TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÁO CÁO CUỐI KỲ MÔN CẤU TRÚC RỜI RẠC

Người hướng dẫn: Cô **NGUYỄN THỊ HUỲNH TRÂM**
Người thực hiện: **NGUYỄN THỊ ANH THƯ – 51900564**
Lớp : **19050401**
Khoá : **23**

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2022

TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÁO CÁO CUỐI KỲ MÔN CẤU TRÚC RỜI RẠC

Người hướng dẫn: Cô **NGUYỄN THỊ HUỲNH TRÂM**

Người thực hiện: **NGUYỄN THỊ ANH THƯ – 51900564**

Lớp : **19050401**

Khoá : **23**

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2022

LỜI CẢM ƠN

Vì tình hình diễn biến phức tạp của dịch COVID nên quá trình học tập và thi cuối kì ít nhiều bị ảnh hưởng. Đầu tiên em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến cô Nguyễn Thị Huỳnh Trâm và khoa Công Nghệ Thông Tin đã tạo điều kiện cho chúng em có thể làm báo cáo để hoàn thành kết thúc môn học, cũng như đã giúp đỡ và hướng dẫn em trong suốt quá trình học tập và làm báo cáo để em và các bạn không phải bị trễ tiến độ. Dịch gây nhiều khó khăn trong việc học online nhưng cũng tạo nhiều lợi ích như có thêm thời gian để làm việc và tìm hiểu thêm nhiều kiến thức mới.

Việc viết báo cáo đã giúp em rèn luyện sự thêm kỹ năng trình bày, nghiên cứu, cũng như một số kỹ năng khác. Do chưa có nhiều kinh nghiệm viết báo cáo cũng như giới hạn về mặt kiến thức và khả năng lập luận nên trong bài báo cáo này chắc chắn sẽ không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được nhận xét và đóng góp ý kiến từ phía thầy cô để em hoàn thiện hơn.

Cuối cùng kính chúc Quý thầy cô và các bạn năm mới vui vẻ và sức khoẻ thật tốt trong mùa dịch COVID này.

Em xin chân thành cảm ơn.

BÁO CÁO ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

Tôi xin cam đoan đây là sản phẩm đồ án của riêng tôi và được sự hướng dẫn của cô Nguyễn Thị Huỳnh Trâm. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong đề tài này là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Những số liệu trong các bảng biểu phục vụ cho việc phân tích, nhận xét, đánh giá được chính tác giả thu thập từ các nguồn khác nhau có ghi rõ trong phần tài liệu tham khảo.

Ngoài ra, trong đồ án còn sử dụng một số nhận xét, đánh giá cũng như số liệu của các tác giả khác, cơ quan tổ chức khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung đồ án của mình. Trường đại học Tôn Đức Thắng không liên quan đến những vi phạm tác quyền, bản quyền do tôi gây ra trong quá trình thực hiện (nếu có).

TP. Hồ Chí Minh, ngày 04 tháng 01 năm 2022

Tác giả

Nguyễn Thị Anh Thư

TÓM TẮT

Question 1: Euclid's algorithm and Bezout's identity

a. Using Euclid's algorithm to calculate gcd(2021, 1000 + m) and lcm(2021, 1000 +m), where m is the last 3 digits of your student ID.

Student ID is 51900564 => gcd(2021, 1564) and lcm(2021, 1564).

b. Apply above result(s) in to find 5 integer solution pairs (x,y) of this equation:

2021x + 1564y = gcd(2021, 1564)

Question 2: Recurrence relation

$$a_n = 8.a_{n-1} - 15.a_{n-2}$$

with $a_0 = 5$ and $a_1 = 64$

Question 3: Set

$\Gamma = \{N, G, U, Y, E, T, H, I, A\}$

$\Delta = \{A, C, D, G, H, N, O, T, U\}$

Find the union, intersect, non-symmetric difference and symmetric difference of Γ and Δ.

Question 4: Relations

Let $\mathfrak{R}$ be a binary relation defined on 2 integers as follow:

$$\forall a, b \in N\ (aRb \leftrightarrow 64 | (a.b))$$

Question 5: Multiplicative inversion

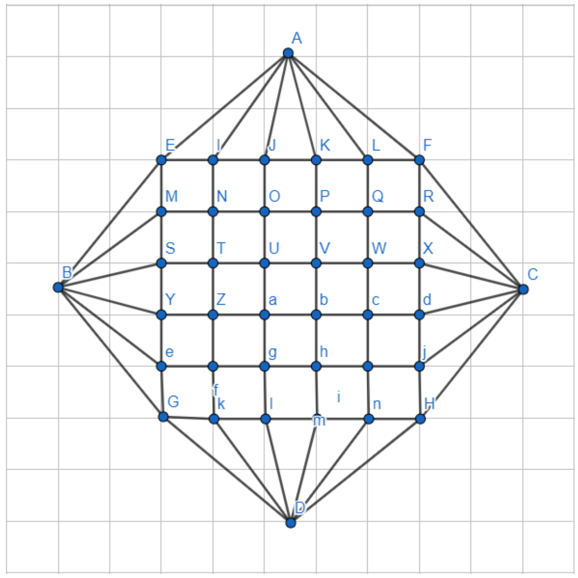
a. Extended Euclidean algorithm
b. Find 65^{-1} (mod 101) by applying Extended Euclidean algorithm

Question 6: Kruskal's algorithm

Propose a solution for circuit-checking in Kruskal's algorithm.

Question 7: Eulerian circuit

a. Does the following graph have an Eulerian circuit or Eulerian path? Why?



b. Study and present your knowledge about Hierholzer's algorithm to find an Eulerian circuit.

c. If the graph has an Eulerian circuit, use Hierholzer's algorithm to find an Eulerian circuit of that graph when the initial circuit R1 is EINME.

Question 8: Map coloring

a. Modeling this map by a graph.

b. Color the map (graph) with a minimum number of colors. Present your solution step by step. StudentID 51900564 has = 0564.

0564 % 4 = 0 then start form Bihar.


300 km
200 mi
© d-maps.com
Jammu and Kashmir
Himachal Pradesh
Chandigarh
Punjab
Uttarakhand
Haryana
Delhi
Rajasthan
Uttar Pradesh
Sikkim
Arunachal Pradesh
Assam
Nagaland
Meghalaya
Manipur
Bihar
Tripura
Mizoram
Jharkhand
West Bengal
Gujarat
Madhya Pradesh
Chhattisgarh
Orissa
Daman and Diu
Dadra and Nagar Haveli
Maharashtra
Telangana
Goa
Andhra Pradesh
Karnataka
Pondicherry
Tamil Nadu
Kerala
Lakshadweep
Andaman and Nicobar Islands

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU, HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

DANH MỤC BẢNG

DANH MỤC HÌNH

KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Question 1: Euclid's algorithm and Bezout's identity

a. gcd and lcm

- gcd(2021, 1564)
- lcm(2021, 1564)

b. 5 integer solution pair (x, y) of 2021x + 1564y = gcd(2021, 1564).

Bài làm

a)

✓ Find Greatest Common Divisor of 2021 and 1564, using Euclean algorithm.

Step 1 :

Divide 2021 by 1564 and get the remainder

2021 mod 1564 = 457

The remainder is positive (457 >0), so we will continue with division.

Step 2 :

Divide 1564 by 457 and get the remainder

1564 mod 457 = 193

The remainder is still positive (193 > 0), so we will continue with division.

Step 3 :

Divide 457 by 193 and get the remainder

457 mod 193 = 71

The remainder is still positive (71 > 0), so we will continue with division.

Step 4 :

Divide 193 by 71 and get the remainder

193 mod 71 = 51

The remainder is still positive (51 >0), so we will continue with division.

Step 5 :

Divide 71 by 51 and get the remainder

71 mod 51 = 20

The remainder is still positive (20> 0), so we will continue with division.

Step 6 :

Divide 51 by 20 and get the remainder

51 mod 20 = 11

The remainder is still positive (11 > 0), so we will continue with division.

Step 7 :

Divide 20 by 11 and get the remainder

20 mod 11 = 9

The remainder is still positive (9 > 0), so we will continue with division.

Step 8 :

Divide 11 by 9 and get the remainder

11 mod 9 = 2

The remainder is still positive (2 > 0), so we will continue with division.

Step 9 :

Divide 9 by 2 and get the remainder

9 mod 2 = 1

The remainder is still positive (1 >0), so we will continue with division.

Step 10 :

Divide 2 by 1 and get the remainder

2 mod 1 = 0

The remainder is zero => GCD is the last divisor 1.

