời giải.

Ta có $(a^x)' = a^x \cdot \ln 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1$ là

A $(-1; 1)$. B $(0; 1)$. C $(-\infty; 1)$. D $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1 \Leftrightarrow x + 1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x < 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 5i$ có tọa độ là

A $(3; 5)$. B $(-3; 5)$. C $(5; 3)$. D $(3; -5)$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 + 5i$ có điểm biểu diễn $(3; 5)$.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V = 36a^3$ và diện tích đáy $B = 4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $3a$. (B) $6a$. (C) $27a$. (D) $9a$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp là $V = B \cdot h \Leftrightarrow 36^3 = 4a^2 \cdot h \Rightarrow h = 9a$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) 30π. (B) 9π. (C) 15π. (D) 20π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi rl = 30\pi$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ là

(A) $(0; +\infty)$. (B) $(-\infty; +\infty)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Khẳng định nào dưới đây đúng?

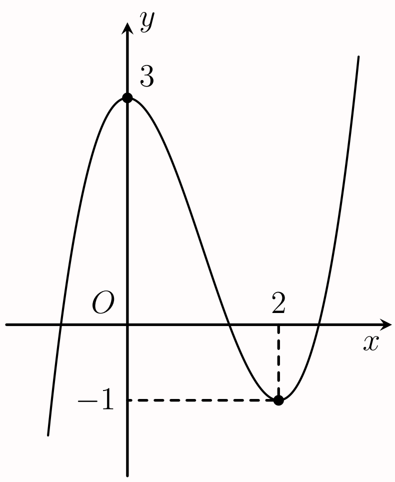
(A) $\displaystyle\int 5^x \, \mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$. (B) $\displaystyle\int 5^x \, \mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$.

(C) $\displaystyle\int 5^x \, \mathrm{d}x = \frac{5^{x+1}}{\ln 5} + C$. (D) $\displaystyle\int 5^x \, \mathrm{d}x = 5^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

(A) $x = 0$. (B) $x = 2$. (C) $x = 3$. (D) $x = -1$.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Lời giải.

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 2)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-\infty; +\infty)$. (D) $(0; 5)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Với a, b là các số thực dương tùy ý, $\log_2(ab)$ bằng

(A) $\log_2 a + \log_2 b$. (B) $\log_2 a - \log_2 b$. (C) $\log_2 a . \log_2 b$. (D) $\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho số phức $z = 2024 - 2i$. Số phức liên hợp của z là

(A) $2 + 2024i$. (B) $-2024 + 2i$. (C) $-2 + 2024i$. (D) $2024 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = 2024 + 2i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(3; -2; 0)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

(A) $(2; -4; 4)$. (B) $(4; 0; -4)$. (C) $(2; 0; 2)$. (D) $(-2; 4; -4)$.

Lời giải.

Vector $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2; -4; 4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2) = -5, f(3) = 7$. Giá trị của $\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -35. (B) 12. (C) -12. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(3) - f(2) = 7 - (-5) = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

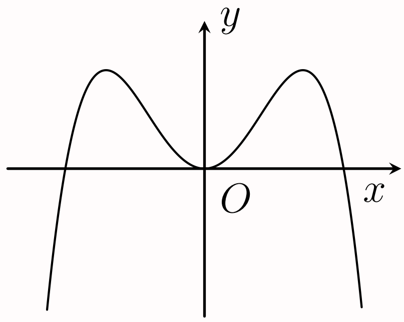
(A) Điểm $Q(0; 3; 1)$. (B) Điểm $N(-1; 0; 5)$. (C) Điểm $P(2; 0; 5)$. (D) Điểm $M(2; 3; 0)$.

Lời giải.

Điểm $M(2; 3; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy).

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = x^2 - 2x$. (B) $y = 2x^3 + x^2$. (C) $y = -x^4 + 2x^2$. (D) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị

$\Rightarrow$ Loại hàm số $y = x^2 - 2x$ do hàm số chỉ có tối đa 1 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Loại hàm số $y = 2x^3 + x^2$ do hàm số chỉ có tối đa 2 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Loại hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$ do hàm số không điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $2^{2x+1} = \dfrac{1}{8}$ là

(A) $x = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2x + 1 = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow x = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

(A) 110. (B) 30. (C) 11. (D) 55.

Lời giải.

Chọn 1 bạn nam và một bạn nữ có $C_5^1 \cdot C_6^1 = 30$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho khối nón có diện tích đáy $B = 8$ và chiều cao $h = 9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 24. (B) 192. (C) 72. (D) 216.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 9 = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ công sai $d = 6$. Giá trị của u_2 bằng

(A) -3. (B) 9. (C) 18. (D) 3.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ công sai $d = 6 \Rightarrow u_2 = u_1 + d \Rightarrow u_2 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(-1;2;-1)$. (B) $(-2;4;-2)$. (C) $(2;-4;2)$. (D) $(1;-2;1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ là $I(1;-2;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $z\cdot\bar{z}=4$. Môđun của z bằng

(A) 2. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $|z|^2=z\cdot\bar{z}=4\Rightarrow|z|=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab}a$ bằng

(A) $1-\log_a b$. (B) $\dfrac{1}{1+\log_a b}$. (C) $1+\log_a b$. (D) $\dfrac{1}{\log_a b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{ab}a=\dfrac{1}{\log_a(ab)}=\dfrac{1}{\log_a a+\log_a b}=\dfrac{1}{1+\log_a b}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác 0. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

(A) $\dfrac{5}{7}$. (B) $\dfrac{149}{182}$. (C) $\dfrac{75}{91}$. (D) $\dfrac{55}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=\mathrm{C}_{14}^3=364$.

Gọi A là biến cố "3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác".

Xét 13 điểm nằm trên hai tia Ox, Oy không tính điểm O.

- Trường hợp 1. Tam giác có 2 đỉnh thuộc Ox và 1 đỉnh thuộc Oy có $\mathrm{C}_5^2\cdot 8=80$.
- Trường hợp 2. Tam giác có 2 đỉnh thuộc Oy và 1 đỉnh thuộc Ox có $5\cdot\mathrm{C}_8^2=140$.
- Xét tam giác có 1 đỉnh là O, 1 đỉnh thuộc Oy, 1 đỉnh thuộc Ox có $1\cdot 5\cdot 8=40$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A)=260$.

Vậy $P(A)=\dfrac{260}{364}=\dfrac{5}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian Oxy, cho điểm $M(1;-2;1)$ và đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=1-t.\end{cases}$

Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

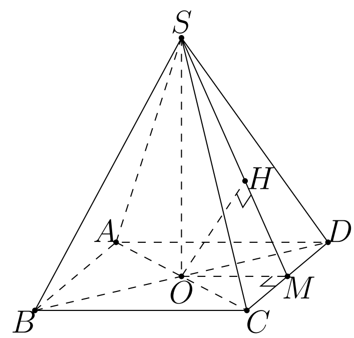
Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng d nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;-1)$ và đi qua $M(1;-2;1)$ có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của CD.

Ta có $\begin{cases} SO\perp(ABCD)\\ CD\perp OM\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} SO\perp CD\\ CD\perp OM\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOM)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên SM thì $\begin{cases} OH\perp SM\\ OH\perp CD\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)$ tại H.

Do đó $\mathrm{d}\big(A,(SCD)\big)=2\mathrm{d}\big(O,(SCD)\big)=2OH$.

