



**TRƯỜNG ĐẠI HỌC  
BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
HANOI UNIVERSITY  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY



**VIỆN TOÁN ỨNG  
DỤNG VÀ TIN HỌC**  
SCHOOL OF APPLIED  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

# Self-adaptive algorithms for quasiconvex programming and applications to machine learning

**Nhóm 3**

**Tháng 12, 2025**

ONE LOVE. ONE FUTURE

1. Nguyễn Phong	MSSV: 202400066
2. Nguyễn Đăng Long	MSSV: 202400057
3. Phạm Gia Linh	MSSV: 202416262
4. Nguyễn Tuấn Long	MSSV: 202416269
5. Đoàn Đức Mạnh	MSSV: 202400058
6. Trần Đình Nam	MSSV: 202400063
7. Hoàng Thị Thu Phương	MSSV: 202400068
8. Đặng Bảo Quân	MSSV: 202416319
9. Phạm Thị Bích Phương	MSSV: 202400069
10. Dương Thanh Minh	MSSV: 20230047
11. Nguyễn Hải Yến Nhi	MSSV: 202400064
12. Lương Đức Mạnh	MSSV: 20235152

## 1 Kiến thức cần biết

- 1.1 Giả thiết và Bài toán
- 1.2 Phép chiếu lên tập lồi
- 1.3 Các định nghĩa và tính chất
- 1.4 Bổ đề hỗ trợ chứng minh

## 2 Các kết quả chính

- 2.1 Thuật toán Gradient Descent Adaptive - GDA
- 2.2 Thuật toán Gradient Descent - GD
- 2.3 Biến thể ngẫu nhiên của thuật toán GDA - Stochastic GDA

## 3 Các thí nghiệm số

- 3.1.1 Ví dụ 1
- 3.2 Ví dụ 2

## 4 Applications to machine learning

- 4.1 Cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận
- 4.2 Lựa chọn đặc trưng có giám sát
- 4.3 Hồi quy Logistic
- 4.4 Phân loại

## 5 Tài liệu tham khảo

- ◇ Giả sử  $C$  là một tập hợp **khác rỗng, đóng** và **lồi** trong  $\mathbb{R}^m$ .
- ◇ Hàm  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả vi trên một tập mở chứa  $C$ .
- ◇ Ánh xạ  $\nabla f$  là liên tục  $L$ -Lipschitz, tức là tồn tại  $L > 0$  sao cho:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$$

- ◇ Giả sử  $C$  là một tập hợp **khác rỗng, đóng** và **lồi** trong  $\mathbb{R}^m$ .
- ◇ Hàm  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả vi trên một tập mở chứa  $C$ .
- ◇ Ánh xạ  $\nabla f$  là liên tục  $L$ -Lipschitz, tức là tồn tại  $L > 0$  sao cho:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$$

**Bài toán tối ưu:**

$$\min_{\mathbf{x} \in C} f(\mathbf{x}), \quad OP(f, C)$$

## 1 Kiến thức cần biết

1.1 Giả thiết và Bài toán

1.2 Phép chiếu lên tập lồi

1.3 Các định nghĩa và tính chất

1.4 Bổ đề hỗ trợ chứng minh

## 2 Các kết quả chính

## 3 Các thí nghiệm số

## 4 Applications to machine learning

## 5 Tài liệu tham khảo

◇ Giả sử tập nghiệm của  $OP(f, C)$  là **không rỗng**.

Với  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , ký hiệu  $P_C(\mathbf{x})$  là **phép chiếu** của  $\mathbf{x}$  lên  $C$ :

$$P_C(\mathbf{x}) := \arg \min \{ \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| : \mathbf{z} \in C \}.$$

◇ Giả sử tập nghiệm của  $OP(f, C)$  là **không rỗng**.

Với  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , ký hiệu  $P_C(\mathbf{x})$  là **phép chiếu** của  $\mathbf{x}$  lên  $C$ :

$$P_C(\mathbf{x}) := \arg \min \{ \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| : \mathbf{z} \in C \}.$$

### Mệnh đề 1 (Bauschke và Combettes 2011)

Các khẳng định sau là đúng:

1.  $\|P_C(\mathbf{x}) - P_C(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ .
2.  $(\mathbf{y} - P_C(\mathbf{x}))^T (\mathbf{x} - P_C(\mathbf{x})) \leq 0$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in C$ .



## 1 Kiến thức cần biết

1.1 Giả thiết và Bài toán

1.2 Phép chiếu lên tập lồi

1.3 Các định nghĩa và tính chất

1.4 Bổ đề hỗ trợ chứng minh

## 2 Các kết quả chính

## 3 Các thí nghiệm số

## 4 Applications to machine learning

## 5 Tài liệu tham khảo

### Định nghĩa 1 (Mangasarian 1965)

Hàm  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là:

◇ **Lồi** (convex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

### Định nghĩa 1 (Mangasarian 1965)

Hàm  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là:

- ◇ **Lồi** (convex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

- ◇ **Giả lồi** (pseudoconvex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ :

$$\nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0 \implies f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}).$$

### Định nghĩa 1 (Mangasarian 1965)

Hàm  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là:

- ◇ **Lồi** (convex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

- ◇ **Giả lồi** (pseudoconvex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ :

$$\nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0 \implies f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}).$$

- ◇ **Tựa lồi** (quasiconvex) trên  $C$  nếu  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \max\{f(\mathbf{x}); f(\mathbf{y})\}.$$

### Mệnh đề 2: Đặc trưng tựa lồi

Hàm khả vi  $f$  là tựa lồi trên  $C$  khi và chỉ khi:

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C.$$

### Mệnh đề 2: Đặc trưng tựa lồi

Hàm khả vi  $f$  là tựa lồi trên  $C$  khi và chỉ khi:

