# 2024 Online Physics Olympiad: Đáp án vòng Open

## Nhà tài trợ

Cuộc thi này sẽ không thể thành công nếu thiếu đi sự trợ giúp từ các nhà tài trợ, những người đã đóng góp rất nhiều cho vật lý, toán và giáo dục.

# Hướng dẫn

Nếu bạn muốn yêu cầu làm rõ, vui lòng sử dụng biểu mẫu này. Để xem tất cả các giải thích, xem tài liệu này.

- Sử dụng $g = 9.8$ m/s$^2$ trong cuộc thi này, **trừ khi có quy định khác**. Xem bảng hằng số ở trang tiếp theo để biết các hằng số khác.
- Bài kiểm tra này có 35 câu hỏi ngắn. Mỗi bài toán sẽ có ba lần thử.
- Trọng số của mỗi câu hỏi phụ thuộc vào hệ thống chấm điểm của chúng tôi được tìm thấy ở đây. Nói đơn giản, các câu hỏi sau có giá trị cao hơn, và tổng số điểm từ một câu hỏi nhất định sẽ giảm theo số lần bạn thử giải bài toán cũng như số đội giải được nó.
- Bất kỳ thành viên nào trong đội đều có thể nộp bài. Việc chia nhỏ công việc hay làm mỗi bài toán cùng nhau là tùy thuộc vào bạn. Lưu ý rằng sau khi bạn đã nộp bài, các đồng đội của bạn phải làm mới trang của họ trước khi họ có thể thấy nó.
- Câu trả lời nên chứa **ba** chữ số có nghĩa, trừ khi có quy định khác. Tất cả các câu trả lời trong phạm vi 1% sẽ được chấp nhận.
- Khi nộp câu trả lời bằng ký hiệu khoa học, vui lòng sử dụng dạng số mũ. Nói cách khác, nếu câu trả lời của bạn cho một bài toán là $A \times 10^B$, vui lòng nhập $AeB$ vào cổng nộp bài.
- Một máy tính cầm tay khoa học hoặc đồ thị tiêu chuẩn *có thể* được sử dụng. Các hệ thống đại số máy tính và công nghệ như Wolfram Alpha hoặc TI Nspire sẽ không cần thiết, nhưng có thể được sử dụng.
- Bạn *được phép* sử dụng Wikipedia hoặc sách trong kỳ thi này. Hỏi xin trợ giúp trên các diễn đàn trực tuyến hoặc từ giáo viên của bạn sẽ bị coi là gian lận và có thể dẫn đến việc cấm tham gia các cuộc thi trong tương lai.
- Những người đạt điểm cao nhất từ cuộc thi này sẽ đủ điều kiện tham gia *Cuộc thi Mời của Olympic Vật lý Trực tuyến*, là một kỳ thi theo phong cách olympic. Thông tin thêm sẽ được cung cấp cho những người đủ điều kiện sau khi kết thúc *Cuộc thi Mở*.
- Nói chung, trả lời bằng đơn vị SI (mét, giây, kilogram, watt, v.v.) trừ khi có quy định khác. Vui lòng nhập tất cả các góc bằng độ trừ khi có quy định khác.
- Nếu câu hỏi yêu cầu đưa ra câu trả lời dưới dạng phần trăm và câu trả lời của bạn là "$x$%", vui lòng nhập giá trị $x$ vào biểu mẫu nộp bài.
- Không đặt đơn vị trong câu trả lời của bạn trên cổng nộp bài! Nếu câu trả lời của bạn là "$x$ mét", chỉ nhập giá trị $x$ vào cổng nộp bài.
- **Không truyền đạt thông tin cho bất kỳ ai khác ngoài các thành viên trong đội của bạn trước ngày 25 tháng 8 năm 2024**.

## Danh mục hằng số

- Khối lượng proton, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
- Khối lượng neutron, $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
- Khối lượng electron, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
- Hằng số Avogadro, $N_0 = 6.02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$
- Hằng số khí lý tưởng, $R = 8.31\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$
- Hằng số Boltzmann, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K
- Điện tích hạt electron, $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C
- 1 electron volt, $1\ \mathrm{eV} = 1.60 \cdot 10^{-19}$ J
- Vận tốc ánh sáng, $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s
- Hằng số hấp dẫn,
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ (\mathrm{N \cdot m^2})/\mathrm{kg}^2$$
- Khối lượng mặt trời
$$M_\odot = 1.988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$
- Gia tốc trọng trường, $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$
- 1 đơn vị nguyên tử khối,
$$1\ \mathrm{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 931\ \mathrm{MeV/c^2}$$
- Hằng số Planck,
$$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4.41 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$$
- Hằng số điện môi của chân không,
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$$
- Hằng số lực Coulomb,
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\ (\mathrm{N \cdot m^2})/\mathrm{C^2}$$
- Độ từ thẩm của chân không,
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$
- Hằng số từ,
$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \cdot 10^{-7}\ (\mathrm{T \cdot m})/\mathrm{A}$$
- Áp suất 1 atmosphere ,
$$1\ \mathrm{atm} = 1.01 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 1.01 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$$
- Hằng số dịch chuyển Wien, $b = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$
- Hằng số Stefan-Boltzmann,
$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2/K^4}$$

# Bài tập

**1. Ẩu** Bạn đang đi bộ băng qua đường tại một khoảng cách $x = 8.00\,\text{m}$ từ một ngã tư. Tại thời điểm $t = 0$, bạn bắt đầu đi qua ngã tư với một vận tốc không đổi vuông góc với hướng của đường, bạn cần thời gian $T$ để hoàn tất việc băng qua. Cùng lúc đó, ở $t = 0$, có một chiếc ô tô tự lái (Tesla) cách ngã tư $X = 40.0\,\text{m}$ về phía bạn. Chiếc xe đi đến ngã tư với vận tốc sao cho nếu đèn tín hiệu vẫn xanh, nó sẽ đến ngã tư vào lúc $t = T$.

Vào thời điểm $t = 0$, đèn tín hiệu chuyển sang màu đỏ, và do chiếc xe được điều khiển bằng máy tính, nó ngay lập tức bắt đầu giảm tốc với gia tốc không đổi $a$ sao cho nó dừng lại chính xác tại $X = 0$.

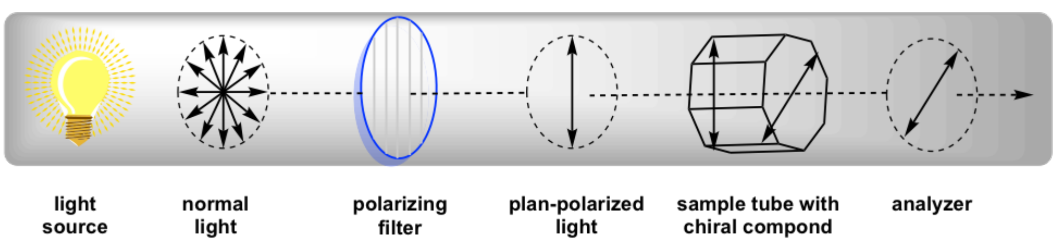
Bạn có bị xe đụng phải không? Nếu có, hãy tính tốc độ của xe so với mặt đất khi nó đụng bạn, tính theo phần trăm của tốc độ ban đầu trước khi đèn đỏ chuyển màu. Nếu không, hãy tính khoảng cách của xe so với bạn khi bạn hoàn thành việc băng qua đường.

**Đáp án câu 1:** Tốc độ ban đầu của chiếc xe là $v_0 = \frac{X}{T}$. Sử dụng phương trình $v^2 = 2a\Delta x$, ta tìm được gia tốc của chiếc xe là $a = \frac{X}{2T^2}$. Do đó, quãng đường mà chiếc xe di chuyển trong thời gian $T$ là

$$v_0T - \frac{1}{2}aT^2 = \frac{3}{4}X = 30,0\text{ m}$$

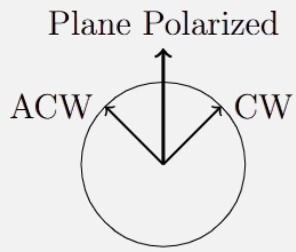
Bạn không bị chiếc xe đâm phải và bạn cách chiếc xe $\boxed{2,0\text{ m}}$ khi bạn hoàn thành việc băng qua đường.

**2. Khéo** Khi ánh sáng phân cực mặt phẳng có bước sóng $\lambda = 500\,\text{nm}$ đi qua một dung dịch chứa các phân tử chiral (ví dụ như glucose/DNA), ánh sáng ra khỏi dung dịch được quan sát là đã bị xoay bởi một góc $\Delta\theta$. Trong hóa học, sự xoay quang học này được đo bằng thiết bị phân cực, và nó được sử dụng để đo tỷ lệ tương đối của các phân tử tay trái và tay phải, mỗi loại có chỉ số khúc xạ riêng $n_L = 1.333333$ và $n_R = 1.333338$ ảnh hưởng đến phân cực tròn trái và phải tương ứng.




Nếu chiều dài của bình chứa dung dịch là $L = 0.15\,\text{m}$, góc xoay của phân cực ánh sáng là bao nhiêu, tức là tổng độ xoay quang học $\Delta\theta$, tính bằng radian? Nhập đáp án dương nhỏ nhất cho câu hỏi này.

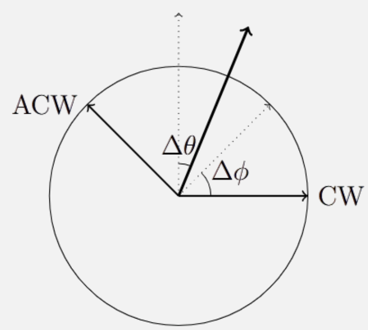
**Đáp án câu 2:** Ý tưởng chính là viết ánh sáng phân cực phẳng như sự chồng chất của hai sóng ánh sáng phân cực tròn có cùng tần số. Ý tưởng chính là viết ánh sáng phân cực phẳng như sự chồng chất của hai sóng ánh sáng phân cực tròn có cùng tần số.




Sau khi đi qua dung dịch, do chúng có chỉ số khúc xạ khác nhau là $n_L$ và $n_R$, độ chênh lệch pha giữa chúng được cho bởi

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{L}{\lambda_{\text{medium}}} = \frac{L}{\frac{\lambda}{n}} \implies \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} L\Delta n.$$

Tuy nhiên, cần lưu ý rằng đây là độ dịch pha chứ không phải góc quay.




Do đó $\Delta\theta = \frac{1}{2}\Delta\phi = \frac{\pi}{\lambda} L\Delta n$. Thay các giá trị vào ta được $\boxed{\Delta\theta = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71 \text{ rad}}$.

**3. Bóng rơi** Một quả bóng có mật độ đồng nhất $\rho_b$ được đặt trên mặt nước của một hồ có độ sâu $d$ và mật độ chất lỏng $\rho_p < \rho_b$. Một quả bóng giống hệt được nâng lên một độ cao $h$ trên hồ, và sau đó cả hai quả bóng được thả cùng lúc. Để cả hai quả bóng chạm đáy hồ cùng lúc, điều kiện $d = nh$ phải được thỏa mãn với một $n$ không có kích thước nào phụ thuộc vào các giá trị của $\rho_p$ và $\rho_b$. Nếu chúng ta định nghĩa $r$ như sau:

$$r = \frac{\rho_b - \rho_p}{\rho_b}$$

Thì chúng ta có thể biểu diễn $n$ dưới dạng:

$$n = \frac{Ar^3 + Br^2 + Cr}{Dr^2 + Er + F}$$

Trong đó $A, B, C, D, E, F$ là các số nguyên khác không, $\gcd(A, B, C, D, E, F) = 1$, và $A > 0$. Tính $A + B + C + D + E + F$? Bạn có thể giả định rằng các lực duy nhất hiện diện là trọng lực và lực đẩy của nước từ hồ. Quả bóng rơi từ trên không giữ lại năng lượng khi nó vào hồ.