Ta lại có $\begin{cases} OM=\dfrac{1}{2}AB=a\\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=a\sqrt{2}.\end{cases}$

Xét tam giác SOM vuông tại O ta có

$$OH=\frac{SO\cdot OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\frac{a\sqrt{2}\cdot a}{\sqrt{2a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Vậy $\mathrm{d}\big(A,(SCD)\big)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 34. Một ôtô đang chuyển động với vận tốc 24 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ôtô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t)=-4t+24$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ôtô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

Ⓐ 64 m. Ⓑ 42 m. Ⓒ 72 m. Ⓓ 50 m.

Lời giải.

Khi xe dừng hẳn ta có $v(t)=0\Leftrightarrow -4t+24=0\Leftrightarrow t=6$ (s).

Ta có quãng đường ôtô đi được là $s(t)=\displaystyle\int_0^6(-4t+24)\,\mathrm{d}t=72$ (m).

Chọn đáp án Ⓒ □

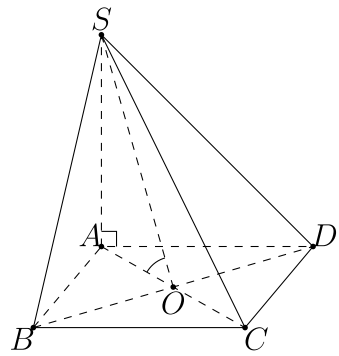
Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 90°. B. 30°. C. 45°. D. 60°.

Lời giải.

Ta có



- $OA = \dfrac{BD}{2} = a$.
- $\begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow \big((SBD),(ABCD)\big) = \widehat{SOA}$.
- $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án C

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M(3;1;-1)$, $N(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $x + 2y + z - 4 = 0$. B. $2x - 11y - 5z = 0$.
C. $x - 13y - 5z - 5 = 0$. D. $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm có cặp véc-tơ chỉ phương $\begin{cases} \vec{u} = (2;-1;3) \\ \overrightarrow{MN} = (-1;-2;5) \end{cases} \Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] = (1;-13;-5)$.
Phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $1(x-3) - 13(y-1) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0$.
Chọn đáp án D

Câu 37. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 20x + 1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $\dfrac{61}{9}$. B. $\dfrac{34}{9}$. C. 6. D. 129.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;4]$.
Ta có

- $f'(x) = 18x^2 - 42x + 20$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 42x + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
- $f(1) = 6$; $f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{34}{9}$; $f(4) = 129$.

Vậy $\min\limits_{[1;4]} f(x) = \dfrac{34}{9}$.
Chọn đáp án B

Câu 38. Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;2)$. (B) $(-\infty;-2)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.
Hàm số đồng biến khi $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}>0\Leftrightarrow x>0$.
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\dfrac{3}{2}$; 2; $\dfrac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

(A) $m\ge f(2)$. (B) $f(2)\ge m\ge f(3)$. (C) $m\ge f(0)$. (D) $m\ge f(3)$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $f'(x)=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)$.
Hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc bốn và đạt giá trị nhỏ nhất nên $a>0$.
Ta có $f(3)-f(0)=\displaystyle\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=a\int_0^3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)\mathrm{d}x=a\cdot\dfrac{117}{8}>0$ (vì $a>0$).
Suy ra $f(3)>f(0)$.
Ta có bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là

x	0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$

Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

$$m\ge\min_{[0;3]}f(x)\Leftrightarrow m\ge f(0).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=\dfrac{1}{3}\ln x;\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3}\dfrac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=a\cdot\mathrm{e}^{-3}+b\cdot\mathrm{e}^{-1}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ giá trị của $a-b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

(A) $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. (B) $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. (C) $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$. (D) $\left(\dfrac{3}{4};1\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\ln x \\ \Rightarrow f(x) &= \int \frac{1}{3}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}(\ln x) \\ &= \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{3}\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{3}x + C. \end{aligned}$$

Do $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \frac{1}{3}\mathrm{e} + C = \frac{1}{5} \Rightarrow C = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}$.
Suy ra $f(\mathrm{e}^3) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3\ln\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{5}$.
Ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x}\right) = \left.\frac{-1}{x}f(x)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} - \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3}\frac{-1}{x}\,\mathrm{d}f(x) \\ &= \left.\frac{-1}{x}f(x)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} + \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3}\frac{1}{x}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-1}{x}f(x)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} + \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{-1}{x}f(x)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} + \frac{1}{3}\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3}\ln x\,\mathrm{d}\left(\ln x\right) = \left.\frac{-1}{x}f(x)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} + \left.\frac{1}{6}\ln^2 x\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \\ &= \left.\left(\frac{-1}{x}f(x) + \frac{1}{6}\ln^2 x\right)\right|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \left(\frac{-1}{\mathrm{e}^3}f(\mathrm{e}^3) + \frac{1}{6}\ln^2\mathrm{e}^3\right) - \left(\frac{-1}{\mathrm{e}}f(\mathrm{e}) + \frac{1}{6}\ln^2\mathrm{e}\right) \\ &= \left[\frac{-1}{\mathrm{e}^3}\cdot\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{2}\right] - \left(\frac{-1}{5\mathrm{e}} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{5\mathrm{e}^3} + \frac{1}{5\mathrm{e}} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-1} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $a = \frac{-1}{5}$; $b = \frac{1}{5}$ và $c = \frac{2}{3}$. Do đó $\Rightarrow a - b + c = \frac{4}{15} \approx 0{,}266$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 4 số nguyên b thoả mãn $5^{b^2} < 25^{-b}\cdot a^{b+2}$?

A 100. B 99. C 125. D 124.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 5^{b^2} < 25^{-b}\cdot a^{b+2} \\ \Leftrightarrow\ & 5^{b^2}\cdot 25^{b} < a^{b+2} \\ \Leftrightarrow\ & 5^{b^2+2b} < a^{b+2} \\ \Leftrightarrow\ & b(b+2) < (b+2)\log_5 a \\ \Leftrightarrow\ & (b+2)\left(b - \log_5 a\right) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < b < \log_5 a \ (\text{do } \log_5 a > 0). \end{aligned}$$

Để thỏa mãn thì $\log_5 a \le 3 \Leftrightarrow a \le 125$.
Do a nguyên và lớn hơn 1 nên có 124 giá trị thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có hai nghiệm z_1, z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\dfrac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $|z_3|\leq|w|$?

Ⓐ 12. Ⓑ 22. Ⓒ 23. Ⓓ 11.

Lời giải.

Đặt $z_1=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}, y\neq 0)\Rightarrow z_2=x-yi$.

Ta có $\left|2z_1-\dfrac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow\left(2x-\dfrac{1}{9}\right)^2+4y^2=4y^2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{18}$.

Suy ra $z_1=\dfrac{1}{18}+yi$; $z_2=\dfrac{1}{18}-yi$.

Ta thấy w là số phức thoả mãn $cw^2+bw+a=0$ nên $w=\dfrac{1}{z}$.

$\Rightarrow\dfrac{1}{w}=z$ có phần thực là $\dfrac{1}{18}$.

$\Rightarrow w=\dfrac{1}{z}=k\cdot\overline{z}$

$\Rightarrow w$ có phần thực là $\dfrac{k}{18}$.

Do z_3-w là số thuần ảo nên z_3 có phần thực là $\dfrac{k}{18}$.

