

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

-----**-----
*

TS. NGUYỄN THANH HẢI

**GIÁO TRÌNH
XỬ LÝ ẢNH**

(Ngành Điện - Điện Tử)

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH – 2014**

Chương 3

PHÉP BIẾN ĐỔI ẢNH

Trong chương này, hai phép biến đổi cơ bản là Fourier và Wavelet được trình bày. Song song đó các ví dụ về áp dụng các loại biến đổi này lên một ảnh cũng được triển khai.

3.1. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

Cho $f(t)$ là một hàm liên tục với biến t có chu kỳ T được biểu diễn dưới dạng là tổng của các hàm sine và cosine với các hệ số xấp xỉ. Và tổng này, được biết như là chuỗi Fourier có dạng như sau:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \quad (3.1)$$

với

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

là các hệ số. Thật sự biểu thức (3.1) là dạng triển khai của hàm sine và cosine theo như trong công thức Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

Trong xử lý tín hiệu, xung đơn vị $\delta(t)$ được định nghĩa như sau:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

và có đáp ứng

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.4)$$

Xung đơn vị chỉ có thể được quan sát tại thời điểm $t = 0$ với biên độ vô cực, do đó, nó có đặc trưng chọn lọc thông tin với tích phân như sau:

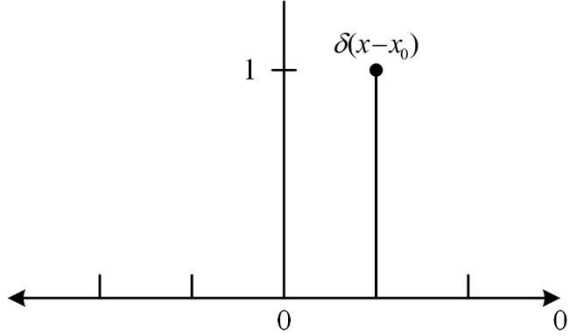
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (3.5)$$

Biểu thức (3.5) chỉ đơn giản giữ lại thành phần $f(t)$ tại thời điểm $t = 0$. Từ đây, việc trích xuất thành phần tín hiệu $f(t)$ tại thời điểm t_0 chỉ đơn giản thay đổi vị trí của xung đơn vị $\delta(t - t_0)$. Trong trường hợp này, với đặc trưng chọn lọc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (3.6)$$

Ví dụ, nếu hàm $f(t) = \cos(t)$, sử dụng xung đơn vị $\delta(t - \pi)$ trong biểu thức (3.6) sẽ cho kết quả $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$.

Hình 3.1. Xung đơn vị rời rạc tại vị trí $x = x_0$. Biến x là rời rạc và δ bằng 0 tại bất kỳ điểm nào mà $x = x_0$



Còn đối với biến rời rạc x , trong trường hợp này, ta có xung đơn vị rời rạc tương ứng $\delta(x)$ cũng thực hiện nhiệm vụ tương ứng với $\delta(t)$ như trong hệ thống liên tục. Cụ thể, nó được định nghĩa như sau:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 0 \\ 0 & ; x \neq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Từ đó, biểu thức (3.6) tương ứng dưới dạng rời rạc được viết lại như sau:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (3.8)$$

Với một hàm $f(t)$ liên tục trên miền thời gian, biểu thức biến đổi Fourier $F(\mu)$ được viết gọn như sau:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (3.9)$$

Sử dụng công thức Euler, ta có

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi\mu t) - j \sin(2\pi\mu t)] dt \quad (3.10)$$

Ngược lại, cho $F(\mu)$, hàm $f(t)$ đạt được bằng phép biến đổi ngược Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad (3.11)$$

Nếu $f(t)$ là thực thì biến đổi Fourier của nó có dạng phức. Do chỉ còn mỗi biến tần số tồn tại sau khi tích phân nên thông thường người ta còn gọi biến đổi Fourier là biến đổi tần số.

Xem như đã biết, tích chập hai tín hiệu được viết theo sau:

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.12)$$

Khi đó biến đổi Fourier của tích chập hai tín hiệu có dạng:

$$\begin{aligned} F\{f(t) \star h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}]d\tau \\ &= H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\mu\tau}d\tau \\ &= H(\mu)F(\mu) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Có thể thấy biến đổi Fourier của tích chập hai tín hiệu là tích của Fourier của hai tín hiệu riêng lẻ. Hay nói cách khác, $f(t) \star h(t)$ và $H(\mu)F(\mu)$ là một cặp biến đổi Fourier. Kết quả này là một phần lý thuyết tích chập và có thể được viết như sau:

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu) \quad (3.14a)$$

Cần lưu ý về phải đạt được bằng phép biến đổi Fourier về trái, trong khi đó, về trái cũng thu được bằng phép biến đổi Fourier ngược về phải. Phần còn lại của lý thuyết tích chập có thể được biểu diễn dưới dạng biểu thức sau:

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu) \quad (3.14b)$$

3.1.1. Biến đổi Fourier rời rạc

Gọi $\tilde{f}(t)$ là hàm liên tục được lấy mẫu với khoảng ΔT đồng nhất, biến đổi Fourier của $\tilde{f}(t)$ có dạng $\tilde{F}(\mu)$

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (3.15)$$

Trong đó $\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$. Thế $\tilde{f}(t)$ vào (3.15), ta có

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu\Delta T} \quad (3.16)$$

Mặc dù f_n là hàm rời rạc nhưng Fourier của nó $\tilde{F}(\mu)$ là liên tục và tuần hoàn với chu kỳ $1/\Delta T$. Và vì thế chỉ cần xét đặc trưng $\tilde{F}(\mu)$ trong một chu kỳ.

Giả sử ta lấy M mẫu trong khoảng thời gian $\mu = 0$ và $\mu = 1/\Delta T$. Khi đó ta hoàn toàn có thể suy luận được rằng μ bao gồm các giá trị:

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.17)$$

Thay kết quả (3.16) vào (3.17) thu được F_m

$$F_m = \sum_{n=1}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.18)$$

Đây là dạng mở rộng của biến đổi Fourier rời rạc, trong đó $\{f_n\}$ gồm M mẫu được lấy từ hàm liên tục $f(t)$. Do đó, kết quả của biến đổi Fourier rời rạc, tập $\{F_m\}$, cũng gồm M giá trị rời rạc dạng phức. Một cách ngược lại, chúng ta hoàn toàn có thể thu được tập mẫu $\{f_n\}$ với phép biến đổi Fourier rời rạc.

$$F_m = \sum_{n=1}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.19)$$

Trong môi trường đa chiều, cụ thể là 2 chiều đối với ảnh số, thì hàm biến đổi Fourier phải thỏa mãn hai biến số tương ứng với chiều ngang và dọc của ảnh. Cụ thể, biến đổi Fourier rời rạc 2-D được thực hiện theo biểu thức sau:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (3.20)$$

Với $f(x, y)$ là ảnh số có kích thước $M \times N$. Như ở dạng 1-D, biểu thức (3.20) thỏa mãn toàn bộ các biến u và v trong khoảng $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ và $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Từ dạng Fourier $F(u, v)$, chúng ta thu được hàm $f(x, y)$ bằng hàm biến đổi ngược Fourier rời rạc:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (3.21)$$

Với $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ và $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Hai biểu thức (3.20) và (3.21) tạo thành cặp biến đổi Fourier rời rạc 2-D. Giá trị của $F(u, v)$ trong biểu thức (3.20) đôi khi còn được xem như là các hệ số Fourier ở dạng triển khai.

Giá trị biến đổi tại gốc của miền tần số (nghĩa là hệ số $F(0,0)$) được gọi là thành phần một chiều DC của biến đổi Fourier. Thuật ngữ này có thể gọi là thành phần có tần số bằng không. Không khó để chứng minh

$F(0,0)$ bằng MN lần giá trị trung bình của $f(x,y)$. Ngay cả khi hàm $f(x,y)$ là dạng số thực thì biến đổi Fourier của nó luôn là dạng phức. Phương pháp cơ bản của việc phân tích hàm biến đổi một cách trực quan chính là tính toán phổ của nó (nghĩa là biên độ của hàm $F(u,v)$ và biểu diễn nó như là một ảnh độc lập. Bằng việc giả sử $R(u,v)$ và $I(u,v)$ biểu diễn các thành phần thực và phần ảo của $F(u,v)$, phổ Fourier được định nghĩa như sau:

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \quad (3.22)$$

Góc pha của của biến đổi được xác định như sau:

$$\Phi(u,v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \right] \quad (3.23)$$

Hai hàm này có thể được sử dụng để biểu diễn $F(u,v)$ dưới dạng hệ tọa độ cực thông thường cho một đại lượng:

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{-j\Phi(u,v)} \quad (3.24)$$

Phổ công suất được định nghĩa như là bình phương của độ lớn

$$\begin{aligned} P(u,v) &= |F(u,v)|^2 \\ &= R^2(u,v) + I^2(u,v) \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.1.2. Tính toán và biểu diễn biến đổi 2-DFT trong MATLAB

Dựa trên công thức (3.20), biến đổi Fourier rời rạc theo thời gian có thể được thực hiện thông qua các phép tính thông thường. Xét ví dụ với một ma trận cụ thể để hiểu rõ hơn về phương pháp tính biến đổi Fourier.

Ví dụ 3.1: Thực hiện biến đổi Fourier không dùng hàm có sẵn trong MATLAB

```
clear all;clc
a=zeros(4,4);
a(2:3,2:3)=1;
for u=1:size(a,1)
    for v=1:size(a,2)
        for x=1:size(a,1)
            for y=1:size(a,2)
                phi=(2*pi*(u-1)*(x-1)+2*pi*(v-1)*(y-1))/4;
                p(x,y)=complex(cos(phi),-sin(phi));
            end
        end
    end
end
```

```

F(u,v)=sum(sum(p.*a));
end
end

```

Cho ma trận a có kích thước 4×4 với các giá trị cụ thể sau:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biến đổi Fourier của a với việc tính toán từng giá trị cụ thể tại từng vị trí, chẳng hạn như với $u = 2$ và $v = 1$.

$$\begin{aligned}
F(2,1) &= e^{-j2\pi(\frac{1}{4})} + e^{-j2\pi(\frac{1}{4})} + e^{-j2\pi(\frac{2}{4})} + e^{-j2\pi(\frac{2}{4})} \\
&= -j - j - 1 - 1 \\
&= -2 - 2j
\end{aligned}$$

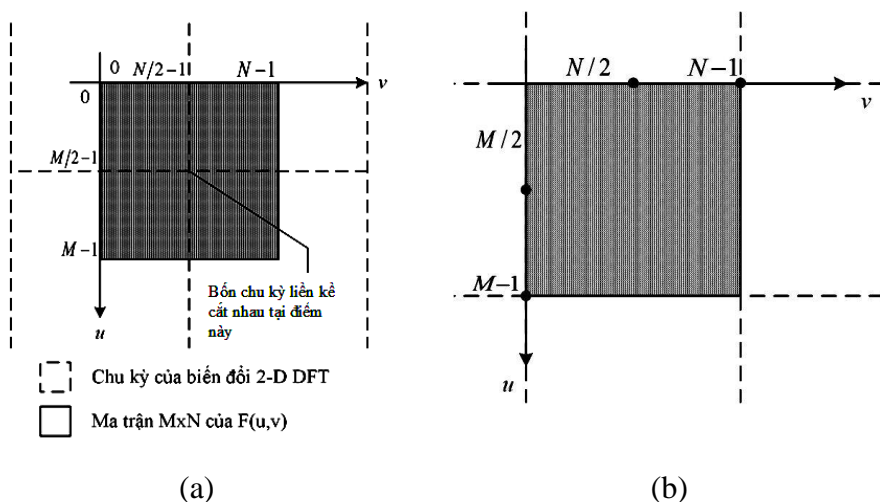
Cần lưu ý trong MATLAB, vị trí của ma trận được xem xét với giá trị từ 1 trở đi, do đó, theo như công thức (3.20) thì cần có sự điều chỉnh nhỏ. Cụ thể, trong đoạn code MATLAB trên, các giá trị của u và v hay của x và y khi tính toán góc phi đều phải điều chỉnh lại sao cho phù hợp. Hàm `complex` được dùng để biểu diễn giá trị dưới dạng số phức. Kết quả biến đổi Fourier đầy đủ của a được tính:

$$A = \begin{bmatrix} 4 + j0 & -2 - j2 & 0 + j0 & -2 + j2 \\ -2 - j2 & 0 + j2 & 0 + j0 & 2 + j0 \\ 0 + j0 & 0 + j0 & 0 + j0 & 0 + j0 \\ -2 + j2 & 0 + j0 & 0 + j0 & 0 - j2 \end{bmatrix}$$

Trong MATLAB, biến đổi DFT và biến đổi ngược DFT được thực hiện bằng phương pháp sử dụng thuật toán biến đổi nhanh Fourier FFT. Biến đổi FFT của ảnh f với kích thước $M \times N$ được thực hiện bởi hàm `fft` trong toolbox với cú pháp như sau

$$F = \text{fft2}(f)$$

Hàm này sẽ trả về biến đổi Fourier cũng với kích thước $M \times N$ có dữ liệu được sắp xếp như trong hình 3.2(a), khi đó, gốc tọa độ nằm ở góc trên bên trái của ma trận và chu kỳ kết thúc tại trung tâm của hình chữ nhật tần số.



Hình 3.2. (a) Phổ Fourier có kích thước $M \times N$ và chỉ ra bốn góc tư của các chu kỳ tiếp giáp nhau trong phổ. (b) Phổ có được bằng cách nhân hàm $f(x, y)$ với $(-1)^{x+y}$ trước khi tính biến đổi Fourier. Khi đó trọn vẹn 1 chu kỳ được xem xét bằng cách thực hiện biến đổi Fourier thông thường.