⇨ gcd (2021, 1564) = **1**

✓ The formula for finding LCM is

$$\text{LCM} = \frac{a.b}{GCD\ (a,b)}$$

⇨ lcm (2021, 1564) = $\frac{2021.1564}{\text{gcd}\ (2021,1564)}$ = **3160844**

b)

2021x + 1564y = gcd (2021, 1564) = 1

	q = r1 / r2	r = r1 – q*r₂	x = x₁ – q*x₂	y= y₁ – q*y₂
1		2021	1	0
2		1564	0	1
3	2021 / 1564 = 1	2021 – 1*1564 = 457	1 – 1*0 = 1	0 – 1*1 = -1
4	1564 / 457 = 3	1564 – 3*457 = 193	0 – 3*1 = -3	1 – 3*(-1) = 4
5	457 / 193 = 2	457 – 2*193 = 71	1 – 2*(-2) = 7	(-1) – 2*4 = -9
6	193 / 71 = 2	193 – 2*71 = 51	(-3) – 2*7 = -17	4 – 2*(-9) = 22
7	71 / 51 = 1	71 – 5*51 = 20	7 – 1*(-17) = 24	(-9) – 1*22 = -31
8	51 / 20 = 2	51 – 2*20 = 11	(-17) – 2*24 = -65	22 – 2*(-31) = 84
9	20 / 11 = 1	20 – 1*11 = 9	24 – 1*(-65) = 89	(-31) – 1*84 = -115
10	11 / 9 = 1	11 – 1*9 = 2	(-65) – 1*89 = -154	84 – 1*(-115) = 199
11	**9 / 2 = 4**	**9 – 4*2 = 1**	**89 – 4*(-154) = 705**	**(-115) – 4*199 = -911**
12	2 / 1 = 1	2 – 2*1 = 0	(-154) – 2*705 = -1564	199 – 2*-911 = 2021

Bảng 1: Euclid's algorithm

x= 705, y = -911

We have: x= x + $\frac{kb}{d}$, y= y - $\frac{ka}{d}$

Then:

(*) ⇔ 2021. (705+ 1564k) + 1564. (-911– 2021k) = 1 (k ∈ N^*)

Therefore, we can find 5 pairs (x, y) by substitute k:

k = **1:** (x, y) = **(653, -1316)**

k = **2:** (x, y) = **(2217, -3337)**

k = **3:** (x, y) = **(3781, -5358)**

k = **4:** (x, y) = **(5345, -7379)**

k = **5:** (x, y) = **(6909, -9400)**

Question 2: Recurrence relation

$$a_n = 8.a_{n-1} - 15.a_{n-2}$$

with $a_0 = 5$ and $a_1 = 64$

Bài làm

$a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$

$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 64 \end{cases}$

Apply Distinct-Roots Theorem:

$X^2 = 8X - 15 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} X=5 \\ X=3 \end{matrix}\right.$

Then: an = $C.5^n + D.3^n$

⇨ $\begin{cases} a_0 = C + D = 5 \\ a_1 = 5C + 3D = 64 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} C = \frac{49}{2} \\ D = \frac{-39}{2} \end{cases}$

⇨ $a_n = \mathbf{\frac{49}{2}.5^n - \frac{39}{2}.3^n}$

Question 3*:* *Set*

Γ = {N, G, U, Y, E, T, H, I, A}

Δ = {A, C, D, G, H, N, O, T, U}

Find the union, intersect, non-symmetric difference and symmetric difference of Γ and Δ.

Bài làm

a) Full name: Nguyễn Thị Anh Thư

Γ = **{ N, G, U, Y, E, T, H, I, A }**

Δ = **{A, C, D, G, H, N, O, T, U}**

b)

- The union of Γ and Δ is the set that contains all the elements contained in either set (or both sets):

Γ U Δ = **{ A, C, D, E, G, H, I, N, O, T, U, Y }**

- The intersect of Γ and Δ is the set that contains only the elements that are in both sets.

Γ ∩ Δ = **{ A, G, H, N, T, U }**

- The non-symmetric difference of Γ and Δ is the set whose elements belong to Γ and do not belong to Δ (and vice versa for the non-symmetric difference of Δ and Γ).

Γ \ Δ = **{ E, I, Y }**

Δ \ Γ = **{C, D, O}**

- The symmetric difference of Γ and Δ is the set whose elements belong to Γ or Δ but not both.

Γ Θ Δ = **{C, D, E, I, O, Y}**

Question 4 : *Relations*

Let ℜ be a binary relation defined on 2 integers as follow:

$\forall a, b \in N$ *(aRb↔64|(a.b))*

Bài làm

- $\forall a, b \in N, (aRb \ \leftrightarrow 64|(a.b)$
  - ∀a ∈ N, if 64 ∤ a, then 64 ∤ a^2

⇨ R is **not reflexive**.

Let : a = 1

64∤1, then 64∤1^2

- $\forall a, b \ \in N, obviously\ if\ 64|(ab) \Leftrightarrow \ 64|(ba)$

Let a, b $\in N$, such that aRb

$\Leftrightarrow$ $(ab)|\ 64$

$\Leftrightarrow$ $a.b = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $b.a = 64k, which\ is\ deviable\ by\ 64 \rightarrow bRa$

⇨ R is **symmetric.**

- $\forall a, b \in N, if\ 64|(a.b)$

Let: a = 32, b = 4

$\Leftrightarrow$ $a.b = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $32 . 4 = 64.2$

$\Leftrightarrow$ $b.a = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $4 . 32 = 64.2$

⇨ $aRb \wedge bRa\ is\ true\ but\ a \neq$ b

⇨ R is **not antisymmetric**

- $\forall a, b, c \in N, if\ 64|(ab) \wedge 64|(bc)$ ⇨ 64∤(ac)

Let: a = 6, b = 32, c = 4

$a.b = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $6 . 32 = 64 . 3$

$b.a = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $32 . 4 = 64 . 2$

$a . c = 64k, k \in N$

$\Leftrightarrow$ $6 . 4 \neq 64\ k$

⇨ $aRb \wedge bRa$ => not aRc

⇨ R is **not transitive**

Question 5: *Multiplicative inversion*

a. Extended Euclidean algorithm

b. Find 65^{-1} (mod 101) by applying Extended Euclidean algorithm

Bài làm

a.

- The extended Euclidean algorithm is used to solve a non-integer equation (also known as a Diophant equation) of the form:

  ax + by = c

- In there a,b,c are integer coefficients, x,y are implicit values. The necessary and sufficient condition for this equation to have a (integer) solution is that gcd(a,b) is a divisor of c. This assertion is based on the following proposition:

  d = gcd(a,b), based on this algorithm we will find the pair x,y such that ax + by = d (gcd(a,b)).Let r_0 = a,r_1 = b divide r_0 for r_1 remainder r_2 và quotien integer q_1. If the next remainder r_1 is r_2 = 0 then stop and we get pair x,y at here and if non-zero, continue to execute the cycle until the remainder is zero.

To sum up, we have:

ax +ny = gcd(a, n) = 1

Rewritten:

ax – 1 = (-y). n

⇔ n | (ax – 1)

⇔ ax == 1 (mod n)

⇔ x == a^{-1}

Therefore, x is the multiplicative inverse of a for any integers a, n with n > 1 (or y is the multiplicative inverse of n).

It is easy to understand that "ax + ny" substituted by the pair (x, y) equal to 1, then x is our answer.

Computing the algorithm, we have:

$r_0 = a;\ r_1 = n$

$x_0 = 1; x_1 = 0$

$y_0 = 0; y_1 = 1$

$\vdots$

$x_i = x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1}$

$y_i = y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1}$

$\vdots$

We stop when $r_{k+1} = 0$ and get:

- r_k is $\gcd(a, n) = \gcd(r_0, r_1) = 1$
- $r_k = ax_k + ny_k = 1$.

⇨ $x_k == a^{-1} \pmod n$

For example: gcd(23, 35) = 1.

i	Quotients q_{i-1}	Remainders r_i	$x= x_{n-2} - q.x_{n-1}$	$y_n= y_{n-2} - q.y_{n-1}$
0		23	1	0
1		35	0	1
2	0	23	1	0
3	1	12	-1	1
4	1	11	2	-1
5	1	1	-3	2
6	11	0	35	-23

Bảng 2: Thuật toán Euclidean mở rộng cho 23 và 35

We stop at i=6 because $r_6 = 0$

At i=5, we got: 23. (-3) + 35.2 = 1

Therefore: 7 is the multiplicative inverse of 15 modulo 26.

b.

My ID is 51900564

101 is prime, then we can find multiplicative inverse of 65.

and find 65^{-1}(mod 101).

i	q_{i-1}	r_i	x_i	y_i
0		65	1	0
1		101	0	1
2	0	65	1	0
3	1	36	-1	1
4	1	29	2	-1
5	1	7	-3	2
6	4	1	14	-9
7	7	0	-101	65

Bảng 3: Thuật toán Euclidean

We stop at i =7 because r_7 =0

At i= 6, We have: 14. 65 – 9 . 101 = 1

Adding 9 . 101 to both sides gives that 14 .65 = 1 + 9 . 101

Thus, by definition of congruence modulo 101,

14. 65 ≡ 1 (mod 101)

So 65^{-1} (mod 101) is 14.

Question 6: Kruskal's algorithm

Propose a solution for circuit-checking in Kruskal's algorithm.

Bài làm

✓ **Ý tưởng thuật toán**

- Giải thuật của Kruskal được gọi là giải thuật tham lam (greedy).

Bởi vì ở mỗi bước, nó luôn thử lấy những cạnh chưa được duyệt mà có trọng số nhỏ nhất.

- Thuật toán không xét các cạnh với thứ tự tuỳ ý.

- Thuật toán xét các cạnh theo thứ tự đã sắp xếp theo trọng số.

Để xây dựng tập n-1 cạnh của cây khung nhỏ nhất – tạm gọi là tập K, Kruskal đề nghị cách kết nạp lần lượt các cạnh vào tập đó theo nguyên tắc như sau:

- Ưu tiên các cạnh có trọng số nhỏ hơn.
- Kết nạp cạnh khi nó không tạo chu trình với tập cạnh đã kết nạp trước đó.

Nguyên tắc này đảm bảo tập K nếu thu đủ n –1 cạnh sẽ là cây khung nhỏ nhất.

- Tổng số cạnh tối đa của G là n*(n-1)/2 => $O(n^2)$.