Khi đó $z_3=\dfrac{k}{18}+mi,(m\in\mathbb{Z})$.

Do ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 nên $m\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;0\}$. (1)

Ta lại có $|z_3|\leq|w|=\dfrac{1}{|z|}=\sqrt{k}\Rightarrow|z_3|^2\leq k\Leftrightarrow\dfrac{k^2}{324}+m^2\leq k\Leftrightarrow m^2\leq k-\dfrac{k^2}{324}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$16\leq k-\frac{k^2}{324}<25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{k^2}{324}+k-25<0\\-\dfrac{k^2}{324}+k-16\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}k<162-36\sqrt{14}\\k>162+36\sqrt{14}\end{array}\right.\\162-18\sqrt{65}\leq k\leq 162+18\sqrt{65}.\end{array}\right.$$

Vì k nguyên dương nên $k\in\{17;18;19;\ldots;25;26;27;297;298;299;\ldots;306;307\}$.

Vậy có 22 số nguyên dương k.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$; $A(1;5)$, $B(1;-5)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $1+5i, 1-5i$.

Theo giả thiết $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ suy ra $MA+MB=10$, mà $AB=10$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đoạn AB. Phương trình đường thẳng AB là $x-1=0$.

Điều kiện cần để tồn tại hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m>0$.

Với $m>0$ ta có điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(2;1)$ và bán kính $r=m$.

Yêu cầu bài toán tương đương với điều kiện (C) cắt đoạn AB tại hai điểm phân biệt.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} d(I, AB) < r \\ IA \geq r \\ IB \geq r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq \sqrt{17} \\ m \leq \sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{17}.$

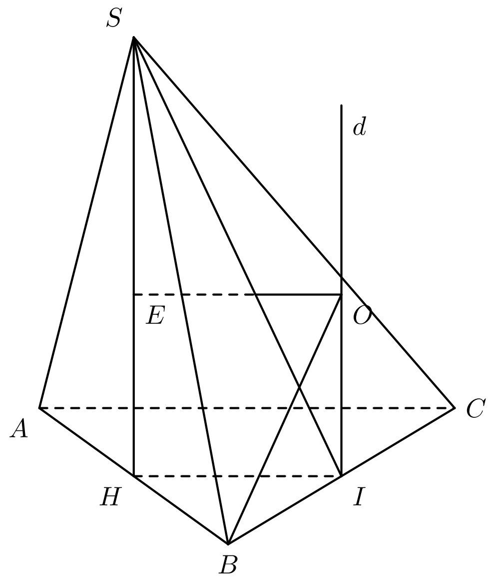
Vậy có 3 giá trị nguyên của $m \in \{2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, mặt bên là tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{28\pi}{9}a^2$.   B. $\dfrac{28\pi}{3}a^2$.   C. $\dfrac{25\pi}{3}a^2$.   D. $\dfrac{25\pi}{9}a^2$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC.

Do $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Suy ra $IB = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{2}$.

Dựng đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại I.

Gọi H là trung điểm của AB.

Do $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) nên $SH \perp AB$; $SH \perp (ABC)$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Ta có $EH = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $\begin{cases} IH \perp AB \\ IH \perp SH \end{cases}$ nên $IH \perp (SAB)$ Qua A kẻ đường thẳng d' vuông góc với (SAB) tại E suy ra $d' \parallel IH$, d' cắt d tại O.

Khi đó O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R = OB$.

Ta có $OEHI$ là hình chữ nhật nên $OI = EH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow R^2 = OB^2 = OI^2 + IB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a\sqrt{2})^2 = \frac{7a^2}{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

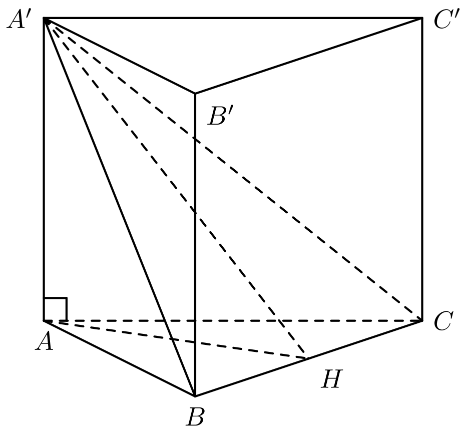
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \dfrac{28a^2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a^3$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a^3$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC .
Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH \perp BC$.
Khi đó $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA} = 30^\circ$
Xét $\triangle A'HA$ vuông tại A có

$$AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH}$$
$$\Rightarrow AA' = AH\cdot\tan\widehat{A'HA} = AH\cdot\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

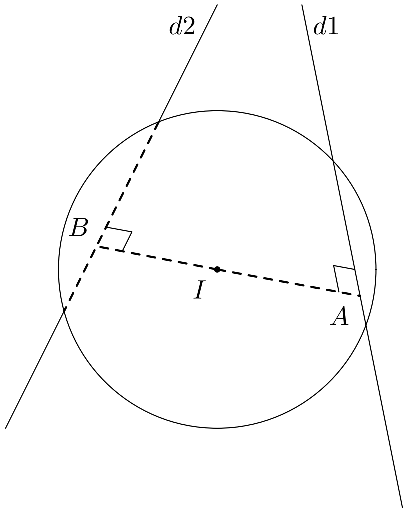
Vậy $V = S_{ABC}\cdot AA' = \dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+3}{-5}$ và $d_2\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là:

(A) $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$. (B) $x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 6$.
(C) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$. (D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

Lời giải.



Ta có

$$d_1\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+3}{-5} \Leftrightarrow d_1\colon \begin{cases} x=t+2 \\ y=3t+4 \\ z=-5t-3 \end{cases} \text{ có VTCP } \overrightarrow{u_1}=(1;3;-5)$$

$$d_2\colon \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-1} \Leftrightarrow d_2\colon \begin{cases} x=t-2 \\ y=-t-2 \\ z=-t-1 \end{cases} \text{ có VTCP } \overrightarrow{u_2}=(1;-1;-1).$$

Mặt cầu vừa tiếp xúc với hai đường thẳng d_1, d_2 và có bán kính nhỏ nhất có tâm là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung và đường kính bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.
Gọi AB là đoạn thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 với
$A\left(t_1+2;3t_1+4;-5t_1-3\right)\in d_1$ và $B\left(t_2-2;-t_2-2;-t_2-1\right)\in d_2$
Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(t_2-t_1-4;\ -t_2-3t_1-6;\ -t_2+5t_1+2\right)$
Khi đó

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t_2-t_1-4+3\left(-t_2-3t_1-6\right)-5\left(-t_2+5t_1+2\right)=0 \\ t_2-t_1-4-\left(-t_2-3t_1-6\right)-\left(-t_2+5t_1+2\right)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -35t_1+3t_2=32 \\ -3t_1+3t_2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nên $A(1;1;2)$, $B(-3;-1;0)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-2)$.
Gọi I và R là tâm và bán kính của mặt cầu cần tìm.
Khi đó I là trung điểm đoạn thẳng AB và $R=\dfrac{AB}{2}$.
Suy ra $I=(-1;0;1)$ và $R=\sqrt{6}$.
Phương trình mặt cầu cần tìm là : $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^3}+\ln\dfrac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;\ 2100)$ thoả mãn $f(a-2024)+f(6a-27)\geq 0$?