**Đáp án câu 3:** Thời gian để quả bóng được thả từ bề mặt đến đáy hồ là

$$a = g\left(\frac{\rho_b - \rho_p}{\rho_b}\right) = rg$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{rg}}$$

Thời gian để quả bóng được thả từ trên không đến bề mặt hồ là

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_1 = at_1 = \sqrt{2gh}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad} = \sqrt{2gh + 2rgd}$$

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{\sqrt{2gh + 2rgd} - \sqrt{2gh}}{rg}$$

Điều kiện $t_1 + t_2 = t$ phải được thỏa mãm

$$\sqrt{\frac{2d}{rg}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\sqrt{2gh + 2rgd} - \sqrt{2gh}}{rg} \longrightarrow \frac{\sqrt{2rd}}{r\sqrt{g}} = \frac{r\sqrt{2h} + \sqrt{2h + 2rd} - \sqrt{2h}}{r\sqrt{g}}$$

$$\sqrt{2rd} - (r-1)\sqrt{2h} = \sqrt{2h + 2rd} \longrightarrow 2rd - 4(r-1)\sqrt{rdh} + 2h(r-1)^2 = 2h + 2rd$$

$$h(r-1)^2 - 2(r-1)\sqrt{rdh} = h \longrightarrow 2(r-1)\sqrt{rdh} = h(r-1)^2 - h$$

$$\sqrt{d} = \frac{h(r-1)}{2\sqrt{rh}} - \frac{h}{2\sqrt{rh}(r-1)} \longrightarrow d = \frac{h(r-1)^2}{4r} - \frac{h}{2r} + \frac{h}{4r(r-1)^2}$$

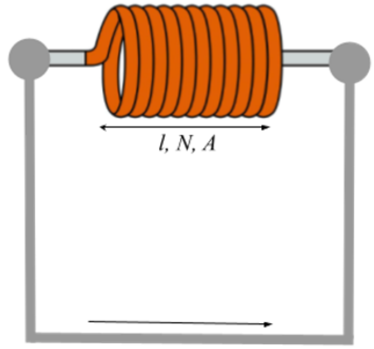
$$d = \frac{(r-1)^4 - 2(r-1)^2 + 1}{4r(r-1)^2}h$$

$$d = \frac{r(r-2)^2}{4(r-1)^2}h = \frac{r^3 - 4r^2 + 4r}{4r^2 - 8r + 4}h$$

Đáp án lúc này là $1 - 4 + 4 + 4 - 8 + 4 = \boxed{1}$.

**4. Cuộn dây** Xem xét một cuộn dây siêu dẫn không lõi khí với chiều dài $l = 1\,\mathrm{m}$, diện tích mặt cắt ngang $A = 0.1\,\mathrm{m}^2$ và số vòng dây $N = 1000$. Chúng ta nối hai đầu của cuộn dây với nhau bằng dây siêu dẫn và chạy dòng điện $I = 1600\,\mathrm{A}$ qua toàn bộ hệ thống. Giả sử cuộn dây hoạt động lý tưởng.

Cosmonaut Carla có một lõi với cùng kích thước như cuộn dây. Lõi có độ từ thẩm tương đối $\frac{\mu_i}{\mu_0} = 10000$ và khối lượng 10 kg. Lõi được thả ở trạng thái nghỉ xa cuộn dây và, do lực từ trường, bay qua cuộn dây. Cosmonaut Carla có thể chọn thời điểm để làm ngừng cuộn dây (ngay lập tức ngắt dòng điện) vào bất kỳ thời điểm nào. Vận tốc thoát tối đa của lõi là bao nhiêu?




**Đáp án câu 4:** Ý tưởng chính đầu tiên ở đây là từ thông qua ống dây $\Phi = LI$ là một đại lượng được bảo toàn, vì $\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$ nhất thiết phải bằng không để ngăn dòng điện tăng vọt. Ý tưởng chính thứ hai là đây về cơ bản chỉ là một bài toán bảo toàn năng lượng, với việc giảm năng lượng từ trường trong quá trình lõi di chuyển qua ống dây được chuyển thành động năng. Do đó, thời điểm tối ưu để tắt ống dây xảy ra khi năng lượng từ trường là thấp nhất, tức là khi lõi hoàn toàn ở trong ống dây.

Vì $B$ được bảo toàn và $\mu \gg \mu_0$, về cơ bản không còn năng lượng từ trường khi ống dây nên được tắt. Từ đó, ta có

$$E_B = \frac{\left(\frac{\mu_0 NI}{L}\right)^2}{2\mu_0} Al = \frac{1}{2}mv^2.$$

Thay vào sẽ cho ra $\boxed{v = 179.4 \text{ m/s}}$.

**5. Vào quỹ đạo** Một khẩu pháo được cố định trên đỉnh của một mặt phẳng có chiều cao $R = 6.00\times10^6$ m, mặt phẳng này nằm trên một hành tinh có khối lượng $M = 6.00 \times 10^{24}$ kg và bán kính $R$. Cả khẩu pháo và nền tảng mà nó đặt trên đều có khối lượng không đáng kể. Buồng pháo của khẩu pháo được nghiêng ngang so với hành tinh bên dưới. Khẩu pháo sau đó bắn một quả đạn có khối lượng $m = 45$ kg qua một buồng có chiều dài $l = 3$ m với một gia tốc không đổi sao cho quả đạn có thể thành công vào một quỹ đạo elip xung quanh hành tinh. Lực tối thiểu mà khẩu pháo phải áp dụng lên quả đạn để làm điều này là bao nhiêu? Bạn có thể giả định rằng cả hành tinh và mặt phẳng đều không di chuyển trong quá trình này.

**Đáp án câu 5:**
Tốc độ ban đầu tối thiểu cần thiết để vào quỹ đạo sẽ xảy ra khi bán trục chính của quỹ đạo được tối thiểu hóa. Trục bán chính này đạt giá trị nhỏ nhất khi nó bằng $1.5R$.
Theo phương trình vis-viva, vận tốc tối thiểu cần thiết để vào quỹ đạo từ vị trí phóng của pháo là

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{2R} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{1.5R}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

Quả pháo cần gia tốc để đạt đến vận tốc này khi nó chạm đến cuối nòng pháo. Gia tốc có thể tính như sau:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$$

$$\left(\sqrt{\frac{GM}{3R}}\right)^2 = 2al \longrightarrow a = \frac{GM}{6Rl}$$

Do đó, lực tối thiểu là:

$$F = ma = \frac{GMm}{6Rl} \approx \boxed{1.67 \times 10^8 \text{ N}}$$

**6. Đường vòng 1** Một dốc có chiều dài $d$ được nâng lên một góc $\theta$ ($0° < \theta < 90°$) so với mặt phẳng ngang. Một khối có khối lượng $m$ được đặt ở đỉnh của dốc, với hệ số ma sát giữa khối và dốc là $\mu$. Khi khối di chuyển đến đáy của dốc, nó giữ nguyên vận tốc khi được chuyển tiếp mượt mà lên một đường tròn không ma sát với bán kính $d$ và góc nghiêng $\theta$, quay trên đường tròn mà không bị trượt ra ngoài. Một *solution* là một tập hợp các giá trị $\{d, \mu, \theta\}$ dẫn đến tình huống đã mô tả ở trên. Giá trị lớn nhất của $\theta$ (tính bằng độ) mà vẫn tồn tại giải pháp là gì?

**Đáp án câu 6:** Tốc độ của khối ở đáy dốc là

$$f_N = f_g - f_f = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

$$v = \sqrt{\frac{2f_N d}{m}} = \sqrt{2gd(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

Trên dốc được nghiêng, ta có

$$mg\sin\theta = \frac{mv^2}{d}\cos\theta \longrightarrow gd\sin\theta = v^2\cos\theta \longrightarrow d = \frac{v^2}{g}\cot\theta$$

$$d = \frac{2gd(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{g}\cot\theta \longrightarrow \cos\theta(1 - \mu\cot\theta) = \frac{1}{2}$$

ằng cách kiểm tra, giá trị lớn nhất có thể của $\theta$ là $\boxed{60°}$.

**7. Đường vòng 2** Khi khối đi quanh đường tròn, nó được đẩy nhẹ theo phương vuông góc với vận tốc hiện tại của nó và song song với mặt phẳng của đường tròn, gây ra hiện tượng dao động với chu kỳ $T$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $T$ khi $d = 5$ m là bao nhiêu?

**Đáp án câu 7:** Sử dụng thế trung tâm, thế hiệu dụng của hạt được cho bởi

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$$

Đối với một độ lệch nhỏ $\delta r$ chúng ta có thể thiết lập như sau:

$$V(d + \delta r) \approx V(d) + \frac{\cos^2\theta}{2}\left(\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=d}\right)\delta r^2$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4}$$

$$\frac{mv^2}{d}\cos\theta = mg\sin\theta \longrightarrow v = \sqrt{gd\tan\theta}$$

$$L = mvd = md\sqrt{gd\tan\theta}$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{3mg\tan\theta}{d}$$

$$V(d+\delta r) \approx V(d) + \frac{1}{2}\frac{3mg\sin\theta\cos\theta}{d}\delta r^2$$

Từ đây, chúng ta thu được

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta\cos\theta}{d}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{3g\sin 2\theta}}$$

hời gian này đạt giá trị tối thiểu khi $\theta = 45°$, do đó, thay số vào cho kết quả $T_{min} \approx \boxed{3.664 \text{ s}}$

**8. Đập vỡ nguyên tử** Một hạt alpha là hạt nhân của nguyên tử $^4$He, và bao gồm hai proton và hai neutron liên kết với nhau. Một neutron được cho vận tốc $v$ và va chạm với một hạt alpha đang đứng yên. Nếu tất cả năm proton và neutron trở nên không liên kết sau va chạm, giá trị nhỏ nhất có thể của $v/c$? là bao nhiêu? Bạn có thể thấy các giá trị sau hữu ích:

$$m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2, \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2, \quad m_\alpha = 3727.4 \text{ MeV}/c^2$$

**Đáp án câu 8:** Giả sử neutron đến có hệ số Lorentz là $\gamma$. Lưu ý rằng năng lượng tổng của hệ thống là $E = (\gamma m_n + m_\alpha)c^2$ và động lượng ban đầu thỏa mãn $p^2 = (\gamma^2 - 1)m_n^2c^2$. Năng lượng tổng được tối thiểu hóa nếu các proton và neutron cuối cùng đều có cùng một vận tốc, trong trường hợp này, khối lượng cuối cùng của hệ thống là $M = 2m_p + 3m_n$. Do đó, theo định luật bảo toàn năng lượng và động lượng:

$$E^2 = p^2c^2 + M^2c^4$$
$$(\gamma^2 m_n^2 + 2\gamma m_n m_\alpha + m_\alpha^2)c^4 = (\gamma^2 - 1)m_n^2c^4 + M^2c^4$$
$$\gamma = \frac{M^2 - m_n^2 - m_\alpha^2}{2m_n m_\alpha} = 1.0378$$

Ta tim được $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = \boxed{0.267}$.

**9. Tắt đèn** Follin tạo ra một bể chứa một loại chất lỏng đặc biệt với chỉ số khúc xạ $n = 1 + i(1 \cdot 10^{-6})$. Có vẻ hơi phức tạp. Khi làm việc với chất lỏng này, anh ta vô tình làm rơi một cảm biến ánh sáng vào trong bể. Follin chiếu một tia laser đỏ với bước sóng $\lambda = 700$ nm và cường độ trong chân không $I_0 = 5 \cdot 10^6$ W/m$^2$ xuống chất lỏng. Cảm biến ánh sáng chìm xuống bao xa trước khi phát hiện được cường độ nhỏ hơn $I_f = 10^{-10}$ W/m$^2$? Giả sử rằng phòng thí nghiệm hoàn toàn tối và ánh sáng laser được truyền hoàn toàn vào chất lỏng.