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C.$$

### Mối quan hệ bao hàm

Hàm lồi  $\implies$  Hàm giả lồi  $\implies$  Hàm tựa lồi

### Mệnh đề 2: Đặc trưng tựa lồi

Hàm khả vi  $f$  là tựa lồi trên  $C$  khi và chỉ khi:

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C.$$

### Mối quan hệ bao hàm

Hàm lồi  $\implies$  Hàm giả lồi  $\implies$  Hàm tựa lồi

### Mệnh đề 3: Tính chất Lipschitz

Giả sử  $\nabla f$  là liên tục  $L$ -Lipschitz trên  $C$ . Khi đó:

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \leq \frac{L}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2.$$

## 1 Kiến thức cần biết

- 1.1 Giả thiết và Bài toán
- 1.2 Phép chiếu lên tập lồi
- 1.3 Các định nghĩa và tính chất
- 1.4 Bổ đề hỗ trợ chứng minh

## 2 Các kết quả chính

## 3 Các thí nghiệm số

## 4 Applications to machine learning

## 5 Tài liệu tham khảo



**Lemma 1 (Xu 2002)**

Cho  $\{a_k\}$  và  $\{b_k\}$  là các dãy số dương sao cho:

$$a_{k+1} \leq a_k + b_k \quad \forall k \geq 0 \quad \text{và} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Khi đó, tồn tại giới hạn  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = c \in \mathbb{R}$ .

1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

2.1 Thuật toán Gradient Descent Adaptive - GDA

2.2 Thuật toán Gradient Descent - GD

2.3 Biến thể ngẫu nhiên của thuật toán GDA - Stochastic GDA

3 Các thí nghiệm số

4 Applications to machine learning

5 Tài liệu tham khảo

---

**Algorithm 1** (Gradient Descent Adaptive Algorithm-GDA)

---

```
1: Input:  $x^0 \in C$ ;  $\lambda_0 > 0$ ;  $\sigma, \kappa \in (0, 1)$ ;  $k = 0$   
2: Output: Stationary point  $x^*$   
3: while true do  
4:    $x^{k+1} \leftarrow P_C(x^k - \lambda_k \nabla f(x^k))$   
5:   if  $f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \sigma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle$  then  
6:      $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k$   
7:   else  
8:      $\lambda_{k+1} \leftarrow \kappa \lambda_k$   
9:   end if  
10:  if  $x^{k+1} = x^k$  then  
11:    break  
12:  end if  
13:   $k \leftarrow k + 1$   
14: end while
```

---

### Nhận xét 1

Nếu thuật toán GDA dừng tại bước  $k$ , thì  $\mathbf{x}^k$  là một điểm dừng của bài toán  $OP(f, C)$ .

### Nhận xét 1

Nếu thuật toán GDA dừng tại bước  $k$ , thì  $\mathbf{x}^k$  là một điểm dừng của bài toán  $OP(f, C)$ .

### Chứng minh:

Do  $\mathbf{x}^{k+1} = P_C(\mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k))$ , áp dụng Mệnh đề 1-(ii), ta có:

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k) - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C \quad (1)$$

### Nhận xét 1

Nếu thuật toán GDA dừng tại bước  $k$ , thì  $\mathbf{x}^k$  là một điểm dừng của bài toán  $OP(f, C)$ .

### Chứng minh:

Do  $\mathbf{x}^{k+1} = P_C(\mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k))$ , áp dụng Mệnh đề 1-(ii), ta có:

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k) - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C \quad (1)$$

Nếu  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$ , ta thu được:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{z} - \mathbf{x}^k \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C \quad (2)$$

### Nhận xét 1

Nếu thuật toán GDA dừng tại bước  $k$ , thì  $\mathbf{x}^k$  là một điểm dừng của bài toán  $OP(f, C)$ .

### Chứng minh:

Do  $\mathbf{x}^{k+1} = P_C(\mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k))$ , áp dụng Mệnh đề 1-(ii), ta có:

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k) - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C \quad (1)$$

Nếu  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$ , ta thu được:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{z} - \mathbf{x}^k \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C \quad (2)$$

Khi đó  $\mathbf{x}^k$  là một điểm dừng của bài toán.

### Định lý 1

*Giả sử dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  được sinh bởi Thuật toán GDA. Khi đó, dãy  $\{f(\mathbf{x}^k)\}$  hội tụ và mỗi điểm giới hạn (nếu có) của dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  là một điểm dừng của bài toán. Hơn nữa:*

- ◇ Nếu  $f$  là hàm gần lồi trên  $C$ , thì dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  hội tụ về một điểm dừng của bài toán.*
- ◇ Nếu  $f$  là hàm giả lồi trên  $C$ , thì dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  hội tụ về một nghiệm của bài toán.*



### 1. Bất đẳng thức cơ bản:

Kết hợp tính chất  $L$ -Lipschitz và tính chất của phép chiếu  $P_C$ :

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \rangle + \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \\ \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \rangle \leq -\frac{1}{\lambda_k} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \end{cases}$$

### 1. Bất đẳng thức cơ bản:

Kết hợp tính chất  $L$ -Lipschitz và tính chất của phép chiếu  $P_C$ :

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \rangle + \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \\ \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \rangle \leq -\frac{1}{\lambda_k} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Ta thu được đánh giá quan trọng:

$$\boxed{f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) - \sigma \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1} \rangle - \left( \frac{1 - \sigma}{\lambda_k} - \frac{L}{2} \right) \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2} \quad (3)$$

**2. Sự hội tụ:**

Giả sử  $\lambda_k \rightarrow 0$ , khi đó tồn tại  $k_0 \in \mathbb{N}$  thỏa mãn

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) - \sigma \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \quad \forall k \geq k_0. \quad (4)$$