Cần lưu ý, tập dữ liệu cần được mở rộng với các giá trị bằng không khi sử dụng biến đổi Fourier để lọc ảnh. Trong trường hợp này, cú pháp được cho như sau:

$$F = \text{fft2}(f, P, Q)$$

Với cú pháp này, `fft2` mở rộng ngõ vào với số lượng giá trị không cho phép sao cho hàm kết quả có kích thước $P \times Q$.

Phổ biên độ Fourier đạt được bằng cách sử dụng hàm `abs`:

$$S = \text{abs}(F)$$

Hàm `abs` tính biên độ (căn bậc hai của tổng bình phương phần thực và ảo) của từng phần tử trong mảng. Hình 3.3(b) trình bày phổ Fourier, trong đó, các điểm sáng tại các góc có biên độ lớn nhất tương ứng với 4 góc phần tư của 4 chu kỳ tiếp giáp nhau.

Phân tích phổ bằng cách biểu diễn nó như một ảnh độc lập được xem là một khía cạnh quan trọng trong miền tần số. Hàm `fftshift` trong Toolbox được sử dụng để chuyển gốc tọa độ của biến đổi đến trung tâm của hình chữ nhật hay nói đúng hơn thì nó thực hiện chức năng tương tự việc nhân $(-1)^{x+y}$. Cú pháp của hàm `fftshift` được đưa ra như sau:

$$Fc = \text{fftshift}(F)$$

với F là biến đổi Fourier đã được tính toán bằng hàm `fft2` và F_c là biến đổi trung tâm. Hàm `fftshift` thực hiện hoán đổi các góc phần tư của F như trong hình 3.3(c), khi đó, việc tái sắp xếp các góc phần tư này làm cho các điểm sáng đều được đặt tại vị trí trung tâm và cho phép hiển thị trọn vẹn một chu kỳ hoàn chỉnh. Hình 3.3(d) biểu diễn phổ như hình 3.3(c) nhưng được tăng cường bằng biến đổi log.

Ví dụ 3.2: Thực hiện biến đổi Fourier cho ảnh và tính phổ của nó

```
clear all;
close all;
f=imread('TestDFT.tif');
F=fft2(f);
S=abs(F);
Fc=fftshift(F);
Sc=abs(Fc);
S2=log(1+abs(Fc));
figure;
subplot(2,2,1);imshow(f);
subplot(2,2,2);imshow(S);
subplot(2,2,3);imshow(Sc);
subplot(2,2,4);imshow(S2);
```

Ta có thể viết gọn hai hàm tính Fourier và chuyển đổi vị trí phổ bằng một dòng lệnh gộp tương đương `fftshift(fft2(f))`, tuy nhiên, sẽ là sai hoàn toàn nếu dùng `fft2(fftshift(f))`.

Ngược với hàm `fftshift` là hàm `ifftshift` sẽ chuyển các góc phần tư về vị trí ban đầu, hàm này có cú pháp như sau:

$$F = \text{ifftshift}(F_c)$$

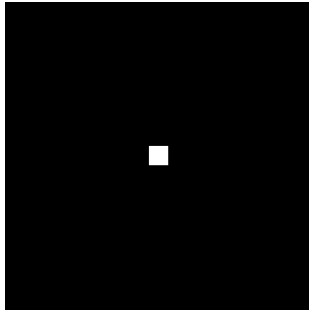
Cuối cùng, để biến đổi Fourier ngược, hàm `ifft` được sử dụng với cú pháp như sau:

$$f = \text{ifft2}(F)$$

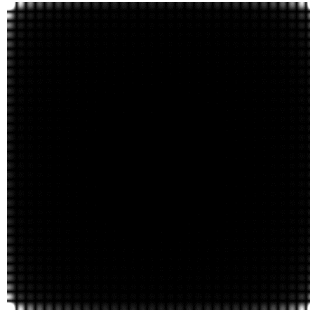
Với F là biến đổi Fourier sau khi đã chuyển các góc phần tư về vị trí ban đầu, f là ảnh trên miền không gian. Nếu ngõ vào tính toán F là số thực thì tương ứng ngõ ra cũng là dạng số thực. Tuy nhiên, trong thực tế, hàm `ifft2` thường có một vài thành phần ảo rất nhỏ là kết quả từ việc làm tròn vốn là đặc trưng trong tính toán dấu chấm động. Do đó, tốt nhất là ta sẽ lấy

phần thực của kết quả sau cùng hay có thể viết gọn trong cùng một dòng lệnh như sau

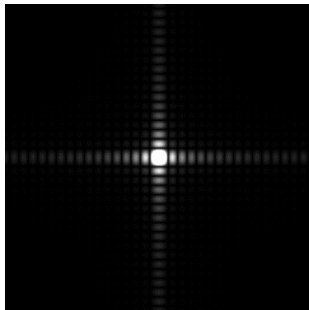
```
f=real(ifft2(F))
```



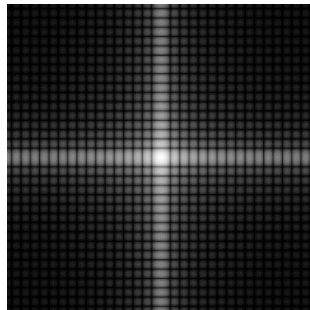
(a)



(b)



(c)



(d)

Hình 3.3. Biến đổi Fourier cho ảnh và phổ của nó:

(a). Ảnh gốc

(b) Phổ Fourier

(c) Phổ được định vị trí trung tâm

(d) Phổ được tăng cường để hiển thị bằng biến đổi log

Do việc tính FFT trong MATLAB giả định góc tọa độ của hàm truyền tại vị trí góc trái phía trên của hình chữ nhật tần số, vì vậy, việc tính toán khoảng cách cần phải chú ý. Trong trường hợp này, góc tọa độ cần phải được sắp xếp lại sao cho góc nằm ngay tại trung tâm bằng cách sử dụng hàm `fftshift` như đã trình bày trước đó. Để cung cấp một sơ đồ lưới dùng tính toán khoảng cách và cho các ứng dụng tương tự, hàm `dftuv` được viết như sau:

```
function [U,V]=dftuv(m,n)
u=0:(m-1);
v=0:(n-1);
idx=find(u>m/2);
u(idx)=u(idx)-m;
idy=find(v>n/2);
v(idy)=v(idy)-n;
[V,U]=meshgrid(v,u);
```

end

Để minh họa, ta tính bình phương khoảng cách từ mỗi điểm trong hình chữ nhật có kích thước 8×5 đến gốc:

```
[U,V]=dftuv(8,5);
```

```
D=U.^2+V.^2
```

D =

```
0   1   4   4   1
1   2   5   5   2
4   5   8   8   5
9  10  13  13  10
16 17  20  20  17
9  10  13  13  10
4   5   8   8   5
1   2   5   5   2
```

Giá trị khoảng cách bằng không tại góc trên bên trái và các giá trị lớn nhất tại trung tâm của hình chữ nhật được giải thích như ở hình 3.2 (a). Hiển nhiên, ta có thể dùng hàm `fftshift` để đặt được các giá trị khoảng cách với mối liên hệ đến trung tâm của hình chữ nhật dùng biểu diễn tần số (frequency rectangle).

```
fftshift(D)
```

ans =

```
20  17  16  17  20
13  10   9  10  13
 8   5   4   5   8
 5   2   1   2   5
 4   1   0   1   4
 5   2   1   2   5
 8   5   4   5   8
13  10   9  10  13
```

3.2. BIẾN ĐỔI WAVELET

3.2.1. Biến đổi Fourier thời gian ngắn

Hạn chế của biến đổi Fourier trong việc chỉ đưa ra thông tin tần số chung của tín hiệu có thể được giải quyết bằng biến đổi Fourier thời gian

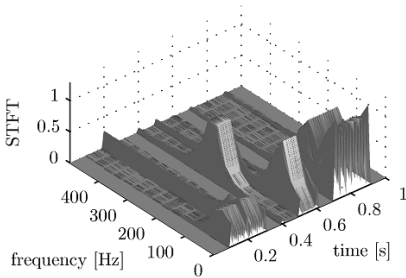
ngắn STFT. Biến đổi STFT cho phép khôi phục lại cả thông tin về mặt tần số và thời gian của tín hiệu bằng cách tính toán biến đổi Fourier của một phần tín hiệu được giới hạn trong một cửa sổ có kích thước cố định, và khi đó, cửa sổ này được dịch chuyển liên tiếp trên trục thời gian. Nói cách khác, tín hiệu $x(t)$ được chia nhỏ bởi các cửa sổ $g(t)$ với tâm của nó được đặt tại thời điểm τ . Bằng cách thực hiện biến đổi Fourier cho từng cửa sổ nhỏ, thông tin về tần số trong từng khoảng nhỏ thời gian của tín hiệu được cung cấp.

Biến đổi STFT được định nghĩa như trong biểu thức (3.26). Ở đây, dấu $*$ biểu diễn toán tử liên hợp phức. Có thể được nhìn nhận đơn giản là biến đổi STFT chỉ đơn giản là biến đổi Fourier của tín hiệu $x(t)$ nhân với cửa sổ $g(t)$:

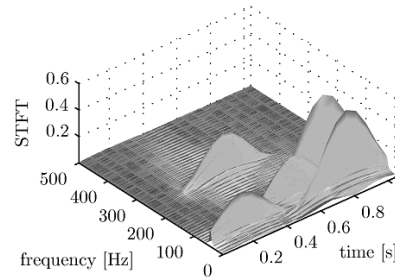
$$X_{STFT}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g^*(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.26)$$

Hiệu năng của biến đổi STFT phụ thuộc vào cửa sổ được chọn $g(t)$. Kích thước cửa sổ nhỏ cho phép thực hiện biến đổi với độ phân giải cao, nhưng bù lại các tần số khác nhau không được phân biệt rõ ràng. Điều này có thể được nhìn nhận như trong hình 3.4(a) với kích thước cửa sổ là 0.03s. Còn với kích thước của sổ dài thì cho độ phân giải kém hơn, nhưng độ phân giải tần số thì tốt hơn, như trong hình 3.4(b) với kích thước cửa sổ là 0.6s. Do đó, không thể thu kết quả phân tích với độ phân giải tốt ở cả mặt tần số lẫn thời gian. Điều này được xem xét thông qua bất đẳng thức Heisenberg: tích của độ phân giải tần số và thời gian là hằng số và việc nó được giới hạn theo như biểu thức:

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.27)$$



(a)

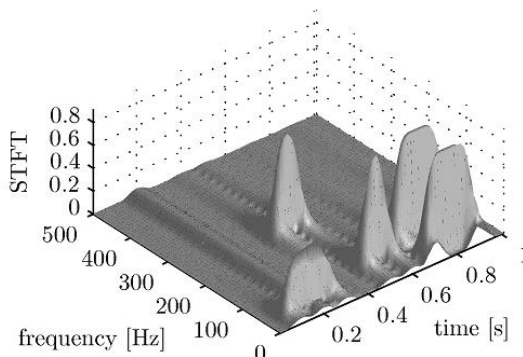


(b)

Hình 3.4. Phân tích STFT dùng cửa sổ với các kích thước khác nhau

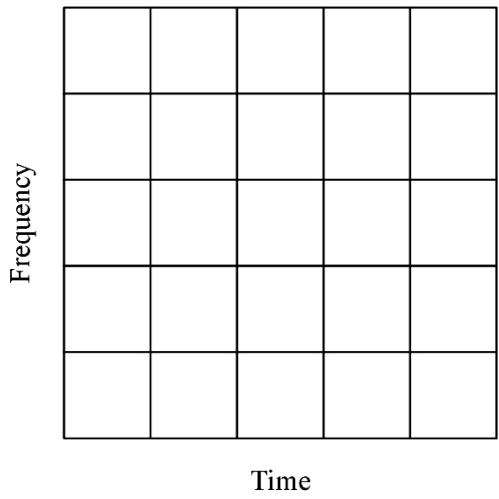
Sự cân bằng giữa độ phân giải thời gian và tần số được trình bày trong hình 3.5 với kích thước cửa sổ là 0.15s. Với kích thước này, biến đổi

STFT cho phép biểu diễn độ phân giải thời gian và tần số một cách hợp lý hơn.



Hình 3.5. Phân tích STFT với kích thước cửa sổ phù hợp.

Việc tìm ra kích thước cửa sổ ảnh hưởng trực tiếp đến chất lượng của phép phân tích STFT với kích thước cửa sổ là cố định, nghĩa là Δt và Δf là hằng số. Khi đó mặt phẳng thời gian – tần số được chia ra làm nhiều khối có kích thước bằng nhau như trong hình 3.6. Các thành phần tần số thấp thường có chu kỳ thời gian dài, do đó yêu cầu phân tích với độ phân giải tần số cao. Trong khi đó, các thành phần tần số cao thường xuất hiện trong khoảng thời gian ngắn, do đó cần phải thực hiện với độ phân giải thời gian cao.



Hình 3.6. Không gian phân tích thời gian – tần số cố định

Sự khác nhau cơ bản giữa biến đổi Wavelet (WT) và STFT, trước nhất là độ rộng của cửa sổ có thể được thay đổi trong biến đổi Wavelet như là một

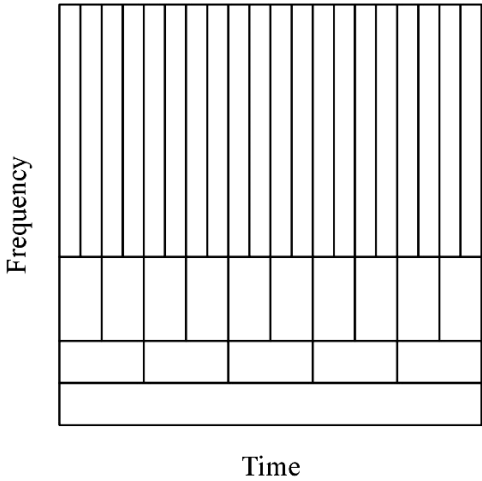
hàm dùng phân tích tần số. Thứ hai, hàm phân tích của biến đổi Wavelet có thể được chọn sao cho phù hợp với các dạng tín hiệu khác nhau.