A 1807. B 288. C 2096. D 360.

Lời giải.

Tập xác định $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Ta có $f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^3} + \ln\dfrac{-x+3}{-x-3} = -\left(\dfrac{2}{x^3} + \ln\dfrac{x+3}{x-3}\right) = -f(x)$ suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Lại có $f'(x) = -\dfrac{6}{x^4} - \dfrac{6}{(x-3)^2} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{x+3}{x-3}} < 0,\ \forall x \in D$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(3; +\infty)$.

Để tồn tại $f(a-2024)$, $f(6a-27)$ thì:

$$\begin{cases} a - 2024 \notin [-3; 3] \\ 6a - 27 \notin [-3; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a - 2024 < -3 \\ a - 2024 > 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 6a - 27 < -3 \\ 6a - 27 > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -2021 \\ a > 2027 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < 4 \\ a > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 4 \\ 5 < a < 2021 \\ a > 2027 \end{array}\right.$$

+) **TH1**: $a < 4$ thì $a - 2024 < -3$ và $6a - 27 < -3$.

Bảng biến thiên hàm số đã cho trên $(-\infty; -3)$ như sau:

x	$-\infty$		-3
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

Khi đó $f(a-2024) < 0,\ f(6a-27) < 0 \Rightarrow f(a-2024) + f(6a-27) < 0$.

Suy ra $a < 4$ không thoả mãn bài toán.

+) **TH2**: $5 < a < 2021$ thì $a - 2024 < -3$ và $-6a + 27 < -3$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & f(a-2024) + f(6a-27) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(a-2024) \geq f(-6a+27) \\ \Leftrightarrow\ & a \leq 293. \end{aligned}$$

Suy ra $5 < a \leq 293$.

+) **TH3**: $a > 2027$ thì $a - 2024 > 3$ và $6a - 27 > 3$.

Bảng biến thiên hàm số đã cho trên $(3; +\infty)$ như sau:

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Khi đó $f(a-2024) > 0,\ f(6a-27) > 0 \Rightarrow f(a-2024) + f(6a-27) > 0$.

Suy ra $a > 2027$ thoả mãn bài toán.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 5 < a \leq 293 \\ 2027 < a < 2100 \end{array}\right.$ hay có 360 giá trị nguyên của $a \in (-\infty; 2100)$ thoả mãn $f(a-2024) + f(6a-27) \geq 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; a > 0)$ có hai cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, giá trị của $\int\limits_{0}^{x_2} (x+2)f''(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(-7; -6)$. **B** $(0; 1)$. **C** $(6; 7)$. **D** $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Do $f(x)$ có hai cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) nên $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.
Vì $x_1 + x_2 = 0$ nên $\frac{-2b}{3a} = 0 \Rightarrow b = 0$ suy ra $f'(x) = 3ax^2 + c \Rightarrow f''(x) = 6ax$.

Ta có $f'(x)f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$y = f'(x)f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$ nên

$$\frac{9}{4} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|f'(x)f''(x)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{0} f'(x)f''(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{x_2} f'(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[f'(x)\right]^2\Big|_{x_1}^{0} - \frac{1}{2}\left[f'(x)\right]^2\Big|_{0}^{x_2} = c^2$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{2} \text{ (do } c < 0).$$

Suy ra $f'(x) = 3ax^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{2a}} \end{array}\right.$.

Ta có $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{0} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Xét $A = \int\limits_{x_1}^{0} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x$.

Ta có $A = \int\limits_{-x_1}^{0} \frac{f'(-t)}{3^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{-x_1} \frac{3^t f'(t)}{3^t+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{3^x f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Do đó

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_2} \frac{3^x f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} \left(3ax^2 - \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(ax^3 - \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} = -\sqrt{\frac{1}{2a}} = -\frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{49}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{12}{49}x \text{ và } x_2 = \frac{7}{2}.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^{x_2} (x+2)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{7}{2}} \frac{12}{49}x(x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$.

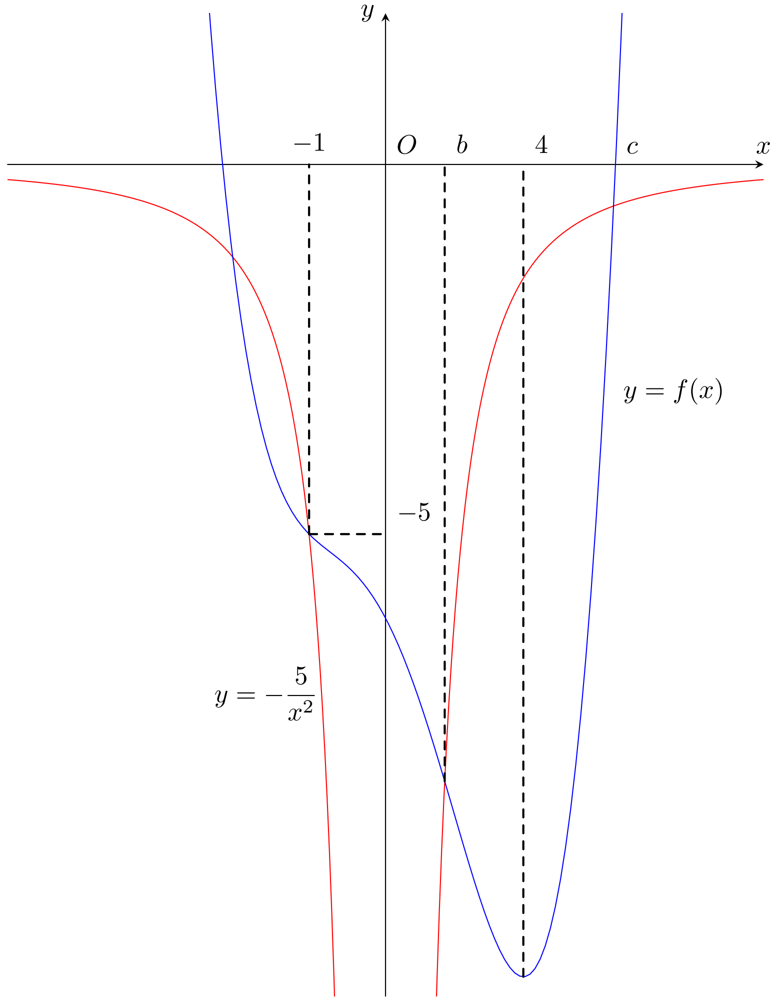
Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Xét hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(-1) = -5$. Hàm số $y = f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, $f'(4) = 0$ và $f'(-1) = a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-100; 0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y = \left|f(x) + \dfrac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

(A) 9. (B) 10. (C) 90. (D) 89.