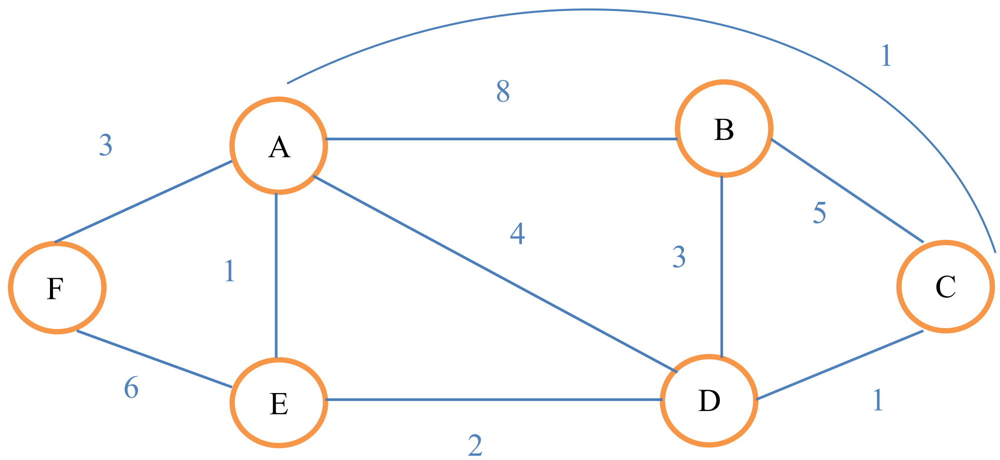
✓ **Ứng dụng:** Mạng lưới cáp truyền hình, mạng lưới tuyến hàng không, … kết nối giữa các thành phố trong quốc gia hoặc ngoài quốc gia, sau cho tổng chi phí hoặc tổng độ dài đường đi nhỏ nhất.

✓ **Thuật toán bao gồm các bước sau:**

- **Input**: Đồ thị G=(X, E) liên thông, X gồm n đỉnh
  - *Bước 1:* Sắp xếp các cạnh trong G tăng dần theo trọng lượng để xây dựng cây T, khởi tạo T := ∅.
  - *Bước 2:* Lần lượt lấy từng cạnh e thuộc danh sách đã sắp xếp (e là tâp hợp tất cả các cạnh của). Nếu T+{e} không chứa chu trình thì thêm e vào T: T := T+{e}.
  - *Bước 3:* Nếu T đủ n-1 cạnh thì dừng; ngược lại, lặp bước 2.
- **Output**: Cây khung ngắn nhất T= (V, U) của G

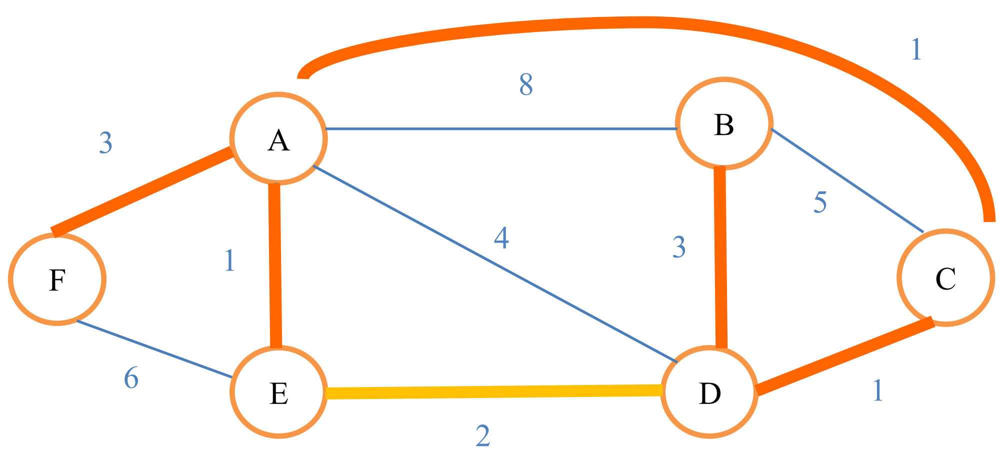
Khi thuật toán kết thúc, rừng chỉ gồm đúng một cây và đó là một cây khung nhỏ nhất của đồ thị G.

Ví dụ: Tìm cây khung ngắn nhất của đồ thị sau:



Giải. *Sắp xếp các cạnh*

AC	AE	CD	DE	AF	BD	AD	BC	EF	AB
1	1	1	2	3	3	4	5	6	8

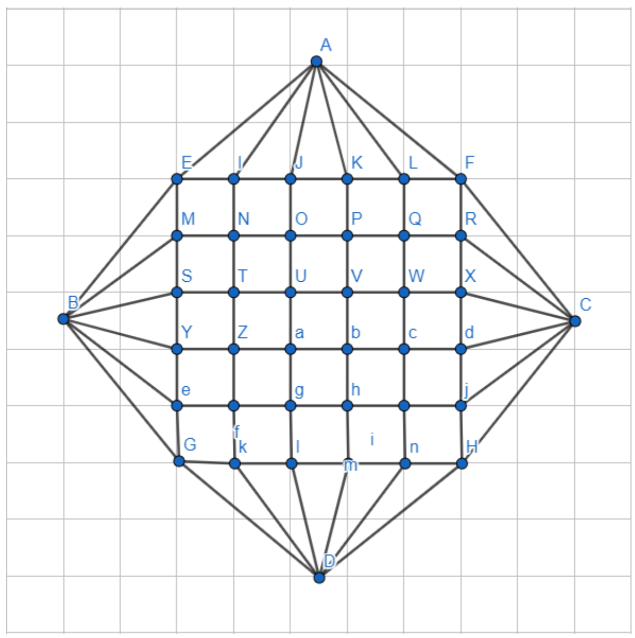


AC	AE	CD	DE	AF	BD	AD	BC	EF	AB
1	1	1	2	3	3	4	5	6	8

Như vậy T = {AC, AE, CD, AF, BD} là khung ngắn nhất với trọng lượng: 9

Question 7: *Eulerian circuit*

a. Does the following graph have an Eulerian circuit or Eulerian path? Why?



b. Study and present your knowledge about Hierholzer's algorithm to find an Eulerian circuit.

c. If the graph has an Eulerian circuit, use Hierholzer's algorithm to find an Eulerian circuit of that graph when the initial circuit R1 is:

0564 % 4 = 0 then R1 is EINME

Bài làm

a)

The graph has a Eulerian circuit when:

- All vertices with non-zero degree are connected.
- All vertices have even degree.

The graph has a Eulerian path when:

- All vertices with non-zero degree are connected.
- There are 0 or 2 vertices that have even degree.

We have:

- Observe that deg(A) = deg(B) = deg(C) = deg(D) = 6 (have 6 degrees.)
- deg(E) = deg(I) = deg(J) = deg(K) = deg(L) = deg(F) = deg(M) = deg(N) = deg(O) = deg(P) = deg(Q) = deg(S) = deg(T) = deg(U) = deg(V) = deg(W) = deg(X) = deg(Y) = deg(Z) = deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = deg(g) = deg(h) = deg(i) = deg(j) = deg(G) = deg(k) = deg(l) = deg(m) = deg(n) = deg(H) = 4 (have 4 degrees.)
- All vertices are connected.

Therefore: the graph has a Eulerian circuit.

b)

Hierholzer's algorithm:

Step 1: Make sure that the graph is connected and contains exactly 0 or 2 odd degree vertices.

Step 2: Create ePath and cPath

- cpath: will store the themporary Euler Path.
- epath: will store the final Euler Path.

Step 3: Let v be the starting vertex, then push v to cpath.

- If there are 2 odd degree vertices, one of them must be v.
- If all vertices have even degree, any vertex can be v.

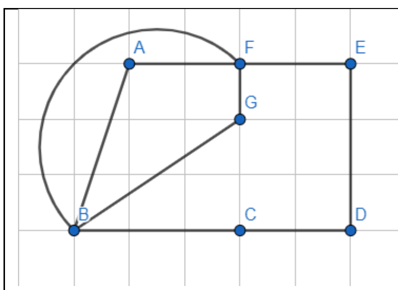
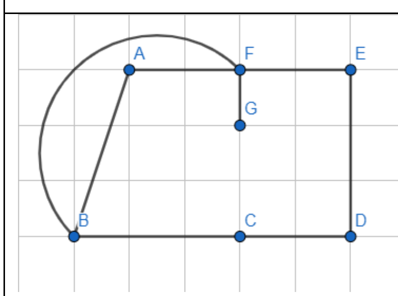
Step 4: Let u be the top-cpath element.