3.2.2. Phân tích Wavelet

Việc phân tích tín hiệu sử dụng biến đổi Fourier và biến đổi STFT không cho ra kết quả tối ưu trong một số trường hợp, do đó, chỉ có thể đạt được kết quả tốt hơn bằng phương pháp phân tích Wavelet. Một ưu điểm có thể nhận thấy trong phương pháp này là khả năng phân tích cục bộ. Phân tích Wavelet cho phép xem xét tín hiệu dưới nhiều khía cạnh khác nhau khi so sánh với các phép phân tích khác. Khi so sánh với biến đổi STFT, phân tích Wavelet thực hiện dựa trên phương pháp phân tích đa phân giải.

3.2.2.1. Phân tích đa phân giải

Vấn đề độ phân giải trong miền thời gian – tần số có thể được giải quyết bằng phép phân tích STFT với các cửa sổ có kích thước cố định. Bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận được gọi là phân tích đa phân giải (Multiresolution Analysis – MRA), nó cho phép phân tích tín hiệu tại nhiều tần số khác nhau với nhiều mức phân giải khác nhau. Sự thay đổi trong độ phân giải được trình bày dưới dạng biểu đồ như trong hình 3.7.



Hình 3.7. Không gian phân tích thời gian – tần số đa phân giải

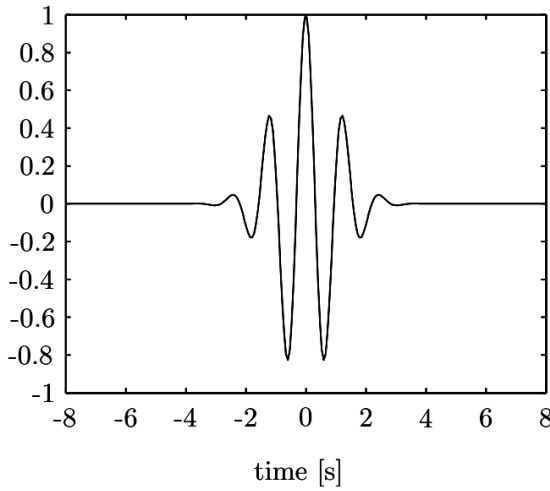
Trong hình 3.7, giả sử rằng các tần số thấp ứng với toàn bộ khoảng thời gian của tín hiệu, nơi mà các tần số cao xuất hiện rất ít trong khoảng thời gian rất ngắn. Đây là dạng thường xảy ra trong các ứng dụng thực tế.

Phân tích Wavelet vốn là xét tính tương quan giữa tín hiệu và hàm Wavelet $\psi(t)$. Tính đồng dạng giữa tín hiệu và hàm phân tích Wavelet được tính toán độc lập trong nhiều khoảng thời gian khác nhau, và kết quả

được trình bày trong không gian hai chiều. Hàm phân tích Wavelet $\psi(t)$ cũng được xem xét như là hàm Wavelet mẹ.

3.2.2.2. Wavelet

Khi so sánh với biến đổi Fourier, hàm phân tích trong biến đổi Wavelet có thể được chọn tùy ý, không nhất thiết phải là dạng hàm sine. Hàm Wavelet $\psi(t)$ được hiểu là một dạng sóng nhỏ, hay là một dạng dao động dùng để phân biệt các tần số khác nhau trong tín hiệu ngõ vào. Wavelet chứa thông tin cả về dạng phân tích và kích thước cửa sổ. Hình 3.8 trình bày ví dụ về một Wavelet, được biết đến với tên Wavelet Morlet. Bên cạnh đó nhiều dạng của hàm Wavelet được phát triển để có thể trích xuất đặc trưng tùy theo dạng tín hiệu ngõ vào.



Hình 3.8. Wavelet họ Morlet

Một hàm phân tích $\psi(t)$ được phân loại là một Wavelet nếu thỏa mãn các điều kiện toán học sau:

- i. Một sóng Wavelet phải có năng lượng hữu hạn

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (3.28)$$

Mức năng lượng E bằng với tích phân của bình phương độ lớn của hàm phân tích $\psi(t)$ và phải có giá trị hữu hạn.

- ii. Nếu $\Psi(f)$ là biến đổi Fourier của sóng Wavelet $\psi(t)$ thì

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty \quad (3.29)$$

Điều kiện này chỉ ra rằng sóng Wavelet không có thành phần tần số bằng không ($\Psi(0) = 0$), nghĩa là trung bình của các sóng Wavelet phải bằng không. Điều kiện này được biết đến như là hằng số chấp nhận (admissibility constant). Giá trị C_ψ phụ thuộc vào hàm Wavelet được chọn.

- iii. Biến đổi Fourier của các Wavelet phức tạp phải là số thực và triệt tiêu các tần số âm.

3.2.2.3. Biến đổi Wavelet liên tục

Hàm biến đổi Wavelet liên tục được định nghĩa:

$$X_{WT}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt \quad (3.30)$$

Tín hiệu đã được biến đổi $X_{WT(\tau, s)}$ là hàm với hai biến: độ dịch chuyển τ và tham số tỷ lệ s . Hàm Wavelet mẹ được ký hiệu ψ , ký hiệu * ám chỉ toán tử liên hợp phức được dùng trong trường hợp của Wavelet phức tạp. Năng lượng của tín hiệu được chuẩn hóa tại từng tỷ lệ bằng cách chia nhỏ các hệ số Wavelet cho $1/\sqrt{|s|}$. Điều này bảo đảm các sóng Wavelet đều có cùng mức năng lượng tại cùng một hệ số tỷ lệ.

Hàm Wavelet mẹ có thể co hay giãn bằng cách thay đổi hệ số tỷ lệ. Biến tỷ lệ s không những làm thay đổi tần số trung tâm của sóng Wavelet f_c mà còn tác động lên độ rộng của cửa sổ. Do đó, hệ số tỷ lệ dùng thay cho tần số trong việc biểu diễn các kết quả phân tích Wavelet. Thông số dịch chuyển τ đánh dấu vị trí của sóng Wavelet trong miền thời gian và bằng cách thay đổi τ sóng Wavelet có thể được dịch theo tín hiệu. Với hệ số tỷ lệ s cố định và thay đổi biến τ thì các hàng trong không gian thời gian – tỷ lệ được tính, trong khi thay đổi hệ số tỷ lệ và giữ nguyên hằng số dịch chuyển τ thì các cột trong không gian được tính toán. Các phần tử $X_{WT}(\tau, s)$ được gọi là các hệ số Wavelet.

Biến đổi Wavelet cũng có biến đổi ngược giống như trong trường hợp của biến đổi Fourier và STFT. Biến đổi ngược Wavelet liên tục (ICWT) được xác định như sau:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{WT}(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) d\tau ds \quad (3.31)$$

Lưu ý: hằng số trong biểu thức (3.31) phải thỏa mãn điều kiện thứ hai như đã nói ở trên (biểu thức (3.30)).

Hàm Wavelet có tần số trung tâm f_c tại từng giá trị hệ số tỷ lệ và nó tỷ lệ nghịch với tần số. Hệ số tỷ lệ lớn tương ứng với tần số thấp, cung cấp

thông tin của toàn bộ tín hiệu, trong khi đó, các giá trị tỷ lệ nhỏ ứng với tần số cao sẽ cung cấp các thông tin chi tiết của tín hiệu.

Với biến đổi Wavelet, bất đẳng thức Heisenberg vẫn còn ý nghĩa, tích tần số - thời gian $\Delta t \Delta f$ vẫn luôn là hằng số. Giảm hệ số tỷ lệ s , ứng với kích thước cửa sổ nhỏ, sẽ làm tăng độ phân giải thời gian Δt và giảm độ phân giải tần số Δf . Điều này cũng có nghĩa là độ phân giải tần số tỷ lệ với tần số f , cụ thể, phân tích Wavelet có độ phân giải tần số gần như là cố định. Wavelet Morlet, trong hình 3.8, đạt được bằng cách sử dụng cửa sổ Gaussian, với f_c là tần số trung tâm và f_b là thông số băng thông.

$$\psi(t) = g(t)e^{-j2\pi f_c t}, g(t) = \sqrt{\pi f_b} e^{t^2/f_b} \quad (3.32)$$

Tần số trung tâm f_c và độ rộng băng thông f_b của Wavelet là các thông số có thể được điều chỉnh. Chẳng hạn, họ Wavelet Morlet, thông số tỷ lệ và tần số có mối quan hệ như sau:

$$f = \frac{f_c}{s} \quad (3.33)$$

Việc tính toán biến đổi Wavelet liên tục CWT thường được thực hiện bằng cách lấy các giá trị rời rạc ứng với các hệ số tỷ lệ s và độ dịch chuyển τ . Các hệ số Wavelet được gọi là chuỗi Wavelet. Ứng với từng mục đích phân tích, quá trình rời rạc hóa có thể được thực hiện bất kỳ, tuy nhiên, nếu việc tái cấu trúc tín hiệu được yêu cầu, các điều kiện của sóng Wavelet trở nên rất quan trọng. Chuỗi Wavelet có thể được tính như sau:

$$X_{WT_{m,n}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (3.34)$$

$$\psi_{m,n} = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m} t - n\tau_0)$$

Số nguyên m và n điều chỉnh độ dịch chuyển và độ giãn nở của sóng Wavelet. Ứng với lược đồ nhị nguyên (dyadic grid), $s_0 = 0$ và $\tau_0 = 1$. Các sóng Wavelet này được lựa chọn sao cho trực chuẩn, nghĩa là, chúng trực giao với nhau và được chuẩn hóa để có mức năng lượng đơn vị. Việc lựa chọn này cho phép xây dựng lại tín hiệu gốc thông qua biểu thức sau:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{WT_{m,n}} \psi_{m,n}(t) \quad (3.35)$$

Với tín hiệu như trong hình 3.9(a), thực hiện biến đổi Wavelet liên tục bằng hàm phân tích Morlet, sau đó được rời rạc và biểu diễn như trong hình 3.9(b) và (c) dưới dạng lược đồ không gian tỷ lệ - thời gian và dưới

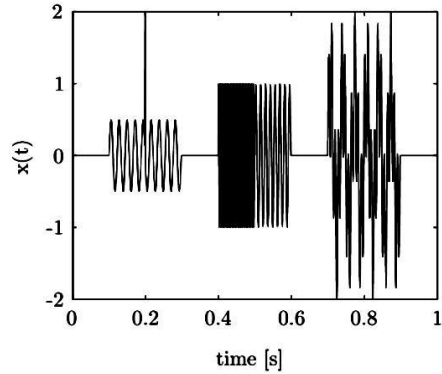
dạng đường viền (contour plot). Trong cả hai lược đồ, hệ số tỷ lệ lớn tương ứng với các tần số thấp và ngược lại, trong khi đó, có được độ phân giải tần số tốt với những thành phần tần số cao (hệ số tỷ lệ nhỏ) và độ phân giải thời gian tốt với các thành phần tần số thấp (hệ số tỷ lệ lớn). Các tần số khác biệt được phát hiện tại các thời điểm chính xác (tại thời điểm 0.2 s như trong hình 3.9(c)).

Hình 3.9. Biến đổi Wavelet liên tục

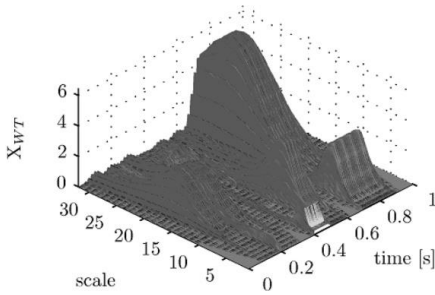
(a) Tín hiệu $x(t)$

(b) Surface plot

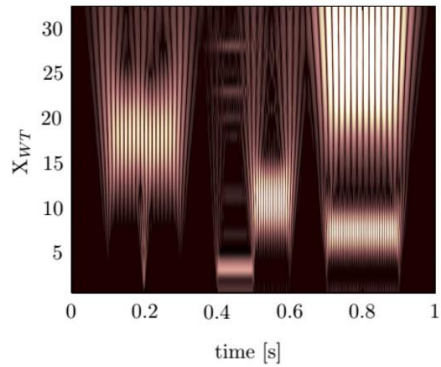
(c) Contour plot



(a)



(b)



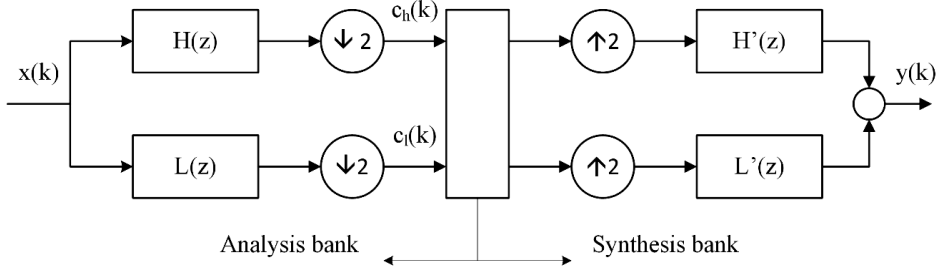
(c)

3.2.2.4. Biến đổi Wavelet rời rạc

3.2.2.4.1. Giàn lọc

Một giàn lọc (filter bank) bao gồm các bộ lọc con giúp phân chia tín hiệu thành các băng con với nhiều tần số. Một ví dụ về giàn lọc hai kênh như trong hình 3.10. Tín hiệu rời rạc theo thời gian $x(k)$ đưa vào phân tích và được lọc bằng các bộ lọc $L(z)$ và $H(z)$, chúng phân chia nội dung tần số của tín hiệu thành các dải tần số có độ rộng tương đương nhau. Các bộ lọc $L(z)$ và $H(z)$ tương ứng với bộ lọc thông thấp và thông cao. Ngõ ra của chúng là thông tin về tần số của tín hiệu với nửa trên và nửa dưới tần số cắt, nhưng có số lượng mẫu ở mỗi ngõ ra đều bằng với tín hiệu gốc. Qua

đây có thể thấy rằng, ngõ ra chứa lượng thông tin về mặt tần số là tương đương với tín hiệu gốc, nhưng lại gấp đôi số lượng mẫu. Do đó, kỹ thuật giảm mẫu xuống một nửa, ký hiệu $\downarrow 2$, được áp dụng cho các ngõ ra của bộ lọc trong quá trình phân tích.