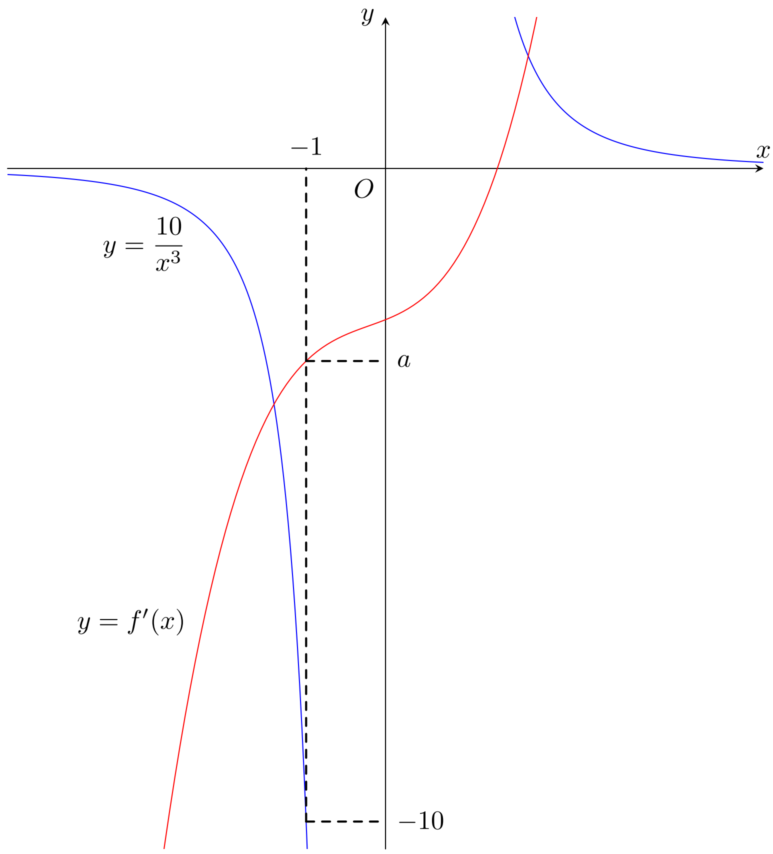
Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \dfrac{5}{x^2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \dfrac{10}{x^3}$.
Từ giả thiết suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Ta có $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{5}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b \\ x=c. \end{array}\right.$

Từ giả thiết suy ra đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{10}{x^3}$.

Do đó yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = \dfrac{10}{x^3}$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-1; +\infty)$

$\Leftrightarrow a \geq -10$.

Vậy các giá trị a thoả mãn là $a \in \{-10; -9; \cdots; -2; -1\}$.

Chọn đáp án B

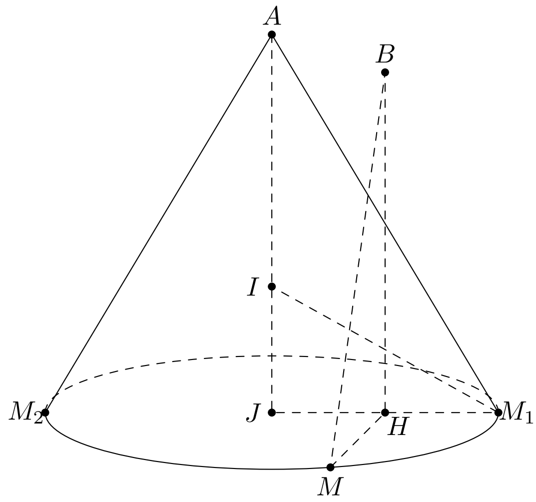
Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 6; -1)$, $B(2; -4; -1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; -1)$ đi qua điểm A. Điểm $M(a; b; c)$ (với $c > 0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. **B** $\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$. **C** $\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. **D** $\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải.

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ bán kính $R = IA = 4$.
Đặt $KA = x, IK = y$.
Tam giác IAM có diện tích bằng



$$IK \cdot IA = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow xy = 2\sqrt{7} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{7}}{x}.$$

Vì tam giác IAK vuông tại K có $IA = 4$ nên

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & x^2 + \frac{28}{x^2} = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 16x^2 + 28 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ x^2 = 14 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{14}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì IAM là tam giác tù nên $x = \sqrt{2}$ không thỏa mãn.
Do đó, $x = \sqrt{14} \Rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{14}} = \sqrt{2}$.
Suy ra, AM là đường sinh của hình nón đỉnh A, M thuộc đường tròn đáy tâm H

$$\tan \widehat{MAH} = \frac{IK}{AK} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos \widehat{MAH} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{AH}{2x} \Rightarrow AH = 7.$$

Suy ra, bán kính đường tròn đáy của hình nón là

$$r = \sqrt{(2\sqrt{14})^2 - 7^2} = \sqrt{7} \Rightarrow IH = 7 - 4 = 3 \Rightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{HA} \Rightarrow H(1;-1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (0;-7;0).$$

Suy ra, M thuộc mặt phẳng đi qua H, có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AH} = (0;-7;0)$, có phương trình: $(P)\colon y + 1 = 0$.
Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(P)\colon y + 1 = 0$.
Ta có $B'(2;-1;-1) \Rightarrow IB' = \sqrt{10} < R$.
Ta có $\mathrm{d}(AI, BM) = \mathrm{d}\left(AI, B'M\right) = \mathrm{d}\left(H, B'M\right) \leq HB'$.
Suy ra, $\mathrm{d}(AI, BM)$ lớn nhất bằng HB' đạt được khi

$$\begin{aligned} & HB' \perp MB' \Rightarrow M(a;-1;c) \\ & \overrightarrow{HB'} = (1;0;0),\ \overrightarrow{MB'} = (2-a;0;-1-c) \\ & \overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{MB'} = 0 \Leftrightarrow 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow M(2;-1;c). \end{aligned}$$

Vì $HM = r = \sqrt{7} \Rightarrow 1 + (c+1)^2 = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c + 1 = \sqrt{6} \\ c + 1 = -\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -1 + \sqrt{6} \text{ (Thoả mãn)} \\ c = -1 - \sqrt{6} \text{ (Loại).} \end{array}\right.$

Vậy $a + b + c = 2 - 1 - 1 + \sqrt{6} \approx 2{,}45$.
Chọn đáp án B □

— HẾT —

PHẦN I
ĐÁP ÁN

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

ĐÁP ÁN THAM KHẢO CÁC ĐỀ THI QUỐC GIA

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 1

1. C	2. C	3. B	4. D	5. A	6. A	7. C	8. B	9. D	10. C
11. A	12. B	13. B	14. A	15. C	16. D	17. D	18. A	19. C	20. D
21. B	22. A	23. B	24. C	25. C	26. C	27. A	28. D	29. D	30. A
31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. D	37. D	38. B	39. D	40. C
41. A	42. B	43. D	44. A	45. C	46. B	47. A	48. D	49. B	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 2

1. D	2. D	3. B	4. A	5. B	6. D	7. D	8. D	9. A	10. D
11. A	12. A	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. A	19. B	20. C
21. D	22. A	23. A	24. B	25. B	26. B	27. D	28. B	29. C	30. D
31. A	32. B	33. C	34. D	35. D	36. A	37. B	38. D	39. A	40. B
41. C	42. C	43. B	44. A	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 3

1. B	2. C	3. C	4. D	5. C	6. B	7. A	8. D	9. D	10. A
11. B	12. C	13. C	14. A	15. C	16. D	17. D	18. D	19. A	20. D
21. A	22. C	23. B	24. C	25. C	26. D	27. C	28. D	29. D	30. D
31. A	32. A	33. C	34. C	35. C	36. D	37. D	38. D	39. C	40. A
41. A	42. D	43. C	44. D	45. C	46. A	47. C	48. B	49. C	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 4

1. D	2. B	3. B	4. C	5. B	6. D	7. A	8. C	9. D	10. B
11. B	12. C	13. A	14. C	15. D	16. D	17. C	18. B	19. C	20. B
21. D	22. C	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. D	33. C	34. D	35. C	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C
41. B	42. D	43. B	44. B	45. C	46. C	47. D	48. D	49. C	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 5

