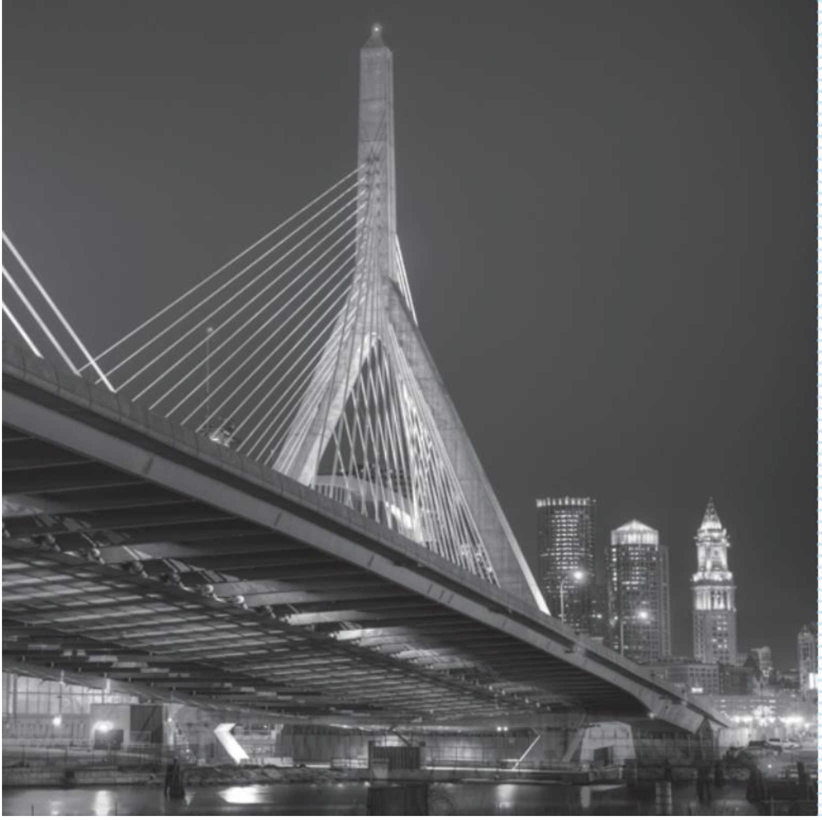


PART A

Ordinary Differential Equations (ODEs)

Có nhiều định luật vật lý được biểu diễn bằng biểu thức toán học theo dạng phương trình vi phân. Vì vậy quyển sách này mở đầu bằng việc nghiên cứu các phương trình vi phân và giải pháp. Thực vậy, nhiều vấn đề kỹ thuật xuất hiện dưới dạng phương trình vi phân.

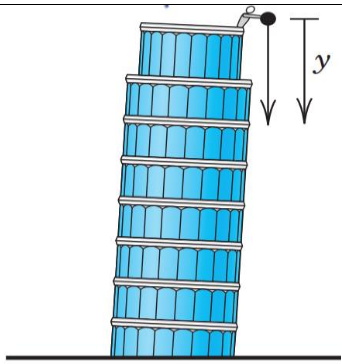
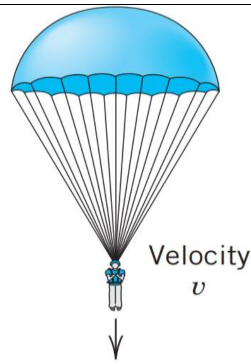
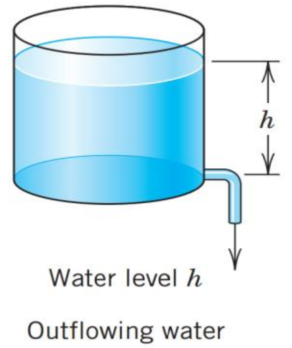
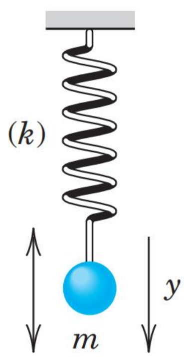
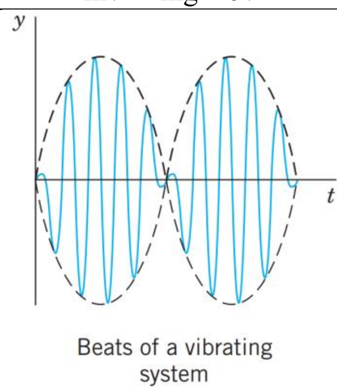
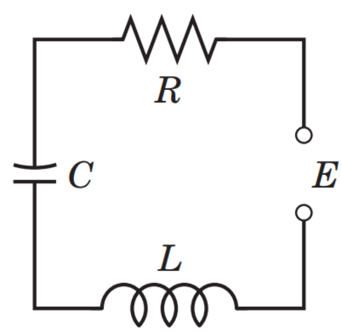
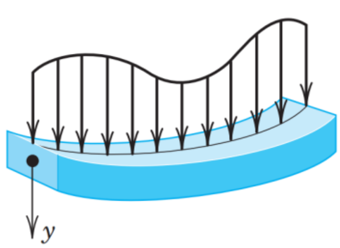
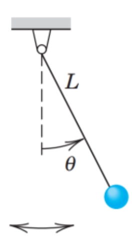
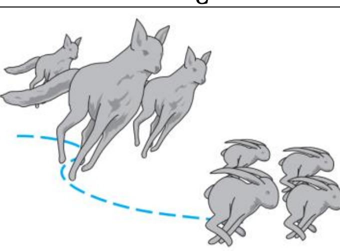
Mục tiêu chính của **Phần A** là tìm hiểu về phương trình vi phân thường, những phương thức quan trọng, thường được sử dụng để giải quyết vấn đề và mô hình hoá tư duy.

