CHỦ ĐỀ HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Hoán vị

☑ Hoán vị không lặp

- Một tập hợp gồm n phần tử (với $n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

- Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$

☑ Hoán vị lặp

- Cho k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2, ..., n_k phần tử a_k $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử.

- Số các hoán vị lặp cấp n, kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử là $P_n(n_1; n_2; n_3...) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

☑ Hoán vị vòng quanh

- Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

- Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là $Q_n = (n-1)!$

2) Chỉnh hợp

☑ Chỉnh hợp không lặp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A $(1 \leq k \leq n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

__Chú ý:__

- Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.

- Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$

☑ Chỉnh hợp lặp

- Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A.

- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A_n^k} = n^k$

3) Tổ hợp

- Giả sử tập A có n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi tập con gồm k $(1 \le k \le n)$ phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là $C_n^k = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$.

- Hai công thức quan trọng: $\begin{cases} C_n^k = C_n^{n-k} & (0 \le k \le n) \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k & (1 \le k \le n) \end{cases}$

<u>Chú ý</u> (Phân biệt Chỉnh hợp và Tổ hợp):

● Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức: $A_n^k = k!C_n^k$

● Chỉnh hợp: có thứ tự. Tổ hợp: không có thứ tự.

$\Rightarrow$ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử $\rightarrow$ chỉnh hợp

Ngược lại, là tổ hợp.

● Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $(k \le n)$:

+) Không thứ tự, không hoàn lại: C_n^k

+) Có thứ tự, không hoàn lại: A_n^k

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho:

a) Bạn C ngồi chính giữa?

b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

Ví dụ 2. Có 3 viên bi đen (khác nhau), 4 viên bi đỏ (khác nhau), 5 viên bi vàng (khác nhau), 6 viên bi xanh (khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

Ví dụ 3. Trên một kệ sách có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

a) Một cách tùy ý?

b) Theo từng môn?

c) Theo từng môn và sách Toán nằm giữa?

Ví dụ 4 [Hoán vị vòng tròn]. Có 5 học sinh nam là A1, A2, A3, A4, A5 và 3 học sinh nữ B1, B2, B3 được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

a) Một cách tùy ý?

b) A1 không ngồi cạnh B1?

Ví dụ 5. Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ví dụ 6. Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D. Từ các điểm trên ta lập các vectơ khác vectơ-không. Hỏi có thể có bao nhiêu vectơ?

Ví dụ 7. Huấn luyện viên một đội bóng muốn chọn 5 cầu thủ để đá quả luân lưu 11 mét. Có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Cả 11 cầu thủ có khả năng như nhau? (kể cả thủ môn).

b) Có 3 cầu thủ bị chấn thương và nhất thiết phải bố trí cầu thủ A đá quả số 1 và cầu thủ B đá quả số 4.

Ví dụ 8. Một người muốn xếp đặt một số pho tượng vào một dãy 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

a) Người đó có 6 pho tượng khác nhau?

b) Người đó có 4 pho tượng khác nhau?

c) Người đó có 8 pho tượng khác nhau?

Ví dụ 9. Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó, có bao nhiêu cách lấy được:

a) 4 viên bi cùng màu?

b) 2 viên bi trắng, 2 viên bi xanh?

Ví dụ 10. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó: a) Có đúng 1 bông hồng đỏ? b) Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ?