TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 3
ĐỒ THỊ

Nội dung

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ
2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN
3. BẬC CỦA ĐỈNH
4. ĐẲNG CẤU
5. ĐỒ THỊ CON
6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

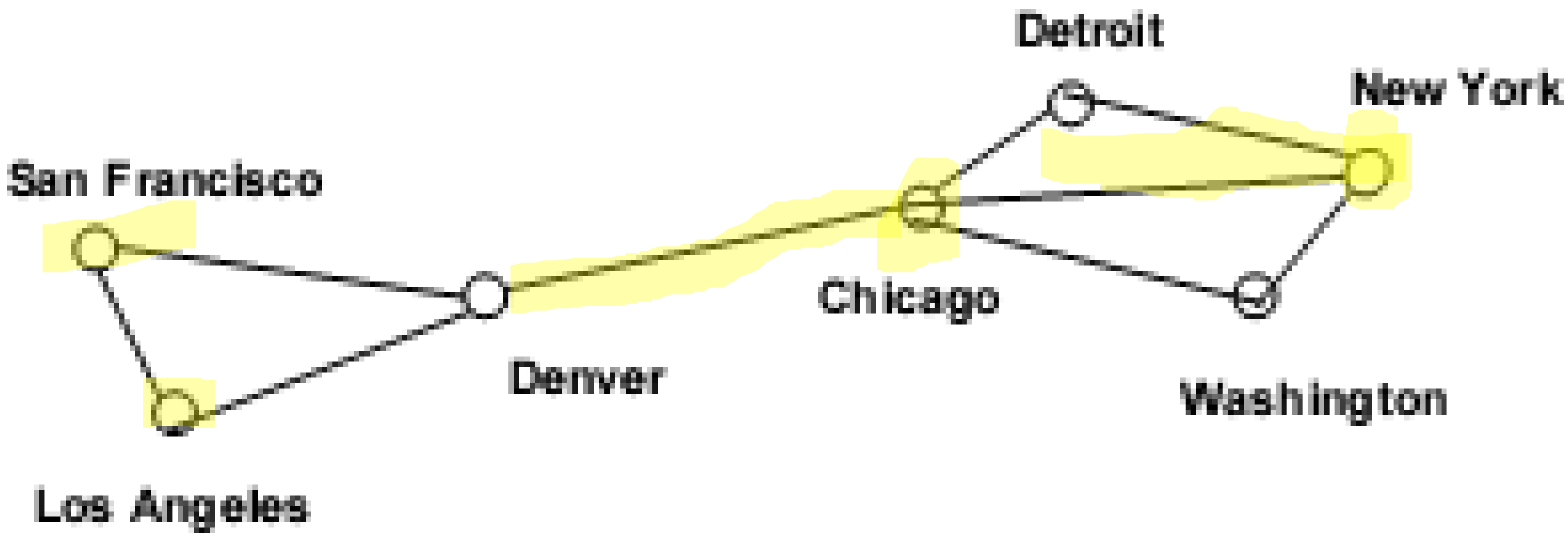
- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh (vô hướng hoặc có hướng) nối các đỉnh đó.
- Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị.
- Lý thuyết đồ thị giải quyết các bài toán sau:
  - Tìm đường đi ngắn nhất
  - Tìm cây bao trùm tối thiểu
  - Chu trình đường đi Euler, Hamilton
  - …

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

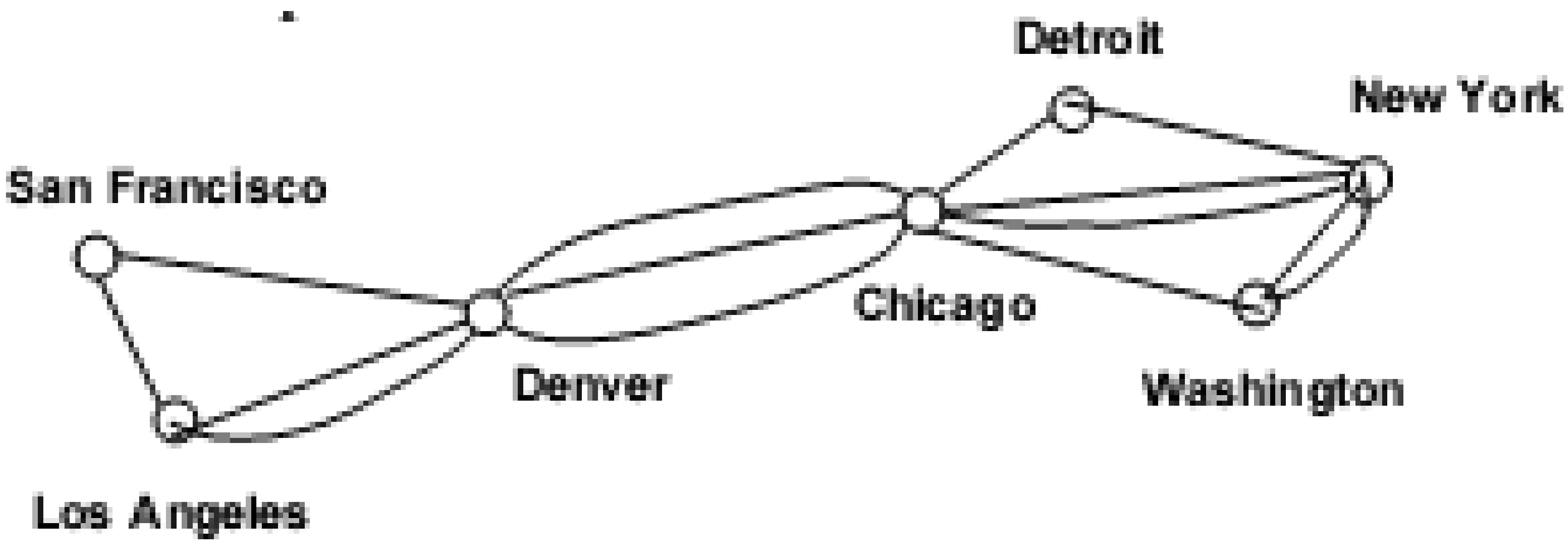
- **ĐN1:** Đồ thị vô hướng G=(V,E) là một bộ gồm 2 tập hợp:
  1. Tập V (Vertex) tập khác rỗng chứa các đỉnh
  2. Tập E (Edge) chứa các cạnh (đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh). Cạnh e nối 2 đỉnh v, w kí hiệu là e=(v,w)
  - Mỗi đỉnh được biểu diễn bằng 1 điểm, mỗi cạnh là một đoạn thẳng hoặc đường cong nối giữa 2 điểm đó
  - Nếu e=(v,w) thì đỉnh v và w gọi là kề nhau hay v, w liên thuộc cạnh e hay e liên thuộc cạnh v và w
  - Hai cạnh song song khi chúng liên thuộc cùng với 1 cặp đỉnh
  - Cạnh có 2 đầu mút trùng nhau gọi là khuyên

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

- **ĐN2:** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song, không có khuyên gọi là **Đơn đồ thị** vô hướng