Ordinary defferential equations (OEDs) – phương trình vi phân thường là phương trình vi phân một biến. Phần khó hơn là tìm hiểu về partial defferential equations (PDEs) – phương trình vi phân từng phần là phương trình vi phân mà có nhiều biến.

CHAPTER 1

First-Order ODEs

1.1 Mô Hình Hoá

 Thả rơi tự do $Y'' = g = const$	 Người nhảy dù $mv' = mg - bv^2$	 Dòng nước chảy ra (tạm dịch) $h' = -k\sqrt{h}$
 Vật dao động (tạm dịch) $my'' + ky = 0$	 Nhịp đập của một hệ rung (tạm dịch) $y'' + \omega_0^2 y = \cos\omega t$	 Dòng điện trong mạch RLC $LI'' + RI' = \frac{1}{C}I = E'$
 Biến dạng dầm $EIy^{iv} = f(x)$	 Con lắc đơn $L\theta'' = g\sin\theta = 0$	 Lotka-Volterra (Con mồi – kẻ săn mồi) …

Một ODE - phương trình vi phân thường là một phương trình chứa 1 hoặc nhiều đạo hàm của một hàm không xác định, hàm không xác định thường là y(x) (hoặc y(t) nếu hàm phụ thuộc vào biến thời gian). Phương trình có thể chứa y, phương trình không xác định theo x, hằng số. Ví dụ:

(1) $$Y' = \cos(x)$$

(2) $$y'' + 9y = e^{-2x}$$

(3) $$y'y''' - \frac{3}{2}y'^2 = 0$$

Trong chương này ta sẽ bàn về first-order ODEs – phương trình vi phân cấp I, chỉ chứa **y'** và có thể chứa **y** hoặc một vài hàm theo **x**. Kể từ giờ chúng ta có thể viết nó dưới dạng:

(4) $$F(x, y, y') = 0$$

Hoặc

$$y' = f(x, y)$$

Dạng này được gọi là dạng xác định (tường minh) ngược với dạng tổng quát (không xác định) (4). Chúng ta có thể chuyển từ dạng tổng quát của
$x^{-3}y' - 4y^2 = 0$ thành dạng tường minh $y' = 4x^3y^2$.

Nghiệm của phương trình vi phân là $y = h(x)$ trên khoảng mở a<x<b nếu h(x) xác định và khả vi và khi thay thế y, y' bằng h, h' ta thu được phương trình đồng nhất.

Phương trình vi phân y' = dy/dx = cos(x) có thể được giải bằng cách nguyên hàm hai vế $\int y\,dy = \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$, với c là một hằng số bất kỳ. Đó được gọi là **họ nghiệm (tạm dịch)**. Với mỗi giá trị của c, ta sẽ thu được một đồ thị tương ứng.

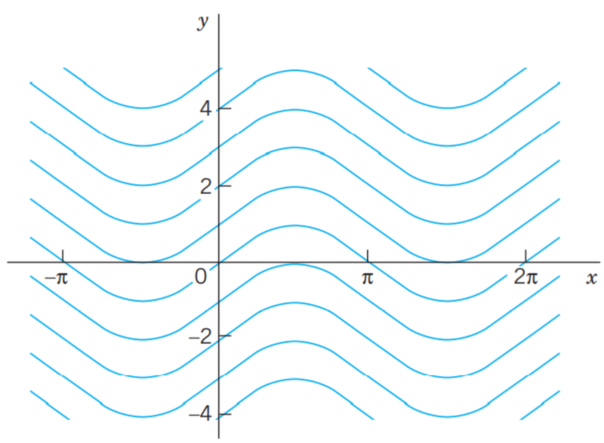


Fig. 3. Solutions $y = \sin x + c$ of the ODE $y' = \cos x$

(A) Bài toán tăng trưởng theo cấp số nhân (B) Phân rã dạng hàm mũ

Ta đã biết $y = ce^{0.2t}$ có đạo hàm là:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0.2ce^{0.2t} = 0.2y$$

Do đó y là nghiệm của phương trình $y = 0.2y'$. Dạng phương trình vi phân này có dạng $y = ky'$. Với k là hằng số dương, nó là mô hình tăng trưởng. (Ví dụ: quần thể vi khuẩn, …) Mô hình này cũng được áp dụng cho con người với những khu vực nhỏ theo Định luật Malthus (Malthus tuyên bố dân số con người tăng theo cấp số nhân còn lương thực tăng theo cấp số cộng).