Hình 3.10. Giàn lọc hai kênh

Việc tái cấu trúc tín hiệu gốc cũng được thực hiện bằng cách sử dụng các bộ lọc, gọi là giàn lọc tổng hợp, khi đó, chúng cần được tăng mẫu ($\uparrow 2$) trước khi được đưa qua các bộ lọc là $L'(z)$ và $H'(z)$. Các bộ lọc này dựa trên các bộ lọc trong tập phân tích. Ngõ ra của các bộ lọc sẽ được kết hợp và cấu thành nên tín hiệu ban đầu là $y(k)$.

Các tín hiệu ngõ ra khác nhau của giàn lọc phân tích được gọi là các băng con và kỹ thuật dựa trên việc sử dụng giàn lọc cũng được gọi là mã hóa băng con.

3.2.2.4.2. Kỹ thuật tăng và giảm mẫu

Các bộ lọc thông thấp $L(z)$ và $H(z)$ phân chia nội dung tần số của tín hiệu làm hai phần bằng nhau, và cần được giảm mẫu để tránh hiện tượng dư thừa. Nếu một nửa số mẫu của tín hiệu đã được lọc là $c_l(k)$ và $c_h(k)$ được cất giảm, nó vẫn có thể được dùng để xây dựng lại tín hiệu gốc như ban đầu là $x(k)$. Ký hiệu giảm mẫu ($\downarrow 2$) chỉ ra những mẫu chẵn sẽ được loại bỏ. Trong miền tần số, ảnh hưởng của việc loại bỏ thông tin có thể dẫn đến hiện tượng méo tín hiệu. Nếu tuân theo định lý lấy mẫu Shannon sẽ không có thông tin nào bị mất trong toàn bộ quá trình lấy mẫu. Định lý Shannon phát biểu rằng giảm mẫu của tín hiệu đã được lấy mẫu với hệ số M sẽ tạo ra tín hiệu mà toàn bộ phổ của nó vẫn có thể được tính toán bằng cách chia nhỏ phổ của tín hiệu thành M băng tần tương đương và sau đó lấy tổng của chúng.

Trong giàn lọc tổng hợp, các tín hiệu sẽ được tăng mẫu trước khi lọc. Việc tăng số lượng mẫu lên gấp đôi ($\uparrow 2$) được thực hiện bằng cách thêm vào các mẫu giá trị bằng không giữa các mẫu của tín hiệu gốc. Lưu ý, việc

giảm mẫu tín hiệu và sau đó tăng trở lại sẽ không trả về tín hiệu như ban đầu. Chỉ có thể thu được tín hiệu bằng cách tăng mẫu khi chèn các mẫu giá trị không và sau đó giảm mẫu một lần nữa như trong biểu thức (3.36).

$$x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} (\downarrow 2) = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \end{bmatrix} (\uparrow 2)(\downarrow 2) = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \\ x(2) \\ 0 \\ x(4) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.2.2.4.3. Tái cấu trúc tín hiệu

Để xây dựng lại tín hiệu ban đầu, giàn lọc phải trực giao với nhau. Do đó, một vài tiêu chuẩn thiết kế dành cho các giàn lọc trong quá trình phân tích và tổng hợp cần phải được đưa ra để hạn chế gây méo và suy hao tín hiệu cũng như bảo đảm việc khôi phục tín hiệu được tối ưu.

Trong giàn lọc hai kênh như trong hình 3.10, bộ lọc $L(z)$ và $H(z)$ chia tín hiệu thành hai băng con, nghĩa là, các bộ lọc này tương ứng với lọc thông thấp và thông cao. Nếu các bộ lọc có dốc đứng tốt (brick-wall) thì quá trình giảm mẫu không mất nhiều thông tin. Tuy nhiên, các bộ lọc lý tưởng không thể thực hiện được trong thực tế, vì vậy mà luôn tồn tại băng tần chuyên tiếp. Bên cạnh méo, điều này cũng dẫn đến sự suy hao biên độ và pha tại mỗi kênh.

Ứng với giàn lọc hai kênh trong hình 3.10, méo có thể được khắc phục bằng giàn lọc tổng hợp được cho như sau:

$$L'(z) = H(-z) \quad (3.37)$$

$$H'(z) = -L(-z) \quad (3.38)$$

Để hạn chế suy hao, bộ lọc nhân $P_0(z) = L'(z)L(z)$ được đề xuất. Suy hao có thể tránh nếu:

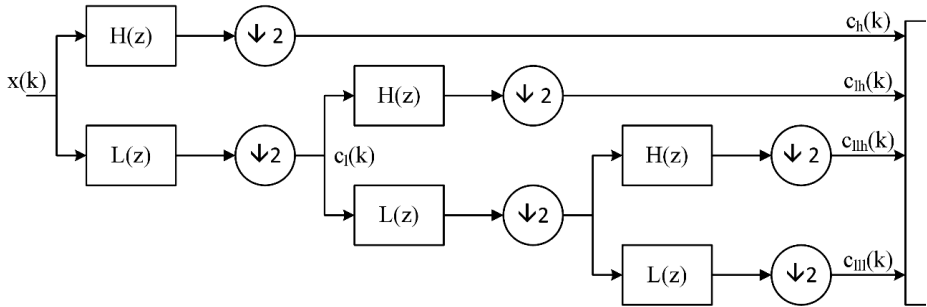
$$P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-N} \quad (3.39)$$

Trong đó N là khoảng trễ của toàn bộ giàn lọc. Tổng quát, bộ lọc bậc N^{th} sẽ tạo ra độ trễ N mẫu. Giàn lọc dùng cho việc xây dựng lại tín hiệu cần được thiết kế theo hai bước:

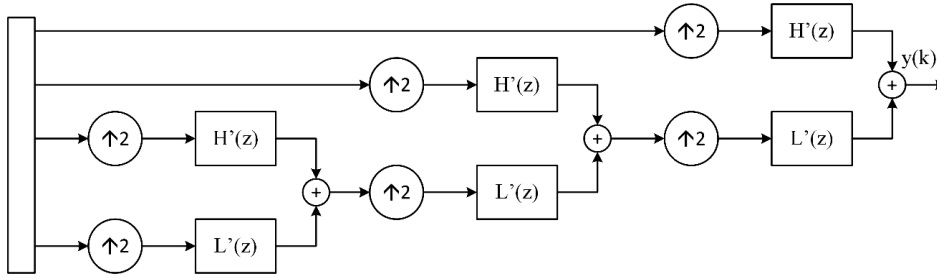
1. Thiết kế một bộ lọc thông thấp P_0 thỏa mãn biểu thức (3.39)
2. Thế P_0 vào trong $L'(z)L(z)$ và dùng biểu thức (3.37) và (3.38) để tính $H(z)$ và $H'(z)$.

Lưu ý, quá trình thiết kế bộ lọc P_0 với hệ số ở bước một và tìm thừa số trong bước hai có thể thực hiện bằng nhiều cách khác.

3.2.2.4.4. Các giàn lọc đa phân giải



(a) Giàn lọc dùng trong quá trình phân tích



(b) Giàn lọc dùng trong quá trình tổng hợp

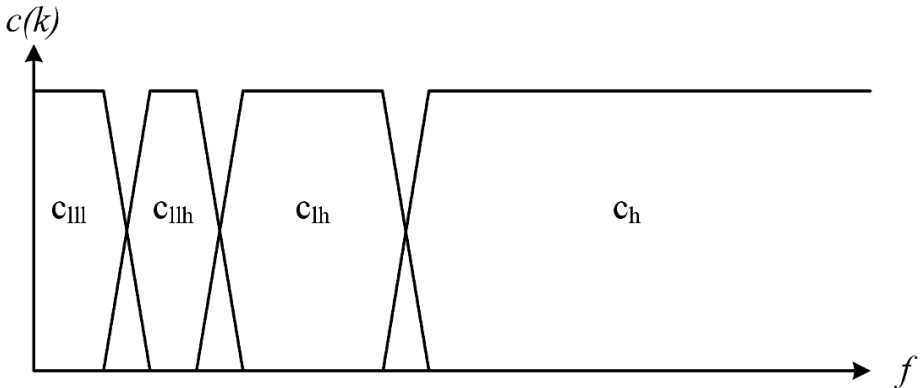
Hình 3.11. Giàn lọc với ba mức phân tích

Biến đổi Wavelet liên tục CWT thực hiện phân tích đa phân giải cho một tín hiệu tại nhiều tần số khác nhau. Phân tích đa phân giải có thể đạt được bằng cách sử dụng các giàn lọc với biến đổi Wavelet rời rạc DWT. Lưu ý là việc rời rạc hóa biến đổi CWT không đồng nghĩa với biến đổi Wavelet rời rạc. Biến đổi DWT dùng tập các bộ lọc chuyên biệt, trong khi rời rạc hóa CWT sử dụng dạng được rời rạc hóa của trực tỷ lệ.

Các bộ lọc thông thấp và thông cao sẽ trích xuất thành phần xấp xỉ và chi tiết của tín hiệu $x(k)$. Hình 3.11 trình bày giàn lọc 3 mức dùng trong quá trình phân tích và tổng hợp tín hiệu. Giàn lọc có thể được mở rộng với số mức phân tích bất kỳ, tùy thuộc vào độ phân giải mong muốn. Các hệ số $c_l(k)$ trong hình 3.11(a) biểu diễn mức nửa dưới dải tần của tín hiệu $x(k)$. Độ phân giải thời gian được giảm đi một nửa, nghĩa là, chỉ một nửa số mẫu được biểu diễn trong thành phần $c_l(k)$.

Tại mức phân tích thứ hai, ngõ ra của $L(z)$ và $H(z)$ gấp đôi độ phân giải thời gian và giảm đi nội dung thông tin tần số, nghĩa là, độ rộng của cửa sổ được gấp đôi. Sau mỗi mức, ngõ ra của bộ lọc thông cao chứa nội

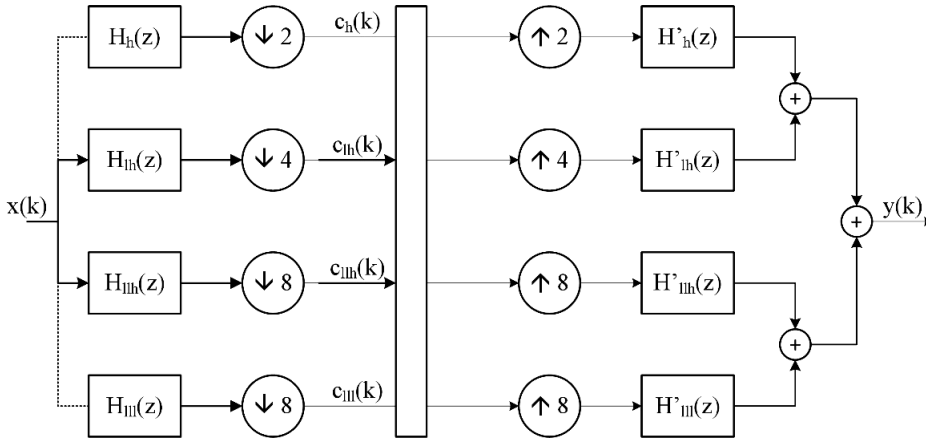
dung về tần số của nửa trên của ngõ ra bộ lọc thông thấp ở mức trước đó. Khi đó, ta xem bộ lọc thông cao này như là một bộ lọc thông dải bình thường. Độ phân giải thời gian của giàn lọc dùng trong phân tích trong hình 3.11(a) thì tương tự như độ phân giải trình bày trong hình 3.7 trước đó. Với tập đặc biệt các bộ lọc $L(z)$ và $H(z)$, cấu trúc thực hiện này được gọi là DWT, trong khi các bộ lọc gọi là bộ lọc Wavelet. Sự phân chia dải tần có thể được khám thảo trong hình 3.12 ứng với từng băng con.



Hình 3.12. Biểu diễn sự phân chia tần của các băng con trong hình 3.11

Mối quan hệ giữa biến đổi Wavelet liên tục và rời rạc là không thật sự rõ ràng. Các sóng Wavelet trong CWT có một tần số trung tâm và giữ vai trò như là một bộ lọc thông dải trong phép tích chập giữa hàm Wavelet và tín hiệu $x(t)$. Một chuỗi các bộ lọc thông thấp, bộ tăng và giảm mẫu cũng được xem như bộ lọc thông dải.

Để dễ dàng so sánh giữa DWT và CWT, tập bộ lọc trong hình 3.11 được viết lại như trong hình 3.13. Các bộ lọc có thể được hiểu như là các hàm Wavelet tại nhiều mức tỷ lệ khác nhau. Tuy nhiên, chúng không phải lúc nào cũng chính xác, nếu số lượng mức phân tích tăng và đáp ứng xung của các bộ lọc tương đương hội tụ đến một dạng sóng ổn định thì các bộ lọc $L(z)$ và $H(z)$ chính là các bộ lọc Wavelet. Các chuỗi bộ lọc sau đó trở thành dạng đã được lấy tỷ lệ của nhau. Các bộ lọc Wavelet này biểu diễn nội dung tần số của một hàm Wavelet tại một tỷ lệ nhất định. Chúng có thể được sắp xếp và phân loại thành hai dạng, trực giao và song trực giao.