Theo cách xây dựng  $k_0$ , bước nhảy không suy biến về 0:

$$\exists k_1 : \lambda_k = \lambda_{k_1} = \bar{\lambda} > 0, \quad \forall k \geq k_1.$$

và thỏa mãn (4)

Từ  $\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \geq 0$  ta suy ra  $f(\mathbf{x}^k)$  hội tụ và:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 &< \infty \\ \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. Điểm dừng:

Từ tính chất phép chiếu với mọi  $\mathbf{z} \in C$ :

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + 2\lambda_k \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{z} - \mathbf{x}^{k+1} \rangle \quad (6)$$

Xét dãy con  $\mathbf{x}^{k_i} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ . Cho  $i \rightarrow \infty$ , sử dụng (5) và tính liên tục của  $\nabla f$ :

$$\langle \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{z} - \bar{\mathbf{x}} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in C. \quad (7)$$

$\implies \bar{\mathbf{x}}$  là một **điểm dừng** của bài toán.

#### 4. Trường hợp $f$ Gần lồi / Giả lồi:

Đặt  $U := \{\mathbf{x} \in C : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^k), \forall k\}$ . Với mọi  $\hat{\mathbf{x}} \in U$ :

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k \rangle \leq 0$$

kết hợp (6) ta thu được:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + 2\lambda_k \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1} \rangle$$

Áp dụng **Bổ đề 1** với  $a_k = \|\mathbf{x}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\|^2$  và  $b_k = 2\lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})$ :

$\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}\| = 0$ .

$\implies$  Dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  hội tụ duy nhất về  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**Kết luận:** Dãy  $\{\mathbf{x}^k\}$  hội tụ duy nhất về điểm dừng  $\bar{\mathbf{x}}$ . Nếu  $f$  giả lồi,  $\bar{\mathbf{x}}$  là **nghiệm tối ưu**. ■

### Nhận xét 2

- ◇ Trong Thuật toán GDA, ta có thể chọn  $\lambda_0 = \lambda$ , với hằng số  $\lambda \leq 2(1 - \sigma)/L$ .  
Thuật toán GDA áp dụng được cho bước nhảy hằng số  $\lambda \leq 2(1 - \sigma)/L$ .

### Nhận xét 2

- ◇ Trong Thuật toán GDA, ta có thể chọn  $\lambda_0 = \lambda$ , với hằng số  $\lambda \leq 2(1 - \sigma)/L$ .  
Thuật toán GDA áp dụng được cho bước nhảy hằng số  $\lambda \leq 2(1 - \sigma)/L$ .
- ◇ Nếu giá trị hằng số Lipschitz  $L$  được biết trước, ta có thể chọn bước nhảy hằng số  $\lambda \in (0, 2/L)$  như trong thuật toán gradient descent (GD) để giải các bài toán quy hoạch lồi.

## 1 Kiến thức cần biết

## 2 Các kết quả chính

2.1 Thuật toán Gradient Descent Adaptive - GDA

2.2 Thuật toán Gradient Descent - GD

2.3 Biến thể ngẫu nhiên của thuật toán GDA - Stochastic GDA

## 3 Các thí nghiệm số

## 4 Applications to machine learning

## 5 Tài liệu tham khảo



---

**Algorithm 2** (Gradient Descent Algorithm-GD)

---

```
1: Input:  $x^0 \in C$ ;  $\lambda_0 \in (0, 2/L)$ ;  $k = 0$   
2: Output: Stationary point  $x^*$   
3: while true do  
4:    $x^{k+1} \leftarrow P_C(x^k - \lambda_k \nabla f(x^k))$   
5:   if  $x^{k+1} = x^k$  then  
6:     break  
7:   end if  
8:    $k \leftarrow k + 1$   
9: end while
```

---

### Hệ quả 1:

Giả sử  $f$  lồi,  $C = \mathbb{R}^m$  và  $\{x^k\}$  là dãy được sinh ra bởi thuật toán GDA. Khi đó,

$$f(x^k) - f(x^*) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

với  $x^*$  là nghiệm tối ưu của bài toán.

1. **Thiết lập bài toán:** Gọi  $x^*$  là nghiệm tối ưu. Đặt  $\Delta_k := f(x^k) - f(x^*) \geq 0$ .
2. **Các đánh giá cơ bản:** Từ (4) kết hợp  $x^k - x^{k+1} = \lambda_k \nabla f(x^k)$ , ta có:

$$\Delta_{k+1} \leq \Delta_k - \sigma \lambda \|\nabla f(x^k)\|^2, \quad \forall k \geq k_1 \quad (8)$$

Do dãy  $\{x^k\}$  bị chặn và  $f$  lồi nên :

$$\begin{aligned} \Delta_k &\leq \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\leq \underbrace{\|x^k - x^*\|}_{\leq M} \|\nabla f(x^k)\| \implies \|\nabla f(x^k)\| \geq \frac{\Delta_k}{M} \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó  $M := \sup\{\|x^k - x^*\| : k \geq k_1\} < \infty$ .

**3. Bất đẳng thức truy hồi:**

Thay (9) vào (8), đặt  $Q := \frac{\sigma\lambda}{M^2}$ :

$$\Delta_{k+1} \leq \Delta_k - \sigma\lambda \frac{\Delta_k^2}{M^2} = \Delta_k - Q\Delta_k^2 \quad (10)$$

**4. Đánh giá tốc độ:** Vì  $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$ , chia hai vế (10) cho  $\Delta_k\Delta_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{k+1}} &\geq \frac{1}{\Delta_k} + Q \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} \geq \frac{1}{\Delta_k} + Q \implies \frac{1}{\Delta_k} \geq \frac{1}{\Delta_{k_1}} + (k - k_1)Q \\ &\implies \Delta_k \leq \frac{1}{(k - k_1)Q} \end{aligned}$$

**Kết luận:**

$$f(x^k) - f(x^*) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

## 1 Kiến thức cần biết

## 2 Các kết quả chính

2.1 Thuật toán Gradient Descent Adaptive - GDA

2.2 Thuật toán Gradient Descent - GD

2.3 Biến thể ngẫu nhiên của thuật toán GDA - Stochastic GDA

## 3 Các thí nghiệm số

## 4 Applications to machine learning

## 5 Tài liệu tham khảo

**1. Động lực** Ứng dụng trong Học sâu quy mô lớn (Large-scale Deep Learning) nơi việc tính toán toàn bộ gradient  $\nabla f(x)$  là bất khả thi.