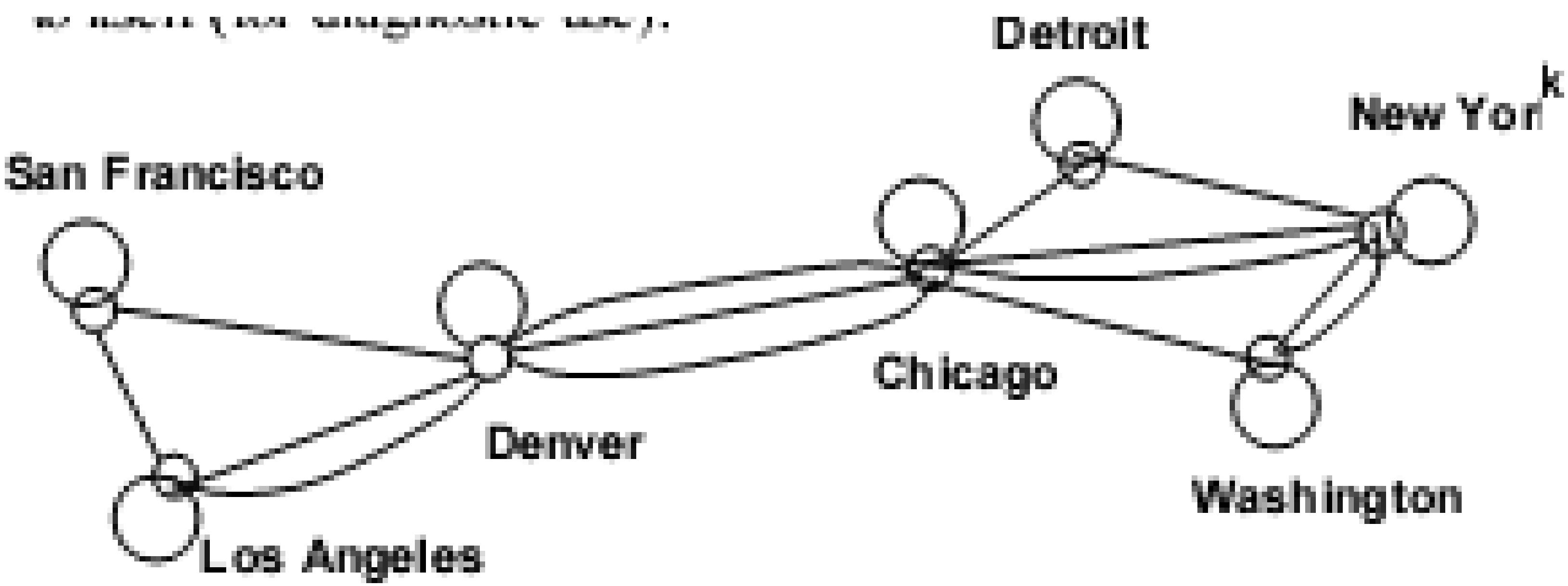


- **ĐN3**: Đồ thị vô hướng có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là **Đa đồ thị** vô hướng
  - Đơn đồ thị là đa đồ thị



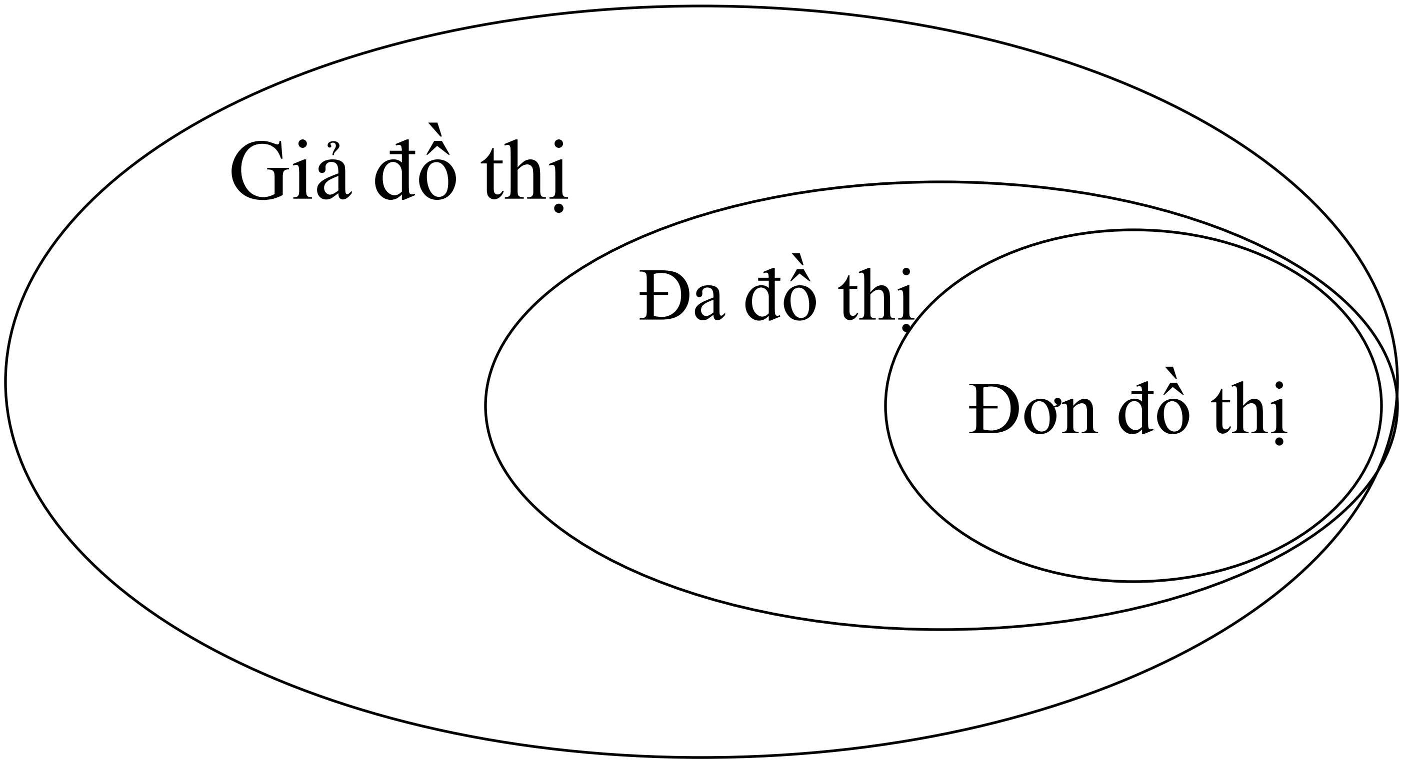
1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

- **ĐN4:** Đồ thị vô hướng có cạnh song song và có khuyên gọi là **Giả đồ thị** vô hướng



1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

- **Đồ thị vô hướng:**



1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

- **ĐN5:** Đa đồ thị có hướng G=(V,E) là một bộ gồm 2 tập hợp:
  i. Tập V tập khác rỗng chứa các đỉnh
  ii. Tập E chứa các cung, đó là các cặp có thứ tự hai đỉnh. Cung e nối 2 đỉnh v, w kí hiệu là e=(v,w), ta nói cung e đi từ v đến w
  – Mỗi đỉnh được biểu diễn bằng 1 điểm, mỗi cung là một đoạn thẳng hoặc đường cong có hướng nối giữa 2 điểm

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

- Nếu e=(v,w) thì đỉnh v và w gọi là kề nhau hay v, w liên thuộc cung e hay e liên thuộc cung v và w, v là đỉnh gốc (đầu), w là đỉnh ngọn (cuối)
- Hai cung song song khi chúng có cùng gốc và ngọn
- Cung có gốc và ngọn trùng nhau gọi là khuyên

- **ĐN6:** Đồ thị có hướng không chứa các cung song song gọi là **đồ thị có hướng**

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

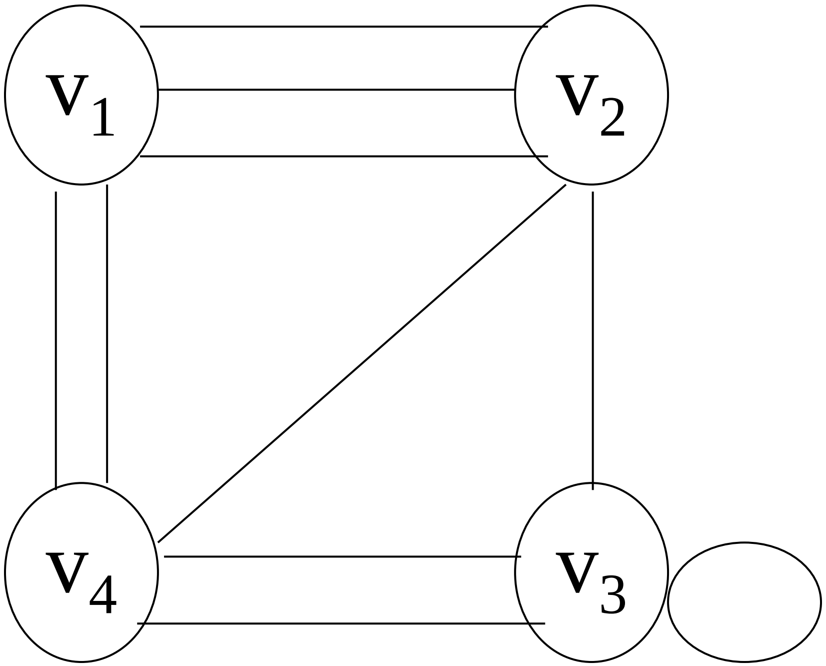
Đồ thị	Cạnh	Cạnh song song	Khuyên
Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không	Không
Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Không
Giả đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Có
Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	có	có

2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

- **ĐN1:** Ma trận liền kề (ma trận kề):
  - Cho đồ thị G = (V,E) với V = {1,2,…n}, ma trận kề của G là ma trận A(n*n) với a_{ij}= số cạnh nối từ đỉnh i đến đỉnh j
  - Như vậy, ma trận liền kề của một đồ thị vô hướng là ma trận vuông đối xứng trong khi ma trận liền kề của một đồ thị có hướng không có tính đối xứng.

2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

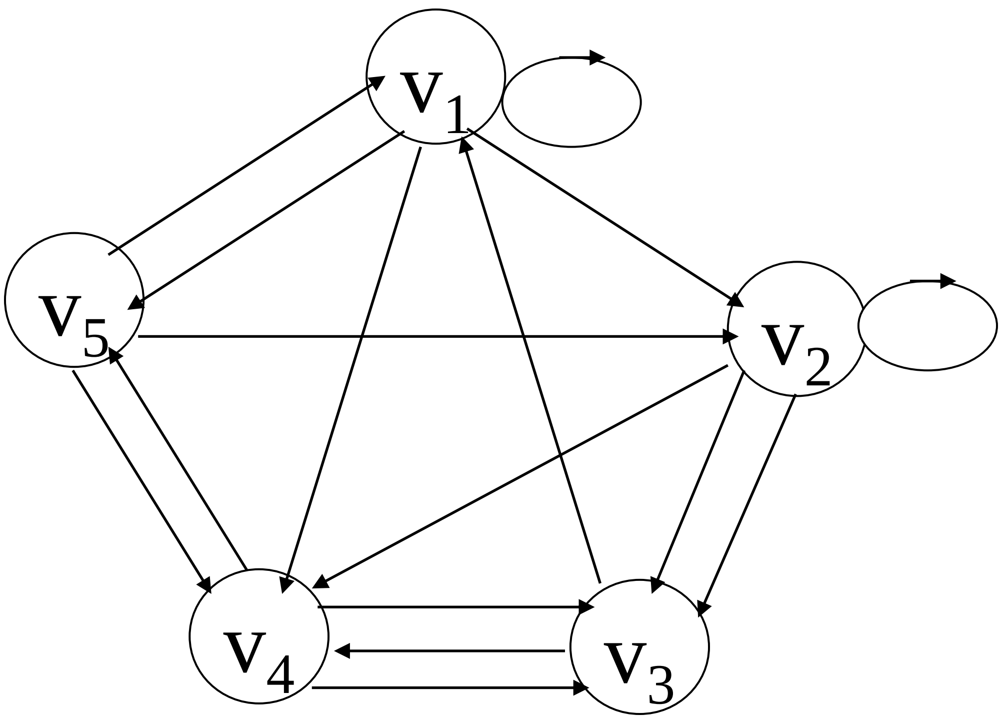
- **Ví dụ: Ma trận liền kề của đồ thị**



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

Ma trận liền kề với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

- **ĐN2: Ma trận liên thuộc: Cho đồ thị vô hướng G=(V,E), v_1, v_2, ..., v_n là các đỉnh và e_1, e_2, ..., e_m là các cạnh của G. Ma trận liên thuộc của G theo thứ tự trên của V và E là ma trận**

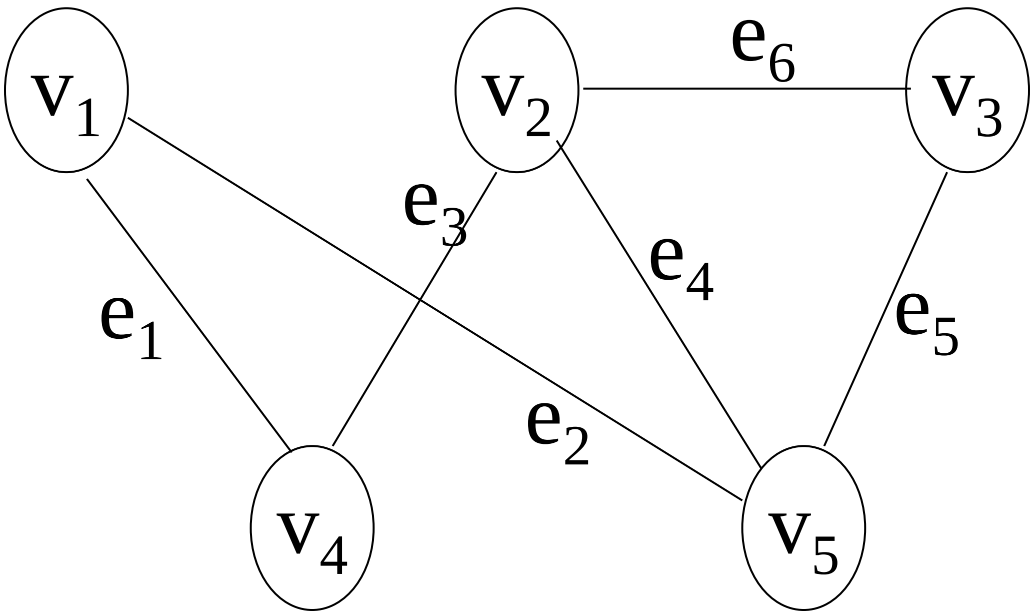
$$M = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \in M(n\times m, Z)$$

$$(m_{ij} = 0 \mid 1)$$

m_{ij} = 1 nếu cạnh e_j nối với đỉnh v_i và bằng 0 nếu cạnh e_j không nối với đỉnh v_i.

2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

Ví dụ ma trận liên thuộc với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 và các cạnh e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 là:

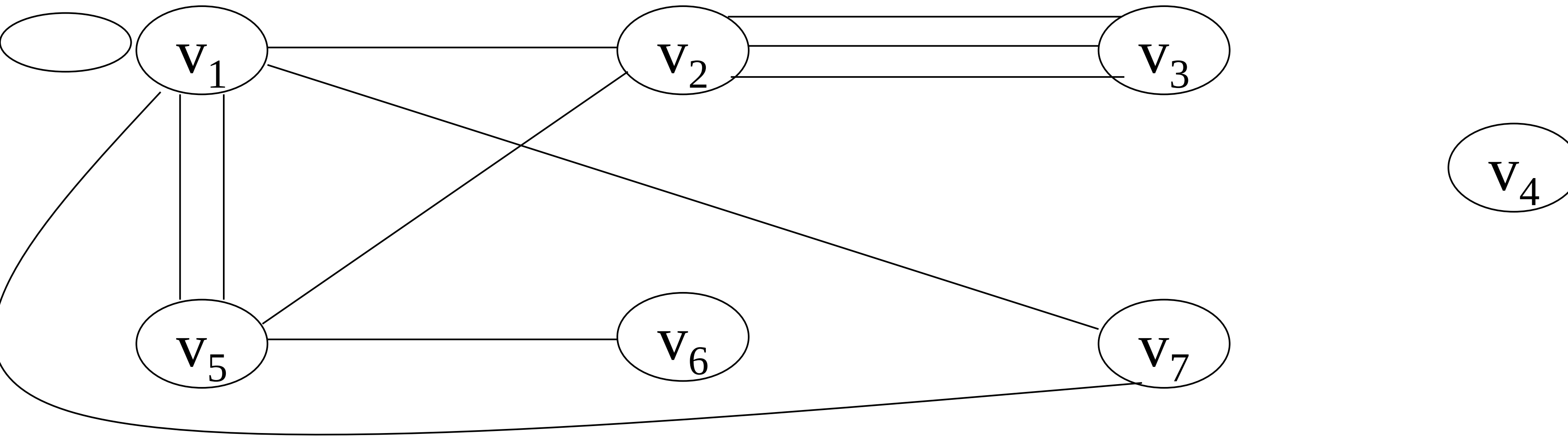


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. BẬC CỦA ĐỈNH

- **ĐN: cho đồ thị vô hướng G = (V,E), bậc của đỉnh v, kí hiệu là deg(v) là số cạnh kề với v. Một khuyên tại một đỉnh được đếm 2 lần cho bậc của đỉnh đó.**
  – **Đỉnh v gọi là đỉnh treo nếu deg(v)=1 và gọi là đỉnh cô lập nếu deg(v)=0**

3. BẬC CỦA ĐỈNH



- Ta có $deg(v_1)=7$, $deg(v_2)=5$, $deg(v_3)=3$, $deg(v_4)=0$, $deg(v_5)=4$, $deg(v_6)=1$, $deg(v_7)=2$. Đỉnh v_4 là đỉnh cô lập và đỉnh v_6 là đỉnh treo.