Hình 3.13. Giàn lọc tương đương hình 3.11

Các hàm Wavelet giới hạn, nghĩa là, các sóng ổn định, có thể được xây dựng dễ dàng từ các giàn lọc phân tích. Với nhánh tần số thấp hơn trong hình 3.11(b), chỉ bao gồm các bộ lọc thông thấp và quá trình tăng số mẫu, đáp ứng xung hội tụ đến hàm sau cùng $l(n)$ ứng với biểu thức sai lệch sau đây:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^N l(n)\phi(2t - n) \quad (3.40)$$

Hàm này được biết đến như là hàm tỷ lệ của Wavelet. Ứng với chuỗi thông dải, các đáp ứng xung hội tụ đến biểu thức sai lệch vốn được tính theo:

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^N h(n)\psi(2t - n) \quad (3.41)$$

Biểu thức sau cùng của chuỗi thông dải $h(n)$ là làm Wavelet $\psi(t)$.

Các băng con với các hệ số Wavelet c_{ll} được gọi là băng con xấp xỉ cA và chứa các tần số thấp. Các băng con khác được gọi là băng con chi tiết cD chứa các thông tin chi tiết của tín hiệu và các hệ số Wavelet biểu diễn nội dung của tín hiệu với nhiều tần số khác nhau.

Ứng với mức phân tích p , tần số cao nhất được quan sát nằm trong các hệ số Wavelet băng xấp xỉ c_{ll} có thể được tính như là hàm của tần số mẫu f_s :

$$f_l = \frac{f_s}{2^{p+1}} \quad (3.42)$$

Nội dung tần số của băng con xấp xỉ và băng con chi tiết có thể được tính như sau:

$$f_{cA} = [0, 2^{-p-1}f_s] \quad (3.43)$$

$$f_{cD_p} = [2^{-p-1}f_s, 2^{-p}f_s] \quad (3.44)$$

Kết quả phân tích Wavelet phụ thuộc nhiều vào việc lựa chọn bộ lọc Wavelet và đặc trưng của tín hiệu xem xét.

Với một tín hiệu một chiều dạng rời rạc $f[n]$, DWT được tính theo công thức sau:

$$\begin{aligned} W_\phi(j_0, k) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \phi_{j_0, k}(n) \\ W_\psi(j, k) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n) \quad j \geq j_0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Trong đó, $\phi_{j_0, k}(n)$ và $\psi_{j, k}(n)$ là các hàm tỷ lệ và hàm Wavelet dạng rời rạc được xác định trong khoảng $[0, M - 1]$ và trực giao với nhau và j_0 là tỷ lệ khởi tạo bất kỳ. $W_\phi(j_0, k)$ biểu diễn các hệ số xấp xỉ (ứng với các tần số thấp), trong khi, $W_\psi(j, k)$ đại diện cho các hệ số chi tiết (ứng với tần số cao). Ta hoàn toàn có thể khôi phục được tín hiệu rời rạc gần đúng theo công thức sau đây:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\phi(j_0, k) \phi_{j_0, k}(n) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(n) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nếu hàm Wavelet và hàm tỷ lệ được cho biết trước, các hệ số của nó sẽ được xác định theo công thức (3.45). Tuy nhiên có một phương pháp khác cũng dùng để tính các hệ số trong khi vẫn tiết kiệm được thời gian tính toán. Từ hàm tỷ lệ:

$$\phi(x) = \sum_n h_\phi(n) \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (3.47)$$

Bằng cách lấy tỷ lệ 2^j và dịch chuyển đi k với biến x , và đặt $m = 2k + n$, từ (3.47), ta có

$$\begin{aligned}
\phi(2^j x - k) &= \sum h_\phi(n) \sqrt{2} \phi(2(2^j x - k) - n) \\
&= \sum_m^n h_\phi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Tương tự với hàm Wavelet:

$$\psi(2^j x - k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \tag{3.49}$$

Thế biểu thức (3.48) và (3.49) vào các biểu thức tính hệ số Wavelet rời rạc là (3.45), ta có:

$$\begin{aligned}
W_\phi(j, k) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \phi_{j,k}(n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) 2^{j/2} \phi(2^j n - k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) 2^{j/2} \left[\sum_m h_\phi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \\
&= \sum_m h_\phi(m - 2k) \left[\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \\
&= \sum_m h_\phi(m - 2k) W_\phi(j + 1, k) \\
W_\phi(j, k) &= h_\phi(-n) \star W_\phi(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Tương tự với hàm Wavelet (ứng với các hệ số chi tiết):

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \star W_\psi(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0} \tag{3.51}$$

Thông thường tín hiệu được dùng thuộc dạng rời rạc, chẳng hạn như ảnh số, tín hiệu gốc có thể được xem như là các hệ số xấp xỉ với bậc cho trước là J . Khi đó, $f(n) = W_\phi(J, n)$, bằng cách sử dụng công thức tính (3.49) và (3.50) cho các hệ số xấp xỉ và chi tiết ở mức phân tích kế tiếp. Thuật toán này gọi là Fast Wavelet Transform do có thể tìm được các hệ số theo từng level trực tiếp nhanh hơn so với dùng công thức (3.45).

3.2.2.4.5. Một số hàm Wavelet thông dụng

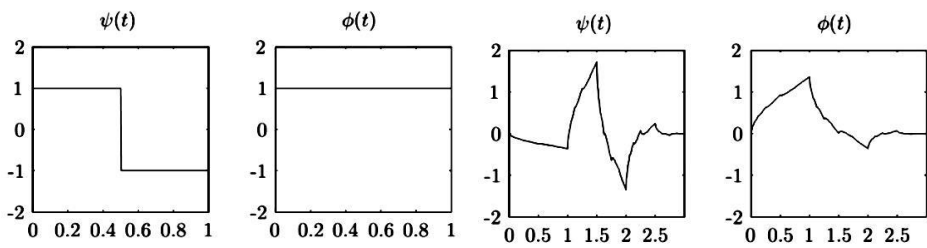
Daubechies

Hàm Wavelet Daubechies bậc nhất được biết đến như là hàm Wavelet Haar, vốn là hàm Wavelet đơn giản nhất. Hàm Wavelet và hàm tỷ lệ của Wavelet Daubechies có bậc từ 1 đến 8 được trình bày trong hình 3.14. Hàm Wavelet Haar hay db1 có thể được viết như sau:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in [0 \quad 0.5] \\ -1 & \text{nếu } x \in [0.5 \quad 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0 \quad 1] \end{cases} \quad (3.52)$$

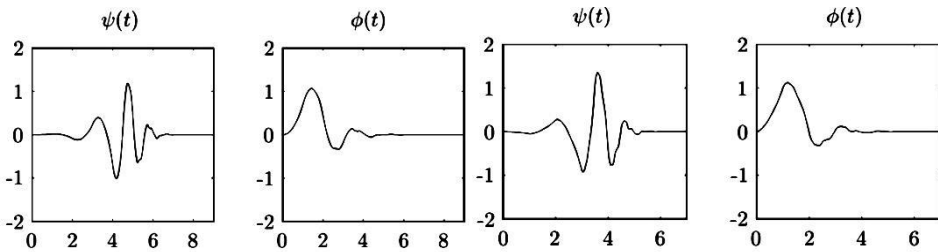
$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in [0 \quad 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0 \quad 1] \end{cases} \quad (3.53)$$

Các hàm Daubechies bậc cao hơn không thật sự dễ để mô tả bằng biểu thức toán học. Bậc của Wavelet Daubechies đánh dấu số lượng moment triệt tiêu, hay số lượng của moment không (zero moment) của hàm Wavelet. Nó có liên quan đến số lượng dao động của hàm Wavelet. Số lượng moment triệt tiêu càng lớn thì sự định vị tần số của trong quá trình phân tích càng tốt. Sự độc lập giữa các hệ số Wavelet với các giá trị tỷ lệ khác nhau giảm khi tăng số bậc của Wavelet. Số bậc này được so sánh với bậc của bộ lọc tuyến tính. Các Wavelet Daubechies được xem là các Wavelet trực giao, trong khi các bộ lọc tỷ lệ là các bộ lọc có pha nhỏ nhất.



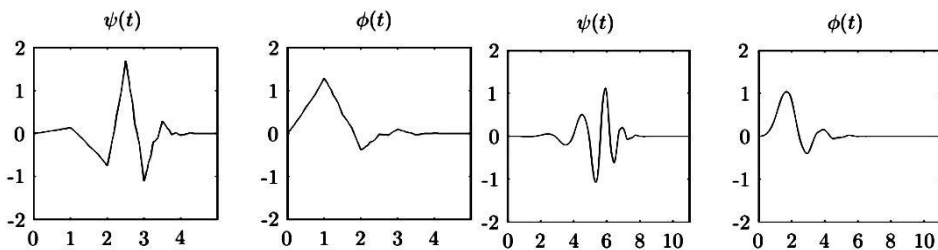
(a) db1

(b) db2



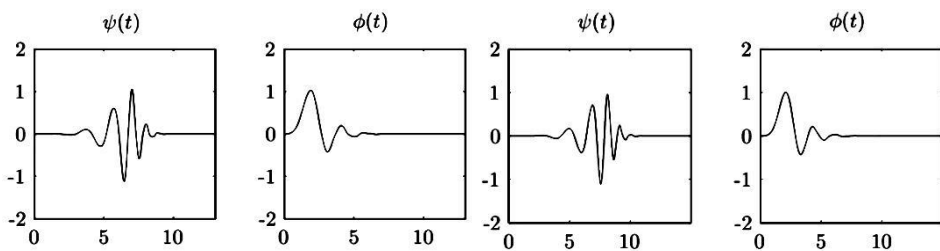
(c) db3

(d) db4



(e) db5

(f) db6



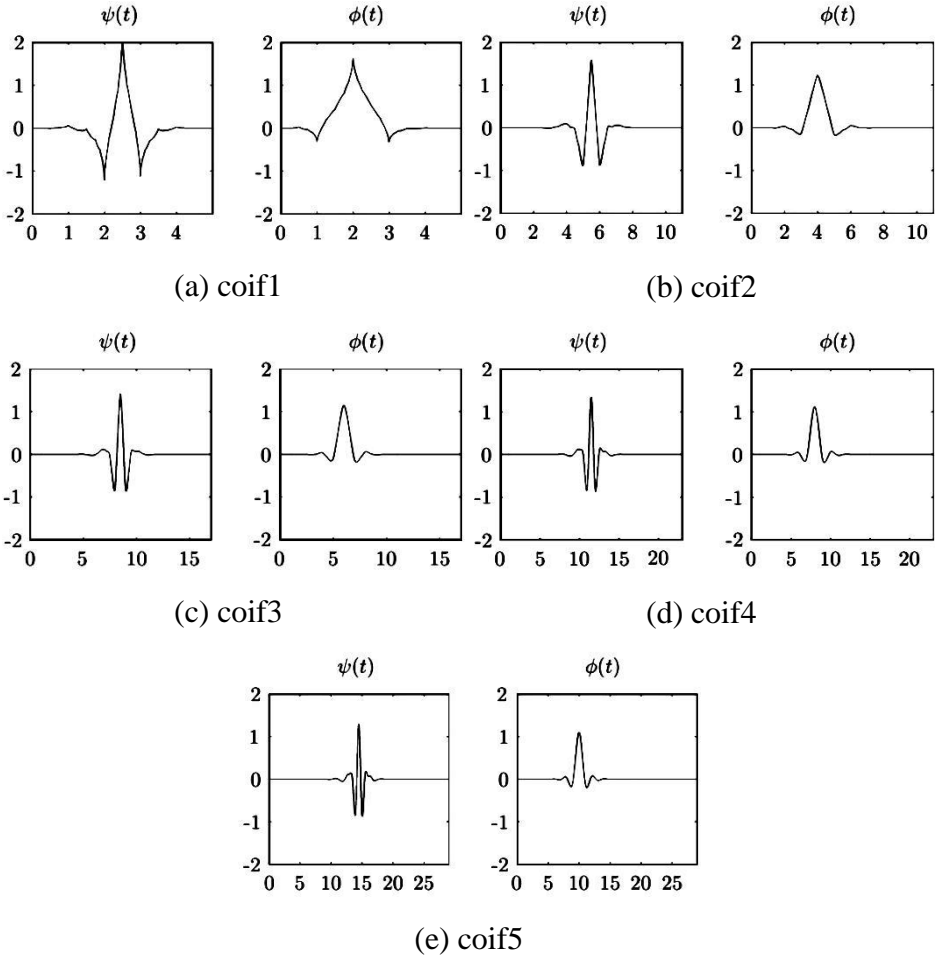
(g) db7

(h) db8

Hình 3.14. Hàm Wavelet và hàm tỷ lệ của họ Daubechies

Coiflets

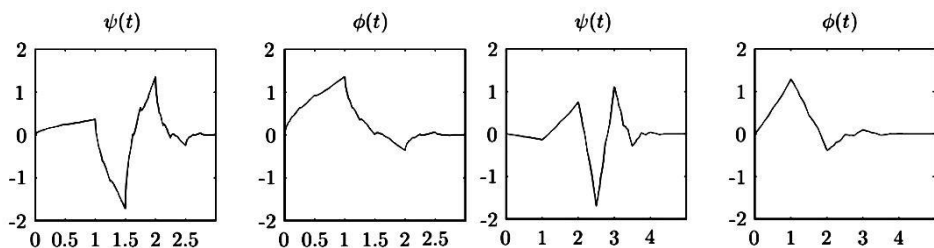
Coiflets cũng là hàm Wavelet trực giao với số lượng moment triệt tiêu lớn nhất với cả hàm Wavelet và hàm tỷ lệ có độ rộng cho trước. Các sóng Wavelet Coiflet đối xứng hơn và có nhiều moment triệt tiêu hơn so với Daubechies. Coiflet và các hàm tỷ lệ với bậc từ 1 đến 5 được trình bày trong hình 3.15.