**2. Bài toán Tối ưu Ngẫu nhiên:** Thay vì tối thiểu hóa hàm mục tiêu xác định, ta xét bài toán kỳ vọng:

$$\min_x \mathbb{E}[f_\xi(x)]. \quad (11)$$

Trong đó:

- ◇  $x$ : Biến quyết định (tham số mô hình).
- ◇  $\xi$ : Biến ngẫu nhiên với phân phối xác định.
- ◇  $f_\xi(x)$ : Hàm  $L$ -smooth đối với mỗi  $\xi$ .

**3. Xấp xỉ Gradient** Tại mỗi bước lặp  $k$ , thay vì tính  $\nabla\Phi(x^k) = \mathbb{E}[\nabla f_{\xi}(x^k)]$ , ta lấy mẫu:

- ◇ Lấy mẫu ngẫu nhiên  $\xi$  tại mỗi lần lặp  $k$ .
- ◇ Tính gradient xấp xỉ:  $\nabla f_{\xi^k}(x^k)$ .

#### 4. Các thành phần trong Học máy:

Ký hiệu	Ý nghĩa thực tế
$x$	Trọng số mạng nơ-ron
$\xi$	Tính ngẫu nhiên của việc chọn dữ liệu
$f_{\xi}(x)$	Hàm mất mát trên một batch dữ liệu
$\Phi(x)$	Hàm mất mát tổng quát

*\*Lưu ý: Các phân tích lý thuyết chặt chẽ cho SGDA được dành cho nghiên cứu tương lai.*

---

**Algorithm 3** (Stochastic Gradient Descent Algorithm-SGDA)

---

```
1: Input:  $x^0 \in C$ ;  $\lambda_0 > 0$ ;  $\sigma, \kappa \in (0, 1)$ ;  $k = 0$   
2: Output: Stationary point  $x^*$   
3: while true do  
4:   Lấy mẫu ngẫu nhiên  $\xi_k$   
5:    $x_{k+1} \leftarrow P_C(x_k - \lambda_k \nabla f_{\xi_k}(x_k))$   
6:   if  $f_{\xi_k}(x_{k+1}) \leq f_{\xi_k}(x_k) - \sigma \langle \nabla f_{\xi_k}(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle$  then  
7:      $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k$   
8:   else  
9:      $\lambda_{k+1} \leftarrow \kappa \lambda_k$   
10:  end if  
11:  if  $x_{k+1} = x_k$  then  
12:    break  
13:  end if  
14:   $k \leftarrow k + 1$   
15: end while
```

---



## Mục tiêu

Đánh giá hiệu quả của GDA thông qua đối sánh với các phương pháp:

- ◇ **Gradient Descent (GD)**: Cho **Bài toán Lỗi** (Ví dụ 3).
- ◇ **Neurodynamic (RNN)**: Cho **Bài toán Phi/Giả lồi** (Ví dụ 1, 2, 4).

## Quy ước & Tiêu chí dừng

- ◇ **Điều kiện dừng thuật toán**:
  - Số vòng lặp đạt giới hạn tối đa ( $\text{Iterations} \geq \#lter$ ).
  - Hoặc khi **đạt điều kiện hội tụ** (Convergence condition met).
- ◇ **Các ký hiệu sử dụng**:
  - $x^*$ : Điểm giới hạn (nghiệm) của dãy lặp  $\{x_k\}$ .
  - **Time**: Thời gian CPU thực chạy (không tính thời gian khởi tạo).
  - **Value**: Giá trị hàm mục tiêu tại điểm dừng.

1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

3.1.1 Ví dụ 1

3.2 Ví dụ 2

4 Applications to machine learning

5 Tài liệu tham khảo

### Mô hình bài toán

Hàm mục tiêu phi lồi:

$$\min f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 3}{1 + 2x_1 + 8x_2}$$

Ràng buộc tập  $C$ :

$$C = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 - 2x_1x_2 \leq -4, x_1, x_2 \geq 0\}$$

### Nhận xét

Hàm  $f$  là giả lồi (pseudoconvex) trên  $C$ . Mục tiêu là so sánh khả năng hội tụ về nghiệm tối ưu toàn cục so với RNN.

## Kết quả hội tụ

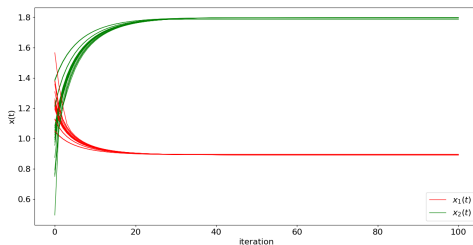
- ◇ Nghiệm tối ưu  $x^*$ :

$(0.893870, 1.790527)$

- ◇ Value (GDA): **0.409362** (Tốt hơn RNN: 0.4101).

## Đánh giá

- ◇ **Tính ổn định:** Quỹ đạo nghiệm hội tụ mượt, không nhạy với nhiễu.
- ◇ **Hiệu quả:** Cân bằng tốt giữa *chất lượng nghiệm* và *chi phí tính toán*.