3. BẬC CỦA ĐỈNH

- **Mệnh đề: Cho đồ thị G = (V, E). Khi đó:**

$$\mathbf{2|E|} = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh: Rõ ràng mỗi cạnh e = (u,v) được tính một lần trong deg(u) và một lần trong deg(v). Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

3. BẬC CỦA ĐỈNH

Hệ quả: Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.

Chứng minh: Gọi V_1 và V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị G = (V, E). Khi đó:

$$\mathbf{2|E| =} \sum_{v\in V_1} \deg(v) + \sum_{v\in V_2} \deg(v)$$

Vế trái là một số chẵn và tổng thứ nhất cũng là một số chẵn nên tổng thứ hai là một số chẵn. Vì deg(v) là lẻ với mọi $v \in V_2$ nên $|V_2|$ là một số chẵn.

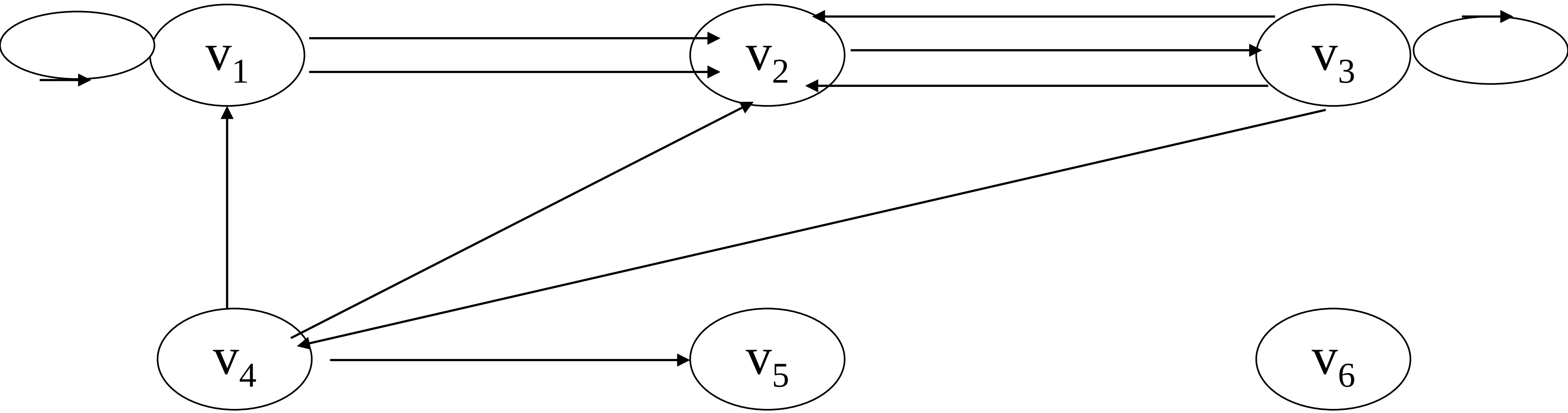
3. BẬC CỦA ĐỈNH

- **Mệnh đề:** Trong một đơn đồ thị, luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.
- **Chứng minh:** Xét đơn đồ thị G=(V,E) có |V|=n. Khi đó phát biểu trên được đưa về bài toán: trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau (Định lý Dirichlet)

3. BẬC CỦA ĐỈNH

- **ĐN: cho đồ thị có hướng G = (V,E), v ∈ V,**
  - ***bậc vào* của v, kí hiệu là $deg_i(v)$ là số cung có đỉnh cuối là v** *(inDegree)*
  - ***bậc ra* của v, kí hiệu là $deg_o(v)$ là số cung có đỉnh đầu là v** *(outDegree)*
  - ***bậc* của v $deg(v) = deg_i(v) + deg_o(v)$**
  - **Đỉnh có bậc vào và bậc ra cùng bằng 0 gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh có bậc vào bằng 1 và bậc ra bằng 0 gọi là đỉnh treo, cung có đỉnh cuối là đỉnh treo gọi là cung treo**

3. BẬC CỦA ĐỈNH



$deg_i(v_1) = 2$, $deg_o(v_1) = 3$, $deg_i(v_2) = 5$, $deg_o(v_2) = 1$,
$deg_i(v_3) = 2$, $deg_o(v_3) = 4$, $deg_i(v_4) = 1$, $deg_0(v_4) = 3$,
$deg_i(v_5) = 1$, $deg_o(v_5) = 0$, $deg_i(v_6) = 0$, $deg_o(v_6) = 0$.

3. BẬC CỦA ĐỈNH

Mệnh đề: Cho G =(V, E) là một đồ thị có hướng. Khi đó:

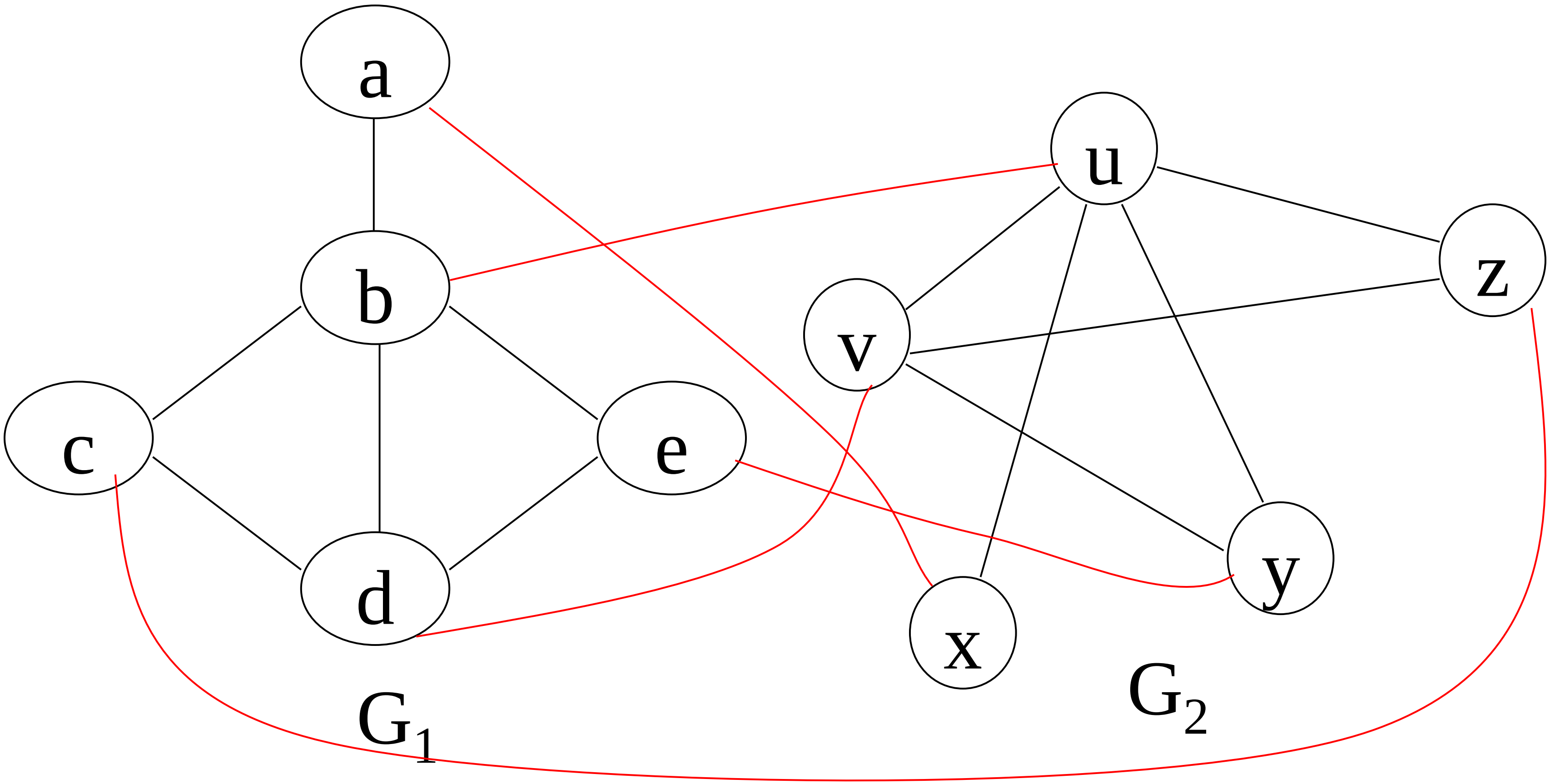
$$\sum_{v \in V} \deg_i(v) = \sum_{v \in V} \deg_o(v) \qquad = |\mathbf{E}|$$