1. D	2. A	3. B	4. C	5. D	6. A	7. A	8. D	9. B	10. B
11. A	12. C	13. C	14. A	15. D	16. D	17. B	18. D	19. B	20. B
21. C	22. D	23. C	24. D	25. B	26. A	27. D	28. B	29. B	30. A
31. D	32. C	33. A	34. D	35. B	36. C	37. B	38. C	39. D	40. C
41. C	42. C	43. B	44. C	45. A	46. A	47. A	48. D	49. C	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 6

1. B	2. D	3. D	4. C	5. B	6. A	7. B	8. D	9. A	10. B
11. A	12. C	13. D	14. C	15. A	16. C	17. A	18. D	19. C	20. C
21. D	22. B	23. A	24. A	25. D	26. B	27. A	28. D	29. D	30. B
31. D	32. B	33. C	34. D	35. C	36. A	37. C	38. C	39. C	40. A
41. A	42. A	43. C	44. B	45. D	46. B	47. D	48. D	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 7

1. C	2. C	3. A	4. D	5. A	6. A	7. B	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. C	14. A	15. C	16. D	17. D	18. B	19. C	20. D
21. B	22. C	23. C	24. C	25. A	26. C	27. B	28. D	29. D	30. C
31. C	32. B	33. C	34. B	35. C	36. D	37. B	38. B	39. A	40. D
41. D	42. A	43. D	44. A	45. B	46. A	47. B	48. A	49. B	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 8

1. A	2. B	3. C	4. A	6. A	7. D	8. C	9. D	10. B	11. A
12. A	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. A	19. C	20. D	21. B
22. A	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. C	29. A	30. D	31. B
32. D	33. A	34. B	35. A	36. B	37. C	38. D	39. C	40. C	41. A
42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. A	50. A	

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 9

1. D	2. D	3. A	4. A	5. B	6. C	7. D	8. B	9. D	10. C
11. D	12. C	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. D	19. A	20. D
21. A	22. A	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. B	30. C
31. D	32. B	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. B	39. C	40. B
41. C	42. A	43. D	44. C	45. B	46. B	47. D	48. B	49. C	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 10

1. B	2. A	3. A	4. D	5. D	6. A	7. A	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. B	15. C	16. A	17. C	18. D	19. A	20. A
21. B	22. D	23. D	24. D	25. A	26. A	27. A	28. C	29. A	30. C
31. D	32. B	33. D	34. B	35. C	36. A	37. D	38. B	39. D	40. B
41. D	42. D	43. C	44. B	45. C	46. D	47. B	48. C	49. B	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 11

1. C	2. B	3. D	4. A	5. D	6. D	7. D	8. A	9. C	10. D
11. B	12. C	13. B	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. C	20. C
21. B	22. A	23. B	24. B	25. A	26. C	27. D	28. D	29. A	30. A
31. A	32. D	33. D	34. C	35. C	36. B	37. C	38. D	39. B	40. B
41. B	42. C	43. C	44. A	45. B	46. B	47. A	48. C	49. A	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 12

1. C	2. C	3. D	4. D	5. A	6. B	7. B	8. A	9. D	10. B
11. C	12. C	13. A	14. C	15. B	16. D	17. A	18. B	19. D	20. D
21. A	22. A	23. C	24. B	25. D	26. A	27. C	28. B	29. B	30. C
31. D	32. A	33. C	34. D	35. A	36. A	37. D	38. B	39. B	40. A
41. C	42. C	43. A	44. D	45. D	46. B	47. B	48. C	49. A	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 13

1. A	2. D	3. A	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. B	12. B	13. A	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. D
21. A	22. D	23. A	24. C	25. D	26. A	27. C	28. C	29. D	30. B
31. C	32. A	33. A	34. B	35. D	36. A	37. C	38. A	39. D	40. C
41. C	42. B	43. B	44. C	45. A	46. B	47. C	48. B	49. C	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 14

1. B	2. A	3. C	4. C	5. D	6. A	7. C	8. A	9. C	10. B
11. A	12. B	13. C	14. C	15. A	16. C	17. B	18. A	19. A	20. B
21. C	22. A	23. D	24. A	25. A	26. D	27. D	28. D	29. B	30. B
31. B	32. C	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. B
41. B	42. C	43. B	44. A	45. C	46. C	47. C	48. A	49. B	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 15

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. C	7. C	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. B	14. C	15. C	16. C	17. D	18. A	19. B	20. B
21. D	22. A	23. C	24. C	25. A	26. D	27. B	28. C	29. B	30. D
31. A	32. C	33. C	34. A	35. B	36. D	37. B	38. A	39. D	40. A
41. B	42. D	43. B	44. D	45. D	46. B	47. A	48. D	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 16

1. C	2. B	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. A	16. C	17. D	18. D	19. A	20. C
21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. D	27. A	28. C	29. C	30. A
31. C	32. C	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. C	39. D	40. C
41. A	42. C	43. D	44. D	45. A	46. A	47. A	48. C	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 17

1. A	2. B	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. B	9. B	10. A
11. D	12. A	13. C	14. C	15. C	16. A	17. B	18. B	19. D	20. D
21. B	22. C	23. C	24. A	25. D	26. A	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. C	33. A	34. B	35. D	36. B	37. A	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. B	44. C	45. D	46. C	47. C	48. B	49. C	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 18

1. A	2. A	3. C	4. D	5. A	6. B	7. B	8. D	9. A	10. C
11. A	12. C	13. B	14. D	15. D	16. A	17. B	18. B	19. C	20. D
21. A	22. B	23. C	24. A	25. B	26. A	27. C	28. D	29. A	30. C
31. A	32. B	33. A	34. C	35. B	36. A	37. A	38. B	39. D	40. A
41. B	42. A	43. C	44. C	45. B	46. C	47. D	48. B	49. D	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 19

1. A	2. A	3. C	4. B	5. C	6. D	7. A	8. C	9. C	10. C
11. D	12. D	13. D	14. A	15. B	16. C	17. D	18. D	19. C	20. B
21. B	22. D	23. B	24. C	25. A	26. B	27. C	28. C	29. D	30. A
31. B	32. C	33. D	34. D	35. A	36. B	37. C	38. D	39. D	40. A
41. A	42. B	43. C	44. D	45. C	46. C	47. D	48. B	49. B	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 20

1. C	2. B	3. B	4. D	5. D	6. A	7. C	8. A	9. D	10. D
11. B	12. C	13. D	14. B	15. B	16. A	17. B	18. C	19. B	20. B
21. C	22. C	23. C	24. B	25. C	26. A	27. C	28. A	29. B	30. A
31. C	32. C	33. C	34. B	35. A	36. C	37. A	38. A	39. B	40. B
41. A	42. A	43. A	44. B	45. C	46. A	47. A	48. B	49. C	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 21

1. D	2. C	3. D	4. B	5. A	6. B	7. C	8. C	9. D	10. C
11. B	12. B	13. C	14. D	15. C	16. A	17. C	18. B	19. A	20. A
21. D	22. B	23. C	24. D	25. B	26. B	27. C	28. B	29. A	30. A
31. D	32. D	33. B	34. C	35. C	36. A	37. A	38. D	39. B	40. D
41. D	42. B	43. C	44. D	45. D	46. C	47. A	48. A	49. D	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 22