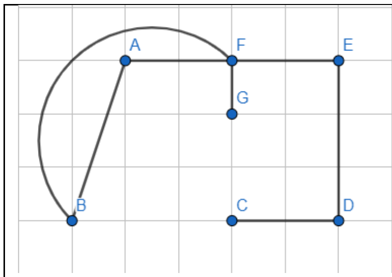
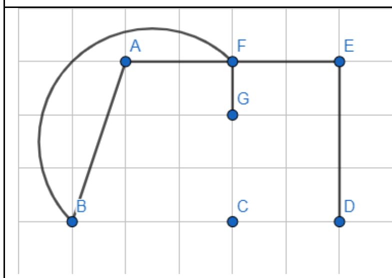
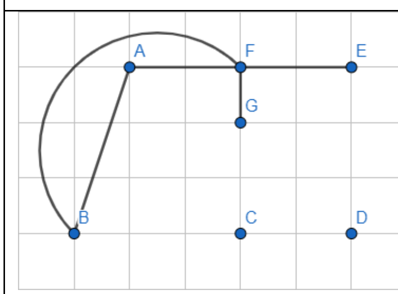
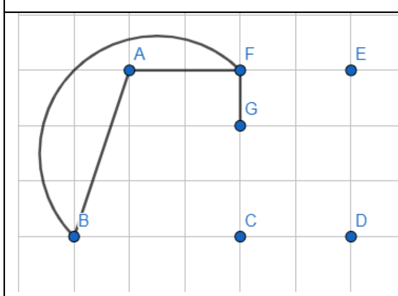
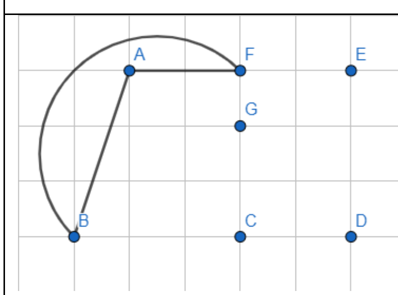
Step 5: If all the edges from u are visited, push u from cpath to epath. Else, select any random edge (u, x). Then push x to cpath and delete (u,x) from G.

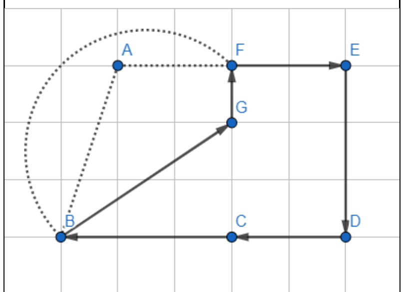
Step 6: Repeat steps 5 to 7 cpath is empty.

***Note that:** The path taken may or may not include all the edges. Therefore, if the starting point is also the end point, we can get Eulerian circuit by inverse cpath.

Example:

<table>
<tr><td></td><td>Tất cả các đỉnh của biểu đồ nhất định đều có mức độ chẵn.
Chúng tôi khởi tạo 2 ngăn xếp: cpath và epath.
Chọn G là điểm khởi đầu.
• cpath: G
• epath:</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ G, chọn (G, B).
Xóa GB.
• Cpath: G-B
• epaht:</td></tr>
</table>

	Từ B, chọn (B, C). Xóa BC. • cpath: G-B-C • epath:
	Từ C, chọn (C, D). Xóa CD. • cpath: G-B-C-D • epath:
	Từ D, chọn (D, E). Xóa DE. • cpath: G-B-C-D-E. • epath:
	Từ E, chọn (E, F). Xóa EF. • cpath: G-B-C-D-E-F. • epath:
	Từ F, chọn (F, G). Xóa FG. • cpath: G-B-C-D-E-F-G. • epath:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Không có cạnh từ G, sau đó đẩy G đến epath.

cpath: GFEDCD
epath: G

Điểm khởi đầu phải là điểm kết thúc, do đó chúng ta có thể ngừng đi qua từ F và đẩy E đến epath

cpath:
epath: G-F-E-D-C-B-G.

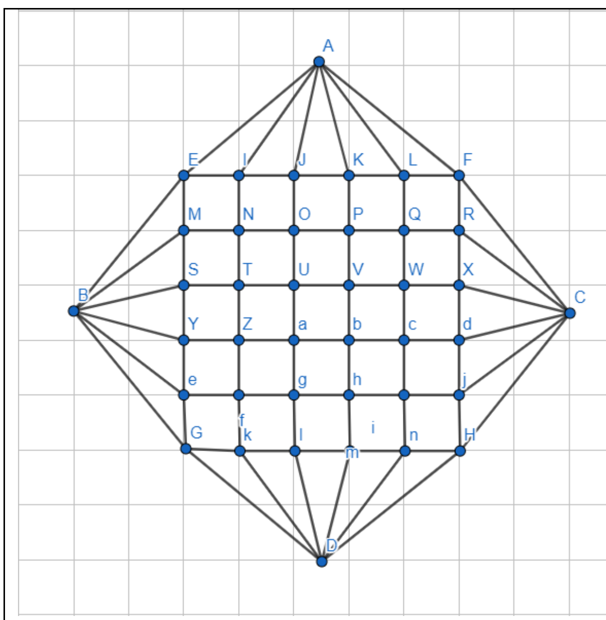
Chúng ta có thể bắt đầu từ F để tìm mạch mới.
epath(F): F-A-B-A
Kết hợp: G-F-E-D-C-B-(F-A-B-A)-G</td>
</tr>
</table>

Bảng 4:Thuật toán Hierholzer

c)

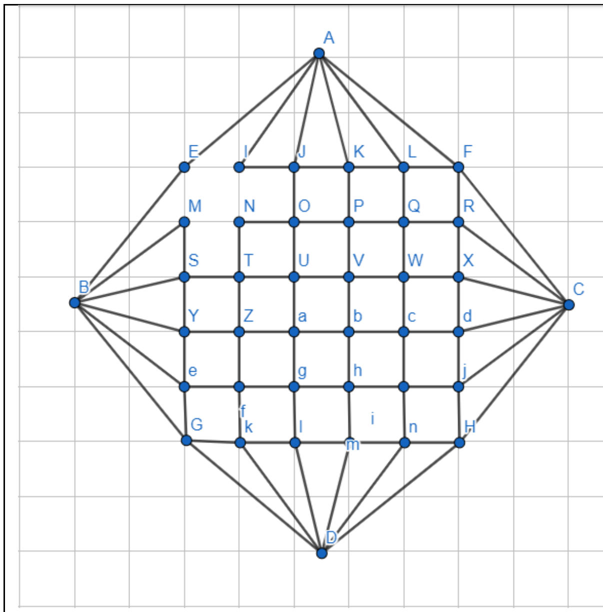
0564%4=0, so **i. If % 4 = 0 then R1 is EINME**

R1: EINME

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

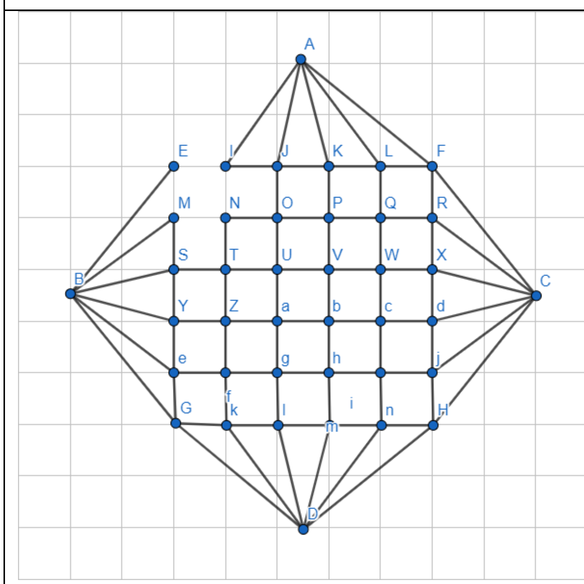
Tất cả các đỉnh đều có độ. Do đó, đồ thị có Eulerian circuit.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

- EINME là circuit ban đầu. Ta có:
  - Cpath: E-I-N-M-E
  - Epath:
- Xoá EI, IN, NM, EM.
- E là ngăn xếp trên cùng và có các cạnh từ E chưa được truy cập, sau đó E là điểm khởi đầu.

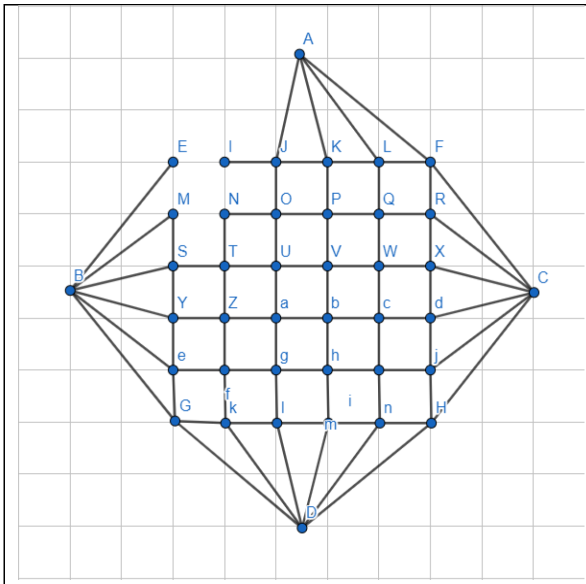
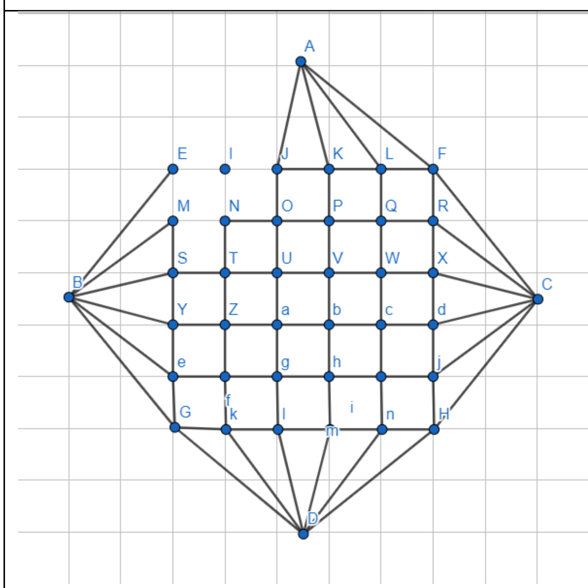
</td>
</tr>
<tr>
<td>