Chứng minh: Kết quả có ngay là vì mỗi cung được tính một lần cho đỉnh đầu và một lần cho đỉnh cuối.

4. ĐẲNG CẤU

- **ĐN1:** Các đơn đồ thị $G_1=(V_1,E_1)$ và $G_2=(V_2,E_2)$ được gọi là đẳng cấu, ký hiệu $G_1 \cong G_2$
  - nếu tồn tại một song ánh f: $V_1 \to V_2$
  - sao cho uv là cạnh trong $G_1 \Leftrightarrow$ f(u)f(v) là cạnh trong G_2 với mọi u và v trong V_1
  - ánh xạ f như thế gọi là một phép đẳng cấu.

Ví dụ: Hai đơn đồ thị G_1 và G_2 sau là đẳng cấu qua phép đẳng cấu f: a⟶x, b⟶u, c⟶z, d⟶v, e⟶y:



4. ĐẲNG CẤU

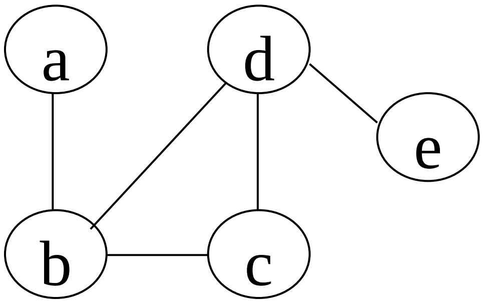
- **Nhận xét:** Nếu $G_{1,}$ G_2 là các đơn đồ thị đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:
  - Cùng số đỉnh
  - Cùng số cạnh
  - Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn
  - Deg(v) = deg(f(v))

5. ĐỒ THỊ CON

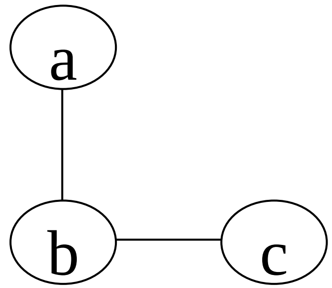
- **ĐN1:** Cho hai đồ thị $G_1=(V_1,E_1)$ và $G_2=(V_2,E_2)$. Ta nói G_2 là đồ thị con của G_1 nếu:
  - $V_2 \subseteq V_1$ và $E_2 \subseteq E_1$
  - Trường hợp $V_1=V_2$ thì G_2 gọi là đồ thị con khung (bao trùm) của G_1.

5. ĐỒ THỊ CON

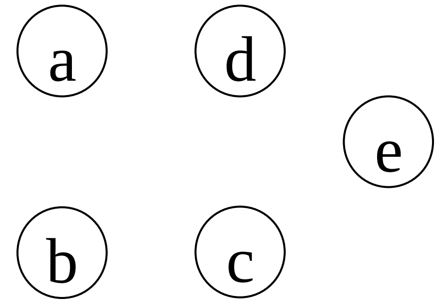
- G_1, G_2, G_3 và G_4 là các đồ thị con của G, G_5 thì không



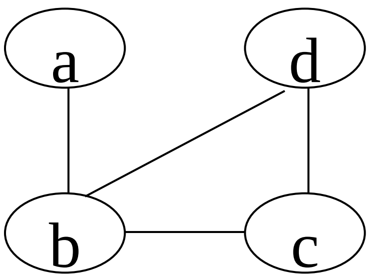
G



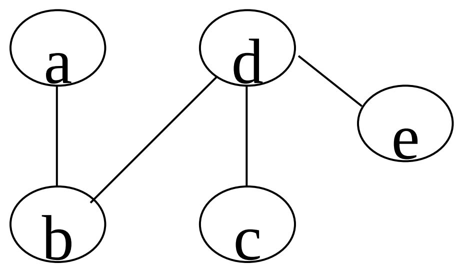
G_1



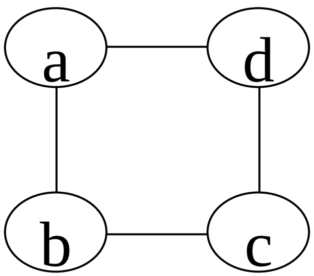
G_2



G_3



G_4



G_5

- G_2 và G_4 là đồ thị con bao trùm của G

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

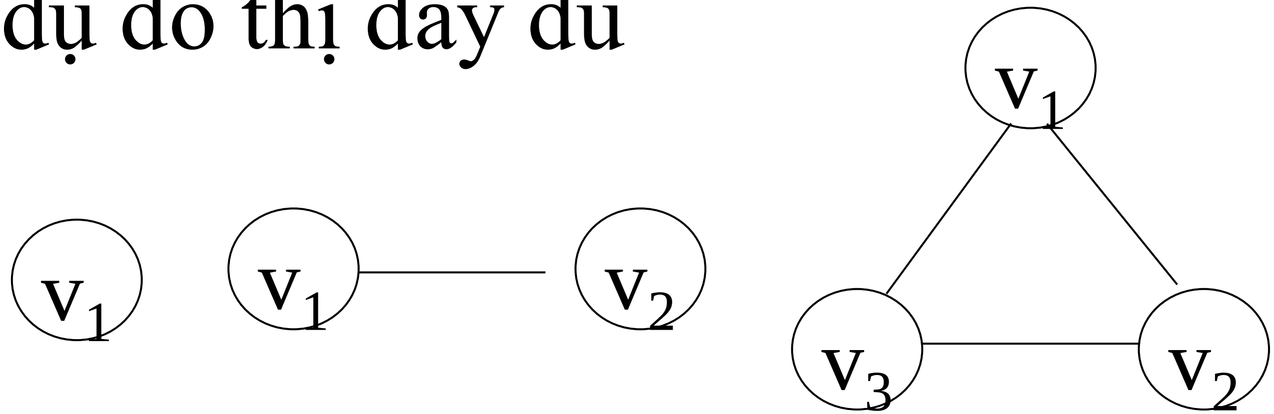
- **Đồ thị đầy đủ:** Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị mà hai đỉnh phân biệt bất kỳ của nó luôn liền kề. Như vậy, mỗi đỉnh của K_n có bậc là n–1 và K_n có số cạnh: $\dfrac{n(n-1)}{2}$

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

- **Đồ thị đầy đủ (Complete):** Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị mà hai đỉnh phân biệt bất kỳ của nó luôn liền kề. Như vậy, mỗi đỉnh của K_n có bậc là n–1 và K_n có số cạnh:

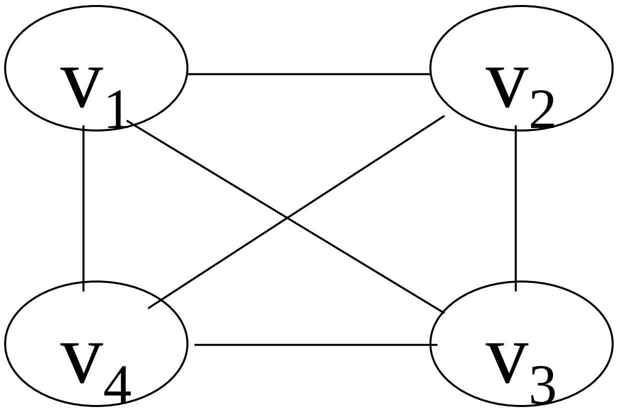
$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Ví dụ đồ thị đầy đủ