Hình 1: Quỹ đạo nghiệm hội tụ

Bảng 1: Kết quả các lần chạy (Results of Iterations)

#	Time (s)	Iters	Value	$x^{*t}$
1	1.489085	<b>28</b>	0.409364	[0.894247, 1.789397]
2	1.235719	32	<b>0.409362</b>	[0.893870, 1.790527]
3	1.082686	31	0.409363	[0.893946, 1.790301]
4	<b>1.047740</b>	31	0.409363	[0.894092, 1.789862]
5	1.440842	32	0.409364	[0.894284, 1.789285]
6	1.139069	30	0.409367	[0.895131, 1.786744]
7	1.126395	32	0.409363	[0.894047, 1.789995]
8	1.564762	33	0.409363	[0.893926, 1.790359]
9	2.008716	33	0.409363	[0.893998, 1.790141]
10	1.510566	32	<b>0.409362</b>	[0.893911, 1.790403]

*Dữ liệu thực nghiệm 10 lần chạy đầu tiên*

1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

3.1.1 Ví dụ 1

3.2 Ví dụ 2

4 Applications to machine learning

5 Tài liệu tham khảo

**Hàm mục tiêu (Không trơn):**

$$\min f(x) = \frac{e^{|x_2-3|} - 30}{x_1^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4}$$

**Hệ ràng buộc phức tạp:**

$$g_1(x) = (x_1 + x_3)^3 + 2x_4^2 \leq 10$$

$$g_2(x) = (x_2 - 1)^2 \leq 1, \quad h(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -1$$

**Xử lý đạo hàm tại điểm không trơn:**

$$\nabla |x_2 - 3| = \frac{x_2 - 3}{|x_2 - 3|} \quad (\text{với } x_2 \neq 3)$$

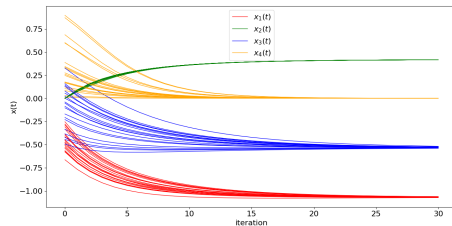
**Kết quả mong đợi:** Tìm được nghiệm tốt hơn so với RNN (vốn hay bị kẹt ở cực tiểu địa phương đối với hàm không trơn).

## Kết quả hội tụ

- ◇ Nghiệm tối ưu  $x^*$ :  
 $(-1.069016, 0.417647, -0.532558, 0.000022)^\top$
- ◇ Value (GDA): **-3.090767**.
- ◇ Value (RNN): -3.0849.

## Đánh giá

- ◇ **Tính ổn định:** Hội tụ về cùng một nghiệm tối ưu bất kể điểm khởi tạo ban đầu khác nhau.
- ◇ **Hiệu quả:** GDA vượt trội RNN cả về **độ chính xác**, **thời gian tính toán** và **cấu trúc đơn giản** hơn.



Hình 2: Sự hội tụ đồng nhất của 4 biến số



Bảng 2: Kết quả tối ưu (Optimization Results)

#	Time (s)	Iters	Value	$x^{*t}$
1	3.125859	38	<b>-3.090767</b>	[-1.069016, 0.417647, -0.532558, 0.000022]
2	3.376504	42	<b>-3.090767</b>	[-1.069795, 0.417966, -0.532273, 0.000000]
3	3.359701	41	<b>-3.090767</b>	[-1.069610, 0.417896, -0.532363, 0.000014]
4	3.596762	44	<b>-3.090767</b>	[-1.069956, 0.418058, -0.532320, 0.000005]
5	3.124562	41	<b>-3.090767</b>	[-1.069584, 0.417901, -0.532434, 0.000007]
6	3.700269	47	<b>-3.090767</b>	[-1.070102, 0.418157, -0.532424, 0.000004]
7	3.406564	44	<b>-3.090767</b>	[-1.069881, 0.418059, -0.532475, 0.000001]
8	<b>2.954161</b>	<b>37</b>	-3.090768	[-1.067557, 0.417538, -0.535037, 0.000020]
9	3.307867	47	<b>-3.090767</b>	[-1.070151, 0.418162, -0.532345, 0.000000]
10	3.687243	44	<b>-3.090767</b>	[-1.069958, 0.418055, -0.532303, 0.000009]

*Giá trị hàm mục tiêu hội tụ ổn định*

Cho  $e := (1, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$ , với  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  thỏa mãn

$$2\alpha > 3\beta^{3/2}\sqrt{n}.$$

Xét bài toán tối ưu  $\text{OP}(f, C)$  (Ví dụ 4.5 trong Ferreira và Sosa, 2022) với

$$f(x) := a^\top x + \alpha x^\top x + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta x^\top x}} e^\top x.$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}_{++}^n : x_1 x_2 \cdots x_n \geq 1\}.$$

$$\beta = 0.741271, \quad \alpha = 3\beta^{3/2}\sqrt{n+1}.$$

$$L = 4\beta^{3/2}\sqrt{n} + 3\alpha.$$

**So sánh hai phương pháp:**

- ◇ **GD:**  $\lambda = 1/L$ .
- ◇ **GDA:**  $\lambda_0 = 5/L$ , điều chỉnh thích nghi.

$n$	GDA			GD		
	$f(x^*)$	#Iter	Time(s)	$f(x^*)$	#Iter	Time(s)
10	80.080578	6	0.5927	80.080615	6	0.2399
20	219.714476	6	2.2912	219.714478	7	0.9540
50	851.700044	7	3.3230	851.700047	8	2.6453
100	2390.314066	7	11.9520	2390.314086	8	12.3069
200	6721.095888	8	71.6870	6721.095916	9	64.0119
600	34711.054243	8	932.1330	34711.054356	10	529.1590

Bảng 1: So sánh GDA và GD

- ◇ GDA và GD cho giá trị hàm mục tiêu tối ưu gần như tương đương.
- ◇ GDA thường hội tụ với ít vòng lặp hơn so với GD.
- ◇ Hiệu quả của GDA thể hiện rõ hơn khi kích thước bài toán tăng.
- ◇ Cơ chế bước học thích nghi giúp GDA cải thiện hiệu suất tính toán.