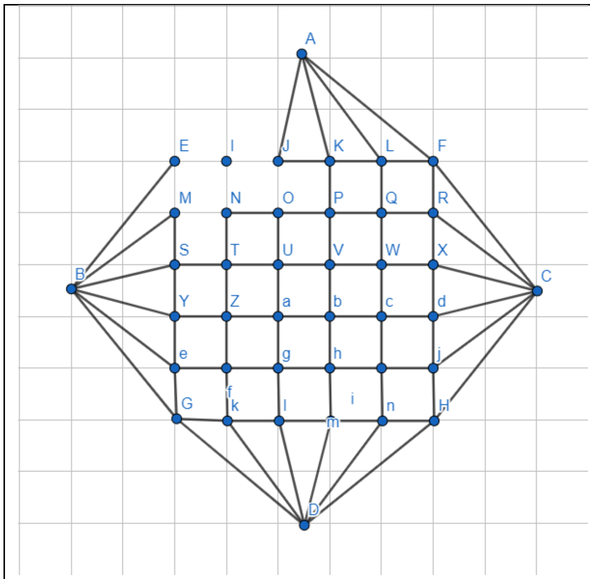
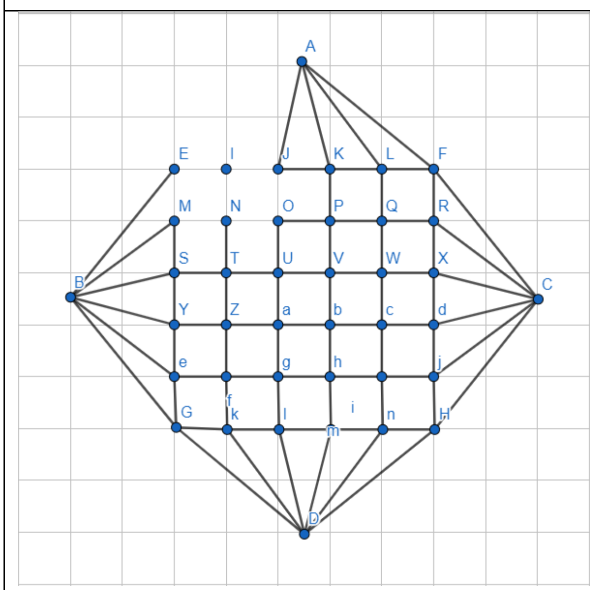
</td>
<td>

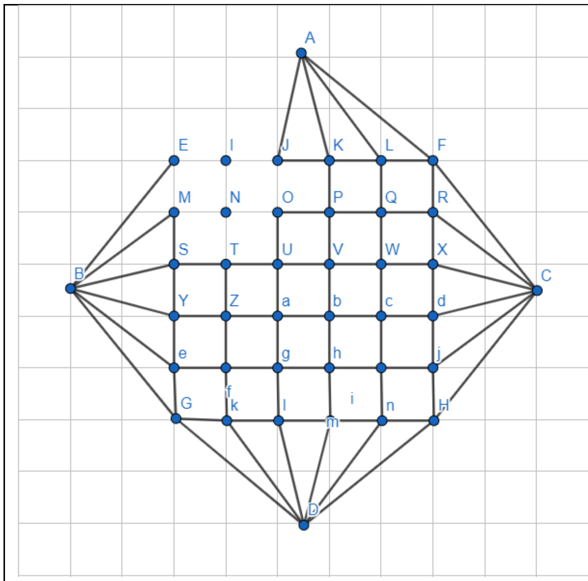
Chọn (E, A).
Đẩy A đến cpath và xóa EA.

- Cpath: E-I-N-M-E-A
- Epath:

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Chọn(A, I)
Đẩy I đến cpath và xoáAI.
Cpath: E-I-N-M-E-A-I
Epath:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nhận (I, J)
Đẩy J đến cpath và xóa IJ.
Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J
Epath:</td>
</tr>
</table>

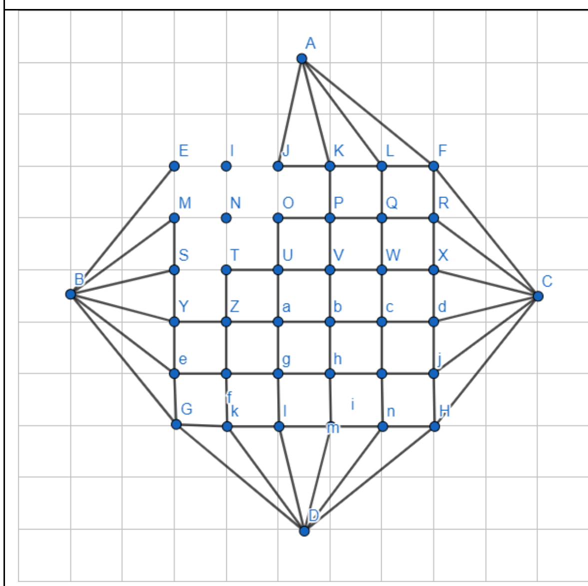
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Chọn (J, O)
Đẩy O đến cpath và xóa JO.
Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O
Epath:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Chọn (O, N)
Đẩy N đến cpath và xóa ON.
Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N
Epath:</td>
</tr>
</table>



Nhận (N, T).

Đẩy T để cpath và xóa NT.

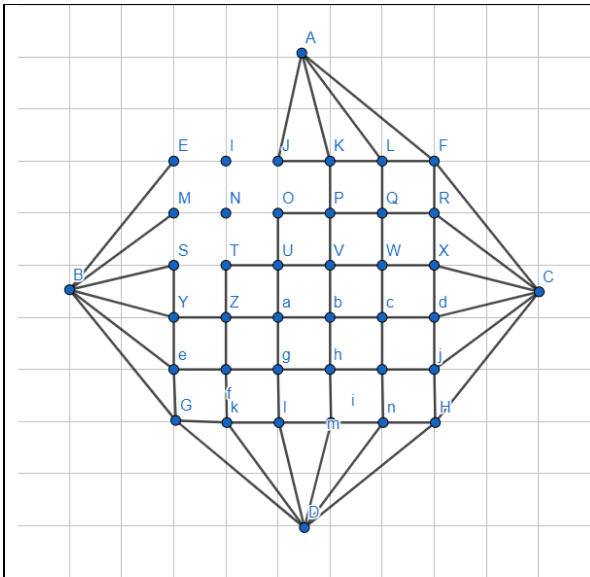
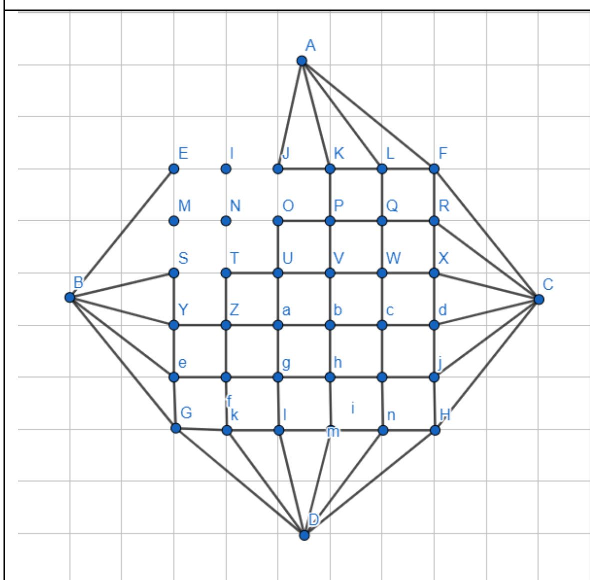
- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T.
- Epath:

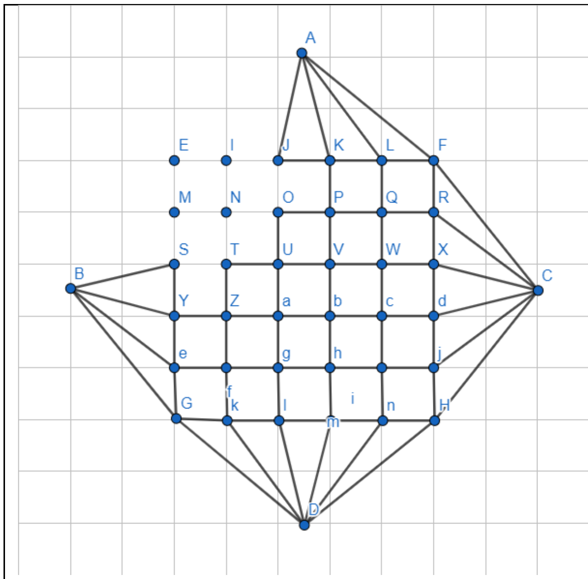


Chọn (T, S).

Đẩy S đến cpath và xóa TS.