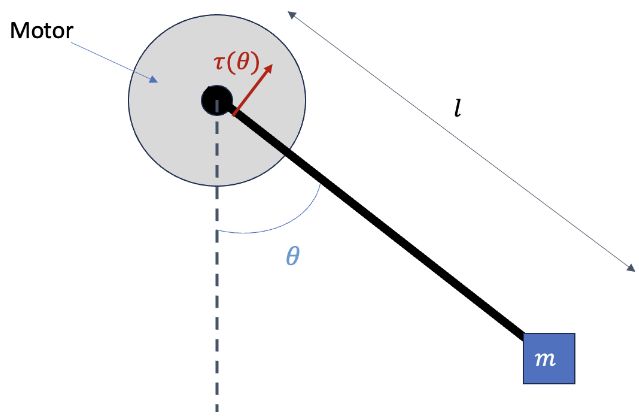
**Đáp án câu 9:** Giả sử sóng ánh sáng được mô tả bởi cường độ điện trường $Ae^{i(kx-\omega t)}$. Ta đặt $n = 1 + ia$. Khi vào chất lỏng, ta thấy rằng $k' = nk$ là số sóng mới. Do đó, sóng ánh sáng trong chất lỏng được viết là:

$$Ae^{i(nkx-\omega t)} = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-akx}.$$

Vì cường độ tỉ lệ với bình phương biên độ, ta có: $I_f = I_0 e^{-2akx}$, ta được:

$$x = \frac{1}{2ak}\ln\left(\frac{I_0}{I_f}\right) = \frac{\lambda}{4\pi a}\ln\left(\frac{I_0}{I_f}\right) = \boxed{2.14 \text{ m}}.$$

**10. Con lắc cơ giới 1** Một con lắc được làm từ một thanh không trọng lượng có chiều dài $l = 0.5000$ m và một chất điểm $m = 15.00$ kg treo ở một đầu. Góc giữa thanh và phương thẳng đứng là $\theta$. Một động cơ gắn vào điểm xoay cung cấp một mô-men xoắn. Giá trị lớn nhất của moment xoắn này phụ thuộc vào góc và được cho bởi $\tau(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2}\tau_0$ for $0 \leq \theta \leq 90°$.




Hình 1: Con lắc cơ giới.

Con lắc ban đầu được cho một vận tốc góc nhỏ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và ở $\theta = 0$. Khối lượng rất nhạy cảm và không thể chịu được tốc độ cao. Do đó, giả sử động cơ luôn cung cấp đủ momemt xoắn để khối lượng di chuyển với tốc độ hầu như không thay đổi. Giá trị nhỏ nhất của $\tau_0$ cần thiết để con lắc cuối cùng đạt đến $\theta = 90°$ là bao nhiêu?

**Đáp án câu 10:** Động cơ có mô men xoắn tối thiểu tại $\theta = 90°$. Để cân bằng mô men xoắn, ta có,

$$\frac{\tau_0}{2} = mgl$$

Đáp số là $\boxed{\tau_0 = 2mgl = 147.1 \text{ N} \cdot \text{m}}$.

**11. Con lắc cơ giới 2** Con lắc ban đầu ở $\theta = 0$. ần này, khối lượng không còn quá nhạy cảm. Động cơ có thể cung cấp mô-men xoắn tối đa của nó cho tất cả các giá trị của $\theta$. Giá trị nhỏ nhất của $\tau_0$ cần thiết để con lắc đạt đến $\theta = 90°$ trong một lần dao động đơn chiều là bao nhiêu?

**Đáp án câu 11:** Điều kiện ràng buộc lúc này

$$\int_0^t (\tau(\theta) - mgl\sin\theta)\, d\theta \geq 0$$

với mọi $0 \leq t \leq 90°$. Nói cách khác, năng lượng tích lũy từ động cơ trừ đi công thực hiện bởi trọng lực không được bao giờ âm. Thực hiện tích phân và đơn giản hóa, ta được bất đẳng thức sau:

$$\frac{\tau_0}{2mgl} \geq \frac{1-\cos t}{t+\sin t}$$

Giữa không và chín mươi độ, hàm phía bên trái tăng đơn điệu. Do đó, để tìm giá trị lớn nhất của nó, ta xét tại $t = \pi/2$.

Đáp án lúc này là $\boxed{\tau_0 = \frac{2}{1+\pi/2} mgl = 57.1\ \mathrm{N \cdot m}}$.

**12. Con lắc cơ giới 3** Con lắc ban đầu ở $\theta = 0$. Khối lượng chứa các thiết bị điện tử rất nhạy cảm và không thể chịu được tốc độ vượt quá $v_{max} = 0.1000$ m/s. Để ba chữ số có nghĩa, giá trị tối thiểu của $\tau_0$ cần thiết để con lắc đạt được $\theta = 90°$ mà không vượt quá ngưỡng tốc độ là?

**Đáp án câu 12:** Lộ trình tối ưu là tăng tốc khối lượng đến vận tốc $v_{max}$, sau đó khi nó tiếp cận đến $\theta = 90°$, để động năng của khối lượng đưa nó lên đỉnh trong khi động cơ không cung cấp đủ mô men xoắn để chống lại trọng lực.
Ta sẽ xấp xỉ đáp án. Thiết lập của bài này tương tự như bài Motorized Pendulum 1, vì vậy đáp án sẽ là một giá trị nhỏ sai lệch từ đáp án của bài đó. Cụ thể, đặt $\tau_0 = 2mgl - \epsilon$. Gần chín mươi độ, mô men do trọng lực sinh ra xấp xỉ là $mgl$, và mô men xoắn của động cơ xấp xỉ $\tau_0 \frac{1+\delta}{2}$, với $\delta = 90° - \theta$ là khoảng cách đến đỉnh.
Chúng ta có thể tìm điểm mà trọng lực bắt đầu thắng thế động cơ bằng cách đặt $mgl$ bằng $\tau_0 \frac{1+\delta}{2}$. Điều này xảy ra tại

$$\delta = \epsilon/\tau_0 \approx \epsilon/2mgl$$

Từ điểm này trở đi, công do trọng lực thực hiện trừ công do động cơ thực hiện sẽ dương, khiến khối lượng giảm tốc. Tuy nhiên, công này không được lớn hơn động năng của khối lượng, $\frac{1}{2}mv^2$. Xấp xỉ các mô men từ trọng lực và động cơ là các đường thẳng, mô men ròng cũng là một đường thẳng, vì vậy ta có thể tính công thực hiện để giảm tốc khối lượng từ điểm mà trọng lực hơn động cơ đến khi đạt chín mươi độ. Mô men xoắn ròng là

$$mgl - \tau_0 \frac{1+\delta}{2} \approx mgl - 2mgl\frac{1+\delta}{2} = -mgl\delta$$

Diện tích dưới đồ thị (tức là công ròng) từ $\delta = \epsilon/2mgl$ đến không là

$$\frac{1}{2} \cdot \epsilon/2mgl \cdot \epsilon/2 = \frac{\epsilon^2}{8mgl}$$

Chúng ta có thể giải $\epsilon$ bằng cách đặt diện tích này bằng $\frac{1}{2}mv^2$, dẫn đến $\epsilon \approx 6.6\ \mathrm{N \cdot m}$. Do đó, đáp án với ba chữ số có nghĩa là $\boxed{\tau_0 = 147.1 - 6.6 = 140.5\ \mathrm{N \cdot m}}$.

**13. Dao động hấp dẫn 1** Bạn được cung cấp phương trình phân phối điện tích trên một elip dẫn điện được mô tả bởi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Nếu ta ký hiệu tổng điện tích của nó là $q$, mật độ điện tích bề mặt $\sigma$ được cho bởi

$$\sigma = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}$$

Giả sử rằng một hành tinh được mô hình hóa như một đĩa có mật độ đồng nhất. Vấn đề với mô hình này là mọi người ở các cạnh sẽ bị kéo về phía trung tâm (chứ không phải "xuống dưới"). Trong trường hợp này, giả sử rằng đĩa có bán kính cố định $R$ và chiều cao $h \ll R$. Điều này đi kèm với việc những người khác nhau cảm thấy các "hằng số" hấp dẫn khác nhau theo chiều dọc. Xem xét phân phối mật độ của đĩa $\rho = \rho(r)$ sao cho mọi người sống trên đó chỉ cảm thấy lực hấp dẫn kéo xuống dưới. Tỷ lệ $\rho(\frac{R}{3})/\rho(\frac{2R}{3})$ là bao nhiêu?

**Đáp án câu 13:**

Ở đây, chúng ta có thể sử dụng thông tin từ thực tế rằng đối với vật liệu dẫn điện, điện trường gần bề mặt vuông góc với vật dẫn. Đầu tiên, ta sẽ tính phân bố điện tích của một đĩa từ công thức (13), sau đó thực hiện các phép tính tương tự giữa điện tĩnh và hấp dẫn.

Cho $x^2 + y^2 = r^2$, $a = b = R$ và $c \to 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{r^2}{R^2}$$

Bây giờ, $\sigma$ trở thành:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2 c}\left(\frac{r^2}{R^4} + \frac{1-\frac{r^2}{R^2}}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Vì $c^{-2} \gg a^{-2}$ nên:

$$\sigma \approx \frac{q}{4\pi R^2 c}\left(\frac{1-\frac{r^2}{R^2}}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Điều này cho ta phân bố điện tích trên một đĩa tích điện:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Thực tế, đây là phân bố điện tích trên một trong các mặt của đĩa. Vì ta để $c \to 0$ nên phải nhân kết quả này với hai (bạn có thể kiểm tra tích phân sẽ chỉ cho một nửa điện tích với công thức trên).

$$\sigma = \frac{q}{2\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Điện trường sinh ra bởi điện tích bề mặt $\sigma$ gần bề mặt là

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Và trường hấp dẫn gần bề mặt (cũng dùng định luật Gauss):

$$2\Gamma \mathrm{dS} = 4\pi \mathrm{G}\rho h \mathrm{dS}$$

$$\Gamma = 2\pi \mathrm{G}\rho h$$

Nên $\rho h$ hoạt động tương tự như $\sigma$. ($\Gamma$ là gia tốc hấp dẫn)

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2} \tag{1}$$

Bây giờ cho phần tính toán số,

$$\frac{\rho_{\frac{R}{3}}}{\rho_{\frac{2R}{3}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{9}}} = 0.7905694$$

**14. Dao động hấp dẫn 2** Giả sử rằng mật độ ngay tại trung tâm của hành tinh là $\rho_0 = 10000\ \mathrm{kg/m^3}$, và chiều cao của đĩa là $h = 100$ km. Khối lượng chứa trong vòng với bán kính ngoài là $R = 6000$ km và bán kính trong là $R - \epsilon$, với $\epsilon = 1$ km là bao nhiêu?

**Đáp án câu 14:**
Dựa vào công thức (2) chúng ta có thể thấy rằng $\rho$ sẽ tiến đến vô cùng khi $r \to R$. Điều này không thực tế, nên hãy xem liệu việc bỏ qua vòng nhỏ ở bên ngoài có giải quyết được vấn đề này hay không.

$$\int_{R-\epsilon}^{R} \rho_0 h \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} = \pi R^2 h \rho_0 \left. \frac{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}{\frac{1}{2}} \right|_{R-\epsilon}^{R} =$$
$$= 2\pi R h \rho_0 \sqrt{2R\epsilon}$$
$$= 4.12973 \cdot 10^{21}\ \mathrm{kg}$$

**15. Dao động hấp dẫn 3** Giả sử rằng chúng ta khoan một lỗ qua đĩa tại một khoảng cách $r_0 = \frac{R}{3}$ và thả một quả bóng qua lỗ đó. Chu kỳ dao động của quả bóng là bao nhiêu? Bỏ qua lực cản không khí.

**Đáp án câu 15:**
Phần lớn lực hút đến từ khối lượng không bị khoan. Vì vậy, chúng ta chỉ cần xét trường hấp dẫn tại khoảng cách $z$ từ tâm: Ta có:

$$\Gamma = 2\pi \mathrm{G}\rho(2 * z)$$

Khi đó, chuyển động được mô tả bằng:

$$\ddot{z} = -4\pi \mathrm{G}\rho z$$

Và tần số góc $\omega$ của dao động là $\sqrt{4\pi G\rho_{(r_0)}}$

$$\omega = \sqrt{4\pi G\rho_0}\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{-1/4} \tag{2}$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{1/4} \tag{3}$$
$$= 2106.6 \text{ s} \tag{4}$$

**16. Thấu kính lỏng** Một giếng tròn lớn, với bán kính 1 mét và chiều sâu lớn hơn nhiều so với bán kính ($d \gg r$), được lấp đầy bằng kim loại lỏng phản xạ ánh sáng. Giếng và chất lỏng bên trong nó sau đó được quay xung quanh trục trung tâm với tốc độ góc $\omega = 5$ rad/s, làm cho mép bề mặt chất lỏng dâng lên và chạm vào miệng giếng. Được đặt trực tiếp phía trên giếng là một đèn hình tròn với bán kính 1 m, phát ra photon theo chiều dọc xuống dưới với một tỷ lệ và mật độ đồng đều. Nếu tỷ lệ mà các photon rời khỏi đèn là $r$, thì tỷ lệ mà các photon va chạm với kim loại lỏng có thể được biểu diễn dưới dạng $nr$, với $n$ là một hằng số không có đơn vị. Giá trị của $n$ là bao nhiêu?