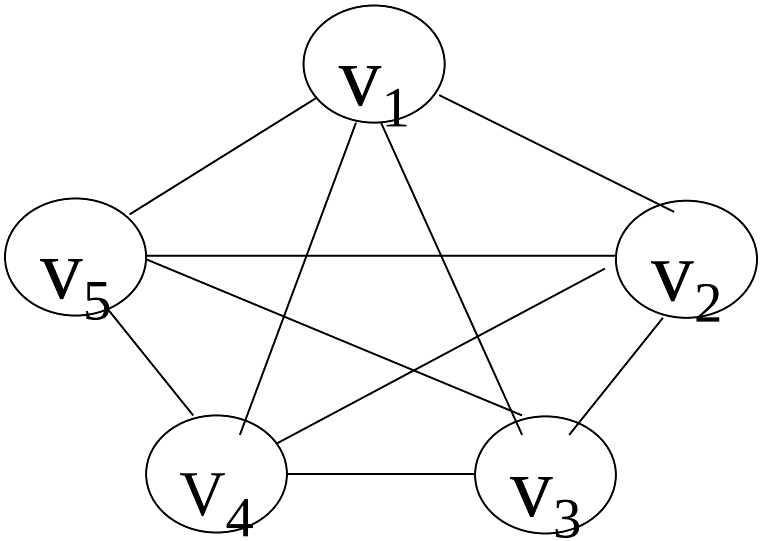


K_1 **K_2** **K_3**

Ví dụ đồ thị đầy đủ



K_4



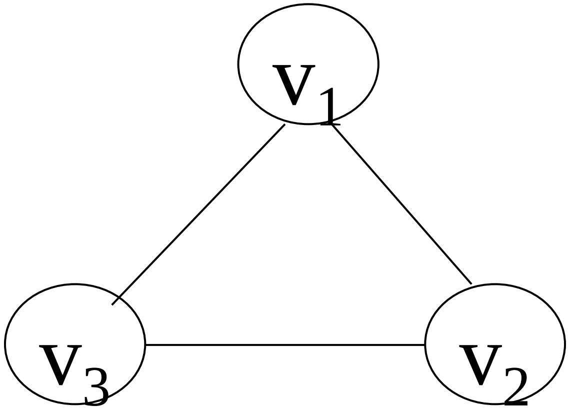
K_5

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

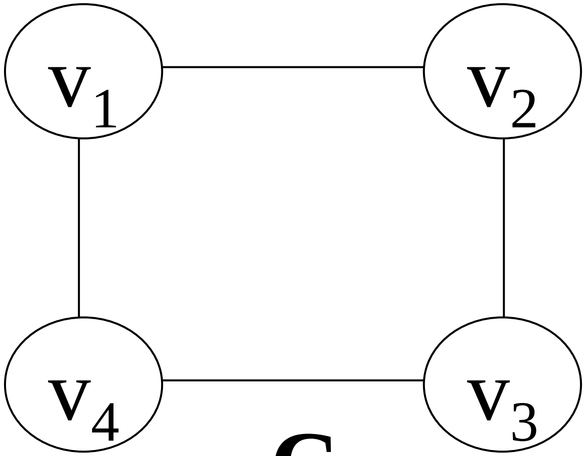
- **Đồ thị vòng (Cycle):** Đơn đồ thị n đỉnh v_1, v_2, ..., v_n ($n \geq 3$) và n cạnh (v_1,v_2), (v_2,v_3), ..., (v_{n-1},v_n), (v_n,v_1) được gọi là đồ thị vòng, ký hiệu là C_n. Như vậy, mỗi đỉnh của C_n có bậc là 2.

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

Ví dụ đồ thị vòng



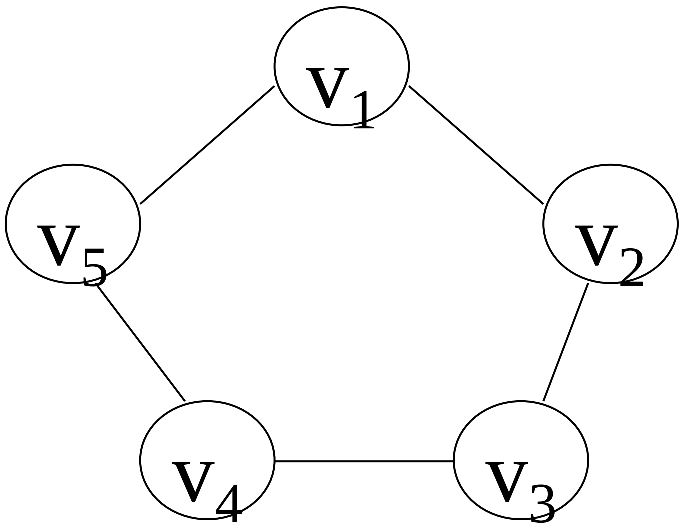
C_3



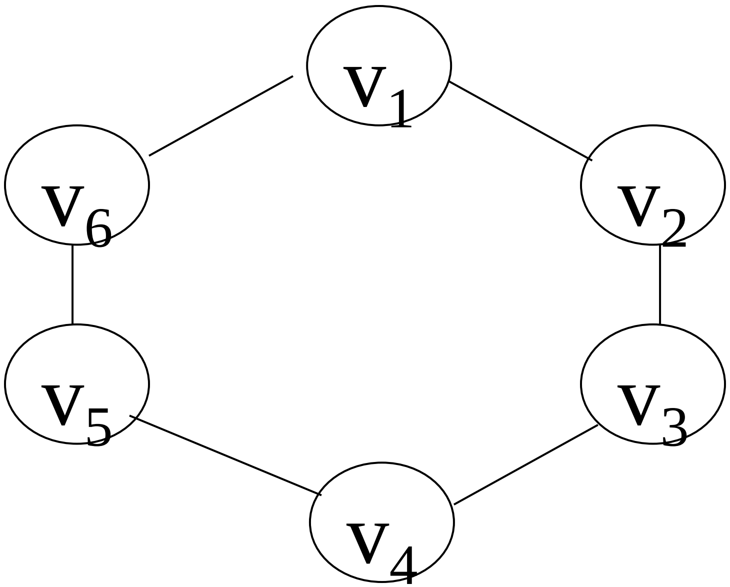
C_4

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

Ví dụ đồ thị vòng



C_5

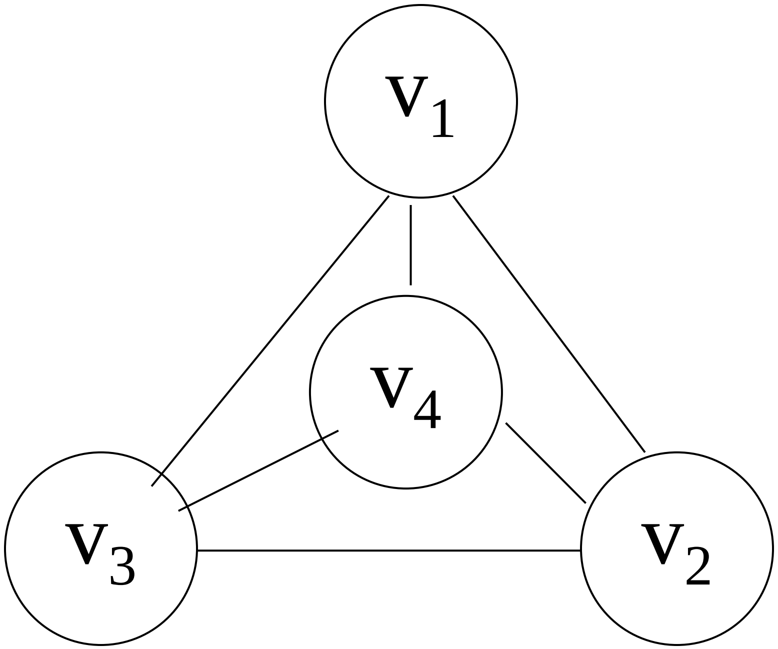


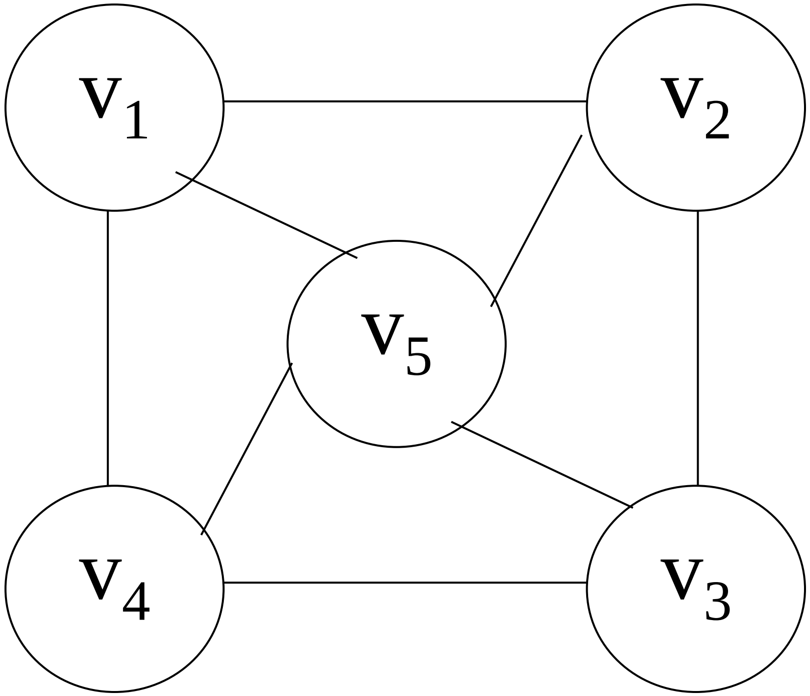
C_6

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

- **Đồ thị bánh xe(Wheele):** Từ đồ thị vòng C_n, thêm vào đỉnh v_{n+1} và các cạnh (v_{n+1},v_1), (v_{n+1},v_2), ..., (v_{n+1},v_n), ta nhận được đơn đồ thị gọi là đồ thị bánh xe, ký hiệu là W_n. Như vậy, đồ thị W_n có n+1 đỉnh, 2n cạnh, một đỉnh bậc n và n đỉnh bậc 3.

Ví dụ đồ thị bánh xe

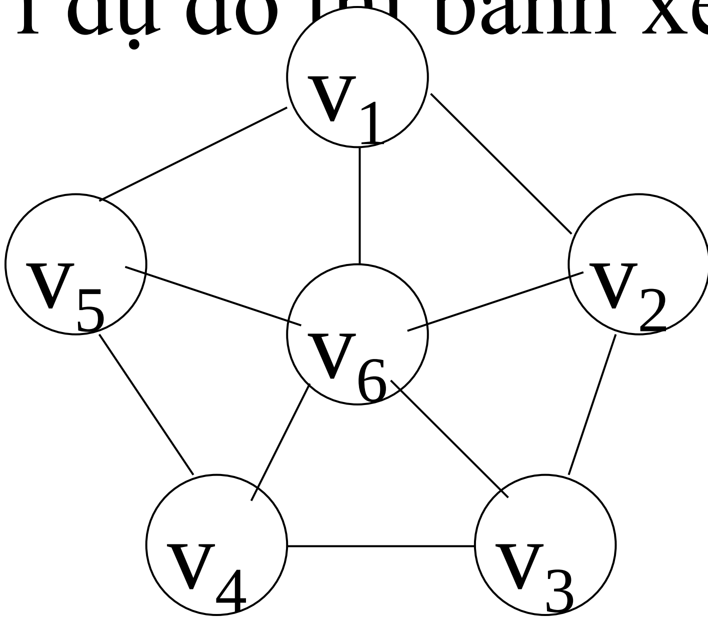




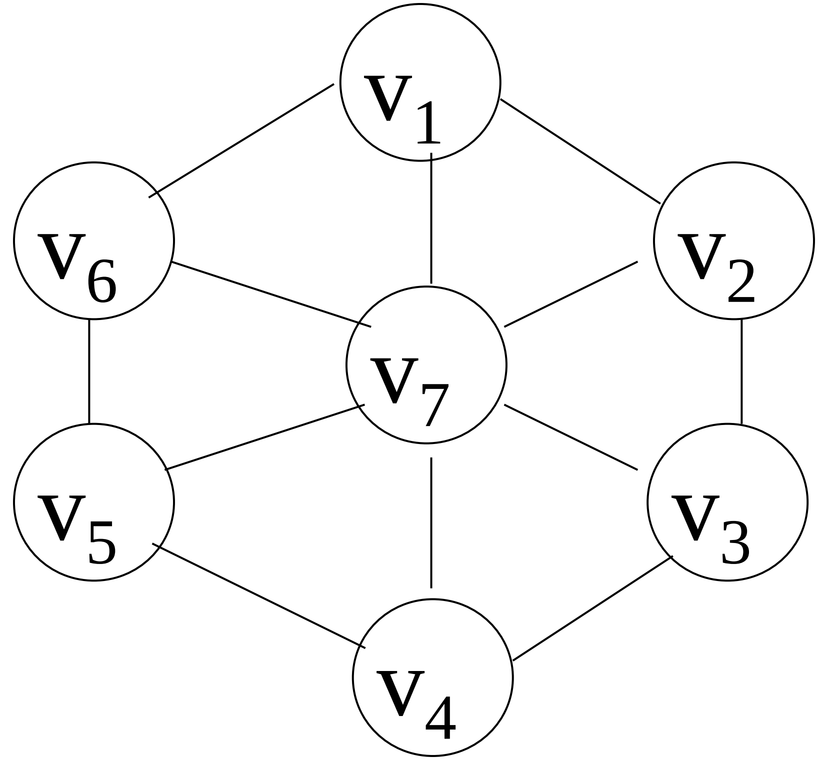
W_3 **W_4**

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

Ví dụ đồ thị bánh xe



$\mathbf{W_5}$

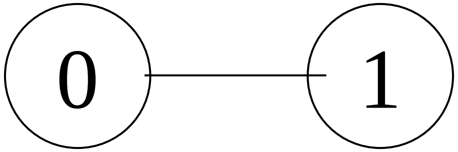


$\mathbf{W_6}$

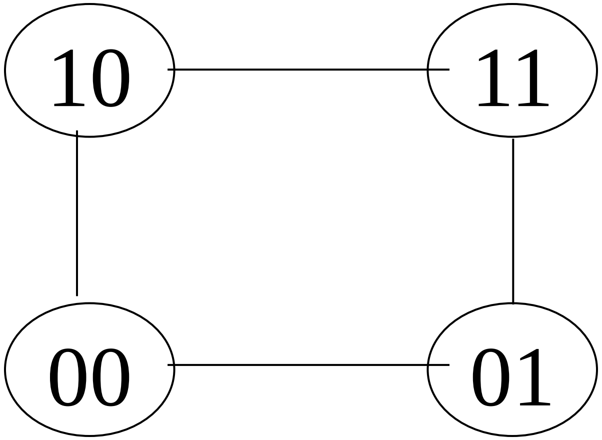
6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

- **Đồ thị lập phương:** Đơn đồ thị 2^n đỉnh, tương ứng với 2^n xâu nhị phân độ dài n và hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi 2 xâu nhị phân tương ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit được gọi là đồ thị lập phương, ký hiệu là Q_n. Như vậy, mỗi đỉnh của Q_n có bậc là n và số cạnh của Q_n là n.2n-1 (từ công thức $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$)