1. C	2. A	3. B	4. C	5. B	6. C	7. D	8. D	9. C	10. A
11. D	12. B	13. A	14. C	15. D	16. C	17. B	18. D	19. C	20. C
21. A	22. B	23. D	24. D	25. A	26. D	27. A	28. A	29. A	30. D
31. A	32. C	33. C	34. A	35. C	36. C	37. C	38. A	39. C	40. A
41. A	42. D	43. C	44. C	45. D	46. C	47. D	48. A	49. D	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 23

1. C	2. A	3. C	4. B	5. C	6. B	7. B	8. D	9. C	10. A
11. B	12. A	13. B	14. B	15. C	16. A	17. D	18. C	19. A	20. D
21. B	22. A	23. D	24. C	25. A	26. D	27. A	28. A	29. B	30. C
31. B	32. B	33. D	34. C	35. C	36. A	37. D	38. A	39. B	40. A
41. B	42. A	43. B	44. D	45. B	46. D	47. D	48. C	49. D	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 24

1. C	2. D	3. C	4. C	5. D	6. B	7. B	8. D	9. B	10. B
11. B	12. C	13. B	14. A	15. A	16. B	17. A	18. C	19. A	20. C
21. B	22. A	23. A	24. D	25. C	26. B	27. A	28. B	29. C	30. A
31. D	32. D	33. B	34. C	35. A	36. B	37. C	38. C	39. C	40. B
41. B	42. C	43. B	44. C	45. A	46. B	47. B	48. A	49. C	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 25

1. B	2. A	3. C	4. D	5. A	6. C	7. B	8. D	9. D	10. C
11. C	12. D	13. B	14. B	15. A	16. A	17. A	18. A	19. D	20. C
21. A	22. C	23. A	24. D	25. B	26. A	27. B	28. D	29. A	30. D
31. B	32. B	33. C	34. B	35. B	36. D	37. D	38. C	39. A	40. B
41. C	42. C	43. A	44. C	45. D	46. C	47. D	48. B	49. D	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 26

1. A	2. B	3. D	4. B	5. D	6. D	7. B	8. B	9. C	10. A
11. D	12. C	13. B	14. A	15. C	16. D	17. D	18. C	19. A	20. A
21. A	22. D	23. C	24. D	25. A	26. C	27. C	28. C	29. A	30. B
31. C	32. D	33. D	34. A	35. A	36. C	37. A	38. C	39. D	40. A
41. C	42. C	43. C	44. D	45. D	46. C	47. D	48. D	49. A	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 27

1. A	2. B	3. C	4. B	5. D	6. D	7. A	8. A	9. A	10. B
11. B	12. B	13. A	14. C	15. C	16. D	17. B	18. C	19. D	20. D
21. B	22. B	23. D	24. B	25. A	26. B	27. D	28. A	29. C	30. B
31. D	32. D	33. A	34. B	35. C	36. B	37. B	38. D	39. A	40. D
41. A	42. D	43. C	44. A	45. C	46. C	47. A	48. D	49. C	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 28

1. C	2. D	3. B	4. D	5. A	6. A	7. B	8. C	9. D	10. A
11. B	12. A	13. C	14. B	15. A	16. A	17. D	18. A	19. B	20. D
21. A	22. B	23. C	24. C	25. B	26. B	27. A	28. D	29. C	30. C
31. D	32. A	33. D	34. D	35. B	36. A	37. B	38. A	39. C	40. A
41. B	42. C	43. A	44. C	45. A	46. A	47. A	48. D	49. B	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 29

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. A	7. D	8. D	9. A	10. C
11. C	12. A	13. C	14. A	15. C	16. B	17. C	18. A	19. B	20. A
21. B	22. D	23. B	24. A	25. B	26. C	27. B	28. B	29. B	30. A
31. C	32. D	33. B	34. B	35. A	36. C	37. A	38. A	39. A	40. C
41. D	42. D	43. B	44. D	45. C	46. D	47. C	48. D	49. D	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 30

1. C	2. D	3. D	4. D	5. A	6. A	7. C	8. C	9. C	10. A
11. B	12. D	13. A	14. B	15. D	16. D	17. B	18. D	19. C	20. C
21. D	22. D	23. C	24. D	25. C	26. A	27. D	28. B	29. B	30. B
31. A	32. C	33. C	34. B	35. B	36. C	37. B	38. B	39. C	40. A
41. B	42. B	43. A	44. A	45. A	46. A	47. A	48. B	49. B	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 31

1. B	2. C	3. C	4. D	5. C	6. C	7. B	8. A	9. B	10. C
11. D	12. A	13. C	14. A	15. B	16. C	17. B	18. D	19. C	20. D
21. C	22. A	23. A	24. B	25. C	26. A	27. D	28. A	29. B	30. A
31. A	32. D	33. D	34. B	35. B	36. A	37. B	38. A	39. D	40. D
41. B	42. D	43. D	44. A	45. D	46. A	47. D	48. B	49. D	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 32

1. B	2. C	3. D	4. C	5. C	6. D	7. C	8. B	9. B	10. B
11. C	12. C	13. B	14. C	15. C	16. C	17. A	18. B	19. A	20. D
21. D	22. B	23. A	24. A	25. C	26. A	27. D	28. B	29. A	30. D
31. A	32. D	33. B	34. A	35. A	36. A	37. B	38. A	39. B	40. D
41. A	42. B	43. D	44. B	45. D	46. D	47. B	48. A	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 33

1. C	2. D	3. A	4. A	5. D	6. A	7. B	8. A	9. B	10. B
11. D	12. B	13. C	14. B	15. A	16. D	17. B	18. B	19. C	20. C
21. D	22. D	23. A	24. A	25. B	26. B	27. C	28. B	29. C	30. B
31. C	32. C	33. D	34. D	35. A	36. B	37. D	38. D	39. A	40. B
41. B	42. C	43. D	44. C	45. A	46. D	47. D	48. B	49. A	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 34

1. C	2. D	3. D	4. D	5. A	6. A	7. D	8. B	9. A	10. D
11. C	12. D	13. C	14. B	15. C	16. A	17. B	18. B	19. A	20. B
21. D	22. B	23. A	24. A	25. A	26. D	27. D	28. D	29. B	30. A
31. D	32. A	33. A	34. B	35. A	36. B	37. A	38. A	39. A	40. B
41. B	42. D	43. D	44. B	45. B	46. D	47. A	48. D	49. B	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 35

1. C	2. B	3. B	4. B	5. C	6. A	7. C	8. C	9. A	10. D
11. C	12. C	13. B	14. C	15. D	16. D	17. B	18. B	19. D	20. C
21. D	22. A	23. D	24. A	25. A	26. C	27. A	28. D	29. A	30. A
31. B	32. D	33. B	34. A	35. B	36. D	37. A	38. C	39. D	40. A
41. D	42. B	43. C	44. D	45. B	46. B	47. C	48. B	49. D	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 36

1. D	2. C	3. C	4. B	5. B	6. C	7. C	8. A	9. C	10. B
11. D	12. C	13. C	14. C	15. D	16. A	17. D	18. A	19. B	20. A
21. A	22. A	23. A	24. D	25. B	26. B	27. C	28. B	29. C	30. A
31. B	32. A	33. B	34. C	35. B	36. A	37. C	38. C	39. A	40. A
41. C	42. B	43. B	44. B	45. A	46. B	47. B	48. C	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 37