Xét bài toán  $OP(f, C)$  với hàm mục tiêu

$$f(x) = -\exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{e_i^2}\right),$$

trong đó  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)^\top$ ,  $e_i > 0$ .

Hàm  $f$  là giả lồi trên miền ràng buộc lồi

$$C := \{Ax = b, g(x) \leq 0\}.$$

Ma trận  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  được xác định bởi

$$a_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n/2, \\ 3, & n/2 < i \leq n, \end{cases} \quad b = 16.$$

Các ràng buộc bất đẳng thức:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{10} x_{10(i-1)+j}^2 - 20, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{10}.$$

So sánh hai phương pháp:

- ◇ **GDA**: thuật toán đề xuất.
- ◇ **RNN**: thuật toán của Liu et al. (2022).

Chỉ số đánh giá được sử dụng:

$$-\ln(-f(x^*)),$$

trong đó  $x^*$  là nghiệm gần đúng thu được từ mỗi thuật toán.

Hàm  $-\ln(-z)$  là đơn điệu tăng với mọi  $z < 0$ .



$n$	GDA			RNN		
	$-\ln(-f(x^*))$	#Iter	Time	$-\ln(-f(x^*))$	#Iter	Time
10	5.1200	50	0.54	5.2014	10000	1123
20	2.5600	50	231.4	2.9004	10000	1264
30	1.7066	50	312	5.2014	10000	1123
40	1.2800	50	309.2	6.5283	10000	1634
50	1.0240	50	261.6	1.4141	10000	1367
60	0.8533	50	348.5	1.4141	10000	1367
70	0.7314	500	78.4	11.1273	10000	1443.2

Bảng 2: Kết quả tính toán cho Ví dụ 4

- ◇ GDA cho **giá trị tối ưu gần đúng tốt hơn** so với RNN.
- ◇ GDA hội tụ với **số vòng lặp ít hơn đáng kể**.
- ◇ **Thời gian tính toán thấp hơn nhiều**, đặc biệt khi  $n$  lớn.

Kết quả cho thấy GDA vượt trội hơn RNN trong các bài toán giả lồi kích thước lớn.

### Mục tiêu nghiên cứu

Phương pháp được đề xuất, giống như thuật toán GD, có nhiều ứng dụng trong học máy. Chúng tôi phân tích ba ứng dụng phổ biến để chứng minh độ chính xác và hiệu quả tính toán so với các phương pháp thay thế khác:

1. **Lựa chọn đặc trưng có giám sát** (Supervised feature selection).
2. **Hồi quy Logistic** (Regression).
3. **Phân loại** (Classification).

1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

4 Applications to machine learning

4.1 Cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận

4.2 Lựa chọn đặc trưng có giám sát

4.3 Hồi quy Logistic

4.4 Phân loại

5 Tài liệu tham khảo

◇ **1. Lựa chọn đặc trưng:**

- *Mô hình:* Cực tiểu hóa hàm phân thức **giả lồi** trên tập lồi (lớp con của bài toán  $OP(f, C)$ ).
- *Mục đích:* So sánh với phương pháp thần kinh động lực học (neurodynamic).

◇ **2. Hồi quy Logistic đa biến:**

- *Mô hình:* Bài toán **quy hoạch lồi**.
- *Giải pháp:* Dùng GDA và các biến thể GD.

◇ **3. Mạng Nơ-ron (Phân loại ảnh):**

- *Mô hình:* Hàm mục tiêu **không lồi, không tựa lồi**.
- *Giải pháp:* Dùng biến thể ngẫu nhiên **SGDA** (heuristic).
- *Hội tụ:* Nếu dãy điểm có giới hạn  $\rightarrow$  hội tụ về điểm dừng (Định lý 1).

1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

4 Applications to machine learning

4.1 Cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận

4.2 Lựa chọn đặc trưng có giám sát

4.3 Hồi quy Logistic

4.4 Phân loại

5 Tài liệu tham khảo

**Đầu vào:**

- ◇ Tập  $p$ -đặc trưng  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_p\}$ .
- ◇ Tập  $n$ -mẫu  $\{(x_i, y_i) | i = 1, \dots, n\}$ .
- ◇  $x_i$ : vector đặc trưng  $p$ -chiều;  $y_i \in \{1, \dots, m\}$ : nhãn lớp.

**Mục tiêu:** Chọn tập con tối ưu  $\{F_1, \dots, F_k\} \subseteq \mathcal{F}$  thỏa mãn:

1. **Sự dư thừa ít nhất (Min Redundancy):** Cực tiểu hóa  $w^T Q w$  ( $Q$  là ma trận bán xác định dương).
2. **Mức độ liên quan cao nhất (Max Relevance):** Cực đại hóa  $\rho^T w$  ( $\rho$  là vector tham số liên quan).

Kết hợp hai mục tiêu trên, ta có bài toán tối ưu hàm phân thức:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{w^T Q w}{\rho^T w} \\ & \text{subject to} && e^T w = 1, \quad w \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Trong đó:

◇  $w = (w_1, \dots, w_p)^T$ : Vector điểm số đặc trưng cần xác định.

**Nhận xét quan trọng:** Vì hàm mục tiêu là phân thức của một hàm lồi trên một hàm tuyến tính dương  $\rightarrow$  Nó là **hàm giả lồi** trên tập ràng buộc.  $\Rightarrow$  Có thể giải bằng **Thuật toán GDA**.