**Đáp án câu 16:** Bắt đầu bằng cách xem xét một mặt cắt của chất lỏng qua trục trung tâm. Xét một phần khối lượng nhỏ $dm$ của chất lỏng ở bề mặt, cách trục xoay một khoảng $x$ tính từ trục quay. Các lực cân bằng như sau:

$$dN\cos\theta = gdm$$

$$dN\sin\theta = x\omega^2 dm$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g}$$

$$\int dy = \int \frac{x\omega^2}{g}dx \longrightarrow y = \frac{x^2\omega^2}{2g}$$

Phương trình này là parabol, do đó, chất lỏng tạo thành thấu kính dạng paraboloid. Tiêu điểm có thể được tính như sau:

$$f = \left(0, \frac{g}{2\omega^2}\right)$$

Vì ánh sáng tới theo phương thẳng đứng, photon sẽ va chạm với thấu kính một hoặc hai lần.
Tại mép của giếng trụ, độ cao của chất lỏng so với độ cao tại trung tâm giếng là

$$\frac{\omega^2}{2g}$$

Các điểm tại đó photon tới sẽ va chạm với thấu kính hai lần có thể được tính toán như sau:

$$y = -\left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2}\right)x + \frac{g}{2\omega^2}$$

$$y = \frac{x^2\omega^2}{2g}$$

$$\frac{g}{2\omega^2} - \frac{x^2\omega^2}{2g} = \left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2}\right)x$$

$$\frac{x^2\omega^2}{2g} + \left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2}\right)x - \frac{g}{2\omega^2} = 0$$

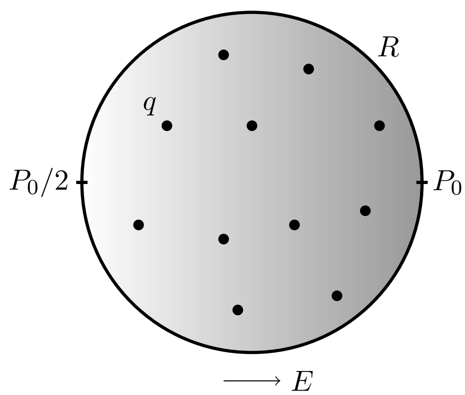
$$x = -1, \frac{g^2}{\omega^4}$$

Bất kỳ photon nào ban đầu cách trục trung tâm ít nhất là $\frac{g^2}{\omega^4}$ sẽ va chạm với gương hai lần. Các photon còn lại chỉ va chạm với gương một lần. Giá trị của $n$ có thể được tính như sau.

$$n = 2 - \frac{g^4}{\omega^8} = 2 - \frac{9.8^4}{5^8} \approx \boxed{1.976}$$

**17. Trượt điện** Xem xét một khí gồm các hạt nhỏ, mỗi hạt có điện tích $q$, bên trong một buồng hình cầu với bán kính $R$. và tâm tại gốc tọa độ. Một trường điện đều $E\hat{\mathbf{x}}$ được áp dụng bên trong buồng. Trường điện được điều chỉnh cho đến khi điểm$(R, 0, 0)$ có áp suất $P_0$ và tại điểm $(-R, 0, 0)$ có áp suất $P_0/2$ (ở trạng thái cân bằng).

Điện trường được giảm nhanh chóng về không và khí đạt đến trạng thái cân bằng một lần nữa. Nếu áp suất cuối cùng trong buồng là $P_1$, tìm tỷ lệ $P_1/P_0$. Bỏ qua các tương tác giữa các hạt và giả sử rằng nhiệt độ của khí vẫn gần như không thay đổi.




**Đáp án câu 17:** Khi điện trường hoạt động, áp suất $P(x)$ sẽ có dạng hàm mũ vì khí đang ở trạng thái cân bằng thủy tĩnh. Do đó, ta có $P(x) = P_0 e^{(x-R)\ln(2)/2}$. Vì nhiệt độ không đổi, áp suất tỷ lệ thuận với mật độ, do đó $P_1$ sẽ là giá trị trung bình của áp suất ban đầu trên thể tích của buồng.

Đặt $R = 1$ và $\dfrac{\ln(2)}{2} = a$, ta có:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{3}{4\pi R^3}\iiint_V P\, dV \\
&= \frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{1} P_0 e^{a(x-1)}\cdot \pi(1-x^2)\, dx \\
&= \frac{3P_0}{4}\left(e^{a(x-1)}\left(-\frac{x^2}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{3P_0}{4}\left(\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right)-e^{-2a}\left(-\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right)\right) \\
&= \boxed{\left(\frac{9}{\ln(2)^2}-\frac{6}{\ln(2)^3}\right)P_0} \approx 0.716\, P_0
\end{aligned}$$

**18. Bóng bàn 1** Một cú giao hợp lệ trong bóng bàn yêu cầu quả bóng nảy ở một bên của bàn và phải vượt qua lưới. Một vận động viên bóng bàn Olympic đẳng cấp thế giới thực hiện cú giao ngang tầm bàn và cách lưới $d = 1.37$ m và lưới cao $h = 15.25$ cm. Vận động viên Olympic có thể tạo ra một cú xoáy cho quả bóng sao cho tốc độ dịch chuyển của bóng được bảo toàn sau cú nảy nhưng hướng của vận tốc có thể được điều khiển tự do. Tìm tốc độ giao bóng tối thiểu $v_1$ (đến hai chữ số thập phân)?

**Đáp án câu 18:** Đầu tiên, chúng ta tìm vận tốc tối ưu để đạt đến điểm $(X, Y)$ trong không gian từ gốc tọa độ $(0, 0)$. Nếu góc phóng là $\alpha$ và vận tốc phóng là $v$, các phương trình động học cho các hướng $x$ và $y$ là

$$x = vt\cos\alpha \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\alpha.$$

Giải phương trình cho hình dạng của quỹ đạo ta có

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha.$$

Nếu $v$ đủ lớn, sẽ tồn tại một góc $\alpha$ tương ứng để điểm $(x, y) = (X, Y)$ thỏa mãn phương trình. Bây giờ chúng ta lưu ý rằng $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ biến quỹ đạo thành một phương trình bậc hai trong $\xi = \tan\alpha$

$$\xi^2 - \frac{2v^2}{gd}\xi + \frac{2v^2h}{gd^2} + 1 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm thực cho $\xi$ nếu biệt thức không âm. Nếu biệt thức dương, điều đó có nghĩa là có hai góc cho vận tốc tương ứng. Điều này rõ ràng có nghĩa là vận tốc không tối ưu. Do đó, chúng ta muốn biệt thức bằng không:

$$\frac{v^4}{g^2d^2} - \frac{2v^2h}{gd^2} - 1 = 0.$$

Đây là một phương trình bậc bốn trong $v$ và giải:

$$v^2 = gY + g\sqrt{X^2+Y^2} \implies v_0 = \sqrt{gY + g\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Bây giờ, hãy quay lại vấn đề chính. Gọi $x$ là khoảng cách từ mép bàn tại điểm nảy. Vì vận tốc được bảo toàn trong quá trình nảy, vận tốc tối thiểu phải sao cho tại điểm $x$ quả bóng có thể đạt đến cả mép bàn (các quỹ đạo động học có thể đảo ngược) và đỉnh của lưới (quả bóng phải vượt qua lưới). Sử dụng kết quả đã suy ra

$$v(x) = \max\left\{\sqrt{gh + g\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}, \sqrt{gx}\right\}.$$

Rõ ràng rằng thành phần đầu tiên tăng theo $x$ và thành phần khác giảm theo $x$. Do đó, giá trị nhỏ nhất toàn cục của $v(x)$ được tìm thấy tại điểm mà hai thành phần bằng nhau. Điều này tương ứng với

$$h + \sqrt{h^2 + (d-x)^2} = x \implies x = \frac{d^2}{2(d-h)}$$

và do đó

$$v_1 = d\sqrt{\frac{g}{2(d-h)}} \approx 2.75 \text{ m/s}.$$

**19. Bóng bàn 2** Ta xét một cú giao bóng với $n$ lần nảy trước khi đi qua lưới. Vận động viên Olympic giỏi đến mức anh ấy có thể điều khiển hướng vận tốc sau mỗi lần nảy theo ý muốn. Tất nhiên, nhiều lần nảy hơn sẽ làm giảm tốc độ giao bóng tối thiểu $v_n$. Tuy nhiên, với một số $N$, khi $n \geq N$ tốc độ giao bóng tối thiểu không còn giảm nữa khi thêm lần nảy, nghĩa là $N$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $v_m = v_N$ với mọi $m \geq N$. Tìm $v_{N-1}^N$.

**Đáp án câu 19:** Chúng ta có thể tổng quát hóa lập luận của bài toán trước bằng cách lưu ý rằng

$$v_n \geq \sqrt{gh + g\sqrt{h^2 + x^2}},$$

trong đó $x$ là khoảng cách của lần nảy cuối cùng từ lưới. Do đó, chúng ta muốn đưa quả bóng càng gần lưới càng tốt trong $n$ lần nảy. Điều này xảy ra khi tất cả các lần nảy trước đó xảy ra ở góc 45°. Tầm xa của một trong những lần nảy này là $\ell = \frac{v^2}{g}$ như có thể tìm thấy từ phương trình quỹ đạo. Do đó, chúng ta có khoảng cách của lần nảy cuối cùng từ lưới là:

$$x = d - n\ell.$$

Chúng ta cũng lưu ý rằng $v_n \geq \sqrt{2gh}$ dựa trên giới hạn dưới của phương trình trước đó ($x = 0$). Vì vậy, nếu chúng ta đạt đến lưới trong ít hơn $n$ lần nảy và do đó đạt đến $x = 0$ cho lần nảy cuối cùng, vận tốc tối thiểu vẫn sẽ là $v_n$. Tức là khi $d - n\ell < 0 \implies n > \frac{d}{2h}$ vận tốc tối thiểu sẽ là

$$v_n = \sqrt{2gh}.$$

Vì $d/2h \approx 4.5$, $N = 5$.

Bây giờ nếu $n < N$, chúng ta sẽ không đạt đến lưới trong $n$ lần nảy, và khoảng cách từ lưới cho lần nảy cuối cùng là $x = d - n\ell$. Tức là vận tốc để đưa quả bóng nảy cuối cùng cách lưới một khoảng $x$ sẽ là $v = \sqrt{g(d-x)/n}$. Tương tự như các bài toán trước, điều này có nghĩa là vận tốc tối ưu đạt được tại $x$ mà vận tốc tối ưu để đến đó bằng với vận tốc để vượt qua lưới từ đó. Tức là chúng ta có

$$h + \sqrt{h^2 + x^2} = \frac{d-x}{n},$$

dẫn đến phương trình bậc hai

$$(n^2-1)x^2+2(d-nh)x+2ndh-d^2=0,$$

từ đó chúng ta có

$$x=\frac{nh-d\pm n\sqrt{h^2+d^2-2ndh}}{n^2-1}.$$

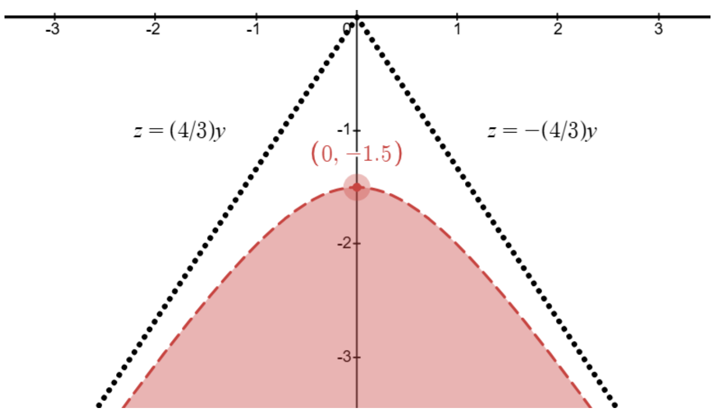
Vì $d>2nh$ nghiệm nhỏ hơn là âm và do đó không thực tế. Do đó, chúng ta lấy nghiệm dương. Thay thế nghiệm này vào một trong các biểu thức cho $v$ chúng ta có

