

3. Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác.

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

a, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

b, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

◎ Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

* Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

* Nếu D không phải tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

* Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

* Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

* **Lưu ý:** Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1, Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R}$.

2, Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R}$.

3, Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4, Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dạng 3: Tính chẵn lẻ

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

a) Hàm chẵn nếu
$$\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

b) Hàm lẻ nếu
$$\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

2. Đồ thị:

a) Đồ thị hàm chẵn đối xứng qua trục tung.

b) Đồ thị hàm lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

3. Các hàm số lượng giác

a) Hàm $y = \cos x$ là hàm số chẵn

Mở rộng $y = \cos ax$ là hàm số chẵn

b) Hàm $y = \sin x; y = \tan x; y = \cot x$ là hàm số lẻ

Mở rộng $y = \sin ax; y = \tan ax; y = \cot ax$ là hàm số lẻ

4. Bài tập:

Bài tập 1: Xét tính chẵn lẻ

a) $y = \sin x \cos 3x$

b) $y = \frac{2 \cos x - 1}{\sin x}$

c) $y = \frac{\sin^{2020} x + 2019}{\cos x}$

Bài tập 2: Hàm nào sau đây là hàm số chẵn:

A. $y = \sin x \cos x$ B. $y = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ C. $y = \tan 2x$ D. $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $y = 3m \sin 2x + \cos x$ là hàm số chẵn

A. $m > 0$ B. $m < -1$ C. $m = 0$ D. $m = 1$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

PHẦN 1: TỰ LUẬN

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = -2 \cos x$?

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$?

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3 \sin^2 x$.

Ví dụ 4. Chứng minh hàm số $y = f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ví dụ 5. Chứng minh hàm số $y = f(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ có đồ thị đối xứng qua trục tung.

PHẦN 2: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x$ B. $y = \cos 3x$ C. $y = \tan 4x$ D. $y = \cot 5x$

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây là sai?

A. $y = \tan x$ là hàm lẻ. B. $y = \cot x$ là hàm lẻ.
C. $y = \cos x$ là hàm lẻ. D. $y = \sin x$ là hàm lẻ.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = -2 \cos x$ B. $y = -2 \sin x$ C. $y = -2 \sin^2 x + 2$ D. $y = -2 \cos x + 2$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \cos 3x$ và hàm số $g(x) = \tan 2x$, chọn mệnh đề đúng:

A. $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
B. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.
D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn.

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$ B. $y = x \cos x$ C. $y = \cos x \cdot \cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin|x|$ B. $y = x^2 \sin x$ C. $y = \frac{x}{\cos x}$ D. $y = x + \sin x$

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos 2x$ B. $y = 2 \cos 2x$ C. $y = \frac{x}{\sin x}$ D. $y = 1 + \tan x$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos 3x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. Hàm số là hàm số chẵn. B. hàm số vừa là hàm chẵn vừa là hàm lẻ.
C. Hàm số là hàm số lẻ. D. Hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 9: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn.

- A. $y = \frac{\cos^{2022} x + 2021}{2022 \sin x}$ B. $y = \tan x + \cot x$
C. $y = \frac{\cos x}{6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 15}$ D. $y = \frac{1}{2 \sin x - 1}$

Câu 10: Cho các hàm số $y_1 = \frac{|x| \sin 2x}{\cos^3 x}$; $y_2 = 2 - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$; $y_3 = \sin x \cos^2 x + \tan x$ và $y_4 = |x| \cos 2x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

1.4. Tính tuần hoàn, tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

Hàm số được gọi là tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

2. Số $T : >0$ và **NHỎ NHẤT** thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T.

3. Đồ thị: Đồ thị hàm tuần hoàn lặp lại sau mỗi chu kỳ T.

4. Tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác

a) Hàm $y = \sin x; \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

Mở rộng: Hàm $y = \sin(ax+b); y = \cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|a|}$

b) Hàm $y = \tan x; y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π

Mở rộng: $y = \tan(ax+b); y = \cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{|a|}$

c) Nếu hàm $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T thì $y = \frac{1}{f(x)}$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{1}{T}$

d) Hàm $y = af + bg$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \text{BCSNN}(T_1; T_2)$

e) Các hàm khác được biến đổi đưa về các hàm trên

II. VÍ DỤ MINH HỌA

PHẦN 1: TỰ LUẬN

Ví dụ 1. Tìm chu kì của các hàm số sau

a) $y = 2 \sin x$

b) $y = 3 \cos x - 1$

Ví dụ 2. Tìm chu kì của các hàm số sau

a) $y = \tan x - 1$

b) $y = 3 \cot x$

Ví dụ 3. Tìm chu kì của các hàm số sau

a) $y = \sin 2x$

b) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

Ví dụ 4. Tìm chu kì của các hàm số sau

a) $y = \tan(1 - 2x)$

b) $y = \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Ví dụ 5. Tìm chu kì của hàm số sau $y = \sin 2x + 5 \cos 3x$

Bài tập 6: Tìm chu kỳ $y = \sin^2 x + 5$

A. π

B. 2π

C. 3π

D. 4π

Bài tập 7:: Chu kỳ của hàm

a) $y = \tan x - 5 \cot\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$

c) $y = \sin x \cos 2x$

Bài tập 8: (Casio) Chu kỳ của hàm $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$ là

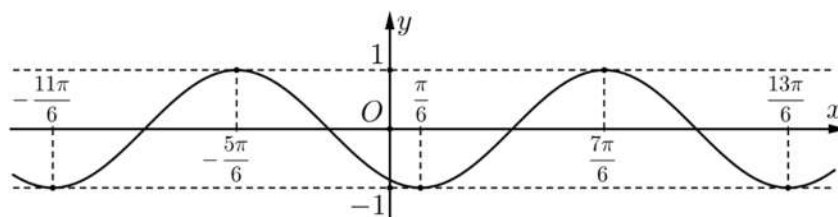
A. $\frac{2\pi}{3}$

B. 2π

C. 4π

D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chu kỳ T của hàm số là



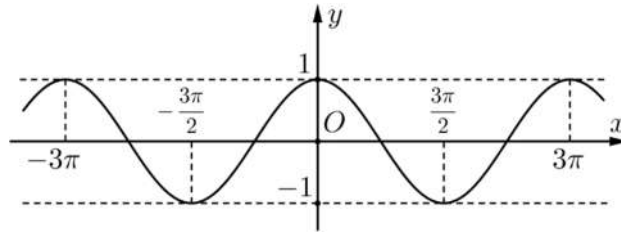
A. $T = \frac{\pi}{6}$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = 4\pi$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chu kỳ T của hàm số là



- A. $T = \frac{3\pi}{2}$. B. $T = 2\pi$. C. $T = 3\pi$. D. $T = 6\pi$.

PHẦN 2: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \tan x + 2021$

- A. $T = 4\pi$ B. $T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $T = \pi$. D. $T = 2\pi$.

Câu 2: Chu kỳ T của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $T = \pi$. B. $T = 3\pi$. C. $T = 2\pi$. D. $T = 0$.

Câu 3: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cot\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $T = \frac{\pi}{3}$. B. $T = 2\pi$. C. $T = \pi$. D. $T = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 4: Chu kỳ của hàm số $y = 2\pi^2 \cos x$ là

- A. 2π . B. π . C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $2\pi^2$.

Câu 5: Chu kỳ T của hàm số $y = \sin x - \cos x$ là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = 3\pi$. C. $T = \pi$. D. $T = 0$.

Câu 6: Trong các hàm số sau có bao nhiêu hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

i) $y = \tan 2x + \cot 2x$

ii) $y = x + \cos x$

iii) $y = \cos \pi x$

iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7: Chu kỳ của hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 2π . C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Câu 8: Chu kỳ của hàm số $y = \cot 3x - \sin^2 2x$ là

- A. π . B. 2π . C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 9: Chu kỳ của hàm số $y = \cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x$ là A. π . B. 2π . C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.