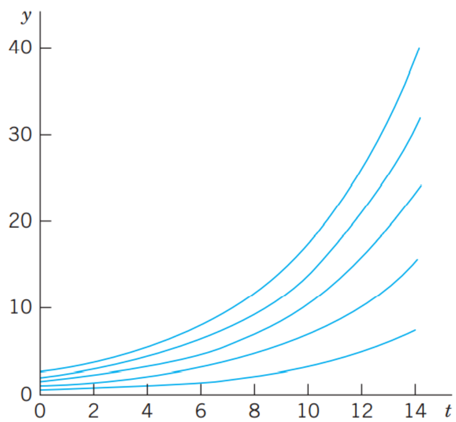


Fig. 4A. Solutions of $y' = 0.2y$ in Example 3 **(exponential growth)**

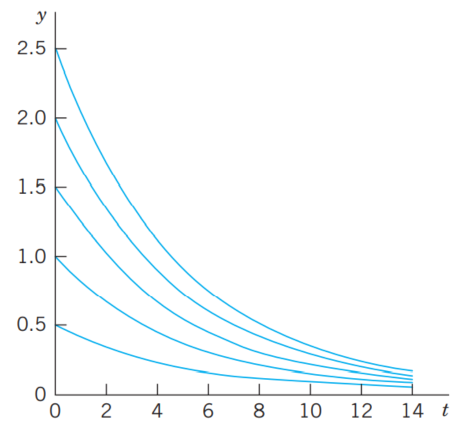


Fig. 4B. Solutions of $y' = -0.2y$ in Example 3 **(exponential decay)**

1–8 CALCULUS

Solve the ODE by integration or by remembering a differentiation formula.

1. $y' + 2\sin 2\pi x = 0$
2. $y' + xe^{-x^2/2} = 0$
3. $y' = y$
4. $y' = -1.5y$
5. $y' = 4e^{-x}\cos x$
6. $y'' = -y$
7. $y' = \cosh 5.13x$
8. $y''' = e^{-0.2x}$

1.2 Ý Nghĩa Hình Học Của $y' = f(x, y)$. Trường Hướng.

Tóm tắc: Trên hệ trục Oxy, với mỗi điểm (x,y) ta có thể vẽ được một vector tiếp tuyến với y dựa vào y’, x, y tất cả những vector đó tại một số lượng điểm nhất định trên hệ trục Oxy tạo thành trường hướng. Từ trường hướng, kết nối các đường thẳng này lại ta sẽ thu được một đường con tiệm cận (gần đúng) với đồ thị của y tuỳ số lượng vector trên trường hướng.

Từ phương trình vi phân cấp I

$\boldsymbol{y' = 1 + y^2}$.

Với

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

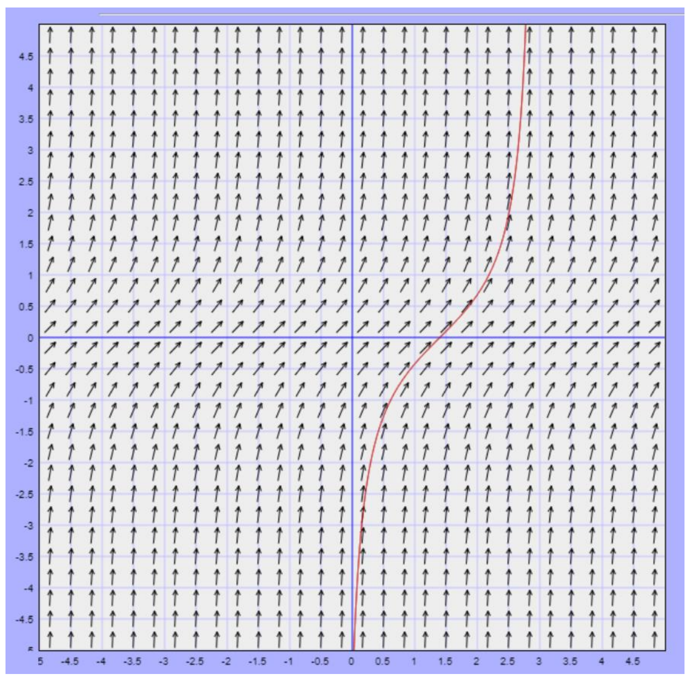
Biến đổi toán học ta thu được

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

Nguyên hàm hai vế thu được phương trình cuối cùng theo hằng số bất kỳ c

$$\tan^{-1} y = x + c$$

Và ta có thể kiểm chứng kết quả của mình thông qua **trường hướng**. Bằng cách kết nối các vector này lại ta có thể có thu được một nghiệm của phương trình; nó đồng nhất với nhau.



Chú ý về vị trí của hằng số c. Ở bài toán trên ta giải ra được nghiệm là

$$\tan^{-1} y = x + c$$

Hay

$$y = \tan\,(x + c)$$

Chứ không phải:

$$y = \tan x + c$$

1.3 Phương Trình Vi Phân Tách Biến.

Nhiều phương trình vi phân có thể được rút gọn, biến đổi toán học về dạng:

(1) $$g(y)y' = f(x)$$

Với $y' = \frac{dy}{dx}$, bằng các thao thác đại số thuần tuý, nguyên hàm hai vế ta thu được:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

Ví dụ 1: Phương trình vi phân $\boldsymbol{y' = 1 + y^2}$ là một PTVT tách biến vì có thể được viết

$\frac{dy}{1+y^2} = dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx + c \quad \rightarrow \quad \tan^{-1} y = x + c$

Ví dụ 2: Phương trình vi phân $\boldsymbol{y' = (x+1)e^{-x}y^2}$

$\frac{dy}{y^2} = (x+1)e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int (x+1)e^{-x}dx + c \rightarrow -\frac{1}{y} = -(x+2)e^{-x} + c$

Phương pháp mở rộng: *Đơn giản hoá PTVP tách biến*

(8) $$y' = f(\frac{y}{x})$$

Ở đây hàm f là bất kỳ hàm nào của y/x, ví dụ $\left(\frac{y}{x}\right)^4$, $sin\left(\frac{y}{x}\right)$, … Để giải bài toán dạng này ta có thể đặt $u = \frac{y}{x}$ từ đó suy ra được $y = u.x$ và $y' = u'x + u$

Thay lại vào pt $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ta được:

(10) $$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình vi phân $xy' = y + 2x^3 \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$

Chia hai vế cho x, ta được $y' = \frac{y}{x} + 2x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ (*)

Đặt $u = \frac{y}{x}$ từ đó suy ra được $y = u.x$ và $y' = u'x + u$, $du = u'dx$ thay vào (*), biến đổi toán học

$$u'x + u = u + 2x^2 \sin^2 u \quad \rightarrow \quad u' = 2xsin^2u$$

nguyên hàm hai vế

$$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \int 2xdx + c \quad \rightarrow \quad \tan(u) = x^2 + c \quad \rightarrow \quad \tan\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 + c$$

Ví dụ 4: Giải phương trình vi phân $y' = (y+4x)^2$

Để đơn giản hoá, ta đặt $v = y + 4x \rightarrow v' = y' + 4, \quad dv = v'dx$ thay vào phương trình vi phân ban đầu

$$v' - 4 = v^2 \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{v^2 + 2^2} dv = \int dx + c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}(v+2) = x + c$$

Thay $v = y + 4x$ vào $\frac{1}{2}\tan^{-1}(v+2) = x + c$ ta được nghiệm của PTVP

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}(y + 4x + 2) = x + c$$

1.4 Phương Trình Vi Phân Toàn Phần

(tóm tắc)

Hãy nhớ lại trong giải tích, đạo hàm của một hàm nhiều biến u(x,y), liên tục và có đạo hàm từng phần $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; u_y = \frac{\partial u}{\partial u}$ thì

$du = u_x dx + u_y dy$ (2)

Trong đó $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ và $u_y = \frac{\partial u}{\partial u}$ lần lượt là đạo hàm riêng của u theo x (xem y là hằng số), và y (xem x là hằng số) . Nếu u(x,y) = c = const (3), thì du = 0.

Ví dụ, $u(x,y) = x + x^2y^3 = c$, lấy vi phân ta được

$$du = (1 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy = 0$$

Hay

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2}$$

Với phương trình vi phân: $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, ta có thể viết lại thành

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1)

Cho rằng u(x,y) = c, tức du = 0, đồng nhất với (*) ta được

$M(x,y) = \frac{du}{dx}$ (4a)

$N(x,y) = \frac{du}{dy}$ (4b)

Để kiểm chứng giả thuyết M(x,y) và N(x,y) là đạo hàm riêng của một hàm u(x,y) nào đó hay không, ta lấy đạo hàm riêng M(x,y) theo biến y và N(x,y) theo biến x, nếu thu được kết quả $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ thì <u>M(x,y) và N(x,y) là đạo hàm riêng của một hàm u(x,y) nào đó</u>.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

Nên $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Giải phương trình vi phân (4a) ta tìm được

$$u = \int M(x,y)dx + k(y) \quad (6)$$

với k(y) được xem là một "hằng số". Tương tự với (4b) ta được

$$u = \int N(x,y)dy + l(x) \quad (6^*)$$

$l(x)$ được xem là hằng số. Để tìm k(y), ta tìm đạo hàm du/dy từ (6), sử dụng kết quả khi giải phương trình (4a) để tìm dk/dy, và nguyên hàm để tìm k.

Tương tự với việc tìm l(x), tìm đạo hàm du/dx từ (6*), sử dụng kết quả khi giải phương trình (4a) để tìm dl/dx, và nguyên hàm để tìm l.

Ví dụ 1:

Giải PTVP $\cos(x+y)\,dx + [3y^2 + 2y\cos(x+y)]dy = 0$ (7)

$M = \cos(x+y)$,

$N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$.