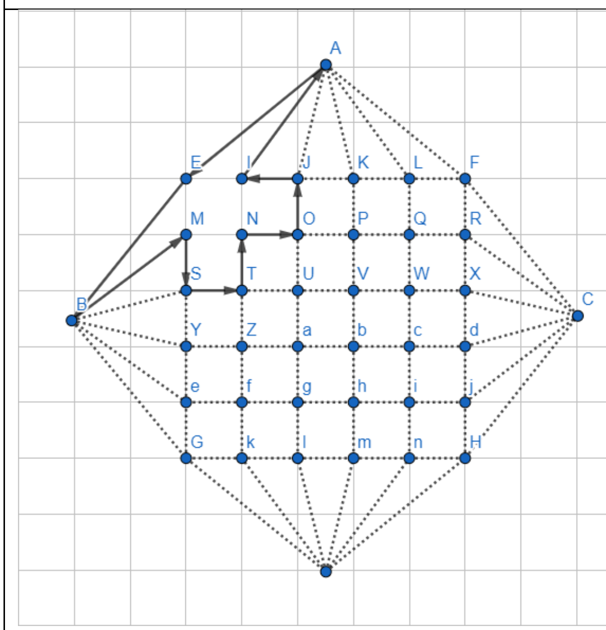
- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S.
- Epath:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Chọn (S, M).
Đẩy M đến cpath và xóa SM.
• Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M.
• Epath:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nhận (M, B).
Đẩy B để cpath và xóa MB.
• Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B.
• Epath:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Chọn (B, E).
Đẩy E đến cpath và xóa BE.

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-E
Epath:

</td>
</tr>
<tr>
<td>


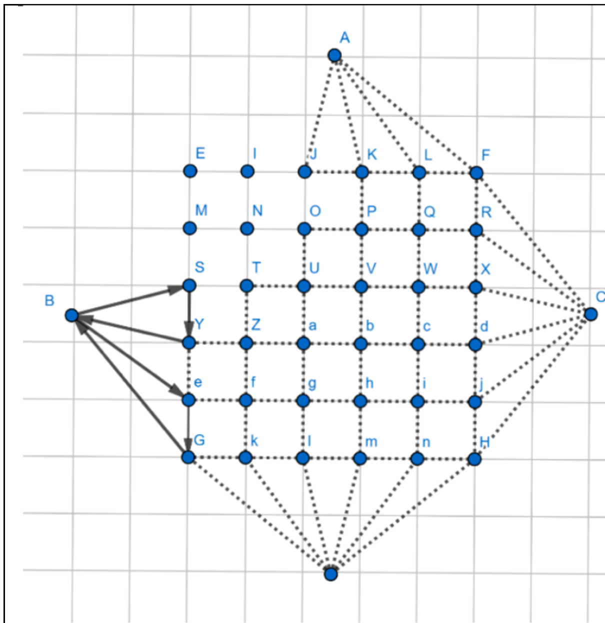
</td>
<td>
Không có cạnh từ E, sau đó đẩy E đến epath.

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B
Epath: E

Eulerian circuit nhỏ (E-B-M-M-S-T-N-O-J-I-A). Chúng ta có thể tiếp tục đi qua cho toàn bộ graph.
Bắt đầu từ B, nhận được:

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-B.
Epath: E

Delete these trails.
</td>
</tr>
</table>



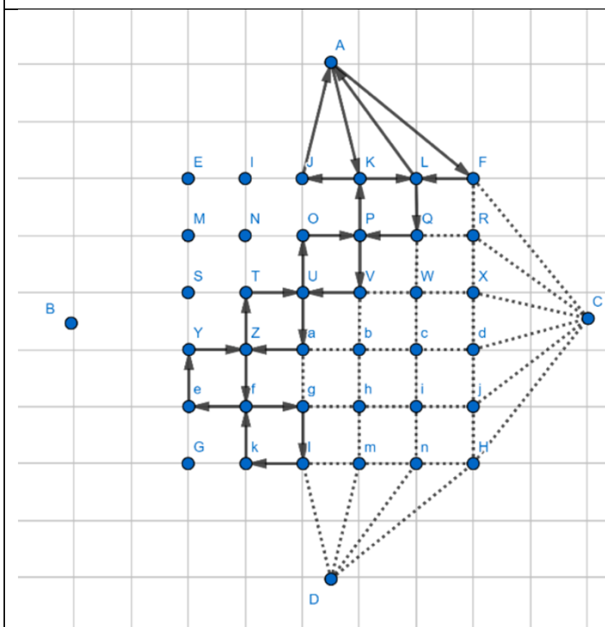
Đẩy B đến epath. Điểm khởi đầu là G.

- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-**G**
- Epath: E-B

Bắt đầu từ G, nhận được:

- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-**G-D-k-G**
- Epath: E-B

Delete these trails.



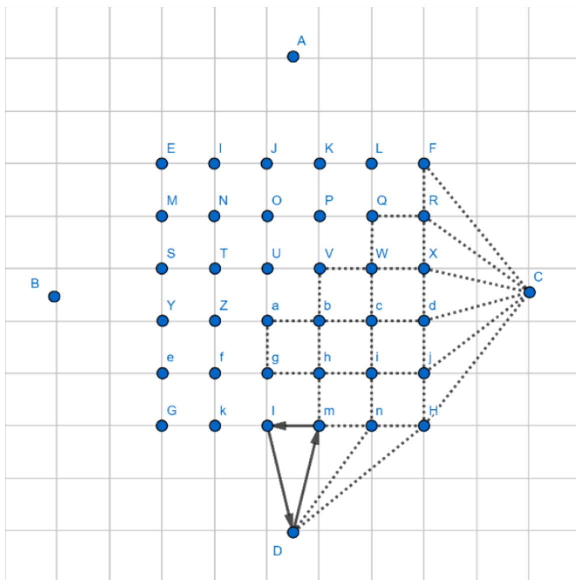
Đẩy G đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là k.

- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k
- Epath: E-B-G.

Bắt đầu từ k, nhận được:

- Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-**k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-k**
- Epath: E-B-G

Delete these trails.

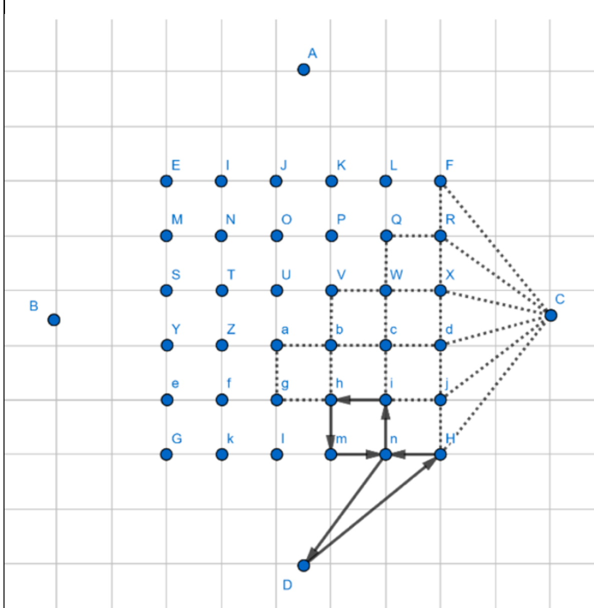
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Đẩy k đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là l

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l
Epath: E-B-G-k

Bắt đầu từ l, nhận được:

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-l.
Epath: E-B-G-k

Delete these trails.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


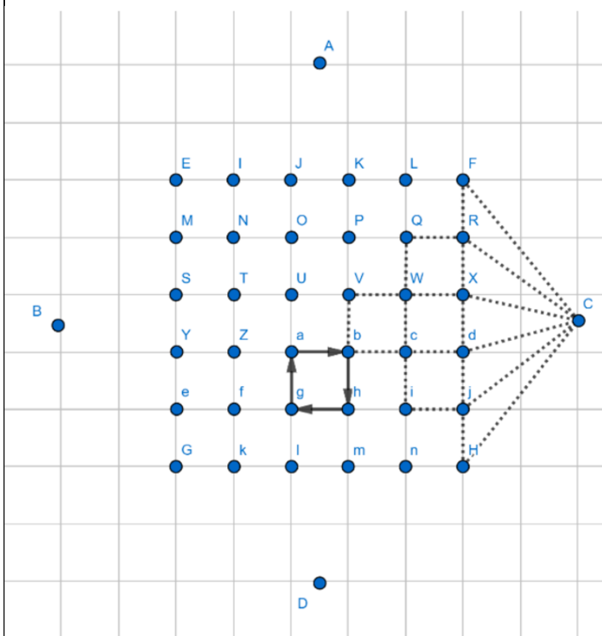
</td>
<td>
Đẩy l đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là m

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m
Epath: E-B-G-k-l

Bắt đầu từ m, nhận được:

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-m
Epath: E-B-G-k-l

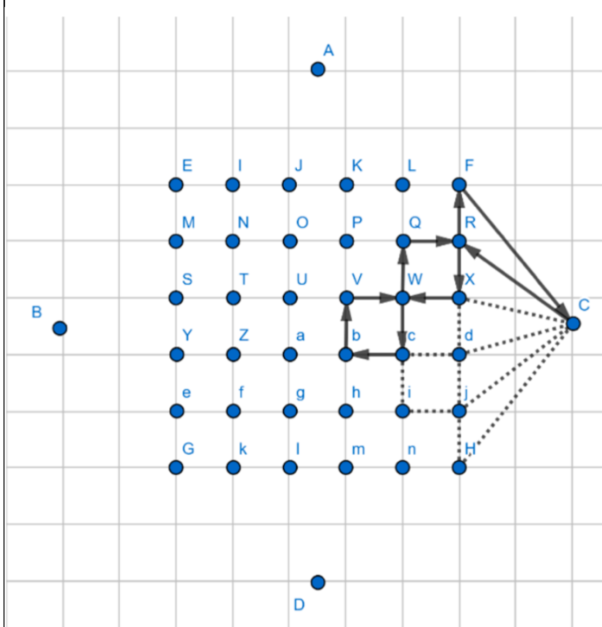
Delete these trails.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Đẩy m đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là h