Hình 3.15. Hàm Wavelet và hàm tỷ lệ của họ Coiflet

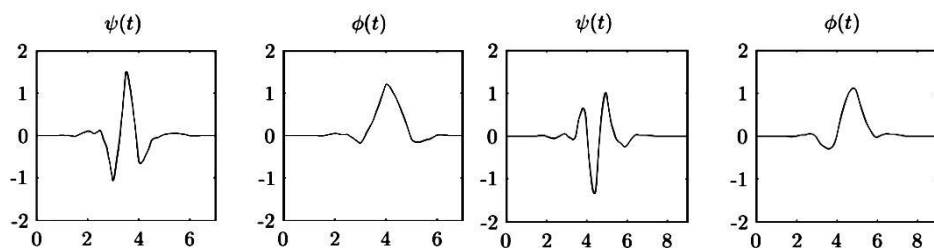
Symlets

Symlets cũng là một trong số những họ Wavelet trực giao. Symlets gần như đối xứng và có chút không đối xứng. Các bộ lọc tỷ lệ được cấp phát là các bộ lọc có pha tuyến tính. Đặc trưng của symlets gần giống với họ Wavelet Daubechies. Trong hình 3.16 là các hàm Wavelet và hàm tỷ lệ của symlets từ bậc 2 đến 8.



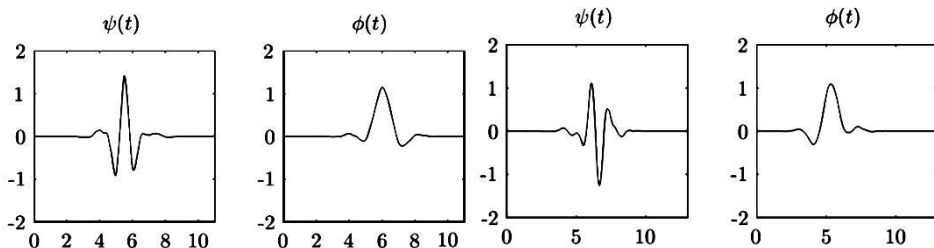
(a) Sym2

(b) Sym3



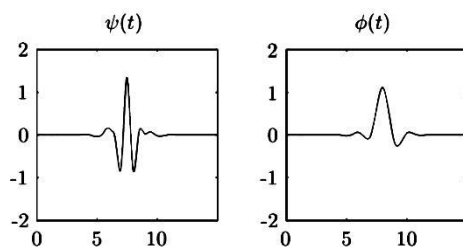
(c) Sym4

(d) Sym5



(e) Sym6

(f) Sym7



(g) Sym8

Hình 3.16. Hàm Wavelet và hàm tỷ lệ của họ Symlets

Biorthogonal

Họ Wavelet biorthogonal (song trực giao) có biến đổi dạng thuận nghịch nhưng không nhất thiết phải trực giao và việc xây dựng có thể thực hiện bằng cách sử dụng bộ lọc FIR, điều này vốn dĩ là không thể đối với các bộ lọc trực giao. Sự đối xứng có nghĩa là các bộ lọc phải có pha tuyến tính.

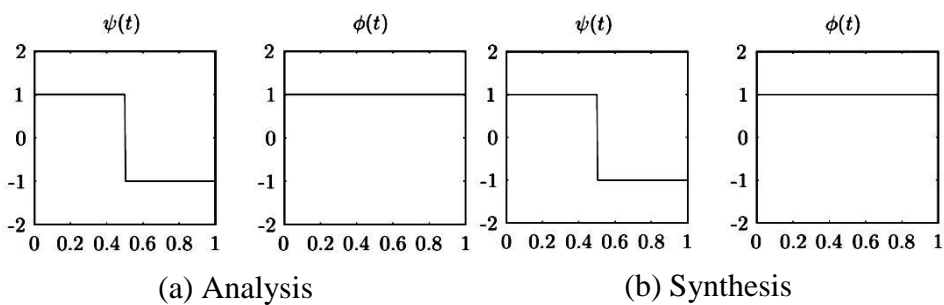
Họ Wavelet này sử dụng các Wavelet riêng biệt và các hàm tỷ lệ cho quá trình phân tích và tổng hợp tín hiệu. Ứng với việc phân tích, hàm Wavelet được sử dụng, các hệ số Wavelet tương ứng có thể được tính như sau:

$$\tilde{c}_{j,k} = \int x(t) \tilde{\psi}_{j,k}(t) dt \quad (3.54)$$

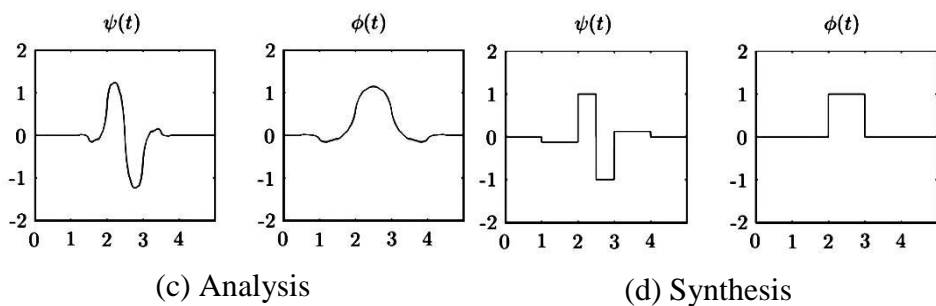
Quá trình tổng hợp sử dụng Wavelet

$$x(t) = \sum_{j,k} \tilde{c}_{j,k} \psi_{j,k} \quad (3.55)$$

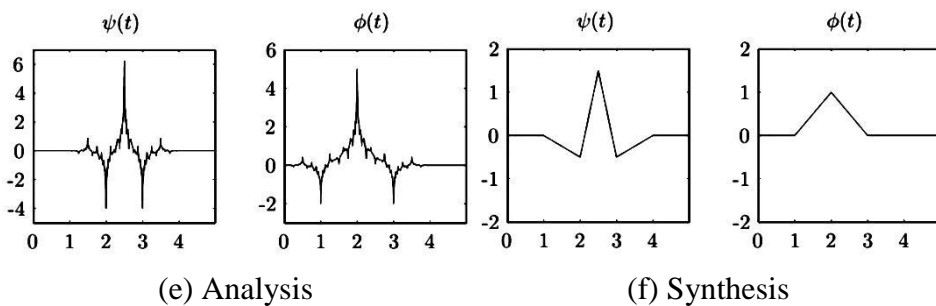
Hình 3.17 trình bày một số ví dụ về hàm phân tích và tổng hợp song trực giao. Bậc của bộ lọc dùng trong phân tích và tổng hợp được đánh dấu trong tên của họ Wavelet.



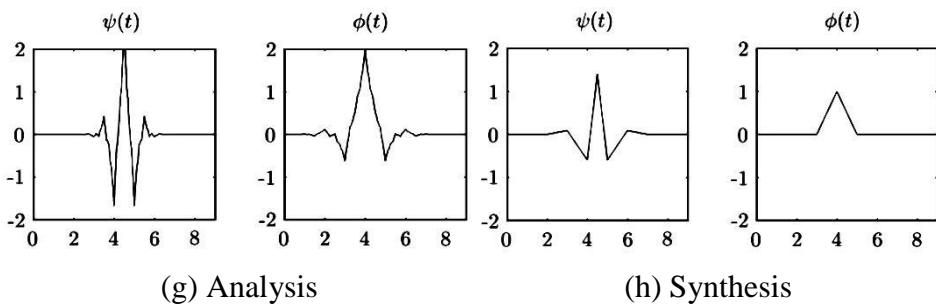
Bior1.1



Bior1.3



Bior2.2



Bior2.4

Hình 3.17. Hàm Wavelet và hàm tỷ lệ ứng với phép phân tích và tổng hợp của họ Biorthogonal

3.2.2.5. Biến đổi Wavelet trong ảnh số

Bằng việc mở rộng số chiều trong biến đổi Wavelet, cụ thể là với hàm tỷ lệ $\phi(x, y)$ và hàm Wavelet $\psi(x, y)$, ta có thể áp dụng biến đổi Wavelet cho dữ liệu hai chiều, chẳng hạn như ảnh số. Trong trường hợp này, hàm tỷ lệ và dịch chuyển được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\phi_{j,m,n}(x, y) &= 2^{j/2} \phi(2^j x - m, 2^j y - n), \\ \psi_{j,m,n}^i(x, y) &= 2^{j/2} \psi^i(2^j x - m, 2^j y - n), i = \{H, V, D\}\end{aligned}\quad (3.56)$$

Sẽ có ba hàm Wavelet khác nhau, $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$ và $\psi^D(x, y)$. Theo như định nghĩa trước đó, hàm tỷ lệ luôn là thành phần tần số thấp của hàm tỷ lệ trước đó trong không gian hai chiều. Do đó, sẽ chỉ có một hàm tỷ lệ hai chiều. Tuy nhiên, hàm Wavelet liên quan đến bậc dùng trong các bộ lọc. Nếu hàm Wavelet được tách biệt rõ ràng, nghĩa là, $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Các hàm này được viết rõ ra như sau:

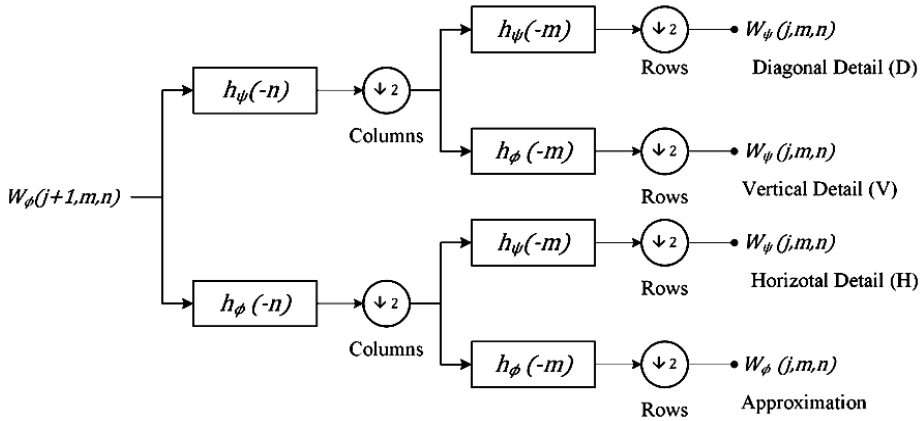
$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x)\phi(y), \\ \psi^H(x, y) &= \psi(x)\phi(y), \\ \psi^V(x, y) &= \phi(x)\psi(y), \\ \psi^D(x, y) &= \psi(x)\psi(y),\end{aligned}\quad (3.57)$$

Nếu xem đây là các hàm tách biệt thì sẽ rất dễ dàng để phân tích các hàm hai chiều này và do đó ta chỉ nên tập trung vào việc thiết kế các hàm một chiều trước. Biểu thức hàm phân tích và tổng hợp được sửa đổi lại dưới dạng hai chiều như sau:

$$\begin{aligned}W_\phi(j_0, m, n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \phi_{j_0, m, n}(x, y) \\ W_\psi(j, m, n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \phi_{j, m, n}^i(x, y), i = \{H, V, D\} \\ f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} W_\phi(j_0, m, n) \phi_{j_0, m, n}(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H,V,D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \phi_{j, m, n}^i(x, y)\end{aligned}\quad (3.58)$$

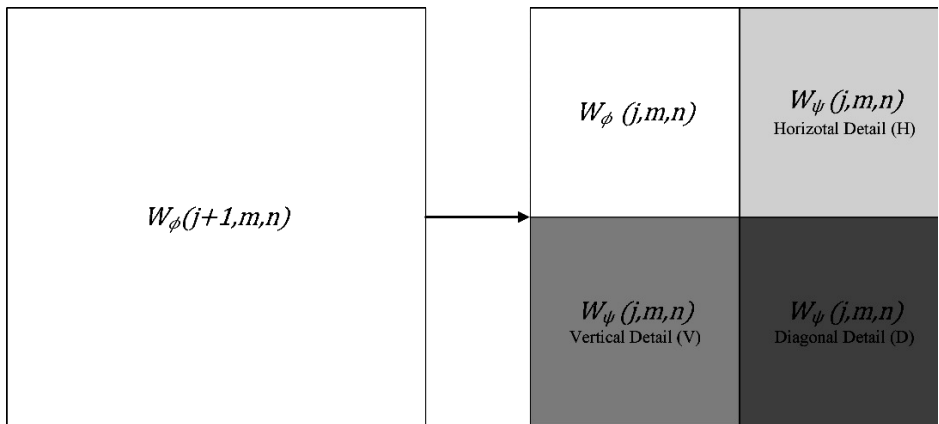
Đây là dạng tổng quát của biến đổi Wavelet hai chiều. Nếu các hàm tỷ lệ và hàm Wavelet là tách biệt, sự tổng hợp có thể được chia thành hai bước: tính theo trục chiều dọc và chiều ngang; bên cạnh đó, có thể sử dụng

biến đổi Wavelet nhanh để tiết kiệm thời gian. Hình 3.18 biểu diễn quá trình phân tích dữ liệu hai chiều thành bốn thành phần riêng biệt với một mức phân tích. Ở đây các bộ lọc thông thấp và thông cao được hiểu như là các hàm tỷ lệ và hàm Wavelet.



Hình 3.18. Sơ đồ thực hiện phép biến đổi Wavelet hai chiều

Với một tín hiệu hai chiều như ảnh số, dữ liệu sẽ được phân chia thành bốn băng con: LL (left-top) biểu diễn các hệ số có tần số thấp nhất chứa các thành phần xấp xỉ, HL (right-top) chứa các thành phần chi tiết theo chiều ngang, LH (left-bottom) chứa các thành phần chi tiết theo chiều dọc và HH (right-bottom) chứa các chi tiết theo đường chéo như trong hình 3.19.