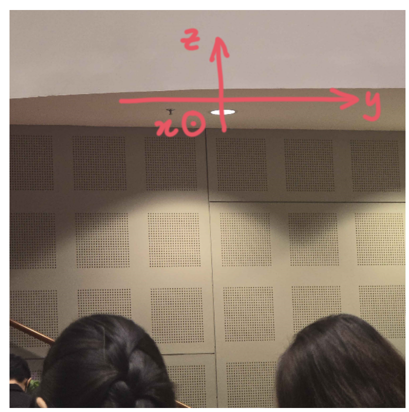
$$v_n=\sqrt{\frac{g}{n^2-1}\left(nd-h-\sqrt{h^2+d^2-2ndh}\right)}.$$

Do đó

$$v_{N-1}^N=v_4^5\approx\boxed{17.9\ (\mathrm{m/s})^5.}$$

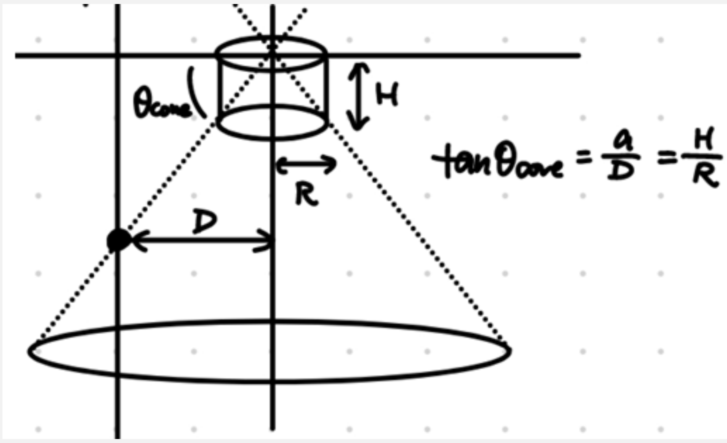
**20. Bọc sáng** Một nguồn sáng điểm trên trần được đặt tại trung tâm của một hộp hình trụ (có đáy mở) với bán kính $R$ với chiều cao $H$. Một bức tường nằm cách xa $D$ theo phương ngang từ trung tâm của hình trụ. Xét một hệ tọa độ với nguồn sáng tại gốc tọa độ. Bức tường, tại $x=-D$, có hình dạng sau trong mặt phẳng $y-z$:

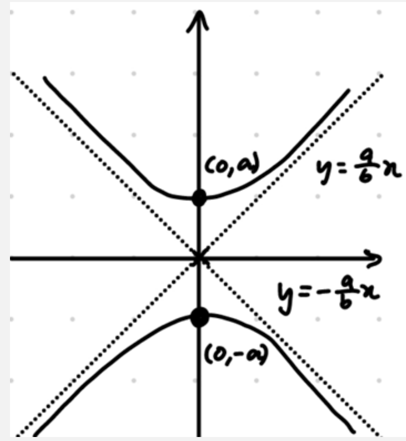



Tọa độ dọc của điểm cao nhất trên đường cong quan sát được là $-1.5$ m, trong khi các hệ số góc của các đường thẳng tiếp tuyến tiệm cận với đường cong là $\pm4/3$. Ở phía bên phải là một ví dụ về cách thiết lập hiện tượng này. Tìm khoảng cách ngang $D$ của bức tường từ nguồn sáng.

**Đáp án câu 20:** Nguồn sáng điểm phát ra ánh sáng với đối xứng cầu, nhưng do vỏ hình trụ nên ánh sáng được hiểu là một "hình nón" ánh sáng. Hình nón này giao với bức tường tại $x=-D$ tạo ra hình hyperbol như đã chỉ ra.




Do các mặt cắt conic có độ lệch tâm không đổi, nó có thể được biểu diễn như sau: $e = \sin\theta_{\text{plane}}/\sin\theta_{\text{cone}} = 1/\sin\theta_{\text{cone}}$ vì bức tường có $\theta = 90°$. Ngoài ra, người ta cũng có thể biểu diễn độ lệch tâm bằng công thức $e = c/a = \sqrt{a^2+b^2}/a$ trong đó $c = \sqrt{a^2+b^2}$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiêu điểm. Sắp xếp lại điều này cho chúng ta:

$$e = \frac{1}{\sin\theta_{\text{cone}}} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \implies \tan\theta_{\text{cone}} = \frac{a}{b} = 1.33$$

Điều này sau đó có thể liên quan đến khoảng cách ngang $D$ bằng $\tan\theta_{\text{cone}} = a/D$ để cho $D = b = 1.5\text{m}/(4/3) = \boxed{1.125 \text{ m}}$.

**21. Dưới ánh đèn ngủ** Một bể lớn chứa chất lỏng kỳ diệu Ophonium nằm trước bạn, với chiều sâu 5 mét. Chất lỏng này có một thuộc tính đặc biệt - chỉ số khúc xạ của nó thay đổi theo độ sâu! Chỉ số khúc xạ của nó có thể được biểu diễn bằng phương trình

$$n = 1 + 2y$$

với $y$ là độ sâu của chất lỏng, tính bằng mét. Một đèn, hoạt động như một nguồn sáng điểm, được treo cách bể 3 mét. Ánh sáng phát ra từ đèn, chiếu sáng một khu vực hình tròn trên mặt nước của Ophonium ngay dưới nó, bao phủ một diện tích $3\pi$ mét vuông. Khi ánh sáng tiếp tục đi xuống, nó đi vào Ophonium, từ từ đi vào vào bên trong cho đến khi đến đáy bể. Diện tích của vòng tròn được chiếu sáng ở đáy bể là bao nhiêu mét vuông? Bạn có thể thấy tích phân sau hữu ích:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \cosh^{-1}(x) + C$$

**Đáp án câu 21:** Vòng tròn dưới đèn có bán kính là

$$r = \sqrt{\frac{3\pi}{\pi}} = \sqrt{3}$$

Góc lớn nhất mà ánh sáng di chuyển từ phương thẳng đứng do đó là

$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$$

Chúng ta có thể kiểm tra một mặt cắt của đường đi của ánh sáng. Xem xét Định luật Snell,

$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta$. Có thể thấy rằng tại bất kỳ điểm nào dọc theo đường đi của ánh sáng qua chất lỏng, $n\sin\theta$ sẽ luôn bằng một giá trị không đổi. Trong trường hợp này, vì góc tới là 30 độ và chiết suất của không khí là 1, giá trị không đổi này sẽ là $\sin 30° = 0.5$. Chúng ta có thể gán cho tia sáng các điều kiện ban đầu $(x, y) = (\sqrt{3}, 0)$, khi ánh sáng đi vào Ophonium một khoảng ngang $\sqrt{3}$ từ đèn.
Chúng ta có:

$$n\sin\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2+4y}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2+4y} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} = \frac{1}{2+4y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}} = \frac{1}{2+4y} \longrightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2} = 2+4y$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \sqrt{(2+4y)^2-1} \longrightarrow \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{\sqrt{(2+4y)^2-1}}$$

$$\int \delta x = \int \frac{1}{\sqrt{(2+4y)^2-1}}\delta y$$

$$x = \frac{1}{4}\cosh^{-1}(2+4y) + C \longrightarrow x = \frac{1}{4}\left(\cosh^{-1}(2+4y) + 4\sqrt{3} - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$$

Thay $y = 5$ vào ta có $x \approx 2.3487$. Đây là bán kính của vòng tròn được tạo ra ở đáy thùng. Do đó, tổng diện tích là

$$x^2\pi \approx \boxed{17.33 \text{ m}^2}$$

**22. Quả đạn** Trên mặt đất phẳng, một quả đạn được bắn với tốc độ $v = 13.3$ m/s qua một bức tường cao $h = 5$ m cách xa một khoảng $d = 10$ m từ khẩu pháo. Nếu $x_{\max}$ là khoảng cách xa nhất mà quả đạn có thể bắn qua bức tường và $x_{\min}$ là khoảng cách gần nhất mà quả đạn có thể đạt được trong khi vượt qua bức tường, hãy tìm $x_{\max} - x_{\min}$.

**Đáp án câu 22:** Rõ ràng (vì $d > h$) nếu $v$ đủ lớn, quỹ đạo tối ưu để đạt $x_{\max}$ đạt được khi góc phóng $\alpha = 45°$. Do đó, chúng ta phải xác định trước liệu $v$ có đủ lớn hay không.

Nếu $\alpha = 45°$ tương ứng với quỹ đạo tối ưu qua tường, điểm cao nhất của tường $(d, h)$ nằm trên hoặc dưới quỹ đạo. Phương trình của quỹ đạo đã được biết đến và dễ dàng suy ra:

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

vì vậy $\alpha = 45°$ là tối ưu nếu

$$h \le -\frac{gd^2}{v^2} + d \implies v \ge d\sqrt{\frac{g}{d-h}} = 14 \text{ m/s},$$

điều này không đúng. Do đó $\alpha = 45°$ không phải là tối ưu.

Bây giờ rõ ràng quả bóng không thể vượt qua tường nếu $\alpha \leq 45°$. Do đó, chúng ta phải tăng góc phóng, điều này làm giảm tầm xa vì tầm xa là một hàm giảm của $\alpha$ khi $\alpha > 45°$, điều này có thể thấy từ phương trình tầm xa (trực tiếp từ phương trình quỹ đạo ở trên):

$$R = \frac{2v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Do đó, quỹ đạo tối ưu bây giờ là quỹ đạo chỉ vừa chạm đỉnh của tường với $\alpha$ nhỏ nhất. Tức là chúng ta muốn $(d, h)$ nằm trên quỹ đạo. Nếu chúng ta thay $(x, y) = (d, h)$ vào phương trình quỹ đạo và sử dụng $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ và giải cho $\xi \equiv \tan\alpha$ từ phương trình bậc hai, chúng ta có hai nghiệm khả dĩ

$$\xi_\pm = \frac{v^2}{gd} \pm \sqrt{\frac{v^4}{g^2d^2} - \frac{2v^2h}{gd^2} - 1}.$$

Vì $\xi = \tan\alpha$ và tan là một hàm tăng (trong phạm vi của chúng ta), chúng ta quan tâm đến nghiệm nhỏ hơn. Do đó

$$\alpha = \arctan\xi_-.$$

Do đó, phương trình tầm xa cho chúng ta

$$x_{\max} = \frac{2\xi_-}{1+\xi_-^2}\frac{v^2}{g}.$$

Lập luận cho khoảng cách tối thiểu về cơ bản là giống nhau. Đỉnh của tường vẫn phải nằm dưới quỹ đạo và $\alpha > 45°$ nên bây giờ chúng ta muốn $\alpha$ lớn nhất tương ứng với $\xi_+$. Do đó

$$x_{\min} = \frac{2\xi_+}{1+\xi_+^2}\frac{v^2}{g}.$$

Và do đó

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{2v^2}{g}\left(\frac{\xi_-}{1+\xi_-^2} - \frac{\xi_+}{1+\xi_+^2}\right) \approx \boxed{5.38 \text{ m}}.$$

Lưu ý để có một giải pháp đầy đủ (không cần thiết để có được câu trả lời số) người ta cũng nên kiểm tra xem vận tốc phóng đã cho có đủ lớn để vượt qua tường hay không. Vận tốc tối thiểu này tương đối dễ suy ra (đặc biệt là sử dụng đường bao):

$$v_{\min} = \sqrt{gh + g\sqrt{h^2+d^2}} \approx 12.6 \text{ m/s} < v,$$

vì vậy câu hỏi được đặt ra là hợp lý.

**23. Sợi đốt 1** Follin đã phát triển một bóng đèn mới mang tính cách mạng. Sợi đốt có hình dạng của một lớp vỏ cầu với bán kính 3 cm và độ dày 0.5 mm, và các đầu của sợi đốt đối diện nhau. Để gắn dây, sợi đốt được làm phẳng một chút ở các đầu, tạo thành hai vòng tròn với bán kính 0.01 mm, mỗi vòng hoàn toàn được bao phủ bởi dây tiếp xúc tương ứng. Nếu điện trở của vật liệu sợi đốt là $0.050\ \Omega \cdot \text{m}$, thì điện trở của bóng đèn của Follin là bao nhiêu?