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h
Epath: E-B-G-k-l-m

Bắt đầu từ h, nhận được:

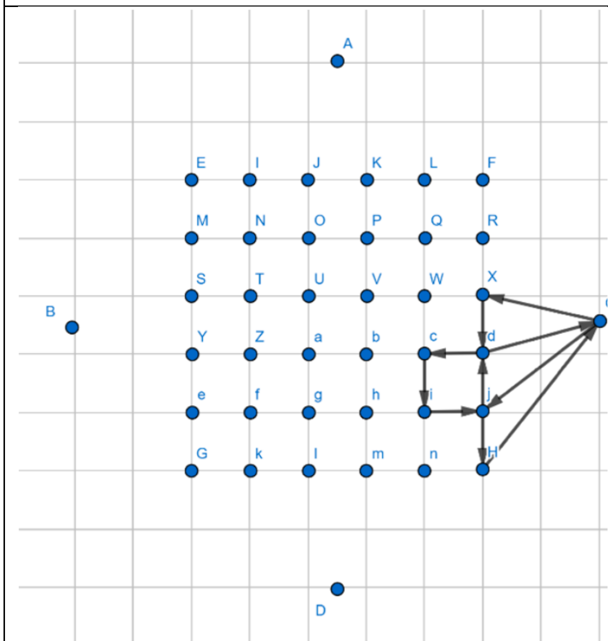
Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-g-a-b-h
Epath: E-B-G-k-l-m

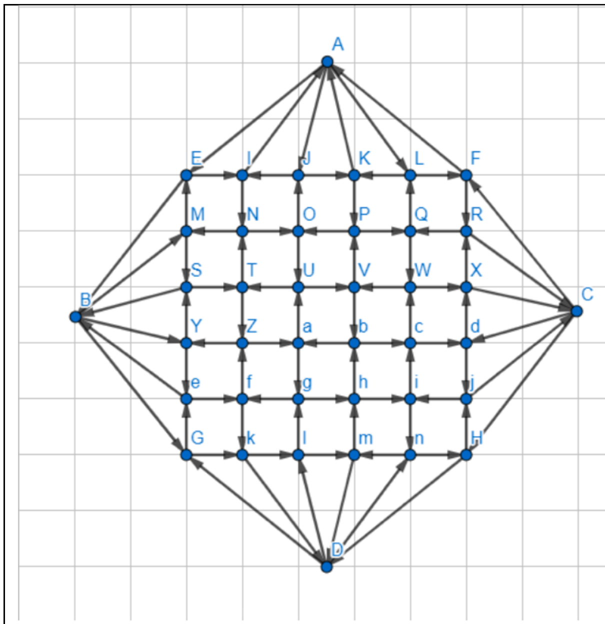
Delete these trails.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Đẩy h đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là b

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-g-a-b
Epath: E-B-G-k-l-m-h

Bắt đầu từ b, nhận được:

Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-g-a-b-V-W-Q-R-F-C-R-X-W-c-b
</td>
</tr>
</table>

	• Epath: E-B-G-k-l-m-h Delete these trails.
	Đẩy b đến epath. Bây giờ điểm khởi đầu là c. • Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-g-a-b-V-W-Q-R-F-C-R-X-W-**c** • Epath: E-B-G-k-l-m-h-b Bắt đầu từ c, nhận được: • Cpath: E-I-N-M-E-A-I-J-O-N-T-S-M-B-S-Y-e-G-D-k-f-e-Y-Z-T-U-O-P-K-J-A-K-L-A-F-L-Q-P-V-U-a-Z-f-g-l-D-m-n-D-H-n-i-h-g-a-b-V-W-Q-R-F-C-R-X-W-**c-i-j-H-C-j-d-C-X-d-c** • Epath**:** E-B-G-k-l-m-h-b Delete these trails.



Kết quả Eulerian circuit cuối cùng nhận được:

E-B-G-k-l-m-h-b-c-d-X-C-d-j-C-H-j-i-c-W-X-R-C-F-R-Q-W-V-b-a-g-h-i-n-H-D-n-m-D-l-g-j-Z-a-U-V-P-Q-L-F-A-L-K-A-J-K-P-O-U-T-Z-Y-e-f-k-D-G-e-B-Y-S-B-M-S-T-N-O-J-I-A-E-M-N-I-E.

Bảng 5: Ứng dụng thuật toán Hierholzer

Question 8: *Map coloring*

Model and color the following map

a. Modeling this map by a graph.

b. Color the map (graph) with a minimum number of colors. Present your solution step by step.

Let be the 4-digit number combined by the last 4 digits in your StudentID.

StudentID 51900564 has = 0564.

0564 % 4 = 0 then start form Bihar.


300 km
200 mi
© d-maps.com
Jammu and Kashmir
Himachal Pradesh
Chandigarh
Punjab
Uttarakhand
Haryana
Delhi
Rajasthan
Uttar Pradesh
Sikkim
Arunachal Pradesh
Assam
Nagaland
Meghalaya
Bihar
Manipur
Jharkhand
Tripura
West Bengal
Mizoram
Gujarat
Madhya Pradesh
Chhattisgarh
Daman and Diu
Orissa
Dadra and Nagar Haveli
Maharashtra
Telangana
Goa
Andhra Pradesh
Karnataka
Pondicherry
Tamil Nadu
Kerala
Lakshadweep
Andaman and Nicobar Islands

Bài làm

a)

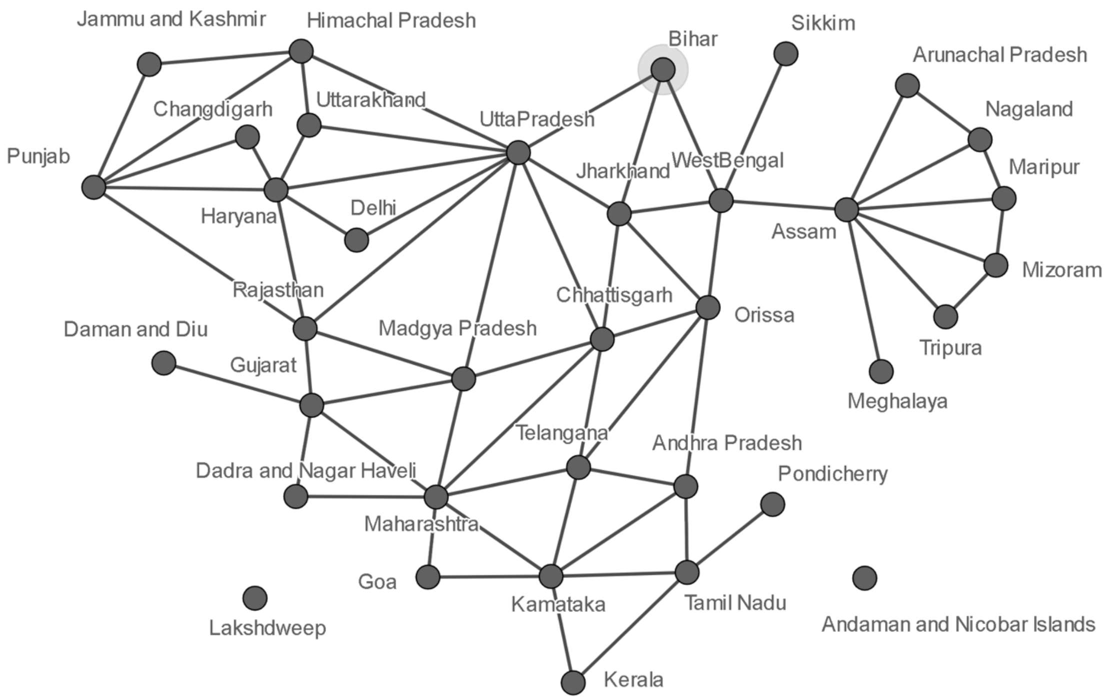


Figure 1: Modeling this map by a graph.

b)

- 0064 % = 0. Therefore, I start from Bihar.
- Bihar is the starting vertex should be colored whatever you wantm,here I choose **red.**
- As far as we know, adjacent edges cannot have the same color and here I apply that rule and use the maximum 4 colors that are **red**, **blue**, **green** and **yellow.**
- I proceed to color Jammu and Kashmir, Hayana, Chhattisgarh, Dadra and Nagar Haveli, Kamataka, Pondicherry, Meghalaya, Tripura in turn **red.**