Hình 3.19. Biểu diễn các thành phần băng con khi phân tích Wavelet cho ảnh số

3.2.2.6. Biến đổi Wavelet dùng Wavelet Toolbox

Biến đổi Wavelet được hỗ trợ rất nhiều trong Matlab với riêng một Toolbox. Đầu tiên là việc cung cấp các dạng hàm Wavelet khác nhau thông qua hàm `wfilters` với cú pháp cơ bản như sau:

```
[Lo_D, Hi_D, Lo_R, Hi_R] = wfilters('wname');
```

Trong đó, `Lo_D` và `Hi_D` là các bộ lọc thông thấp và thông cao dùng trong quá trình phân tích Wavelet, trong khi đó, `Lo_R` và `Hi_R` là các bộ lọc dùng trong quá trình tổng hợp, và tất nhiên các bộ lọc này phải trực giao với nhau. Ngoài ra, người đọc có thể tham khảo thêm hàm tạo các bộ lọc tương đương với hàm `wfilters`:

```
[F1, F2] = wfilters('wname', 'type')
```

Còn để trả về dạng số xấp xỉ của hàm Wavelet hay hàm tỷ lệ, hàm `wavefun` trong Matlab cho phép thực hiện điều đó:

```
[phi, psi, xval] = wavefun(vname, iter)
```

Kết quả trả về các vector xấp xỉ `phi` và `psi`, trong khi đó `xval` là vector ước lượng. Số nguyên dương `iter` xác định độ chính xác của việc xấp xỉ bằng cách điều chỉnh số lượng bước lặp được dùng trong tính toán. Với các biến đổi trực giao, hàm phù hợp được cho như sau:

```
[phi1, psi1, phi2, psi2, xval] = wavefun(wname, iter)
```

Trong đó `phi1` và `psi1` là các hàm phân giải, trong khi `phi2` và `psi2` là các hàm tái cấu trúc.

Ví dụ 3.3: Biểu diễn các hàm bộ lọc, hàm tỷ lệ và hàm Wavelet của họ Wavelet Haar ở hình 3.20

```
clear all;
[Lo_D, Hi_D, Lo_R, Hi_R] = wfilters('Haar')
waveinfo('Haar')
[phi, psi, xval] = wavefun('Haar', 10)
xaxis=zeros(size(xval));
subplot(121);
plot(xval, phi, 'k', xval, xaxis, '--k');
axis([0 1 -1.5 1.5]);
axis square;
title('Haar Scaling Function')
subplot(122);
```

```

plot(xval,psi,'k',xval,xaxis,'--k');
axis([0 1 -1.5 1.5]);
axis square;
title('Haar Wavelet Function');

```

Kết quả thực thi chương trình

```

>>
Lo_D =
    0.7071    0.7071
Hi_D =
   -0.7071    0.7071
Lo_R =
    0.7071    0.7071
Hi_R =
    0.7071   -0.7071
Information on Haar Wavelet.
    Haar Wavelet
    General characteristics: Compactly supported
    Wavelet, the oldest and the simplest Wavelet.
    scaling function phi = 1 on [0 1] and 0 otherwise.
    Wavelet function psi = 1 on [0 0.5[, = -1 on [0.5 1]
and 0 otherwise.

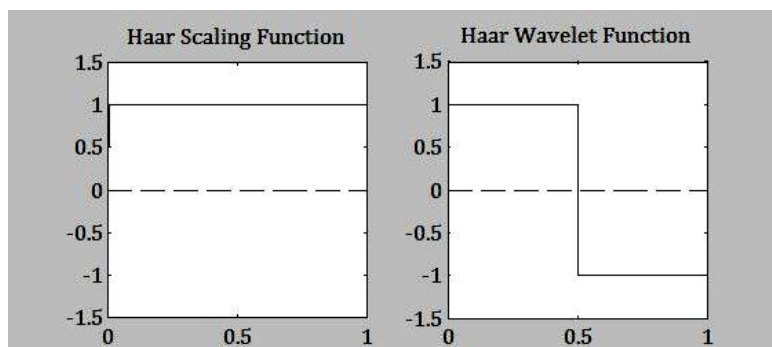
    Family                Haar
    Short name            haar
    Examples              haar is the same as db1
    Orthogonal            yes
    Biorthogonal          yes
    Compact support       yes
    DWT                   possible
    CWT                   possible

    Support width         1
    Filters length        2

```

Regularity	haar is not continuous
Symmetry	yes
Number of vanishing moments for psi	1

Reference: I. Daubechies,
Ten lectures on Wavelet,
CBMS, SIAM, 61, 1994, 194–202.



Hình 3.20. Hàm tỷ lệ và hàm Wavelet của họ Haar

Một trong những cách đơn giản để tính toán việc biến đổi Wavelet dành cho các tín hiệu hai chiều được hỗ trợ bởi Toolbox Wavelet là hàm `wavedec2` với cú pháp như sau:

```
[C, S] = wavedec2(X, N, Lo_D, Hi_D)
```

trong đó, X là ma trận hai chiều hay ảnh số, N là mức phân tích, Lo_D và Hi_D là các hàm bộ lọc dùng trong phân tích. Cú pháp đơn giản hơn của hàm này như sau:

```
[C, S] = wavedec2(X, N, 'wname')
```

Với cú pháp này không cần thiết phải chỉ rõ hàm bộ lọc, trong khi chỉ cần khai báo tên họ Wavelet dùng để phân tích. Ngõ ra bao gồm vector hàng C (kiểu double) chứa các hệ số Wavelet đã được biến đổi. Ma trận S (cũng thuộc kiểu double) xác định bố cục của các hệ số trong C . Mối quan hệ giữa C và S được khảo sát trong ví dụ và được mô tả trong phần tiếp theo.

Ví dụ 3.4: Xem xét biến đổi Wavelet dùng hàm `wavedec2` dùng họ Haar

```
clear all;  
f=magic(4);
```

```
[C,S]=wavedec2(f,1,'Haar');
```

Hàm `magic(m)` trả về ma trận vuông có kích thước m^2 với các phần tử có giá trị từ 1 đến m^2 .

```
f =
```

```
    16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
```

```
C =
```

```
Columns 1 through 10
```

```
    17.0000    17.0000    17.0000    17.0000     1.0000    -1.0000
   -1.0000     1.0000     4.0000    -4.0000
```

```
Columns 11 through 16
```

```
   -4.0000     4.0000    10.0000     6.0000    -6.0000   -10.0000
```

```
S =
```

```
     2     2
     2     2
     4     4
```

Lưu ý ma trận `S` thông thường có kích thước $(N + 2) \times 2$. Với ví dụ như trên, hàng đầu tiên chỉ ra kích thước của ma trận hệ số xấp xỉ, hàng thứ hai ứng với kích thước của các ma trận hệ số chi tiết và hàng cuối là kích thước của ngõ vào. Dựa trên kích thước được chỉ rõ trong ma trận `S`, ta có thể xác định được các hệ số trong vector `C`. Do chỉ phân tích với một mức duy nhất nên ma trận hệ số của các băng con xấp xỉ và chi tiết có kích thước bằng phân nửa so với dữ liệu vào. Cụ thể, `C(1:4)` là hệ số xấp xỉ và `C(5:8)`, `C(9:12)`, `C(13:16)` tương ứng là hệ số chi tiết theo chiều ngang, chiều dọc và đường chéo.

Để hiểu rõ hơn về cách thức trình bày ngõ ra của hàm `wavedec2`, vẫn với cách thực hiện như ví dụ 3.4 nhưng sử dụng hai mức phân tích.

```
[C,S]=wavedec2(f,2,'Haar');
```

```
C =
```

```
Columns 1 through 10
```

```
    34.0000         0         0     0.0000     1.0000    -1.0000
   -1.0000     1.0000     4.0000    -4.0000
```

Columns 11 through 16

-4.0000 4.0000 10.0000 6.0000 -6.0000 -10.0000

S =

```

1      1
1      1
2      2
4      4

```

Có thể thấy $S(1, :)$ chỉ kích thước của ma trận hệ số xấp xỉ tại mức phân tích thứ 2. $S(2, :)$ chỉ kích thước của các ma trận hệ số chi tiết tại mức phân tích thứ 2. $S(3, :)$ kích thước của các ma trận hệ số chi tiết tại mức phân tích thứ nhất và $S(4, :)$ là kích thước của ma trận dữ liệu ngõ vào. Hình 3.21 trình bày sự phân bố các băng con dưới dạng ma trận.

C(1:1) S(1,:)	C(2:2) S(2,:)	C(5:8) S(3,:)
C(3:3) S(2,:)	C(4:4) S(2,:)	
C(9:12) S(3,:)		C(13:16) S(3,:)

Hình 3.21. Sơ đồ bố trí của các băng con khi dùng hàm *wavedec2*

Ngoài ra, Wavelet Toolbox còn hỗ trợ cho phép trích xuất chính xác các hệ số Wavelet của từng băng con tại từng mức phân tích. Tham khảo ví dụ sau đây cũng dựa trên kết quả thực hiện trước đó.

Ví dụ 3.5: Trích xuất các hệ số Wavelet của từng băng con tại các mức phân tích xác định

```

clear all;
f=magic(4);
[C,S]=wavedec2(f,2,'Haar');
A=appcoef2(C,S,'Haar',1)
V=detcoef2('v',C,S,'Haar',2)

```

Trong ví dụ trên, hàm `appcoef2` sẽ trả về ma trận chứa các hệ số Wavelet của băng con xấp xỉ tại bất kỳ mức phân tích nào, lưu ý, mức phân tích khai báo phải nhỏ hơn giá trị khai báo trong hàm `wavedec2` trước đó. Cú pháp của hàm `appcoef2` được cho như sau:

$$A = \text{appcoef2}(C, S, 'wname', N)$$

Hay

$$A = \text{appcoef2}(C, S, Lo_R, Hi_R, N)$$

Tương tự với hàm `detcoef2` cũng trả về ma trận hệ số Wavelet của băng con chi tiết, nhưng có thêm một tham số cần khai báo, đó là băng con cụ thể. Trong trường hợp của ví dụ 3.5 thì băng con trích xuất là vertical - băng con chi tiết theo chiều dọc. Cú pháp của hàm `detcoef2` được trình bày:

$$D = \text{detcoef2}(O, C, S, N)$$

Tham số `O` chỉ rõ băng con chi tiết cần khai báo, chẳng hạn 'h' - horizontal, 'v' - vertical, 'd' - diagonal.

Ví dụ 3.6: Thực hiện biến đổi DWT cho ma trận 2 chiều dùng Wavelet Haar.

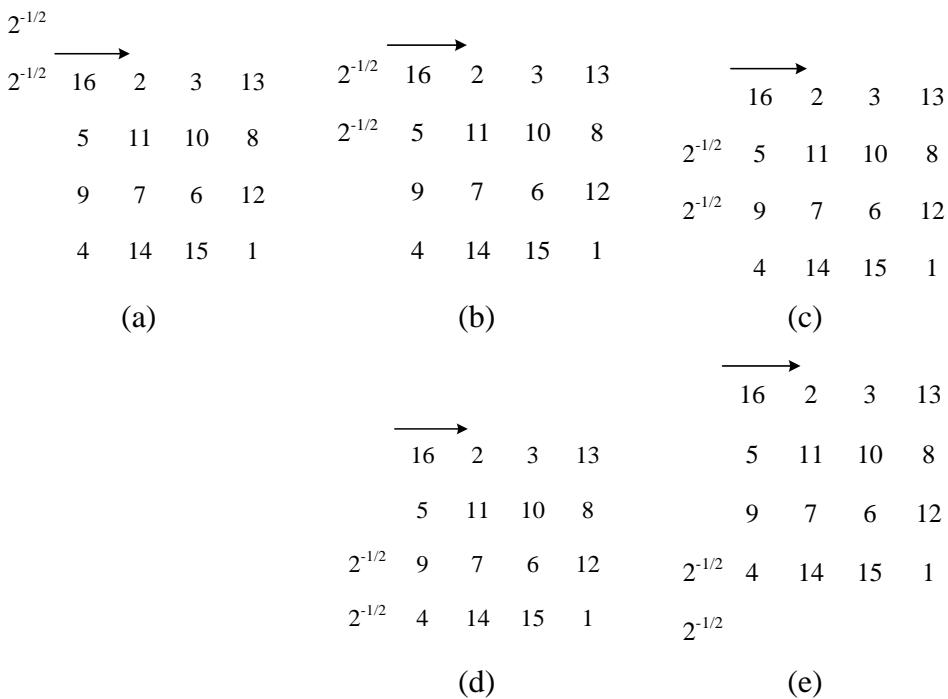
Với kết quả thu được từ ví dụ 3.3 là các hàm bộ lọc thông thấp và thông cao dùng trong quá trình phân tích thì hoàn toàn có thể thực hiện việc biến đổi DWT với ma trận được cho từ hàm `magic(4)`.

$$f = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Với hai bộ lọc thông thấp $Lo_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ và $Hi_D = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Như đã đề cập, thành phần xấp xỉ chứa các hệ số có tần số thấp nhất, do đó có thể thực hiện theo như sơ đồ trong hình 3.18. Cụ thể theo các bước sau đây (chỉ với thành phần xấp xỉ):

- Tính tích chập giữa f và Lo_D theo từng hàng. Gọi O_1 là ngõ ra, O_1 có kích thước trong ví dụ này là 5×4 . Tích chập được tính như sau:



Bước (a) xác định được các hệ số như sau:

$$O_1(1,1) = 1/\sqrt{2} \times 16$$

$$O_1(1,2) = 1/\sqrt{2} \times 2$$

$$O_1(1,3) = 1/\sqrt{2} \times 3$$

$$O_1(1,4) = 1/\sqrt{2} \times 13$$

Tương tự bước (b) xác định được:

$$O_1(2,1) = 1/\sqrt{2} \times (16 + 5)$$

$$O_1(2,2) = 1/\sqrt{2} \times (2 + 11)$$

$$O_1(2,3) = 1/\sqrt{2} \times (3 + 10)$$

$$O_1(2,4) = 1/\sqrt{2} \times (13 + 8)$$

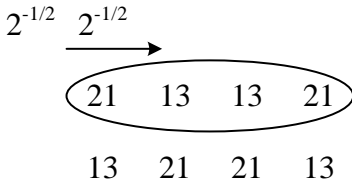
Ngõ ra O_1 được xác định:

$$O_1 = 1/\sqrt{2} \times \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 21 & 13 & 13 & 21 \\ 14 & 18 & 16 & 20 \\ 13 & 21 & 21 & 13 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

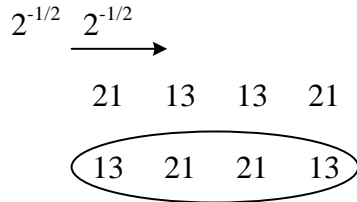
- Thực hiện giảm mẫu ở những mẫu lẻ theo hàng (loại bỏ hàng lẻ)

$$O'_1 = 1/\sqrt{2} \times \begin{bmatrix} 21 & 13 & 13 & 21 \\ 13 & 21 & 21 & 13 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện tích chập một lần nữa cũng với hàm bộ lọc thông thấp. Đặt ngõ ra là O_2



(a)



(b)

Ngõ ra sau khi tính toán:

$$O_2 = (1/\sqrt{2})^2 \times \begin{bmatrix} 21 & 34 & 26 & 34 & 21 \\ 13 & 34 & 42 & 34 & 13 \end{bmatrix}$$

- Sau đó thực hiện giảm mẫu theo cột với những cột lẻ. Kết quả thu được là các hệ số tần số thấp hay còn gọi là thành phần xấp xỉ.

$$A = (1/\sqrt{2})^2 \times \begin{bmatrix} 34 & 34 \\ 34 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$$

Các thành phần chi tiết có thể thực hiện theo cách như trên với sự hỗ trợ từ các bộ lọc thông thấp và thông cao. Để kiểm tra kết quả, dùng hàm `appcoef2` hay `detcoef2` để trích xuất và so sánh.