Do đó

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

Vì $\frac{\partial M}{dx} = \frac{\partial N}{dx}$ nên chúng là đạo hàm riêng của u(x,y). (ref)

Nghiệm chung: $u(x,y) = \int M dx + k(y) = \sin(x+y) + k(y)$ (*)

Để tìm k(y), lấy đạo hàm u(x,y) vừa tính ở trên theo biến y

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\sin(x+y) + k(y)] = \cos(x+y) + \frac{dk}{dy}$$

Mặt khác $u_y = N(x,y)$

$$\cos(x+y) + \frac{dk}{dy} = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$$

Rút gọn, nguyên hàm hai vế ta được

$$k(y) = y^3 + y^2 + c^*$$

Vậy nghiệm của PTVP đã cho là

$$u(x,y) = \sin(x+y) + y^3 + y^2 = c.$$

Ví dụ 2:

Giải phương trình vi phân

$$(\cos y\,.\sinh x + 1)dx - \sin y \cosh x\; dy = 0\,, y(1) = 2$$

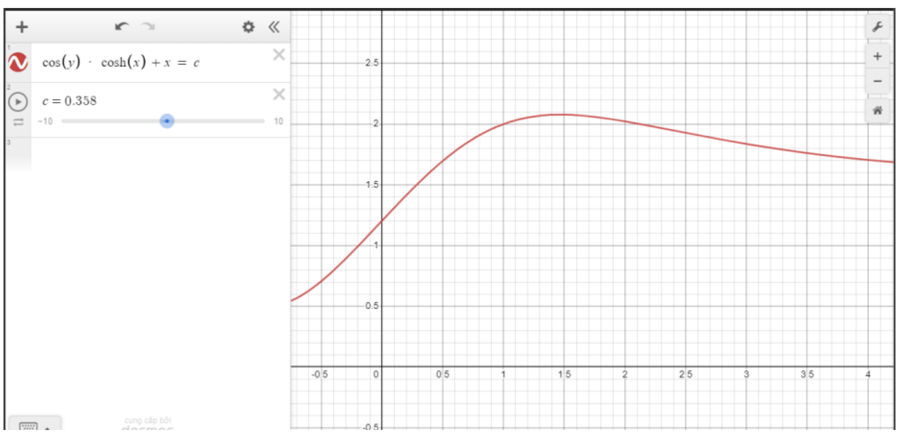
Do $\frac{\partial}{\partial y}(\cos y\,.\sinh x + 1) = -\sin y.\sinh x$ và $\frac{\partial}{\partial x}(-siny.\cosh x) = -\sin y\,.\sinh x$, nên chúng ta có thể làm tương tự như ví dụ 1

$$u(x,y) = \int(\cos y\,.\sinh x + 1)dx\; + k(y) = \cos y\,.\cosh x + x + k(y)$$

Mặt khác

- $u_y = -\sin y.coshx + \frac{dk}{dy} = -\sin y\,.\cosh x \to k(y) = c^*$
- $y(1) = 2 \to c = u(1{,}2) = 0{,}358$

Vậy $u(x,y) = \cos y\,.\cosh x + x = c.$



Ví dụ 3. Chú ý! Trường hợp không là PTVP toàn phần

Phương trình $-ydx + xdy = 0$ không phải là PTVP toàn phần nếu M = -y và N = x, tương tự (5), $\frac{\partial M}{dy} = -1$ trong khi $\frac{\partial N}{dx} = 1$.

Biến đổi để thu được PTVT Toàn phần. Yếu tố nguyên hàm (tạm dịch)

Ở ví vụ trên PTVP $-ydx + xdy = 0$ không là phương trình vi phân toàn phần, nhưng nếu chúng ta nhân hai vế cho $\frac{1}{x^2}$, kiểm tra thông qua [5], ta sẽ thu được PTVP TP:

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

Tương tự [6]

$$u = -y\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{y}{x} + k(y)$$

Mặt khác

$$u_y = \frac{1}{x} + \frac{dk}{dy} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad k = c^*$$

Nên

$$u = \frac{y}{x} = c = \text{const}$$

Ví dụ này cho ta một ý tưởng. Tất cả những gì chúng ta làm với phương trình vi phân không toàn phần

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (12),$$

Là nhân với hàm F (thường là hàm của x và y) kết quả thu được là một PTVP Toàn Phần

$$FP\,dx + FQdy = 0 \quad (13)$$

Như vậy F(x,y) được gọi là yếu tố nguyên hàm (dịch từ: integrating factor).

Ví dụ 4

Với PTVP $-ydx + xdy = 0$ ở trên, ta đã chọn hàm $F(x,y) = 1/x^2$ và kết quả thu được là $\frac{y}{x} = c$. Bây giờ hãy thử với $F(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $F(x,y) = \frac{1}{xy}$, $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ta lần lượt thu được các nghiệm là $\frac{x}{y} = c$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = c, acrtan\left(\frac{y}{x}\right) = c.$ [14]

Làm thế nào tìm được hàm F(x,y)