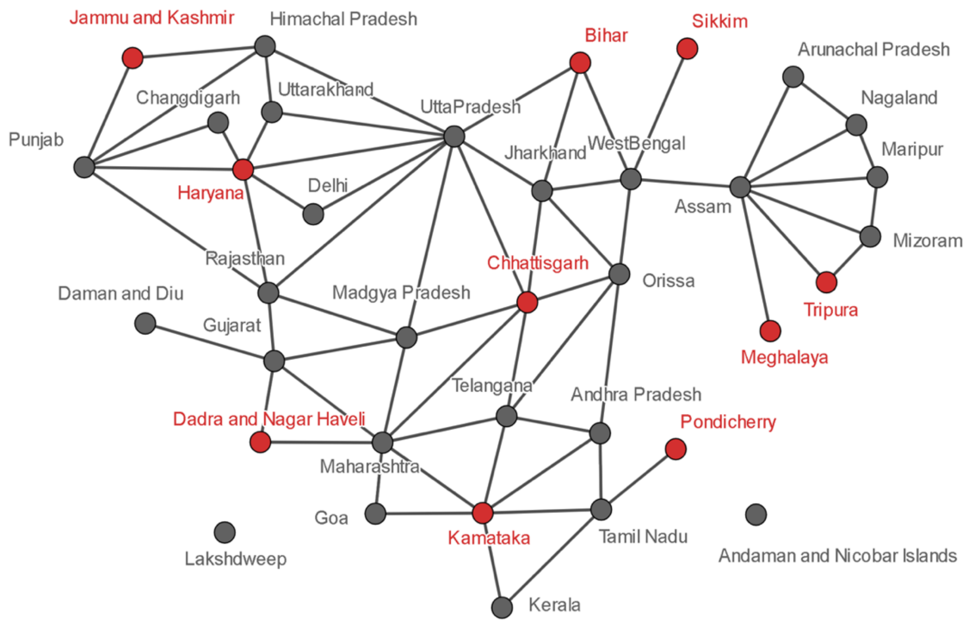


Figure 2: The graph of countries is colored in red

- I proceed to color Changdigarh, UttaPradesh, Gujarat, Goa, Kerala, Telangara, WestBengal, Negaland, Mizoram in turn **blue.**

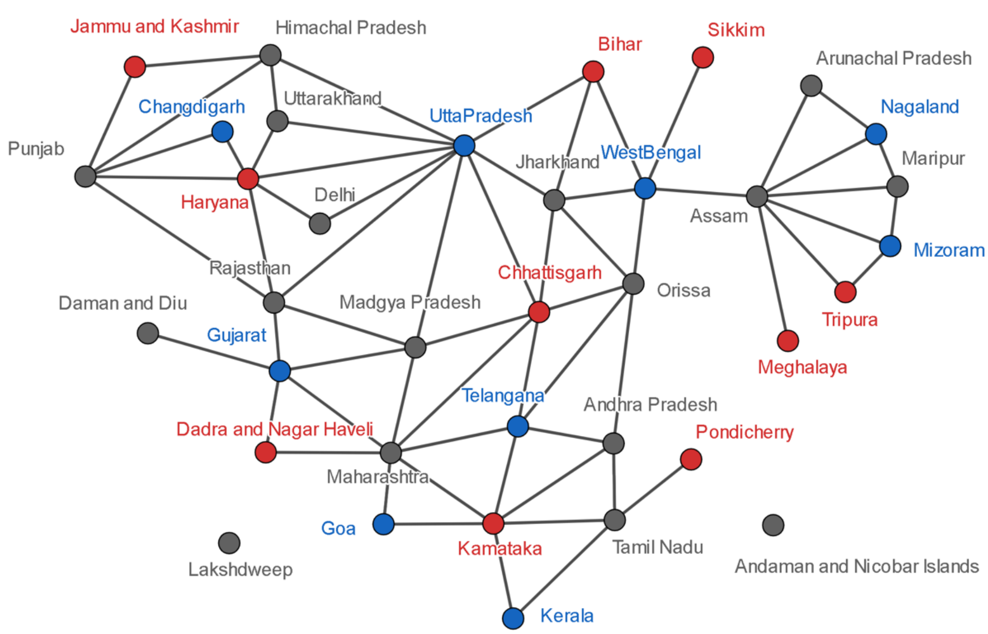


Figure 3: The graph of countries is colored in red and blue

- I proceed to color Himachal Pradesh, Delhi, Rajasthan, Maharashtra, Lakshweep, Jharkhand, Assam, Andhra Pradesh, Andaman and Nicorbar Islands in turn **green.**

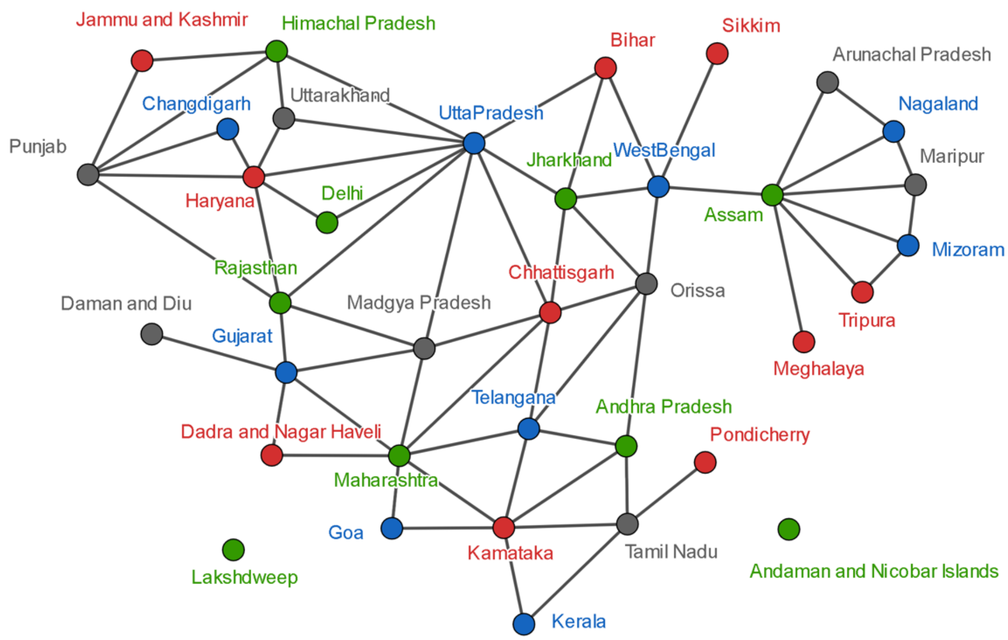


Figure 4: The graph of countries is colored in red, blue and green

- I proceed to color Uttarakhand, Punjab, Daman and Diu, Madgya Pradesh, Orissa, Tamil Nadu, Arunachal Pradesh, Maripur in turn **yellow.**

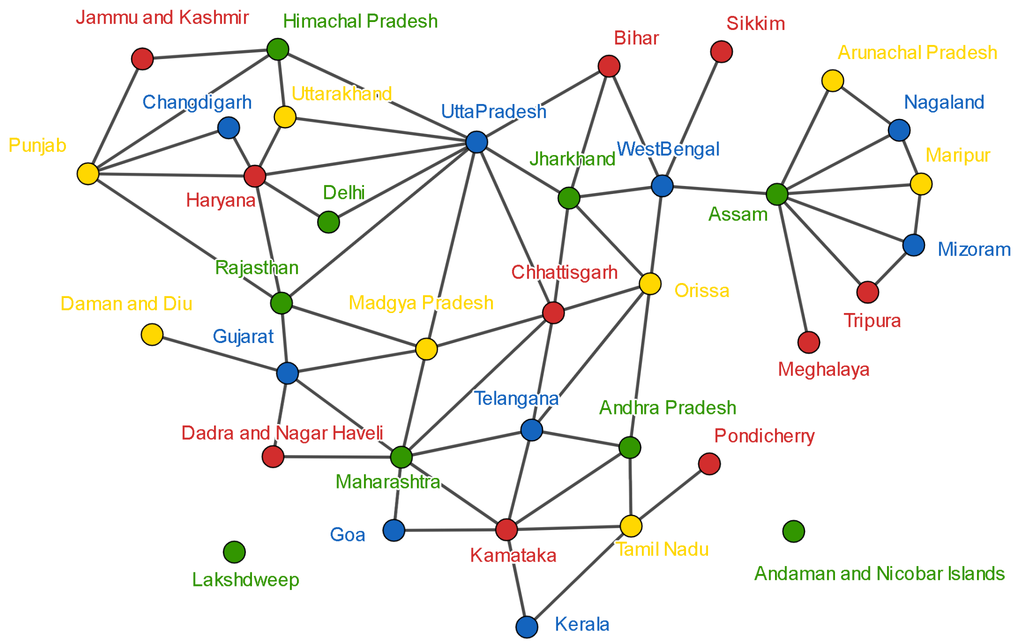


Figure 5: The graph of countries is colored in red and blue

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Ngọc Trân(2021), truy cập ngày 07/ 01/ 202, Extended Euclidean Algorithm: cách tính ước chung lớn nhất và nghịch đảo modulo (viblo.asia).

[2] Wikipedia, truy cập ngày 05/ 01/ 2022, Thuật_toán_Kruskal.

[3] Thầy Nguyễn Văn Linh(2021), truy cập ngày 06/ 01/ 2022, Thuật toán Kruskal tìm cây bao trùm nhỏ nhất (Minimum Spanning Tree - MST)| Youtube

[4] Vietjack, accessed January 07/ 2022 Giải thuật Kruskal: tìm cây khung nhỏ nhất

Tiếng Anh

[1] Blackpenredpen(2018), accessed December 28/ 2021, Bézout's identity: ax+by=gcd(a,b) - YouTube

[2] Wikipedia, accessed December 29/ 2021, Eulerian path - Wikipedia

[3] Wikipedia, accessed December 29/ 2021 Extended Euclidean algorithm - Wikipedia

[4] Ucdenver, accessed December 29/ 2021 Extended Euclidean Algorithm (ucdenver.edu)

[5] SlayStudy, accessed December 30/ 2021, Hierholzer's Algorithm | SlayStudy

[6] Wikipedia, accessed January 2/2022, Modular multiplicative inverse - Wikipedia

[7] Khan Academy, accessed January 03/ 2022, The Euclidean Algorithm (article) | Khan Academy

[8] Greedy, accessed January 06/2022 Kruskal’s Minimum Spanning Tree Algorithm | Greedy Algo-2