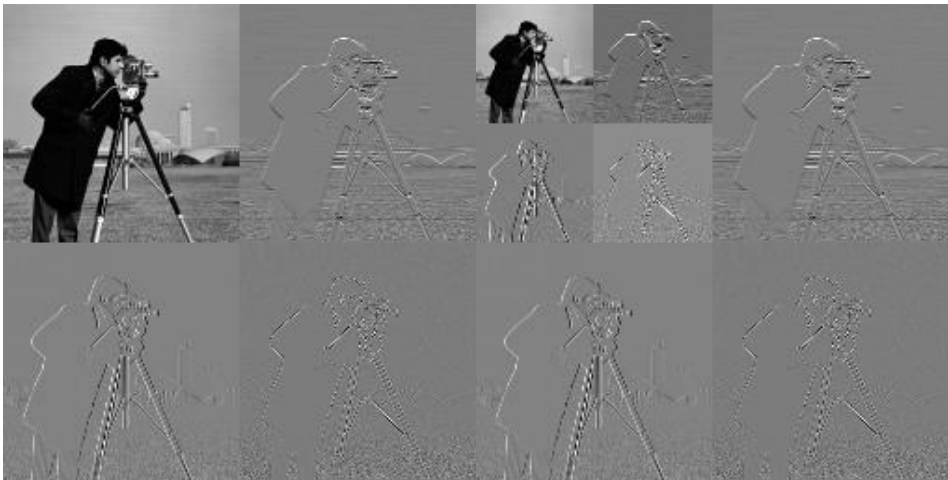
Bên cạnh hàm `wavedec2` cho phép phân tích Wavelet đa mức, MATLAB cũng hỗ trợ hàm phân tích Wavelet hai chiều từng mức với ngõ ra tách biệt từng băng con. Hàm `dwt2` cho phép trả về bốn ma trận riêng biệt, gồm: thành phần xấp xỉ (cA), thành phần chi tiết theo chiều ngang (cH), chi tiết theo chiều dọc (cV) và chi tiết theo đường chéo (cD).

Ví dụ 3.7: Phân tích và biểu diễn các thành phần băng con với một ảnh cho trước

```
clear all;
f=imread('cameraman.bmp');
[cA1,cH1,cV1,cD1]=dwt2(f,'Haar');
f1=[mat2gray(cA1) mat2gray(cH1);mat2gray(cV1) mat2gray(cD1)];
[cA2,cH2,cV2,cD2]=dwt2(cA1,'Haar');
f22=[mat2gray(cA2) mat2gray(cH2);mat2gray(cV2) mat2gray(cD2)];
```

```
f2=[f22 mat2gray(cH1);mat2gray(cV1) mat2gray(cD1) ] ;
imshow(f1);
figure;imshow(f2);
```

Lưu ý, hàm `mat2gray` cho phép chuyển đổi một ma trận bất kỳ thành một ảnh xám. Trong ví dụ trên, các hệ số của các thành phần xấp xỉ hay chi tiết đều có dạng thập phân và kiểu `double` nên cần được chuẩn hóa. Việc chuẩn hóa có thể được thực hiện thủ công hay ngắn gọn là chỉ việc chuyển nó thành một ảnh dùng để biểu diễn như hình 3.22 với: (a) biểu diễn các thành phần với mức ứng với một mức phân tích và (b) ứng với hai mức phân tích. Với mỗi mức phân tích thì kích thước của ma trận giảm đi phân nửa so với trước đó.



(a)

(b)

Hình 3.22. Biểu diễn các thành phần tần số sau khi dùng DWT cho ảnh xám: (a) Một mức phân tích; (b) Hai mức phân tích

3.2.2.7. Một số ứng dụng của phép biến đổi Wavelet

Biến đổi Wavelet được dùng nhiều trong các ứng dụng xử lý ảnh do tính hiệu quả so với biến đổi Fourier trong việc biểu diễn các đặc trưng tần số theo thời gian. Do đó, ứng dụng xử lý ảnh trên miền Wavelet thông thường là các thuật toán chỉnh sửa, thay đổi giá trị của các hệ số trong các băng con *xấp xỉ* hay *chi tiết*. Công việc này có thể được tóm gọn trong ba bước cơ bản như sau:

- 1) Biến đổi ảnh từ miền không gian sang miền Wavelet (thực hiện biến đổi Wavelet rời rạc)
- 2) Thay đổi các hệ số Wavelet

- 3) Biến đổi ngược các hệ số sau khi chỉnh sửa từ miền Wavelet trở lại miền không gian.

Để hiểu rõ hơn ứng dụng Wavelet, một số ví dụ sẽ được trình bày bên dưới, nhưng cơ bản sẽ bao gồm các ứng dụng như: triệt nhiễu tần số cao, nén ảnh, tách biên...

Ví dụ 3.8: Thực hiện thuật toán giảm nhiễu dùng biến đổi Wavelet

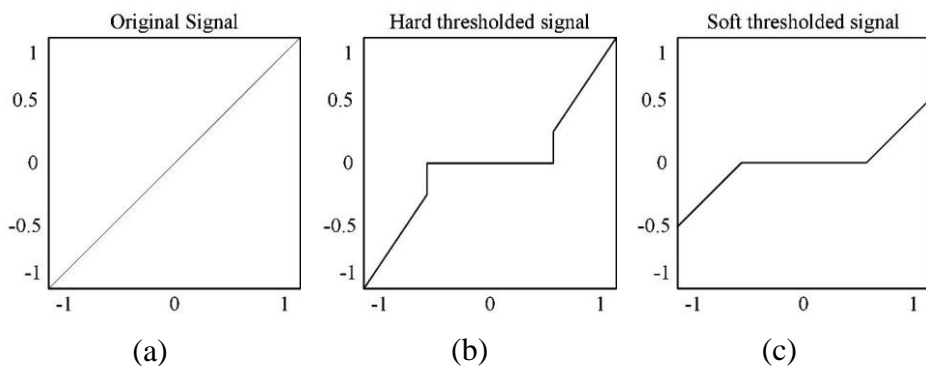
```
clear all
f=imread('cameraman.bmp');
fn=imnoise(f, 'gaussian', 0.01);
[cA, cH, cV, cD]=dwt2(fn, 'Haar');
[THR_H, SORH_H, KEEPAPP_H]=ddencomp('den', 'wv', cH);
cH=wthresh(cH, SORH_H, THR_H);
[THR_V, SORH_V, KEEPAPP_V]=ddencomp('den', 'wv', cV);
cV=wthresh(cH, SORH_V, THR_V);
[THR_D, SORH_D, KEEPAPP_D]=ddencomp('den', 'wv', cD);
cD=wthresh(cH, SORH_D, THR_D);
fdn=uint8(idwt2(cA, cH, cV, cD, 'Haar'));
```

Trong ví dụ trên, hàm `idwt2` thực hiện quá trình biến đổi Wavelet ngược với cú pháp tương tự như hàm `dwt2`, chỉ có điều ngõ ra của hàm `dwt2` bây giờ trở thành ngõ vào của hàm `idwt2`. Cú pháp hoàn chỉnh được cho như sau:

$$X = \text{idwt2}(cA, cH, cV, cD, 'wname')$$

Ảnh sau khi được thêm nhiễu muối tiêu với mật độ cho trước. Mục tiêu là giảm nhiễu và nâng cao chất lượng của ảnh được đánh giá qua thông số PSNR. Do đây là dạng nhiễu tần số cao làm ảnh hưởng đến các chi tiết của ảnh nên thuật toán triệt nhiễu chỉ được áp dụng cho các băng tần chi tiết (băng tần tần số cao), cụ thể là thành phần `cH`, `cV` và `cD`. Thuật toán trong ví dụ trên chỉ đơn giản là lấy ngưỡng các hệ số Wavelet trong các băng tần chi tiết. Có hai kiểu lấy ngưỡng: lấy ngưỡng cứng (hard thresholding) và lấy ngưỡng mềm (soft thresholding) như trong hình 3.23. Các thông số như giá trị ngưỡng và lựa chọn kiểu lấy ngưỡng được xác định thông qua việc sử dụng hàm `ddencomp`, đây là hàm sẽ trả về các thông số mặc định cho việc lấy ngưỡng sao cho phù hợp với từng dữ liệu ngõ vào. Cú pháp của hàm `ddencomp` được mô tả:

$$[THR, SORH, KEEPAPP] = \text{ddencomp}('den', 'wv', X)$$



Hình 3.23. Mô tả các kiểu lấy ngưỡng

Thông qua việc so sánh chất lượng của ảnh nhiễu và sau khi giảm nhiễu để thấy được hiệu quả của thuật toán triệt nhiễu bằng Wavelet hay có thể quan sát trực quan ảnh trước và sau khi thực hiện thuật toán như hình 3.24.

```
[MSE1, PSNR1]=psnr(f, fn)
```

```
[MSE2, PSNR2]=psnr(f, fdn)
```

```
MSE1 =
```

```
2.0508e+03
```

```
PSNR1 =
```

```
15.0115
```

```
MSE2 =
```

```
726.5902
```

```
PSNR2 =
```

```
19.5179
```



(a)

Hình 3.24. Kết quả thực hiện giảm nhiễu sử dụng phân tích Wavelet

(a) Ảnh gốc

(b) Ảnh bị nhiễu

(PSNR=15.01dB)

(c) Ảnh sau khi triệt nhiễu

(PSNR=19.51dB)



(b)



(c)

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

- 3.1. So sánh biến đổi Fourier, biến đổi Fourier thời gian ngắn và biến đổi Wavelet.
- 3.2. Giải thích vì sao biến đổi Wavelet phù hợp trong việc phân tích ảnh số thay vì dùng biến đổi Fourier.
- 3.3. Cho ma trận được tạo từ hàm $f = \text{magic}(4)$. Dùng hàm `dwt2` để phân tích Wavelet, sau đó thực hiện việc biến đổi Wavelet ngược để khôi phục tín hiệu ban đầu.
- 3.4. Một ảnh có kích thước $N \times N$. Ảnh cho có thể được phân tích Wavelet tối đa bao nhiêu mức.
- 3.5. Viết chương trình triệt nhiễu muối tiêu dùng các hàm Wavelet họ Daubechies khác nhau. So sánh kết quả, từ đó rút ra kết luận.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Quang Hoan, *Xử lý ảnh*, lưu hành nội bộ, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, 2006.
2. Đỗ Năng Toàn, Phạm Việt Bình, *Xử lý ảnh*, Giáo trình môn học, Đại học Thái Nguyên, Khoa Công nghệ thông tin, 2007.
3. Maria Petrou, Panagiota Bosdogianni, *Image Processing: The Fundamentals*, John Wiley & Sons Ltd, 1999.
4. William K. Pratt, *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
5. Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, *Digital Image Processing*, The Third Edition, Prentice Hall, 2008.
6. Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, *Digital Image Processing Using Matlab*, Prentice Hall, 2004.
7. Kayvan N., Robert S., *Biomedical Signal and Image Processing*, Taylor and Francis Group, 2006.

GIÁO TRÌNH XỬ LÝ ẢNH

TS. NGUYỄN THANH HẢI

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Khu Phố 6, Phường Linh Trung, Quận Thủ Đức, TPHCM
Số 3, Công trường Quốc tế, Quận 3, TP Hồ Chí Minh
ĐT: 38239171 – 38225227 – 38239172
Fax: 38239172 - Email: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

PHÒNG PHÁT HÀNH NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Số 3 Công trường Quốc tế - Quận 3 – TPHCM
ĐT: 38239170 – 0982920509 – 0913943466
Fax: 38239172 – Website: www.nxbdhqghcm.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
NGUYỄN HOÀNG DŨNG

Chịu trách nhiệm nội dung:
NGUYỄN HOÀNG DŨNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TPHCM

Biên tập:
PHẠM ANH TÚ

Sửa bản in:
THÙY DƯƠNG

Trình bày bìa
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TPHCM

Mã số ISBN: 978-604-73-2582-5

Số lượng 300 cuốn; khổ 16 x 24cm.

Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 1007-2014/CXB/05-13/ĐHQGTPHCM.

Quyết định xuất bản số: 107 ngày 28/05/2014 của NXB ĐHQGTPHCM.

In tại Công ty TNHH In và Bao bì Hưng Phú.

Nộp lưu chiểu quý III năm 2014.