1. B	2. A	3. C	4. D	5. C	6. C	7. A	8. C	9. C	10. B
11. C	12. B	13. C	14. C	15. A	16. A	17. C	18. C	19. C	20. A
21. D	22. A	23. D	24. B	25. A	26. A	27. A	28. B	29. B	30. A
31. A	32. A	33. B	34. B	35. A	36. D	37. B	38. D	39. D	40. B
41. B	42. B	43. D	44. B	45. D	46. D	47. D	48. D	49. D	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 38

1. A	2. B	3. D	4. C	5. B	6. C	7. C	8. C	9. B	10. A
11. C	12. D	13. D	14. C	15. B	16. C	17. B	18. C	19. D	20. B
21. A	22. B	23. C	24. C	25. C	26. B	27. A	28. D	29. D	30. C
31. A	32. B	33. B	34. D	35. C	36. D	37. D	38. D	39. B	40. B
41. D	42. D	43. B	44. C	45. B	46. D	47. D	48. D	49. B	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 39

1. D	2. B	3. B	4. A	5. D	6. D	7. C	8. A	9. B	10. D
11. C	12. C	13. B	14. B	15. B	16. A	17. C	18. A	19. B	20. B
21. D	22. B	23. C	24. C	25. C	26. B	27. C	28. A	29. C	30. B
31. A	32. D	33. C	34. C	35. D	36. D	37. A	38. D	39. C	40. B
41. A	42. D	43. A	44. C	45. A	46. A	47. A	48. D	49. A	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 40

1. B	2. A	3. B	4. D	5. D	6. C	7. B	8. D	9. A	10. C
11. B	12. B	13. B	14. D	15. D	16. B	17. A	18. C	19. D	20. C
21. A	22. B	23. B	24. B	25. C	26. D	27. D	28. C	29. C	30. C
31. D	32. A	33. D	34. A	35. A	36. C	37. B	38. A	39. D	40. A
41. D	42. A	43. A	44. A	45. B	46. D	47. D	48. A	49. B	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 41

1. A	2. C	3. B	4. B	5. B	6. D	7. B	8. C	9. B	10. D
11. C	12. D	13. A	14. D	15. C	16. A	17. A	18. D	19. D	20. C
21. D	22. D	23. A	24. A	25. C	26. D	27. C	28. C	29. A	30. A
31. D	32. D	33. D	34. A	35. D	36. A	37. C	38. C	39. D	40. D
41. C	42. A	43. C	44. C	45. A	46. B	47. C	48. A	49. C	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 42

1. D	2. B	3. A	4. D	5. B	6. C	7. B	8. A	9. B	10. D
11. D	12. A	13. B	14. B	15. C	16. A	17. A	18. B	19. B	20. D
21. C	22. D	23. C	24. D	25. D	26. D	27. B	28. B	29. D	30. D
31. C	32. D	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. C	39. D	40. B
41. B	42. C	43. B	44. C	45. C	46. C	47. B	48. C	49. B	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 43

1. A	2. B	3. B	4. D	5. C	6. A	7. D	8. A	9. A	10. B
11. D	12. B	13. C	14. D	15. C	16. C	17. B	18. B	19. A	20. C
21. B	22. C	23. B	24. B	25. D	26. C	27. B	28. D	29. D	30. C
31. D	32. C	33. B	34. D	35. C	36. C	37. D	38. D	39. B	40. C
41. D	42. B	43. C	44. C	45. B	46. D	47. C	48. B	49. D	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 44

1. A	2. C	3. C	4. A	5. B	6. B	7. C	8. A	9. D	10. B
11. D	12. A	13. B	14. D	15. D	16. D	17. B	18. C	19. B	20. A
21. A	22. B	23. C	24. A	25. A	26. A	27. C	28. A	29. C	30. B
31. C	32. B	33. C	34. A	35. A	36. A	37. C	38. C	39. B	40. A
41. B	42. C	43. B	44. C	45. C	46. B	47. B	48. C	49. C	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 45

1. B	2. B	3. A	4. A	5. B	6. D	7. C	8. D	9. B	10. A
11. C	12. D	13. D	14. C	15. D	16. A	17. C	18. A	19. C	20. A
21. C	22. C	23. A	24. B	25. A	26. C	27. D	28. A	29. C	30. A
31. B	32. D	33. B	34. B	35. D	36. C	37. D	38. B	39. D	40. D
41. A	42. A	43. D	44. B	45. D	46. B	47. D	48. C	49. C	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 46

1. D	2. C	3. A	4. D	5. C	6. B	7. D	8. D	9. A	10. B
11. D	12. D	13. C	14. A	15. D	16. C	17. B	18. A	19. C	20. B
21. C	22. D	23. C	24. D	25. D	26. C	27. A	28. A	29. B	30. C
31. B	32. C	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. B	39. B	40. A
41. B	42. A	43. C	44. C	45. A	46. A	47. C	48. B	49. A	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 47

1. B	2. B	3. A	4. A	5. D	6. C	7. C	8. B	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. B	15. D	16. D	17. D	18. B	19. B	20. B
21. D	22. B	23. B	24. D	25. C	26. A	27. D	28. A	29. A	30. D
31. A	32. D	33. B	34. C	35. C	36. D	37. D	38. C	39. D	40. C
41. A	42. D	43. C	44. A	45. C	46. C	47. C	48. B	49. C	50. A

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 48

1. B	2. D	3. C	4. C	5. A	6. A	7. B	8. D	9. C	10. A
11. A	12. C	13. C	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. B
21. A	22. A	23. A	24. C	25. B	26. D	27. B	28. C	29. D	30. D
31. D	32. C	33. B	34. B	35. A	36. B	37. D	38. A	39. B	40. D
41. C	42. D	43. A	44. A	45. A	46. D	47. B	48. C	49. D	50. C

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 49

1. A	2. D	3. D	4. B	5. B	6. A	7. A	8. C	9. C	10. A
11. B	12. A	13. D	14. C	15. A	16. D	17. C	18. C	19. B	20. A
21. B	22. C	23. D	24. C	25. B	26. B	27. A	28. C	29. B	30. D
31. C	32. A	33. C	34. A	35. C	36. B	37. A	38. A	39. D	40. D
41. D	42. C	43. C	44. D	45. A	46. D	47. B	48. A	49. B	50. D

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 50

1. D	2. C	3. C	4. B	5. C	6. A	7. D	8. D	9. D	10. C
11. A	12. D	13. D	14. C	15. A	16. C	17. B	18. B	19. C	20. C
21. A	22. B	23. C	24. D	25. D	26. C	27. C	28. B	29. D	30. D
31. A	32. A	33. D	34. B	35. D	36. A	37. B	38. B	39. D	40. A
41. B	42. A	43. A	44. B	45. A	46. A	47. A	48. D	49. B	50. B

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 51

1. D	2. D	3. A	4. B	5. C	6. D	7. C	8. B	9. C	10. A
11. A	12. D	13. A	14. C	15. A	16. B	17. A	18. A	19. D	20. A
21. B	22. D	23. C	24. A	25. B	26. A	27. B	28. D	29. A	30. B
31. A	32. B	33. A	34. C	35. C	36. D	37. B	38. D	39. C	40. C
41. D	42. B	43. D	44. B	45. C	46. C	47. D	48. C	49. B	50. B