

PHƯƠNG TRÌNH CÓ 1 LOẠI GÓC

Bài 1: giải phương trình

- a) $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$
- b) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$
- c) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0$
- d) $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0$
- e) $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$

Bài 2: giải phương trình

- a) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$
- b) $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$
- c) $(2\sin^2 x + 1)\sin x + 4\cos^2 x - 3 = 0$
- d) $\cos^2 x + \cos x + \sin^3 x = 0$
- e) $5\sin x - 2 = (3 - 3\sin x)\tan^2 x$
- f) $\cos^3 x - \cos^2 x = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$

TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1. Cho phương trình $(\sin x + 1)(\sin 2x - m \sin x) = m \cos^2 x$. Tìm m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(\cos^2 x - \cos x + m) = 0$ có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 3: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:
A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$ trên $(0; \pi)$ là?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0$ bằng:
A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{2}$. **C.** $-\frac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Phần 2: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Giải phương trình $\sin x(\sin x + 1) = 0$.

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2. Giải phương trình $\cos x (\cos x - 1) = 0$.

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3. Giải phương trình $(2 \sin x - 1)(\cos x + 2) = 0$.

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 4. Giải phương trình $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$.

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 5. Giải phương trình $\cos 2x + 3(\cos x - \sin x) = 0$.

A. $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 6. Giải phương trình $\cos^2 x + (1 - \sin x)(2 + \cos x) = 0$.

A. $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 7. Giải phương trình $\sin^2 x - (1 - \cos x)(3 + \sin x) = 0$.

A. $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Phần 1: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.

Câu 1. Giải phương trình $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 2) = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Giải phương trình $(\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Giải phương trình $\frac{1}{2}\sin x(\tan x - 1) = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Giải phương trình $\cos 2x(2\sin x - 1) = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Giải phương trình $(\sqrt{3}\tan x + 1)(\sin^2 x + 1) = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Giải phương trình $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 7. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$ là

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{B. } x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{D. } x = \pi.$$

Câu 8. Các nghiệm của phương trình $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

$$\text{A. } 3.$$

$$\text{B. } 1.$$

$$\text{C. } 2.$$

$$\text{D. } 4.$$

Phương trình đối xứng, phản đối xứng.

I. LÝ THUYẾT

* **Phương trình đối xứng** giữa $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng: $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ (1).

Phương pháp giải

Sử dụng phép đặt ẩn phụ

$$+ \text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\text{Khi đó } t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$+ \text{Thay vào (1) ta được phương trình: } at + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0 \quad (2)$$

* **Phương trình phản đối xứng** giữa $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng: $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ (4).

Phương pháp giải

$$+ \text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\text{Khi đó } t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$+ \text{Thay vào (4) ta được phương trình: } at + b\frac{1 - t^2}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 - 2at - 2c - b = 0 \quad (5)$$

+ Giải phương trình (5) theo t và chọn nghiệm $t = t_0$ thỏa mãn $t_0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Một số công thức biến đổi thường gặp

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Phần 1: TỰ LUẬN

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

Phần 2: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho phương trình: $-\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 1 = 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $t^2 + \sqrt{2}t = 0$. B. $t^2 + \sqrt{2}t + 2 = 0$. C. $t^2 - \sqrt{2}t = 0$. D. $t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0$.

Câu 2. Điều kiện để phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = m$ có nghiệm là:

- A. $m \leq 0$. B. Không có giá trị nào của m .
C. $m \geq 2$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 3. Phương trình: $\sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0$ có các họ nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. Vô nghiệm.

Câu 4. Nếu $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ nhận giá trị là

- A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Cho phương trình: $\sin 2x + 4(\sin x - \cos x) - 5 = 0$ số nghiệm của phương trình thỏa mãn $0 < x < \pi$ là:

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 6. Phương trình lượng giác: $\sin 2x + 2(\cos x - \sin x) - 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. Vô nghiệm.

Câu 7. Cho phương trình: $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$. Nếu đặt $t = \sin x + \cos x$, thì giá trị của t tìm được là

- A. -1 . B. $\sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Hỏi trên đoạn $[0; 2022\pi]$, phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 4045. B. 4044. C. 2022. D. 2023.

Câu 9. Phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{4}$. C. $\frac{7\pi}{2}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 10. Cho phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 4 \sin^2 4x = m$ trong đó m là tham số. Để phương trình đã cho vô nghiệm, thì tập các giá trị của m là

- A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$. C. $-2 \leq m \leq -\frac{3}{2}$. D. $m < -\frac{25}{4} \vee m > 0$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Phần 1: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

- Câu 1.** Phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ có phương trình hệ quả là
- A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ B. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
- Câu 2.** Tìm số họ nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 3$.
- A. Vô nghiệm. B. Một họ nghiệm. C. Hai họ nghiệm. D. Ba họ nghiệm.
- Câu 3.** Biết rằng $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x = 4 \Leftrightarrow at^2 + bt - 10 = 0$ với ẩn phụ $\sin x + \cos x = t$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 2.
- Câu 4.** Tìm số nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x = 5$.
- A. 6. B. 0. C. 4 D. 2.
- Câu 5.** Tìm số họ nghiệm của phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin x$.
- A. 6. B. 2 C. 4 D. 3.
- Câu 6.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + \cot x = m$ có nghiệm ? "
- A. $|m| \geq 2$ B. $|m| \leq 2$ C. $|m| \leq 1$ D. $|m| \leq 3$
- Câu 7.** Tìm số họ nghiệm của phương trình $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1 + \sqrt{\sin x \cos x}$.
- A. 6. B. 3 C. 4 D. 2.
- Câu 8.** Tìm số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác nghiệm phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$.
- A. 4. B. 2. C. 4 D. 3.
- Câu 9.** Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để phương trình sau có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- $$\tan^3 x + \cot^3 x + \tan^2 x + \cot^2 x + \tan x + \cot x = m.$$
- A. $m = 6$. B. $m = 7$. C. $m = 5$. D. $m = 8$.
- Câu 10.** Tìm một phương trình hệ quả của phương trình $\sin^5 x + \cos^5 x = \sin x + \cos x$.
- A. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ B. $\sin x + \cos x = 1$
C. $\sin x \cos x = 1$ D. $\sin x \cos x = -1$

Phần 2: TỰ LUẬN

- Câu 1.** Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$
- Câu 2.** Cho x thỏa mãn $6(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x + 6 = 0$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- Câu 3.** Cho phương trình $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ có nghiệm ?
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng một nghiệm thực thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$?