**Đáp án câu 23:**
Định hướng quả cầu sao cho các đầu của nó thẳng đứng và thẳng hàng trên trục $z$. Các bề mặt đẳng thế là các vòng tròn có mặt phẳng song song với mặt phẳng $xy$. Phần tử vòng tròn tại góc

cực $\phi$ có chiều dài (theo hướng dòng điện) $rd\phi$ và diện tích mặt cắt ngang $2\pi r\sin\phi\cdot t$ (lưu ý rằng $r\gg t$). Tích phân từ góc $\phi_i=\frac{0.01}{30}$ đến $\phi_f=\pi-\frac{0.01}{30}$, tổng điện trở của sợi dây là

$$R=\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{\rho\cdot rd\phi}{2\pi r\sin\phi\cdot t}=\boxed{277\ \Omega}.$$

**24. Sợi đốt 2** Follin giờ đây thay đổi sợi dây dẫn của mình để có sáu vòng tròn dẹt thay vì chỉ hai, được sắp xếp đối xứng xung quanh quả cầu. Ông đặt các dây tiếp xúc ở hai vòng tròn phẳng cách nhau $90°$ trên đường tròn lớn chung của chúng. Tìm điện trở mới của bóng đèn.

**Đáp án câu 24:**
Gọi hai điểm tiếp xúc là A và B. Chúng ta sử dụng lập luận chồng chất. Xem xét hai kịch bản sau:

- Bơm dòng điện $I$ vào A và rút dòng điện $I$ ra đều từ bề mặt của quả cầu. Dòng điện đi qua vỏ tại góc cực $\phi$ bằng với dòng điện rời khỏi quả cầu cho tất cả các góc cực lớn hơn $\phi$, là $\frac{1+\cos\phi}{2}I$ theo diện tích bề mặt. Sau đó, mật độ dòng điện tại $\phi$ là $J=\frac{\frac{1+\cos\phi}{2}I}{2\pi r\sin\phi\cdot t}$. Gọi $\phi_i=\frac{0.01}{30}$ và $\phi_f=\frac{\pi}{2}-\frac{0.01}{30}$, điện áp giữa A và B là

$$V=\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_{\phi_i}^{\phi_f}\rho J\cdot rd\phi=\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{\rho I(1+\cos\phi)}{4\pi t\sin\phi}d\phi.$$

- Rút dòng điện $I$ từ B và bơm dòng điện $I$ đều vào bề mặt của quả cầu. Chúng ta thu được điện áp giữa A và B giống như trong kịch bản khác.

Chồng chất hai kịch bản, chúng ta có một phân bố dòng điện bơm dòng điện $I$ vào A và rút dòng điện $I$ từ B, với hiệu điện thế $2V$ giữa chúng. Do đó, điện trở hiệu dụng giữa A và B là $\frac{2V}{I}=2\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{\rho(1+\cos\phi)}{4\pi t\sin\phi}d\phi=\boxed{266\ \Omega}$.

**25. Đố vui tập đếm** Một chùm neutron lạnh đồng nhất (neutron có khối lượng $m=1.67\times10^{-27}$ kg và tốc độ $v=0.66\,\mathrm{m/s}$) đi qua một khe hẹp có chiều rộng $d=0.5\,\mathrm{mm}$. Một máy dò, có chiều rộng $w=3\,\mathrm{cm}$, được đặt cách khe một khoảng $r=15\,\mathrm{m}$. Tìm tỷ lệ phần trăm của các neutron đi qua khe mà thực sự được máy dò ghi nhận.

**Đáp án câu 25:** Ý tưởng chính là nhận ra rằng hàm mật độ xác suất 1D tương tự như cường độ từ nhiễu xạ khe đơn. Cụ thể hơn, hãy xem xét hàm mật độ xác suất 1D tại một vị trí $x$ trong mặt phẳng của máy dò. $P=\|\Psi_x\|^2=\Psi_x^*\Psi_x$ tương ứng với việc lấy bình phương của chuẩn của các pha, điều này tương tự như cường độ quang học là bình phương của chuẩn của pha trường điện.

Điều này làm cho cuộc sống của chúng ta dễ dàng hơn, vì chúng ta có thể đơn giản sử dụng lại các phép tính từ quang học sóng cổ điển! Bước sóng DeBroglie của neutron là

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=601.1\text{ nm}$$

Như có thể được suy ra bằng cách sử dụng các pha (hoặc đơn giản bằng cách sử dụng lại công thức tương tự từ quang học sóng), chúng ta có

$$\|\Psi_x\|^2 \propto \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi d \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}}{\lambda}\right)}\right]^2$$

Chúng ta phải cẩn thận để chuẩn hóa hàm mật độ xác suất khi tính toán kết quả cuối cùng:

$$P = \frac{\int_{-w/2}^{w/2} \|\Psi_x\|^2 \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \|\Psi_x\|^2 \, dx}$$

Thay các tham số đã cho vào, điều này cho chúng ta phần trăm cuối cùng là

$$P \times 100\% = \boxed{90.2\%}$$

**26. Máy bơm đặc biệt** Một hộp có thể tích $V = 1$ m$^3$ và nhiệt độ ban đầu $T_0 = 100$ K chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử được giữ ở áp suất thấp không đổi $p_1 = 100$ Pa. Khối lượng của phân tử khí là $m = 7 \times 10^{-27}$ kg. Hộp được nối với một bể chứa rất lớn có chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử ở nhiệt độ $T_2 = 400$ K và áp suất $p_2 > p_1$. Một lỗ nhỏ với diện tích $A = 10^{-8}$ m$^2$ được khoan trên hộp vào thời điểm $t = 0$ days, cho phép khí thoát ra. (Hộp không còn ở áp suất không đổi sau thời điểm này.) Với mỗi phân tử khí thoát ra qua lỗ này, có 3 phân tử khí từ khoang chứa được đưa vào hộp. (Các phân tử được đưa vào từ khoang chứa được chọn với xác suất tỷ lệ thuận với thành phần vận tốc của chúng vuông góc với lỗ. Nói cách khác, các phân tử khuếch tán qua lỗ nhưng cửa lỗ giới hạn số lượng của chúng là 3 lần số phân tử thoát ra ngoài.) Mất bao nhiêu ngày để nhiệt độ trong hộp tăng gấp đôi? Giả sử sự thay đổi áp suất và nhiệt độ trong khoang chứa là không đáng kể. Tham khảo, tốc độ phân tử thoát ra ngoài qua một lỗ có diện tích A được tính bởi:

$$\Phi = \frac{pA}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

trong đó $p$ là áp suất của khí, $m$ là khối lượng của phân tử khí, $k_B$ là hằng số Boltzmann và $T$ là nhiệt độ của khí. Xin lưu ý rằng năng lượng trung bình trên mỗi phân tử của các phân tử thoát ra qua quá trình khuếch tán là $2kT$.

**Đáp án câu 26:** Gọi $N$ là số lượng hạt trong hộp theo thời gian, và gọi $T_1$ là nhiệt độ của hộp theo thời gian. Sau đó, sự thoát khí cho ta

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2AN}{V}\sqrt{\frac{k_B T_1}{2\pi m}} \tag{5}$$

Thông thường sẽ không có hệ số 2 và $\frac{dN}{dt}$ sẽ âm, nhưng 3 hạt mới vào hộp từ bể chứa mỗi khi một hạt rời khỏi lỗ.

Chúng ta cũng biết rằng năng lượng rời khỏi hộp qua lỗ thông qua năng lượng nhiệt của khí thoát ra. Một quá trình tương tự xảy ra với khí vào từ bể chứa. Có thể chứng minh rằng năng lượng trung bình của một hạt thoát ra khỏi một lỗ nhỏ là $2kT$, và vì các hạt vào từ bể chứa cũng thoát ra, đây là năng lượng trung bình của các hạt vào và ra. Tốc độ khí rời khỏi là $\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}$ và tốc độ khí vào là $\frac{3}{2}\frac{dN}{dt}$, do đó

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}Nk_BT_1\right) = \left(\frac{3}{2}\frac{dN}{dt}\right)(2k_BT_2) - \left(\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\right)(2k_BT_1) \tag{6}$$

Đơn giản hóa cho ta

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\left(2T_2 - \frac{5}{3}T_1\right) \tag{7}$$

Thay $\frac{dN}{dt}$ vào ta có

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{k_BT_1}{2\pi m}}\left(4T_2 - \frac{10}{3}T_1\right) \tag{8}$$

Tích phân điều này cho ta

$$t = (0.007524)\frac{V}{A}\sqrt{\frac{2\pi m}{k_B}} \tag{9}$$

Thay các số vào, ta có 0.492 ngày.

**27. Đệm khí** Một đệm khí có dạng hình trụ với chiều dài $\ell = 10.0$ m và bán kính tiết diện hình tròn $R = 28$ cm. Các đầu của hình trụ nằm trong các mặt phẳng thẳng đứng, và chiều dài của nó song song với mặt đất. Nó được làm đầy bằng một khí không nén, giữ nhiệt độ không đổi. Cả bề mặt của đệm khí và khí bên trong đều có trọng lượng không đáng kể so với các lực khác trong kịch bản. Bề mặt duy trì một sức căng bề mặt không đổi $\gamma = 5.0$ N/m mỗi khi bị biến dạng. Một tấm phẳng có khối lượng $m = 12.0$ kg rộng hơn đệm được đặt trên, nén đệm khí. Tìm chiều rộng ngang mới của đệm khí. Giả sử rằng tiết diện của nó vẫn đối xứng về một trục thẳng đứng.

**Đáp án câu 27:**
Khi đệm bị ép, vì sức căng bề mặt của bề mặt không đổi và đường viền của đệm phải mịn, các cạnh của đệm không tiếp xúc với mặt đất hoặc tấm sẽ tạo thành các nửa hình tròn. Gọi bán kính của các nửa hình tròn là $r$. Vì bề mặt duy trì sức căng bề mặt không đổi, khí bên trong đệm có áp suất dư $\Delta P = \frac{\gamma}{r}$ so với bên ngoài theo Young-Laplace. Gọi chiều rộng của phần phẳng của bề mặt tiếp xúc với mặt đất là $b$ và phần phẳng của bề mặt tiếp xúc với tấm là $c$.
Gọi $N$ là lực pháp tuyến trên đệm từ mặt đất. Cân bằng lực cho ta các phương trình sau:

- Hệ thống của tấm và đệm: $N = mg$.
- Phần phẳng trên cùng của đệm: $N = c\ell\Delta P$.
- Phần phẳng dưới cùng của đệm: $N = b\ell\Delta P$.

Do đó, ta có $b = c = \frac{mg}{\ell\Delta P}$. Bảo toàn thể tích giữ nguyên diện tích của mặt cắt ngang, vì vậy ta có

$$\begin{aligned}\pi R^2 &= c \cdot 2r + \pi r^2 \\ &= (\pi + \frac{mg}{\gamma\ell})r^2 \\ \implies r &= R\sqrt{\frac{\pi}{\pi + \frac{2mg}{\gamma\ell}}}.\end{aligned}$$

Chiều rộng cuối cùng là

$$\begin{aligned} w &= c + 2r \\ &= (\frac{mg}{\gamma\ell} + 2)r \\ &= \boxed{0.771 \text{ m}}. \end{aligned}$$

**28. Dao động xà phòng** Trên một mặt bàn trơn có một khung hình vuông làm bằng bốn thanh đồng nhất có chiều dài $\ell = 50$ cm và khối lượng $m = 150$ gcác thanh được gắn với nhau bằng bản lề ở các góc. Mỗi bản lề (không có khối lượng) mang điện tích $q = 1.5 \cdot 10^{-6}$ C. Trước khi khung được đặt lên bàn, nó đã được nhúng vào hỗn hợp xà phòng lỏng để tạo thành một màng xà phòng bên trong khung được định hình bởi các thanh. Sức căng bề mặt của nước xà phòng là $\sigma = 0.035$ N/m. Kết quả là có thể có dao động với biên độ nhỏ mà tại đó các góc đối diện của khung có vận tốc ngược chiều nhau (hướng ra xa hoặc về phía trung tâm). Tần số góc của dao động này là bao nhiêu?

