**Bài 1:** Xác định xem trong các trường hợp sau đây, đâu là subspace trong . Tại sao?

Để U là không gian con của , cần phải có 2 điều kiện:

* Vector 0 phải thuộc U.
* U phải đóng dưới phép cộng và phép nhân vô hướng.

a/

* Với mọi s, t luôn có vector (s,1,t) nên không có vector 0 trong tập hợp U.

**Kết luận:** U không phải là không gian con của

b/

* Với s = 0, t = 0 ta có vector (0,0,0). Vậy vector 0 thuộc U.
* Giả sử thuộc U
  + Ta có cũng thuộc U vì
  + Với vì

**Kết luận:** U là không gian con của

c/

* Với s = 0, t = ta có vector (0,0,0). Vậy vector 0 thuộc U.
* Giả sử thuộc U
  + Ta có không thuộc U vì
  + Với vì

**Kết luận:** U không phải là không gian con của

d/

* Với r = 0, s = 0, t = 0 ta có vector (0,0,0). Vậy vector 0 thuộc U.
* Giả sử thuộc U
  + Ta có cũng thuộc U vì
  + Với vì

**Kết luận:** U không phải là không gian con của

**Bài 2:** Xác định trong các trường hợp sau đây đâu là span của. Tại sao? (gợi ý. Xét một vector bất kỳ trong không gian 4 chiều xem nó có phân tách thành tổ hợp tuyến tính của các vector cơ sở đã cho hay không?)

a/ {(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0,1)}

Gọi là vector bất kỳ trong

Gọi a, b, c, d là các hệ số thực sao cho

**Kết luận:** Vậy luôn có a, b, c, d duy nhất với mọi x, y, z, t nên tập hợp đã cho là span của .

b/ {(1, 3, −5, 0), (−2, 1, 0, 0), (0, 2, 1, −1), (1, −4, 5, 0)}.

Gọi là vector bất kỳ trong

Gọi a, b, c, d là các hệ số thực sao cho

Lấy (1) + 2\*(2) =

Mà (3) tương đương

**Kết luận:** Vậy không có a, b, c, d duy nhất với mọi x, y, z, t nên tập hợp đã cho không là span của .

**Bài 3:** Xác định vector cơ sở trong mỗi trường hợp sau:

a/

* Tạo ma trận với mỗi vector trong span là 1 cột, ta được ma trận A:
* Thực hiện khử Gauss để thu được ma trận bậc thang rút gọn
  + Cộng hàng 2 với hàng 1 sau đó chia hàng kết quả cho 3, được hàng 2 mới.
  + Cộng hàng 4 với 3 lần hàng 2, được hàng 4 mới.
  + Trừ 3 lần hàng 3 với 5 lần hàng 2, được hàng 3 mới.
  + Trừ 4 lần hàng 4 với 4 lần hàng 2, được hàng 4 mới.
* Các cột 1 và 2 là các cột pivot nên các vector 1 và 2 trong span là vector cơ sở

**Kết luận:** Vector cơ sở của U là và

b/

* Tạo ma trận với mỗi vector trong tập hợp là 1 cột, ta được ma trận A:
* Thực hiện khử Gauss để thu được ma trận bậc thang rút gọn
  + Trừ hàng 1 cho hàng 2 được hàng 4 mới.
  + Trừ hàng 3 cho hàng 4 được hàng 3 mới.
  + Trừ 3 cho hàng 4 được hàng 4 mới.
* Các cột 1, cột 2 và cột 3 là các cột pivot nên các vector 1 và 2 trong span là vector cơ sở

**Kết luận:** Vector cơ sở của U là

**Bài 4**: Xác định cơ sở của không gian hàng, không gian cột và hạng (rank) của ma trận sau.

Thực hiện khử để đưa ma trận về dạng bậc thang rút gọn:

* Chia hàng 1 cho 2, được hàng 1 mới.
* Lấy hàng 2 trừ hàng 1, sau đó chia kết quả cho 3, được hàng 2 mới.
* Lấy hàng 3 trừ 2 lần hàng 2, sau đó chia kết quả cho 3, được hàng 3 mới.
* Lấy hàng 3 cộng hàng 2, được hàng 3 mới.
* Lấy hàng 4 cộng hàng 2, được hàng 4 mới.

Từ ma trận dạng bậc thang rút gọn, ta có thể thấy:

* Vector hàng khác 0 là hàng 1 và 2.
* Các cột pivot tương ứng là cột 1 và 2.

**Kết luận:**

* Cơ sở của không gian hàng là
* Cơ sở của không gian cột là
* Hạng của ma trận là 2

**Bài 5:** Đi tìm đường thẳng gần đúng tốt nhất đi gần qua các điểm.

1/ (1, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 4)

Ta có phương trình đường thẳng có dạng:

Với các điểm dữ liệu ta được hệ:

Viết hệ trên lại đưới dạng phép nhân ma trận ta được:

Để giải hệ trên ta cần tìm:

**Kết luận:** Vậy phương trình đường thẳng gần đúng nhất đi qua các điểm trên là

2/ (−1,−1), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 6)

Ta có phương trình đường thẳng có dạng:

Với các điểm dữ liệu ta được hệ:

Viết hệ trên lại đưới dạng phép nhân ma trận ta được:

Để giải hệ trên ta cần tìm:

**Kết luận:** Vậy phương trình đường thẳng gần đúng nhất đi qua các điểm trên là

**Bài 6:** Tìm hình chiếu của vector xuống vector

Ta có:

Vector hình chiếu của vector lên vector là z, được tính như sau:

**Kết luận:** vector hình chiếu

**Bài 7:** Tìm vector trong không gian 3 chiều mà vuông góc đồng thời với 2 vector sau

Gọi vector cần tìm là

Để vector vuông góc với vector

Để vector vuông góc với vector

Từ (1) và (2), ta có hệ:

Lấy (1) – (2)

Vậy chọn

**Kết luận**: vậy một trong các vector vuông góc với 2 vector và là vector

**Bài 8:** Dùng thuật toán Gram-Schmidt để chuyển các hệ sau (B) về hệ trực giao, sau đó chuyển hệ đó về hệ trực chuẩn.

Gọi là các vector của B

Tìm bằng cách chuẩn hóa :

Tìm :

* Tìm hình chiếu z của xuống
* Tìm :
* Chuẩn hóa thu được cuối cùng là:

**Kết luận:** Vậy hệ là hệ vector trực chuẩn của hệ

Gọi là các vector của B

Tìm bằng cách chuẩn hóa :

Tìm :

* Tìm hình chiếu z của xuống
* Tìm :
* Chuẩn hóa thu được cuối cùng là:

Tìm :

* Tìm hình chiếu của lên :
* Tìm hình chiếu của lên :
* Tìm :
* Chuẩn hóa thu được cuối cùng là:

**Kết luận:** Vậy hệ là hệ vector trực chuẩn của hệ

**Bài 9:** Đi tìm trị riêng và vector riêng của các ma trận sau.

1/

Ta có

Mà từ đa thức đặc trưng:

Gọi là vector riêng của A thì

* Với :
* Với
* **Kết luận:**
* A có trị riêng , vector riêng
* Hoặc A có trị riêng , vector riêng

2/

Ta có

Mà từ đa thức đặc trưng:

Gọi là vector riêng của A thì

* Với :
* Với :
* Với :
* Không có a, b, c thỏa hệ

**Kết luận:**

* A có trị riêng , vector riêng
* Hoặc A có trị riêng , vector riêng