1. Ma trận hệ số tương đồng  $Q = \delta I_p + S$ : Với  $S = (s_{ij})$  xác định bởi:

$$s_{ij} = \max \left\{ 0, \frac{I(F_i; F_j; y)}{H(F_i) + H(F_j)} \right\}$$

Trong đó:

- ◇ Entropy thông tin:  $H(\hat{X}) = -\sum_{\hat{x} \in \hat{X}} p(\hat{x}) \log p(\hat{x})$
- ◇ Đa thông tin:  $I(\hat{X}; \hat{Y}; \hat{Z}) = I(\hat{X}; \hat{Y}) - I(\hat{X}; \hat{Y}|\hat{Z})$
- ◇ Thông tin tương hỗ có điều kiện:  $I(\hat{X}; \hat{Y}|\hat{Z}) = \sum \sum \sum p(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \log \frac{p(\hat{x}, \hat{y}|\hat{z})}{p(\hat{x}|\hat{z})p(\hat{y}|\hat{z})}$

2. Vector mức độ liên quan  $\rho$  (Fisher score):

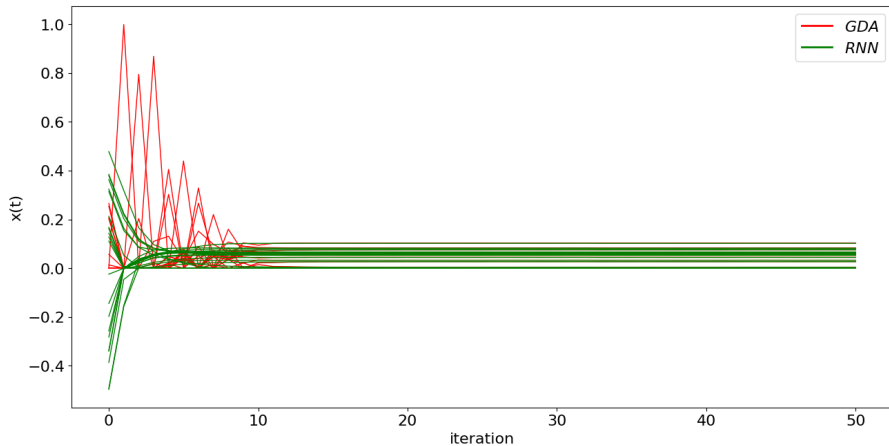
$$\rho(F_i) = \frac{\sum_{j=1}^K n_j (\mu_{ij} - \mu_i)^2}{\sum_{j=1}^K n_j \sigma_{ij}^2}$$

So sánh Thuật toán GDA (đề xuất) và Thuật toán RNN (Wang et al. 2021):

Chỉ số	Thuật toán GDA	Thuật toán RNN
Giá trị tối ưu $f(w^*)$	<b>0.153478</b>	0.153911
Thời gian tính toán ( $T$ )	<b>10.034473s</b>	49.324688s

### Kết luận:

- ◇ Thuật toán GDA tìm được giá trị tối ưu tốt hơn (nhỏ hơn).
- ◇ Thời gian tính toán nhanh hơn gần gấp đôi so với RNN.
- ◇ GDA vượt trội cả về độ chính xác và hiệu quả tính toán.



1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

**4 Applications to machine learning**

4.1 Cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận

4.2 Lựa chọn đặc trưng có giám sát

**4.3 Hồi quy Logistic**

4.4 Phân loại

5 Tài liệu tham khảo

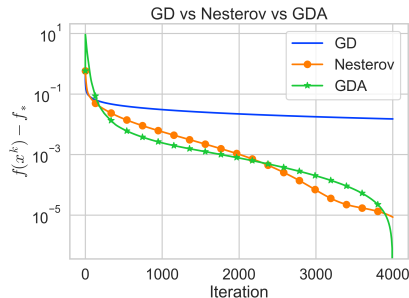
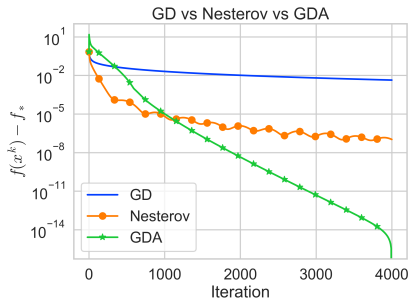
**Bài toán:**

- ◇ Dữ liệu:  $N$  quan sát  $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .
- ◇ Hàm mất mát (Cross-entropy + chuẩn hóa  $L_2$ ):

$$\bar{J}(x) = - \sum_{i=1}^N (b_i \log(\sigma(-x^T a_i)) + (1 - b_i) \log(1 - \sigma(-x^T a_i))) + \frac{1}{2N} \|x\|^2$$

**Tham số thuật toán:**

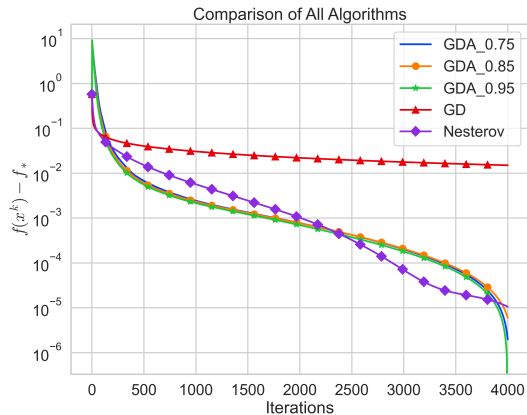
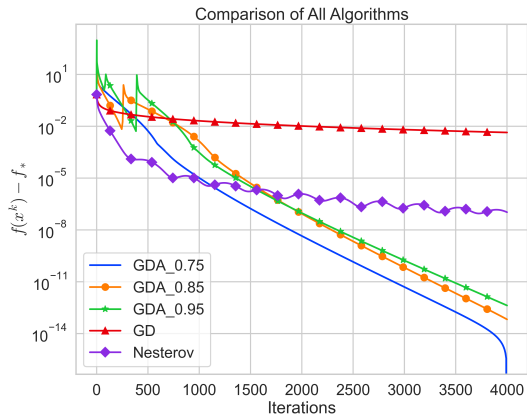
- ◇ Hệ số Lipschitz ước lượng:  $L \approx \frac{1}{2N} (\|A\|^2/2 + 1)$ .
- ◇ So sánh với:
  1. GD (bước nhảy  $1/L$ ).
  2. Nesterov's accelerated method.



