TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ XVI – ĐIỆN BIÊN 2022

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN: TIN HỌC - KHỐI 10
Ngày thi: 12 tháng 8 năm 2022
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1:HÌNH CHỮ NHẬT

Subtask 1: $m, n \leq 10$

Duyệt tất cả các hình chữ nhật.

Kiểm tra và đếm số đỉnh của hình chữ nhật là số nguyên tố.

Độ phức tạp $O(4.m^2.n^2.gcd)$

Subtask 2: $m, n \leq 60$ư uyệt tất cả các hình chữ nhật.

Việc kiểm tra các đỉnh có phải là số nguyên tố hay không được sử dụng bằng sàng số nguyên tố.

Độ phức tạp là $O(m^2.n^2)$

Subtask 3: $m, n \leq 300$

Duyệt mọi cặp hàng i, j

Với mỗi cặp hàng (i, j) ta cần đếm được D_1, D_2 trong đó:

+ $D_1 =$ số lượng cột mà giao với hàng i và hàng j đều là số nguyên tố.

+ $D_2 =$ số lượng cột mà giao với hàng i và hàng j có đúng một số nguyên tố.

Ta có: $kq = kq + D_1 * (D_1 - 1)/2 + D_1 * D_2$

Độ phức tạp là $O(m^2.n)$

BÀI 2: HOA BAN

Gọi chiều cao của n cây ban là $A_1, A_2, .., A_n$. Ban đầu $A_i = B$ với $1 \leq i \leq n$.

Subtask 1: $n, Q \leq 2000$, $p_i = 1$.

Mỗi truy vấn trong Q truy vấn ta phải thực hiện:

+ Tìm một phần tử nhỏ nhất đầu tiên từ phần tử 1 đến phần tử r_i $O(n)$

+ Cập nhật: Tăng phần tử tìm được lên 1 đơn vị. $O(1)$

Độ phức tạp là $O(n.Q)$

Subtask 2: $p_i = 1$

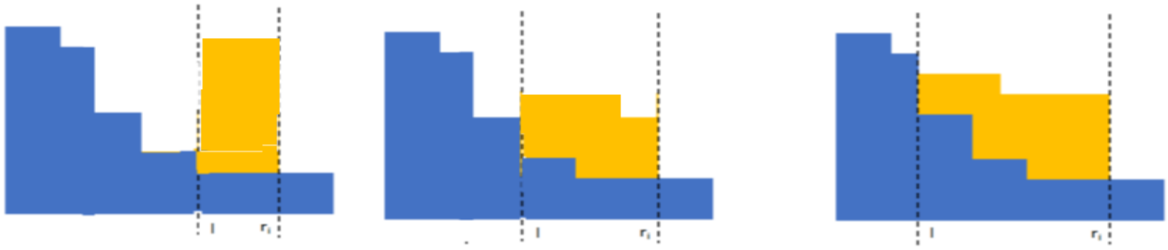
Rõ ràng, tại mọi thời điểm dãy A luôn là một dãy giảm dần.

Việc tìm phần tử nhỏ nhất đầu tiên từ 1 đến r_i bản chất là tìm phần tử đầu tiên có giá trị bằng A_i có thể sử dụng TKNP.

Do $p_i = 1$ nên thao tác cập nhật là $O(1)$

⇨ Độ phức tạp là $O(Q.logn)$

Subtask 3: $n, Q \le 2000$



Với truy vấn thứ i giả sử ta bón p_i viên phân bón cho các cây từ cây thứ l trở đi. Khi đó ta có A_l=$(p_i + \sum_{h=l}^{r} A_h)/(r-l+1) + \emptyset$

Trong đó: $\emptyset = 0$ $nếu$ $(p_i + \sum_{h=l}^{r} A_h)\%(r-l+1) = 0,$ $ngược$ $lại$ $bằng$ $1.$

Nếu $A_l > A_{l-1}$ => Không thỏa mãn dãy A giảm dần => Ta phải giảm giá trị l.

Ngược lại ta cập nhật như sau:

+. $A_h = (p_i + \sum_{h=l}^{r} A_h)/(r-l+1)$ $với$ $h = l..r$

+. $A_h = A_h + 1$ $với$ $h = l..l + (p_i + \sum_{h=l}^{r} A_h)\%(r-l+1) - 1$

Độ phức tạp $O(Q.n)$

Subtask 4: : $n, Q \le 10^5$

Sử dụng cây phân đoạn có Lazy.

Độ phức tạp là $O(Q.log^2 n)$

BÀI 3: DỊCH CHUYỂN VỊ TRÍ

Subtask 1: Với $n, T \le 5$. Ta duyệt đệ qui với $x[1..T]; x[i] = [-T..T]$

+ $x_i = 0$ nếu thao tác thứ i không làm gì cả.