Do (13) là một PTVP toàn phần nên

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{dx}(FQ) \quad (15)$$

Theo quy tắc đạo hàm của một tích, ta thu được biểu thứ được ký hiệu theo đạo hàm riêng

$$F_yP + FP_y = F_xQ + FQ_x$$

Trong trường hợp tổng quát, biểu thức đó trở nên phức tạp và không hữu dụng. Nên chúng ta sẽ sử dụng Quy tắc vàng (Tạm dịch từ: Golden Rule): Nếu bạn không thể giải một vấn đề, hãy thử với vấn đề đơn giản hơn – Kết quả có thể sẽ có ích và giúp bạn sau đó. Từ bây giờ ta sẽ tìm hàm một biến F (F(x) hoặc F(y)): Thật may mắn, trong nhiều trường hợp, đó chính là yếu tố cần tìm – Hàm F cần tìm. Do đó, đặt $F = F(x)$. Sau đó $F_y = 0$ và $F_x = F' = \frac{dF}{dx}$, và (15) trở thành

$$FP_y = F'Q + FQ_x$$

Chia hai vế cho FQ, biến đổi ta được

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = R \qquad với \qquad R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad (16)$$

Do R chỉ phụ thuộc vào biến x nên ta có thể tìm được F(x) bằng cách nguyên hàm hai vế (16)

THUYẾT 1

$$F(x) = e^{\int R(x)dx} \quad (17)$$

Tương tự với $F^* = F^*(y)$, thay vì (16) ta thu được

$$\frac{1}{F^*}\frac{dF^*}{dy} = R^* \qquad với \qquad R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \quad (18)$$

Do R^* ở vế bên phải biểu thức (18) chỉ phụ thuộc vào biến y, nên (12) có $F^* = F^*(y)$

THUYẾT 2

$$F^*(y) = e^{\int R^*(y)dy} \quad (19)$$

Ví dụ 5.

Sử dụng (17) và (19) để tìm F và giải PTVP

$$(e^{x+y} + ye^y)dy + (xe^y - 1)dy = 0,\ y(0) = -1 \quad (20)$$

PTVP đã không phải PTVP toàn phần vì

$$\frac{\partial P}{dy} = e^{x+y} + e^y + ye^y \text{ trong khi } \frac{\partial Q}{dx} = e^y.$$

Ta không thể sử dụng (17) để tìm F, vì R (vế phải của (17)) phụ thuộc vào x và y.

$$R = \frac{1}{xe^y - 1}(e^{x+y} + ye^y)$$

Ta sẽ thử với (18)

$$R = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y}[(e^y) - (e^{x+y}\ e^y + ye^y) = -1.$$

$$\rightarrow F(y) = e^{\int -1dy} = e^{-y}$$

Nhân $F(y) = e^{-y}$ cho [20] ta được

$$(e^{x+y} + ye^{y})e^{-y}dy + (xe^{y} - 1)e^{-y}dy = 0$$

$$\leftrightarrow \ (e^{x} + y)dy + (x - e^{-y})dy = 0 \quad ^{(21)}$$

Vì

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{x} + y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - e^{-y})$$

Nên [21] là một PTVP toàn phần

$$\rightarrow \ u = \int (e^{x} + y)dx = e^{x} + yx + k(y)$$

$$\rightarrow x + \frac{dk}{dy} = x - e^{-y}$$

$$\rightarrow k = e^{-6} + c^{*}$$

$$\rightarrow \ u(x, y) = e^{x} + yx + e^{-y} = c$$

Mặt khác y(0) = -1 nên c = 1 + e.

Vậy nghiệm của PTVP đã cho là : $e^{x} + yx + e^{-y} = 1 + e$

1.5 PTVP Tuyến Tính (Linear ODEs). Phương Trình Bernoulli. Động Lực Học Dân Số.

Phương trình vi phân tuyến tính hay phương trình vi phân có thể chuyển về được dạng tuyến tính là mô hình của nhiều hiện tượng vật lý, sinh học, mô hình tăng trưởng dân số, kinh tế… Một PTVP cấp I được gọi là "tuyến tính" nếu nó có thể đưa về dạng (1) bên dưới bằng các biến đổi đại số và ngược lại không tuyến tính (nonlinear) nếu không thể.

(1) $$y' + p(x)y = r(x)$$

VD: $y' \cos x + y\sin x = x \rightarrow y' + y\tan x = \frac{x}{\cos x}$

Trong vật lý, r(x) có thể là lực, nghiệm y(x) có thể là sự dịch chuyển trong chuyển động, dòng điện, hoặc các đại lượng vật lý khác. Trong kỹ thuật, r(x) thường được gọi là đầu vào (input), y(x) được gọi là đầu ra (output) hoặc phản hồi tới đầu vào…

Phương trình vi phân tuyến tính đồng nhất. Nếu chúng ta muốn giải [1] trong khoảng a<x<b, gọi khoảng đó là J, và ta bắt đầu ới trường hợp đơn giản hơn $r(x) \equiv 0, \forall x \in J$. PT (1) trở thành

(2) $$y' + p(x)y = r(x)$$

Và được gọi là đồng nhất (dịch từ : **homogeneous**). Biến đổi đại số

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + c^{*} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + c^{*}$$

Nghiệm của bài toán là $y = ce^{-\int p(x)dx} \quad với\ c = \pm e^{c^{*}}\ khi\ q \neq 0 \quad ^{(3)}$

Phương trình vi phân tuyến tính KHÔNG đồng nhất. Ta sẽ giải (1), $r(x) \neq 0, \forall x \in J$.