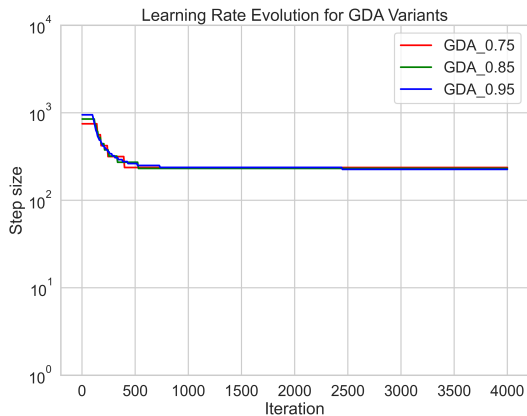
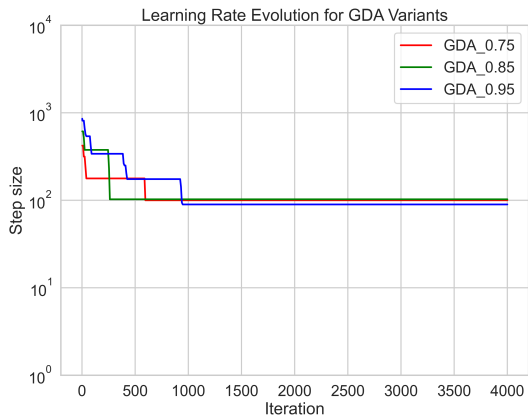
Hình 4: Kết quả so sánh đối với dataset Mushrooms (bên trái) và W8a (bên phải)

### Phân tích biểu đồ (Dataset: Mushrooms và W8a):

- ◇ GDA vượt trội hơn GD và Nesterov về giá trị hàm mục tiêu.
- ◇ **Hình 5** minh họa cơ chế tự thích nghi: Bước nhảy giảm dần từ giá trị ban đầu (với hệ số  $\kappa = 0.75$ ).
- ◇ **Hình 6** trình bày sự giảm kích thước bước nhảy từ một kích thước bước nhảy ban đầu



Hình 5: Kết quả so sánh đối với dataset Mushrooms (bên trái) và W8a (bên phải)



Hình 6: Sự thay đổi bước nhảy đối với dataset Mushrooms (bên trái) và W8a (bên phải)



1 Kiến thức cần biết

2 Các kết quả chính

3 Các thí nghiệm số

**4 Applications to machine learning**

4.1 Cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận

4.2 Lựa chọn đặc trưng có giám sát

4.3 Hồi quy Logistic

4.4 Phân loại

5 Tài liệu tham khảo

**Mục tiêu:** Triển khai thuật toán đề xuất vào mô hình huấn luyện mạng nơ-ron (bài toán không lỗi).

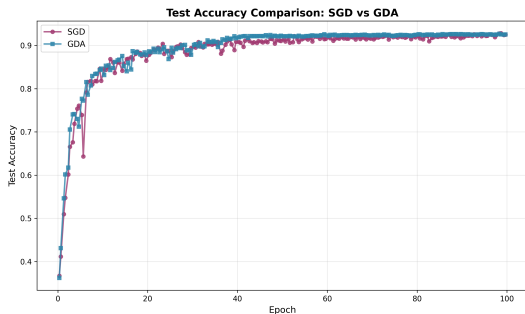
**Cấu hình thực nghiệm:**

- ◇ **Mô hình:** Kiến trúc ResNet-18 tiêu chuẩn (PyTorch).
- ◇ **Dữ liệu:** Cifar10 (Phân loại ảnh).
- ◇ **Hàm mất mát:** Cross-entropy.
- ◇ **Tham số:** Sử dụng thiết lập mặc định của Adam.

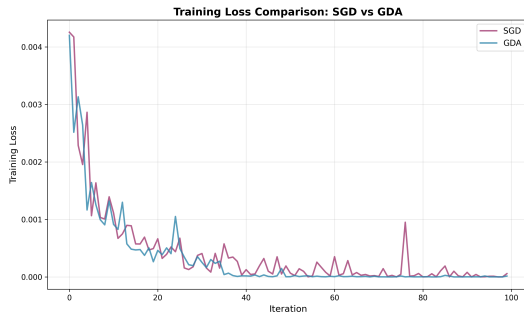
**Phương pháp so sánh:**

- ◇ Biến thể ngẫu nhiên của GDA (**Thuật toán SGDA**).
- ◇ So với: Stochastic Gradient Descent (**SGD**).

**Kết quả (Hình 7 & 8):** SGDA vượt trội hơn SGD về cả hai chỉ số quan trọng:



Hình 7: Độ chính xác kiểm thử (test accuracy) theo số vòng lặp khi huấn luyện ResNet-18.



Hình 8: Hàm mất mát huấn luyện (training loss) theo số vòng lặp cho ResNet-18.

- ◇ <https://github.com/nguyenphongg233/NMPPTU-Team3-SAAQP>
- ◇ <https://www.overleaf.com/project/6925bea64fbe6a88cd865b51>

**Cảm ơn mọi người đã chú ý lắng  
nghe!**