Ví dụ đồ thị lập phương

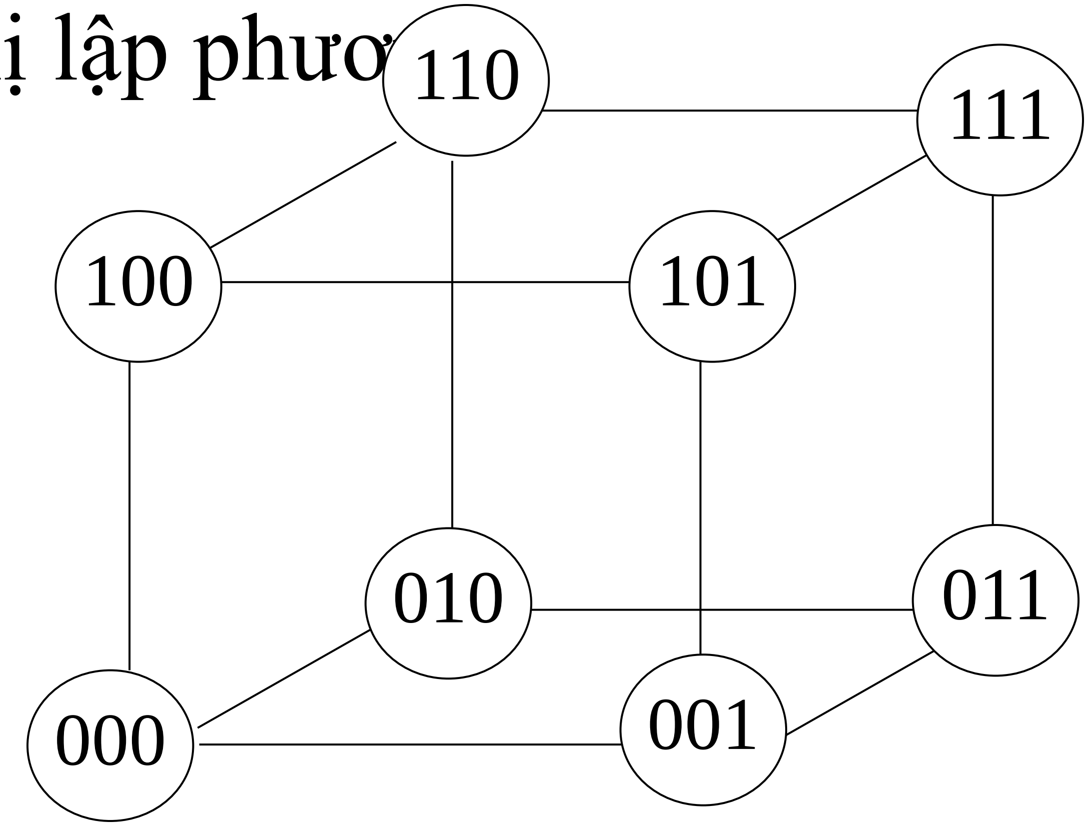


Q1



Q_2

Ví dụ đồ thị lập phươ



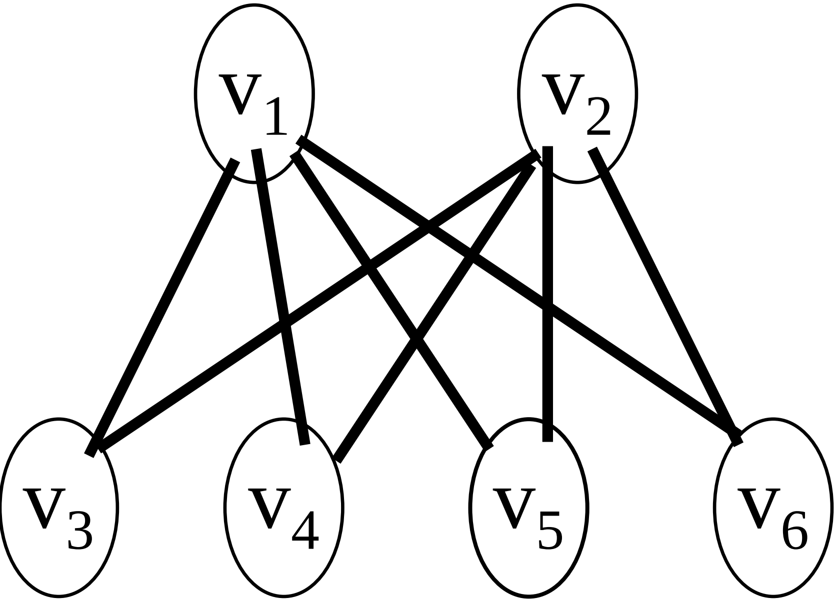
Q_3

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

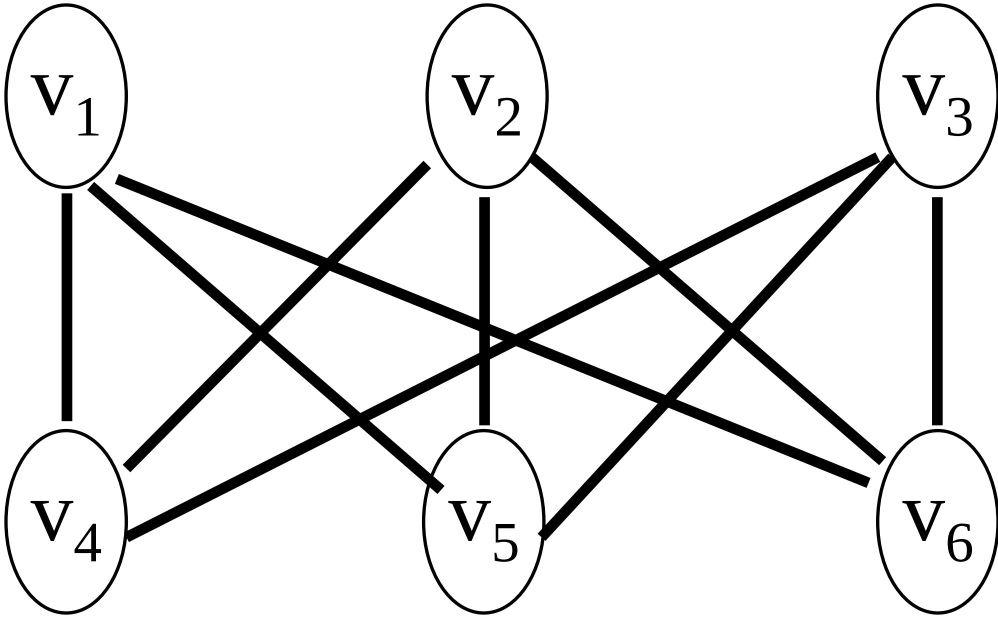
- **Đồ thị phân đôi:** Đồ thị phân đôi (đồ thị hai phe): Đơn đồ thị G=(V,E) sao cho $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, $V_1\neq\varnothing$, $V_2\neq\varnothing$ và mỗi cạnh của G được nối một đỉnh trong V_1 và một đỉnh trong V_2 được gọi là đồ thị phân đôi
- Nếu đồ thị phân đôi $G=(V_1\cup V_2,E)$ sao cho với mọi $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, $(v_1,v_2)\in E$ thì G được gọi là đồ thị phân đôi đầy đủ. Nếu $|V_1|=m$, $|V_2|=n$ thì đồ thị phân đôi đầy đủ G ký hiệu là $K_{m,n}$. Như vậy $K_{m,n}$ có m.n cạnh, các đỉnh của V_1 có bậc n và các đỉnh của V_2 có bậc m

6. NHỮNG ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BiỆT

- **Ví dụ đồ thị phân đôi:**



$K_{2,4}$



$K_{3,3}$

Bài tập

- 1. Một đt có 15 cạnh với 3 đỉnh bậc 4, các đỉnh còn lại đều bậc 3, hỏi ĐT có bao nhiêu đỉnh?
- 2. Vẽ đơn đồ thị vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2,2,3,3,3,5
- 3. Tổng của các giá trị trên mỗi hàng của ma trận kề của đt có hướng chính là:
  - a. Số cạnh đi ra từ đỉnh tương ứng
  - b. Số cạnh đi vào của đỉnh tương ứng
  - c. Bậc của đỉnh tương ứng
- 4. Tổng của các giá trị trên mỗi hàng của ma trận kề của đt vô hướng chính là:
  - a. Số cạnh của ĐT
  - b. Số đỉnh của đt
  - c. Bậc của đỉnh tương ứng
- 5. Cho đồ thị vô hướng, đơn G có7 đỉnh trong đó cómột đỉnh bậc 6. Hỏi G có liên thông không?