+ $x_i = j$ $(j < 0)$ nháy chuột trái vào xạ thủ j (xạ thủ j dịch chuyển sang trái một bước)

+ $x_i = j$ $(j > 0)$ nháy chuột phải vào xạ thủ j (xạ thủ j dịch chuyển sang phải một bước)

Subtask 2: Với $\sum_{i=1}^{N} |A_i| = T$ thì mọi giây trong T giây Cuội đều phải nháy chuột trái hoặc phải.

Hoán vị lặp

Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2, ..., n_k phần tử a_k $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

Xạ thủ thứ i sẽ được nháy chuột trái $|A_i|$ lần (nếu $A_i < 0$) hoặc chuột phải $|A_i|$ (nếu $A_i > 0$). Như vậy bài toán trở thành:

Trong T giây cần chọn ra $|A_1|$ giây để nháy chuột và xạ thủ thứ nhất, chọn ra $|A_2|$ giây để nháy chuột và xạ thủ thứ hai, .., chọn ra $|A_n|$ giây để nháy chuột và xạ thủ thứ n. Đây là bài toán hoán vị lặp:

$$kq = P_T(|A_1|, |A_2|, .., |A_N|) = \frac{T!}{|A_1|! \times |A_2|! \times \dots \times |A_N|!}$$

Sabtask 3: Với $n = 1$. Chỉ có một xạ thủ duy nhất.

Ta phải chọn ra $|A_1|$ lần nháy chuột để xạ thủ di chuyển về đúng vị trí, ngoài ra ta có thể chọn một vài lượt cho những cặp thao tác (trái- phải) hoặc (phải - trái) không làm thay đổi đổi vị trí cuối cùng của xạ thủ do thao tác nháy chuột trái = nháy chuột phải (Tạm gọi là cặp thao tác *"cân bằng")*.

+Ta thấy số lượt sử dụng những thao tác di chuyển (số giây có nháy chuột) sẽ có giá trị $|A_1|, |A_1| + 2, |A_1| + 4, \dots,$ Với $(|A_1| + 2 * \mathrm{j} \le \mathrm{T})$

+ Ta duyệt m là số lượt sử dụng những thao tác dịch chuyển, những lượt còn là là thao tác "*Không làm gì cả*".

+Trong m lượt, ta đã có $|A_1|$ lượt di chuyển theo đúng hướng, thêm $(m - |A_1|)/2$ số cặp thao tác *"cân bằng"*, nên trong m lượt di chuyển ta sẽ phải chọn ra $|A_1| + (m - |A_1|)/2$ lần di chuyển đúng hướng. Vì thế ta có thể tính kết quả như sau:

$$\sum_{m \in \{|A_1|, |A_1|+2, \dots\}}^{m \le T} C_T^m \times C_m^{|A_1| + (m - |A_1|)/2}$$

Sabtask 4:

+ Đặt $sum_A = \sum_{i=1}^{N} |A_i|$, ý tưởng tương tự như Subtask trước, duyệt qua m là số lượt sử dụng những thao tác di chuyển. Nhưng bây giờ, với $(m - sum_A)/2$ cặp thao tác *"cân bằng"* ta sẽ phải chia nó vào n xạ thủ khác nhau, và với mỗi cách chia thì công thức tính lại khác.

+ Gọi $f(i, j)$ với ý nghĩa rằng xét i xạ thủ đầu tiên từ 1 đến i, đã đặt được j cặp thao tác *"cân bằng"* thì có bao nhiêu cách để đặt như vậy.

+ Ta có trạng thái cơ bản *là* $f(0,0) = 1$, và công thức truy hồi trạng thái như sau:

$$f(i, j) = \sum_{t=0}^{j} f(i-1, j-t) \times C_{|A_i| + 2 \times t}^{|A_i| + t} \times \frac{1}{(|A_i| + 2 \times t)!}$$

+ Với mỗi trạng thái, ta duyệt qua t là số lượng cặp thao tác *"cân bằng"* dùng ở i, có $|A_i| + 2\ \times t$ lần di chuyển, thì lại chọn ra $|A_i| + t$ lần di chuyển theo đúng hướng.

+ Với m lượt để di chuyển, cần chọn ra $|A_1| + 2\ \times\ |t_1|$ lượt để di chuyển xạ thủ thứ nhất, sau đó chọn ra $|A_2| + 2\ \times\ |t_2|$ lượt để di chuyển xạ thủ thứ hai, ... Đây lại là một bài hoán vị lặp, vì thế nên ta cần tính một lượng là:

$$\frac{m!}{(|A_1| + 2 \times |t_1|)! \times (|A_2| + 2 \times |t_2|)! \times \ldots \times (|A_n| + 2 \times |t_n|)!}$$

Do đó ở mỗi trạng thái của xạ thủ thứ i, ta nhân thêm *1* lượng là

$$\frac{1}{(|A_i| + 2 \times |t_i|)!}$$

Đến đây, ta có thể tính được kết quả cuối cùng cho toàn bài:

$$\sum_{m \in \{sum_A, sum_A+2, \ldots\}}^{m \le T} C_T^m \times f(n, (m - sum_A)/2)) \times m!$$