Ta có thể giải (1) bằng cách tìm Hệ số tích phân/Yếu tố tích phân (dịch từ: integrating factor) với một đặc tính rất dễ chịu của (1) là ta sẽ chỉ cần tìm F(x) dựa vào Thuyết 1 ở phần trước.

(1*) $$Fy' + Fpy = rF$$

Mặt khác vế trái là đạo hàm của $(Fy)' = F'y + Fy'$ nếu $\boldsymbol{pFy = F'y}$, do đó $pF = F'$

Bằng cách tách biến F' = dF\dx ta được

$$\int \frac{1}{F} dF = \int p(x)dx \rightarrow \quad F = e^h, \ \boldsymbol{h(x) = \int p(x)dx}$$

Với F và h' = p, PT (1*) trở thành

$$e^h y' + h' e^h y = re^h$$

$$\leftrightarrow \ e^h y' + \left(e^h\right)' y = re^h$$

$$\leftrightarrow (e^h y)' = re^h$$

Nguyên hàm hai vế

$$e^h y = \int re^h dx + c$$

$$\leftrightarrow \ y = e^{-h} \int re^h dx \ + \ ce^{-h}, \qquad h = \int p(x)dx \tag{4}$$

Ví dụ 1

Giải PTVP $y' + ytanx = sin2x, \ y(0) = 1$.

Theo (1) thì $p(x) = tanx$ và $r(x) = sin2x = 2sinxcosx$;

$$h(x) = \int p(x)dx = \int tanxdx = \ln\left|\frac{1}{cosx}\right|$$

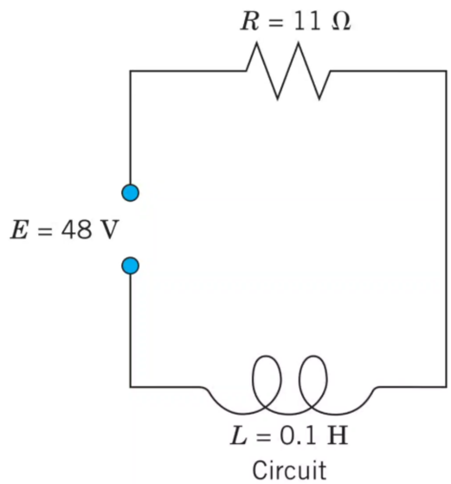
$$\rightarrow \ e^h = e^{\ln\left|\frac{1}{cosx}\right|} = \frac{1}{cosx}, \ \ e^{-h} = cosx, re^h = 2sinxcosx \cdot \frac{1}{cosx} = 2sinx$$

$$\rightarrow \ y(x) = cosx \int 2sinxdx + c \cdot cosx = -2\cos^2 x + c \cdot cosx$$

Do y(0) = 1 nên $c = 3 \ \rightarrow \ y(x) = \ -2\cos^2 x + 3cosx$

Ví dụ 2. Mạch điện

Cho mạch điện như hình.



Tìm biểu thức dòng điện theo thời gian thực I(t) (t là thời gian). Cho rằng EMF E(t) (EMF: electromotive force – suất điện động) pin E=48V (volts), điện trở (resistor) R = 22 Ω, hệ số tự cảm (inductor) L = 0.1H, dòng điện ban đầu trong mạch bằng 0 (A).

Định luật vật lý. Dòng điện I trong mạch gây sự sụt áp (hiệu điện thế) RI trên điện trở, và sự sụt áp LI' trên cuộn cảm. Tổng hiệu điện thế trên hai vật này bằng điện áp nguồn.

Theo định luật Kirchhoff II,

$$RI + LI' - E = 0$$

$$\leftrightarrow \ I' + \frac{R}{L}I' = \frac{E}{L}$$

Đặt $h(t) = \int p(t)dt = \int \frac{R}{L}dt = RL^{-1} \cdot t$

Nghiệm của PTVP $RI + LI' - E = 0$ có dạng (4):

$$I = e^{-h}(\int r \cdot e^{h}\, dt + c)$$

$$\leftrightarrow I = e^{-RL^{-1}t}\left(\int e^{RL^{-1}} \cdot EL^{-1}\, dt + c\right)$$

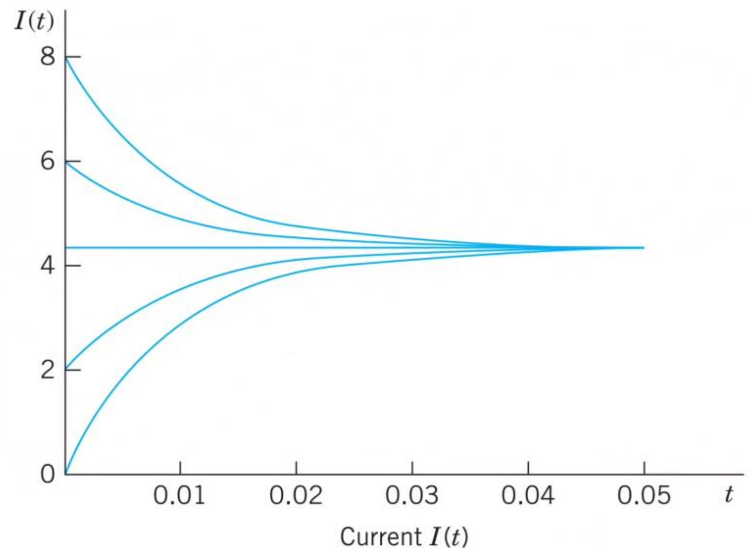
$$\leftrightarrow \ I = \ e^{-RL^{-1}t}\left(e^{RL^{-1}} \cdot E \cdot R^{-1} + c\right)$$