**Đáp án câu 28:** Gọi góc của các cạnh thay đổi là $\theta$. Động năng có thể được viết là

$$K = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Thế năng liên quan đến màng xà phòng đơn giản là

$$U_\sigma = 2\sigma\ell^2\cos(2\theta) \simeq 2\sigma\ell^2\left(1 - 2\theta^2\right).$$

Thế năng liên quan đến vị trí của các điện tích đơn giản là

$$U_\varepsilon = \frac{kq^2}{\ell}\left(4 + \frac{1}{2\sin\left(\pi/4 - \theta\right)} + \frac{1}{2\sin(\pi/4 + \theta)}\right) \simeq \frac{kq^2}{\ell}\left(4 + \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\theta^2\right).$$

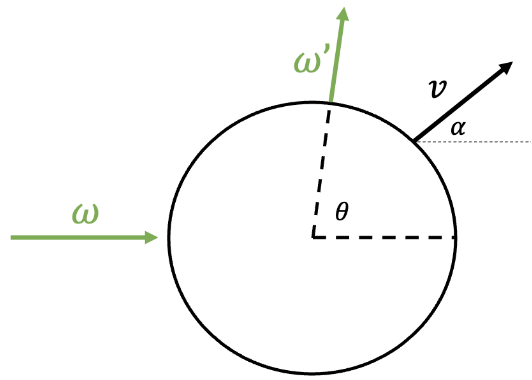
Tổng năng lượng được bảo toàn và do đó $\dot{E} = 0$. Phân biệt tổng năng lượng và nhóm lại các hạng tử cho ta

$$\ddot{\theta} + \frac{9\sqrt{2}\frac{kq^2}{\ell} - 24\sigma\ell^2}{4m\ell^2}\theta = 0.$$

Do đó

$$\omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{2}\frac{kq^2}{\ell} - 24\sigma\ell^2}{4m\ell^2}} \approx \boxed{1.43 \text{ rad/s.}}$$

**29. Tán xạ tương đối tính** Một hạt cầu nhỏ di chuyển với tốc độ $v = 0.5c$ ở góc $\alpha = 45^\circ$ so với phương ngang bị va chạm bởi một sóng điện từ mặt phẳng có tần số góc $\omega = 7.08 \times 10^{15}$ Hz truyền trực tiếp sang bên phải. Trong hệ quy chiếu của chính nó, hạt tán xạ ánh sáng theo mọi hướng với tần số giống như tần số ánh sáng tới mà nó nhận. Tuy nhiên, do hiệu ứng Doppler tương đối tính, tần số của ánh sáng tán xạ đo được trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm thường không giống với tần số ánh sáng tới. Tìm tần số góc $\omega'$ của ánh sáng phân tán vào góc phân tán $\theta = 89^\circ$ là bao nhiêu? Giả sử bán kính của hạt $R$ đủ nhỏ để $R\omega \ll c$.




**Đáp án câu 29:**
Đầu tiên, chúng ta chuyển đổi vào hệ quy chiếu của hạt. Trong hệ này, nó trở thành một hạt đứng yên nhận và phát ra ánh sáng đẳng hướng. Chúng ta hỏi tần số của ánh sáng là bao nhiêu? Chúng ta sẽ thực hiện một phép biến đổi Lorentz để tìm ra. Đặt trục x dọc theo hướng vận tốc của hạt. Đặt $c = 1$, vectơ sóng 4 chiều trong hệ phòng thí nghiệm là

$$k^\mu = (\omega, \omega\cos\alpha, -\omega\sin\alpha)$$

Chuyển đổi sang hệ quy chiếu của hạt, vectơ 4 chiều mới là

$$k_1^\mu = (\omega\gamma(1 - v\cos\alpha), ..., ...)$$

Các thành phần x và y không quan trọng vì chúng ta chỉ quan tâm đến thành phần t, thành phần này cho chúng ta biết tần số của ánh sáng trong hệ quy chiếu của hạt. Vì vậy, ánh sáng có tần số $\omega_1 = \omega\gamma(1 - v\cos\alpha)$ bị tán xạ theo mọi hướng. Xem xét ánh sáng bị tán xạ theo một góc bất kỳ $\phi$ từ trục x. Vectơ 4 chiều của nó sẽ là

$$k_2^\mu = (\omega_1, \omega_1\cos\phi, \omega_1\sin\phi)$$

Chuyển đổi điều này trở lại hệ phòng thí nghiệm, vectơ 4 chiều cuối cùng là

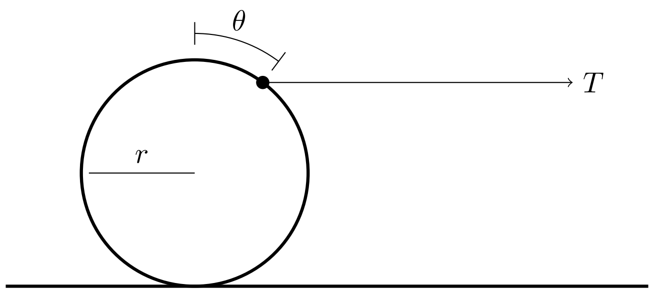
$$k_3^\mu = (\omega_1\gamma(1 + v\cos\phi), \omega_1\gamma(\cos\phi + v), \omega_1\sin\phi)$$

Trong hệ phòng thí nghiệm, góc $\delta$ giữa trục x và hướng truyền của $k_3$ được cho bởi

$$\tan\delta = \frac{\sin\phi}{\gamma(\cos\phi + v)}$$

Chúng ta có thể bắt đầu thay số vào. Chúng ta tìm thấy $\gamma = 1.155$, $\omega_1 = 5.29 \cdot 10^{15}$ Hz, và $\tan\delta = 0.966$. Chúng ta có thể giải $\phi$, nhận lại $\phi = 70.0°$.
Do đó, câu trả lời của chúng ta là $\boxed{\omega' = k_3^0 = 7.15 \cdot 10^{15} \text{ Hz}}$.

**30. Con lăn cưỡng bức** Một vòng tròn có khối lượng $m$ và bán kính $r$ nằm trên một bề mặt có hệ số ma sát $\mu$. Tại thời điểm $t = 0$, một sợi dây được gắn vào điểm cao nhất của vòng tròn và một lực căng ngang không đổi $T$ được kéo. Đến thời điểm $t$, vòng tròn đã quay một góc $\theta(t)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{T}{\mu mg}$ sao cho $\theta(t)$ có một cực đại cục bộ (tức là không tăng đều). Có thể cần phải vẽ đồ thị của một hàm ẩn.




**Đáp án câu 30:** Chuyển động có thể được chia thành hai giai đoạn: lăn không trượt, nơi lực ma sát đủ lớn để chống lại lực căng, và lăn có trượt, làm chậm sự quay cho đến khi $\theta$ đạt đến giá trị cực đại. Đầu tiên, hãy xem xét giai đoạn mà vòng lăn không trượt. Nếu $F_f$ là độ lớn của lực ma sát, ta có:

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta} \implies \frac{T - F_f}{m} = \frac{Tr\cos\theta + F_f r}{mr^2} \implies F_f = \frac{T(1-\cos\theta)}{2}$$

Vì $F_f \leq \mu mg$, lăn không trượt kết thúc ở góc tới hạn $\theta_c = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2\mu mg}{T}\right)$. Để xác định đầy đủ các điều kiện ban đầu, chúng ta cũng phải tìm $\dot{\theta}$ tại điểm tới hạn. Xem xét phương trình chuyển động cho $\theta$ trong quá trình lăn không trượt:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{Tr\cos\theta + F_f r}{mr^2} = \frac{T(1+\cos\theta)}{2mr}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta_c} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta_c} \frac{T(1+\cos(\theta))}{2mr}\, d\theta \Rightarrow \dot{\theta}_c^2 = \frac{T(\theta_c + \sin(\theta_c))}{mr}$$

Bây giờ, hãy xem xét giai đoạn lăn có trượt. Gọi $\theta_m$ là giá trị cực đại của $\theta$ đạt được, chúng ta sẽ sử dụng cùng một thủ thuật để tính $\dot{\theta}_m$:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{Tr\cos\theta + F_f r}{mr^2} = \frac{T\cos(\theta)}{mr} + \frac{\mu g}{r}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_c}^{\theta_m} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{\theta_c}^{\theta_m} \frac{T\cos(\theta)}{mr} + \frac{\mu g}{r}\, d\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}_m^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_c^2}{2} = \frac{\mu g(\theta_m - \theta_c)}{r} + \frac{T(\sin(\theta_m) - \sin(\theta_c))}{mr}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_m^2 = \frac{2\mu g(\theta_m - \theta_c)}{r} + \frac{T(2\sin(\theta_m) + \theta_c - \sin(\theta_c))}{mr}$$

Để vòng dừng lại ở $\theta_m$, ta phải có $\dot{\theta}_m = 0$. Do đó:

$$\frac{mr}{T}\dot{\theta}_m^2 = \frac{2\mu mg(\theta_m - \theta_c)}{T} + 2\sin(\theta_m) + \theta_c - \sin(\theta_c) = 0$$

Gọi $a = \dfrac{T}{\mu mg}$:

$$\Rightarrow \frac{2(\theta_m - \cos^{-1}(1-2/a))}{a} + 2\sin(\theta_m) + \cos^{-1}(1-2/a) - \sin\big(\cos^{-1}(1-2/a)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_m + a\sin(\theta_m) + (a/2-1)\cos^{-1}(1-2/a) - \sqrt{a-1} = 0$$

Tiếp theo, chúng ta vẽ đồ thị hàm ẩn này của $\theta_m$ và $a$ (chú ý giới hạn bản thân trong vùng có ý nghĩa vật lý nơi $\theta_m > \theta_c$). Chúng ta thấy rằng giá trị nhỏ nhất của $a$ trên tất cả các nghiệm là $\boxed{3.888}$. Điều kiện tương đương $\dfrac{da}{d\theta_m} = 0$ có thể được sử dụng để tìm nghiệm mà không cần vẽ đồ thị.

**31. Cuộn Solenoid lò xo** Một cuộn cảm dài cũng hoạt động như một lò xo với độ cứng $k = 50$ N/m. Cuộn cảm này được kết nối với một điện trở có điện trở rất nhỏ. Một đầu của cuộn cảm được gắn cố định vào dây, trong khi đầu còn lại có một vòng dẫn điện có khối lượng $m = 0.25$ kg có thể trượt mà không ma sát trên dây nhưng luôn tiếp xúc. Độ tự cảm của cuộn dây là $L_0 = 3.0$ mH ở chiều dài tự nhiên $\ell_0 = 20$ cm. Nếu đầu tự do của cuộn dây bị dịch chuyển nhẹ, hãy tìm tần số góc của các dao động phát sinh. Dòng điện ban đầu qua mạch là $I = 8$ A. Giả sử rằng công suất nhiệt mất mát bởi điện trở là không đáng kể.

**Đáp án câu 31:**
Vì điện trở nhỏ, từ thông $\Phi = LI$ không đổi. Độ tự cảm cho trước có thể được viết là $L_0 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell_0}$, trong đó $N$ là số vòng dây và $r$ là bán kính. Dịch chuyển vòng một khoảng nhỏ $x$. Độ tự cảm của ống dây tại thời điểm này là

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell_0 + x} = \frac{L_0}{1 + x/\ell_0},$$

do đó

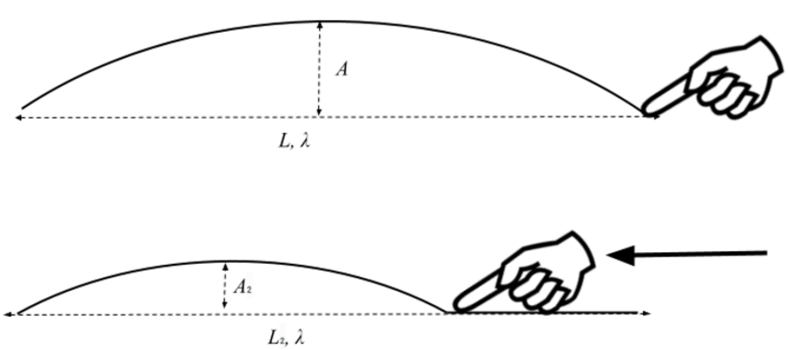
$$I = I_0(1 + \frac{x}{\ell_0}).$$

Năng lượng của toàn hệ là $E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Vì tổn thất công suất qua điện trở nhỏ, ta có

$$0 = \frac{dE}{dt} = L_0 I_0 \dot{I} + kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x}$$
$$0 = L_0 I_0^2/\ell_0 + kx + m\ddot{x}.$$

Từ đây ta đọc được tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boxed{14.1 \text{ rad/s}}$.

**32. Devil's Trill** Xem xét một sợi dây có chiều dài $L = 1$ m và mật độ khối lượng tuyến tính $\lambda = 1$ g/m, được cố định ở cả hai đầu và dao động ở chế độ dao động chuẩn thứ nhất với biên độ $A = 0.125$ cm. Một ngón tay không ma sát, có kích thước không đáng kể, ban đầu ở điểm cuối bên phải, trượt chậm về phía bên trái, làm phẳng dao động khi nó di chuyển. Khi phần dao động của sợi dây có chiều dài $L_2 = 12.5$ cm, hãy tìm biên độ dao động mới $A_2$, ở đơn vị mét. Bạn có thể giả sử rằng $A_2 \ll L_2$. Các hình vẽ không nhất thiết phải được vẽ theo tỷ lệ.




**Đáp án câu 32:** Gọi lực căng của dây là $T$, và độ dịch chuyển là $A\sin(\pi x/L)\sin(\omega t)$. Chúng ta tính tổng năng lượng bằng cách tìm chiều dài tại đỉnh của một dao động:

$$\begin{aligned}
E &= T(L_{\text{peak}} - L) \\
&= T\left(\int_0^L \sqrt{1+\frac{\pi^2 A^2}{L^2}\cos^2\frac{\pi x}{L}}\,dx - L\right) \\
&\approx T\left(\int_0^L 1+\frac{\pi^2 A^2}{2L^2}\cos^2\frac{\pi x}{L}\,dx - L\right) \\
&= \frac{\pi^2 A^2 T}{4L}
\end{aligned}$$

Tại thời điểm $t$, lực ngang tổng hợp lên ngón tay là:

$$F_x = T\left(1-\cos\left(\arctan\left(\frac{A\pi}{L}\sin(\omega t)\right)\right)\right) \approx \frac{\pi^2 A^2 T}{2L^2}\sin^2(\omega t)$$

Do đó, lực ngang trung bình lên ngón tay là $\langle F_x\rangle = -\frac{dE}{dL} = \frac{\pi^2 A^2 T}{4L^2} = \frac{E}{L}$. Điều này cho ta $E \propto \frac{1}{L}$, vì vậy $A$ là hằng số, và $A_2 = A = \boxed{1.25\times 10^{-3}\ \text{m}}$.

Lưu ý rằng câu hỏi cũng có thể được giải quyết thông qua bất biến đoạn nhiệt, hoặc bằng cách nhận ra rằng lực phục hồi là tuyến tính theo độ dịch chuyển tại tất cả các điểm trên dây. Kết quả là, một giải pháp hợp lệ, bằng cách chồng chất, là sử dụng một phép tương tự quay (với dây thực hiện quay như một sợi dây nhảy) và bảo toàn động lượng góc. Trong trường hợp đó, sẽ thấy rằng sự giảm khối lượng của phần dây rung đúng bằng sự tăng tốc độ góc do chiều dài giảm.

**33. Cờ vua** Hãy tưởng tượng một lưới $4\times 4$ với một hạt trong mỗi ô. Các hạt này di chuyển theo hình dạng chữ L, tương tự như các quân mã trong cờ vua. Mỗi giây, một hạt di chuyển ngẫu nhiên đến một trong các ô mà nó có thể tiếp cận bằng một bước nhảy hình L. Hai hay nhiều hạt có thể chiếm cùng một ô. Sau một thời gian, hệ thống này sẽ đạt đến trạng thái cân bằng. Nếu nhiệt độ (thống kê) của hệ và do đó của mỗi ô là $T = 1$ mK, tất cả các ô sẽ có mức năng lượng xác định. Hãy tìm độ chênh lệch giữa trạng thái năng lượng cao nhất và thấp nhất bằng đơn vị eV.

**Đáp án câu 33:** Ở trạng thái ổn định, chúng ta có thể gán một xác suất $p(x)$ cho mỗi ô $x$. Chúng ta có thể nghĩ về xác suất nhảy, thay vì quả bóng nhảy. Vì vậy, tại một bước, tất cả xác suất trong $x$ biến mất, và chúng ta cần một số xác suất nhảy trở lại vào nó.

Xác suất nhảy vào $x$ là:

$$p(x) = \sum_{u\in\text{neighbours(x)}} p(u)p(u\to x)$$

Bây giờ $p(u\to x)$ chỉ là $\frac{1}{\deg(u)}$. Bậc của một ô, ký hiệu là deg là số các ô khác có thể đến được nó

$$p(x) = \sum_{u\in\text{neighbours(x)}} \frac{p(u)}{\deg(u)}$$

Ở đây, chúng ta có thể thấy rằng nếu hệ thống đạt đến trạng thái ổn định, $p(x)$ sẽ tỷ lệ thuận với deg($x$). Vì vậy, giải pháp là

$$p(x) = \frac{\deg(x)}{\sum_u \deg(u)}$$

Điều này chúng ta có thể kiểm tra trong thực tế (với một cái gì đó như Mathematica), và nó hoạt động.

Đối với lưới $4 \times 4$ của chúng ta, bậc của các ô là:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Xác suất sẽ tỷ lệ thuận với những điều này.

Bây giờ hãy tìm các năng lượng. Ký hiệu năng lượng của ô $i$ là $E_i$. Ngoài ra, chúng ta sẽ ký hiệu $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
Theo phân bố Boltzmann:

$$\frac{p(E_1)}{p(E_2)} = e^{\beta(E_2 - E_1)}$$

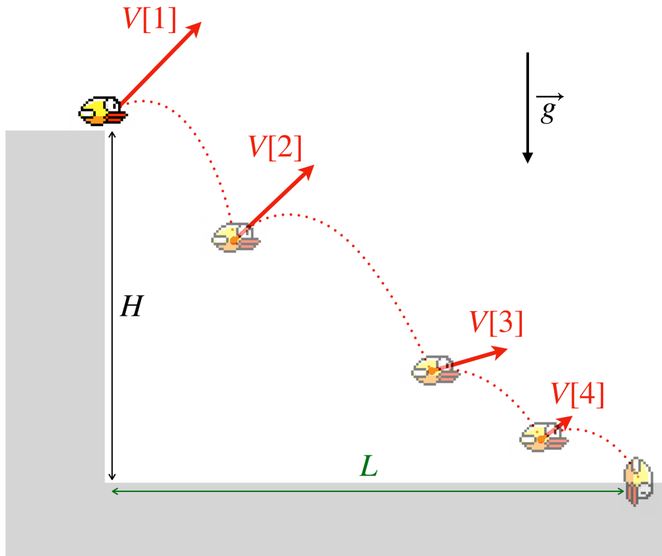
$$E_2 - E_1 = k_B T \log \frac{p(E_1)}{p(E_2)}$$

Điều này có nghĩa là sự chênh lệch năng lượng được tối đa hóa cho tỷ lệ lớn nhất. Điều này cho:

$$\Delta E_{max} = k_B T \log \frac{4}{2} = \boxed{5.9728 \cdot 10^{-8}\text{eV.}}$$

**34. Bản dẫn [Bài toán này đã bị xóa khỏi cuộc thi.]**

**35. Thứ Flappy Bird mệt mỏi** Một chú chim flappy bird có thể nhảy nhiều lần khi đang bay. Mỗi lần nhảy, nó có thể thay đổi tốc độ và hướng đột ngột. Trong mỗi lần nhảy, chú chim có thể quyết định thời điểm nhảy và hướng nhảy. Giữa các lần nhảy, chú chim rơi tự do dưới tác dụng của trọng lực với gia tốc $g$. Giả sử chú chim bắt đầu từ vách đá cao $H$ với vận tốc nhảy ban đầu $V[1] = V_0$. Trong mỗi cú nhảy tiếp theo giữa không trung, vận tốc giảm dần, tức là cú nhảy thứ $n$ có vận tốc $V[n] = V_0/n$ ($n > 1$). Con vật dựa trên hình tượng Việt Nam oai hùng này muốn di chuyển xa nhất có thể theo phương ngang trước khi chạm đất. Hãy tìm khoảng cách ngang tối đa mà nó có thể di chuyển (kí hiệu là $L$ trong hình bên dưới) tính bằng mét, biết rằng $H = 100$m và $V_0 = 10$m/s. *Lưu ý rằng mỗi vận tốc sau cú nhảy là vận tốc tổng của con vật sau khi nhảy (thay vì ví dụ như cộng thêm vào vận tốc trước cú nhảy).*




**Đáp án câu 34:** Hãy bắt đầu với bước nhảy đầu tiên, bắt đầu tại vị trí $(x_0, y_0) = (0, H)$. Xác định hình bao quỹ đạo của một vật được phóng lên với vận tốc $V$ là một bài toán đã quen thuộc, theo đó đó giới hạn của tất cả các quỹ đạo có thể tạo thành một parabol thỏa mãn phương trình sau:

$$y_1 = H_{01} - A_{01}x_1^2 \quad , \quad \text{trong đó} \quad H_{01} = H + \frac{V^2}{2g} \quad \text{và} \quad A_{01} = \frac{g}{2V^2} \quad . \tag{10}$$

Nếu bước nhảy thứ hai bắt đầu tại vị trí $(x_1, y_1)$ trên bao này, thì tất cả các vị trí có thể mà con chim có thể đạt được (ít nhất là trước bước nhảy thứ ba) có thể được mô tả bởi:

$$y_2 = (y_1 + H_{21}) - A_{21}(x_2 - x_1)^2 \quad , \quad \text{trong đó} \quad H_{21} = \frac{V^2}{2g} \quad \text{và} \quad A_{21} = \frac{g}{2V^2} \quad . \tag{11}$$

tức là

$$y_2 = H_{01} + H_{21} - A_{01}x_1^2 - A_{21}(x_2 - x_1)^2.$$

Tất cả các điểm $(x, y) = (x_2, y_2)$ có thể đạt được trong hai bước nhảy sẽ có một hoặc nhiều giá trị $x_1$ tương ứng mà phương trình trên được thỏa mãn. Phương trình này là bậc hai đối với $x_1$ nên sẽ tồn tại một $x_1$ tương ứng nếu biệt thức của phương trình (đối với $x_1$) không âm. Ở dạng chuẩn, phương trình bậc hai đối với $x_1$ là

$$(A_{01} + A_{21})x_1^2 - 2A_{21}x_2x_1 + (y_2 + A_{21}x_2^2 - H_{01} - H_{21}) = 0,$$

vì vậy từ biệt thức delta không âm ta có

$$\begin{aligned} 0 &\geq (A_{01} + A_{21})y_2 + A_{01}A_{21}x_2^2 - (A_{01} + A_{21})(H_{01} + H_{21}) \\ \iff \quad y_2 &\leq (H_{01} + H_{21}) - \left(A_{01}^{-1} + A_{12}^{-1}\right)^{-1} x_2^2 \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Đường bao cho hai bước nhảy sau đó là đường mà bất đẳng thức trên trở thành một đẳng thức.

Chúng ta có thể tiếp tục quy trình này một cách quy nạp cho một bước nhảy thứ $n$ bất kỳ và nhận được đường bao là

$$y_n = \left(\sum_{j=1}^{n} H_{j,j-1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} A_{j,j-1}^{-1}\right)^{-1} x_n^2,$$

trong đó chúng ta có thể tiếp tục tính toán cho $n \to \infty$ với chuỗi Basel:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{\infty} H_{j,j-1} = H + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V[j]^2}{2g} = H + \frac{V_0^2}{2g} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = H + \frac{\pi^2}{12} \frac{V_0^2}{g} \quad , \\ \left( \sum_{j=1}^{\infty} A_{j,j-1}^{-1} \right)^{-1} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2V[j]^2}{g} \right)^{-1} = \frac{g}{2V_0^2} \left( \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} \right)^{-1} = \frac{3}{\pi^2} \frac{g}{V_0^2} \quad .\end{gathered} \tag{13}$$

tức là đường bao cho con chim mệt mỏi là

$$y = H + \frac{\pi^2}{12} \frac{V_0^2}{g} - \frac{3}{\pi^2} \frac{g}{V_0^2} x^2.$$

Khoảng cách xa nhất (theo chiều ngang) là tọa độ $x$ ($x = L > 0$) nơi đường bao giao với mặt đất $y = 0$:

$$\begin{gathered} 0 = \left( H + \frac{\pi^2}{12} \frac{V_0^2}{g} \right) - \left( \frac{3}{\pi^2} \frac{g}{V_0^2} \right) L^2 \\ \implies \quad L = \frac{\pi^2}{6} \left( 1 + \frac{12}{\pi^2} \frac{gH}{V_0^2} \right)^{1/2} \frac{V_0^2}{g} \approx \boxed{60.32 \text{ m}}. \end{gathered} \tag{14}$$

* Bài toán này được tạo ra với sự giúp đỡ của Nguyễn Thành Long.