$$\leftrightarrow I = E \cdot R^{-1} + c \cdot E^{-RL^{-1}}$$

$$\leftrightarrow I = 48 \cdot 11^{-1} + c \cdot 48^{-11 \cdot 0.1^{-1}}$$

$\leftrightarrow I = \frac{48}{11}(1 - e^{-110})$ (Do tại thời điểm ban đầu t=0, I=0)

Với các giá trị ban đầu của I khác nhau, ta có các "đường nghiệm" khác nhau:



Ví dụ 3. Hormone Level (Lượng Hóoc-môn)

Cho rằng mức độ của một loại Hormone trong máu của một bệnh nhân thay đổi theo thời gian. Giả sử lượng hormone thay đổi theo thời gian phụ thuộc vào tỉ lệ lượng hormone được tiết ra ở tuyến giáp trong trong 24 giờ theo đồ thị hình Sin và lượng hormone bị đào thải ra khỏi máu tỉ lệ với lượng hormone ở trong máu. Hãy mô hình hoá lượng hormone trong máu.

--------Giải--------

Đặt y(t) là lượng hormone có trong máu ở thời điểm t. Lượng hormone bị đào thải là $K \cdot y(t)$.

Đầu vào sẽ là $y(t) = A + Bcos(\omega t)$ với $\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{pi}{12}, A \geq B$ để y(t) không âm. Với các hằng số A, B, K có thể xác định bằng phép đo.

$$y'(t) = In - Out = A + Bcos\omega t - K \cdot y(t)$$

$$\leftrightarrow y' + Ky = A + Bcos\omega t \ ^{(*)}$$

Với điều kiện ban đầu t=0 (ví dụ 6g00 sáng), $y(0) = y_0$

Do (*) là phương trình vi tuyến tính không thuần nhất, nên

$$p(t) = K = const, \qquad r(t) = A + Bcos\omega t$$

$$\rightarrow h(x) = \int K\, dt = K \cdot t$$

$$\rightarrow e^h = e^{Kt}, \qquad e^{-h} = e^{-Kt}, \qquad re^h = (A + Bcos\omega t)e^{Kt}$$

Nghiệm của (*) là

$$y(t) = e^{-h}\left(\int re^{h}dt + c\right)$$

$$\leftrightarrow y(t) = e^{-KT}\int (A + Bcos\omega t)e^{Kt}\,dt + c \cdot e^{-Kt}$$

Sử dụng công thức 193, short table of integrals:

$$\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax} \cdot \frac{acosbu + bsinbu}{a^2 + b^2}$$

$$\leftrightarrow y(t) = e^{-KT}\left(A \cdot \frac{1}{K}e^{Kt} + B \cdot e^{KT} \cdot \frac{Kcos\omega t + \omega sin\omega t}{K^2 + \omega^2}\right) + c \cdot e^{-Kt}$$

$$\leftrightarrow y(t) = AK^{-1} + B \cdot e^{KT} \cdot \frac{Kcos\omega t + \omega sin\omega t}{K^2 + \omega^2} + c \cdot e^{-KT}$$

Một trường hợp cụ thể y(0) = 0, A = B = 1, K = 0.05

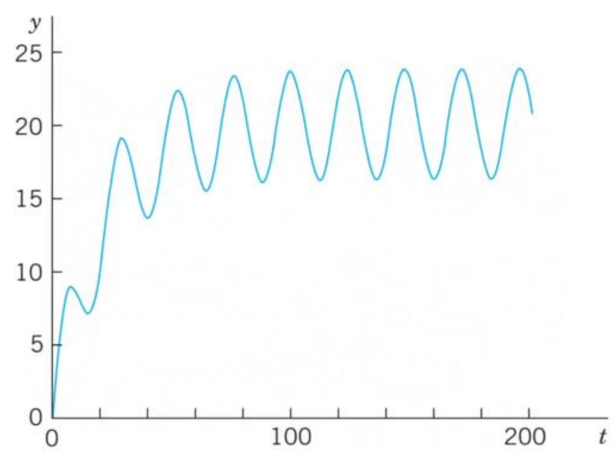


Fig. 20. Particular solution in Example 3

Đơn giản hoá phương trình vi phân tuyến tính. Phương trình Bernoulli.

Phương trình Bernoulli cho chất lỏng không nén được.

$$y' + p(x)y = g(x)y^a, a \in R \qquad (7)$$