Chương 5. GIÁ TRỊ RIÊNG – VECTƠ RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN

5.1. Trị riêng – vectơ riêng

5.2. Chéo hóa ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận

5.3. Ánh xạ tự liên hợp và chéo hóa ma trận đối xứng thực

I. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa và ví dụ.

1.1. **Định nghĩa**: *Cho X, Y là hai K- không gian vectơ. Ánh xạ* $f : X \to Y$ *là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa mãn 2 điều kiện:*

1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in X$
2) $f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad \forall a \in X, \forall \alpha \in K$

Chú ý: *Các điều kiện 1 và 2 tương đương điều kiện sau*:

3) $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \quad \forall a, b \in X, \forall \alpha, \beta \in K$

Một ánh xạ tuyến tính $f : X \to X$ *được gọi là một phép biến đổi tuyến tính của X.*
Như vậy muốn chứng minh f là một ánh xạ tuyến tính thì ta cần kiểm tra điều kiện 1 và 2 hoặc 3.

1.2. Các ví dụ.

1. Ánh xạ không

$$O : X \to Y$$
$$a \mapsto O(a) = \theta$$

là ánh xạ tuyến tính.

2. Ánh xạ đồng nhất

$$id : X \to Y$$
$$a \mapsto id(a) = a$$

là ánh xạ tuyến tính.

3. Ánh xạ

$$f : R^2 \to R$$
$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$$

là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh:

- $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$, ta có

$$f(x+y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$$
$$= (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) =$$
$$= (x_1 + 3x_2) + (y_1 + 3y_2) = f(x) + f(y)$$

- $\forall x = (x_1, x_2) \in R^2, \forall \alpha \in R$, ta có

$$f(\alpha x) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha x_1 + 3\alpha x_2 =$$
$$= \alpha(x_1 + 3x_2) = \alpha f(x)$$

1.3. Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính.

Cho X, Y là hai K- không gian vectơ, $f: X \to Y$ là ánh xạ tuyến, khi đó

1. $f(\theta_x) = \theta_y$
2. $f(-a) = -f(a)$
3. $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ ta có
   $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + ... + \alpha_n f(a_n)$
4. Ánh xạ tuyến tính biến một hệ phụ thuộc tuyến tính thành một hệ phụ thuộc tuyến tính.
5. Ánh xạ tuyến tính không làm tăng hạn của một hệ vectơ.

2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính.

2.1. Định lý cơ bản về sự xác định của ánh xạ tuyến tính.

Định lý 1: *Cho X là không gian vectơ n chiều (dimX=n), E={e_1, e_2,..., e_n} là một cơ sở của X; Y là không gian vectơ tùy ý và b_1, b_2,..., b_n là hệ các vectơ tùy ý trong Y. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $f: X \to Y$ *thỏa mãn* $f(e_i) = b_i, \forall i = 1, 2, ..., n.$

Từ định lý trên ta thấy rằng một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu như ta biết được ảnh của một cơ sở của nó. Và để cho một ánh xạ ta chỉ cần cho ảnh của một cơ sở là đủ.

2.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính.

Giả sử X, Y là hai K- không gian vectơ, dimX=n, dimY=m và ánh xạ tuyến tính $f: X \to Y$. Giả sử E={e_1, e_2,…, e_n} - cơ sở của X, F={f_1, f_2,…, f_m} - cơ sở của Y. Vì $f(e_i) \in Y$ nên $f(e_i)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ các vectơ của F. Ta có

$$f(e_1) = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + ... + a_{1m} f_m$$
$$f(e_2) = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + ... + a_{2m} f_m$$
$$\cdots$$
$$f(e_n) = a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + ... + a_{nm} f_m$$

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, F*. Ta kí hiệu $A=A_{f/E,F}$.

Trường hợp đặc biệt khi f là phép biến đổi tuyến tính của X, $f: X \to X$ và $F \equiv E$ thì ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, E được gọi là ma trận của f trong cơ sở E và kí hiệu là $A_{f/E}$.

Định lý 2: *Hạng của ánh xạ tuyến tính f bằng hạng của ma trận A của nó:*

$$\operatorname{rank} f = r(A).$$

Ví dụ 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^3$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, -x_2)$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, F với các cơ sở E, F cho như sau:

$$E=\{e_1=(1,1),\ e_2=(1,0)\},\ F=\{f_1=(1,1,1),\ f_2=(-1,2,1), f_3=(1,3,2)\}.$$

Giải: Ta có

$$f(e_1) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = (3,0,-1) \qquad (1)$$

$$f(e_2) = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = (1,1,0) \qquad (2)$$

Theo định nghĩa thì ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở E, F là

$$A_{f/E,F} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Giải các phương trình (1) và (2) để tìm a_1, a_2, a_3 và b_1, b_2, b_3. Các phương trình (1), (2) tương đương với các hệ phương trình tuyến tính có ma trận bổ sung tương ứng như sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \to h_2 - h_3} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right]$$

Hệ (1): $a_3=6$; $a_2=1- a_3=-5$; $a_1=3- a_3+ a_2=-8$

Hệ (2): $b_3=3$; $b_2=1- b_3=-2$; $b_1=1- b_3+ b_2=-4$

Vậy

$$A_{f/E,F} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài tập: Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

2.3. Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính.

Cho X, Y là hai K- không gian vectơ, dimX=n, dimY=m, E={e_1, e_2,…, e_n} - cơ sở của X, F={f_1, f_2,…, f_m} - cơ sở của Y. Cho $f: X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính. Đặt A=$A_{f/E,F}$ - là ma trận của f trong cặp cơ sở E, F.

$\forall x \in E$, giả sử

$$[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad [f(x)]_F = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Khi đó công thức sau gọi là *biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

2.4. Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau.

Cho X, Y là hai K- không gian vectơ, dimX = n, dimY = m, E={e_1, e_2,…, e_n}, $E' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ - hai cơ sở của X, F={f_1, f_2,…, f_m}, $F' = \{f'_1, f'_2, ..., f'_n\}$ - hai cơ sở của Y. Cho ánh xạ tuyến tính $f: X \to Y$, khi đó ta có công thức liên hệ giữa ma trận của f trong cặp cơ sở E', F' với ma trận của f trong cơ sở E, F như sau:

$$A_{f/E',F'} = T^{-1}_{FF'}.A_{f/E,F}.T_{EE'},$$

trong đó $T_{EE'}$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang E'.

Nếu $f: X \to X$ là phép biến đổi tuyến tính và E={e_1, e_2,…, e_n}, $E' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ - hai cơ sở của X, ta có

$$A_{f/E'} = T^{-1}_{EE'}.A_{f/E}.T_{EE'}$$

3. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính.

3.1. Định nghĩa, tính chất, định lý.

Định nghĩa: *Cho X, Y là hai K- không gian vectơ (không gian tuyến tính),* $f: X \to Y$ *là ánh xạ tuyến tính (axtt)*

**Kí hiệu:* $\mathrm{Kerf} = \{x \in X \mid f(x) = \theta\}$ – *gọi là hạt nhân của axtt f.*

**Kí hiệu:* $\mathrm{Imf} = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ – *gọi là ảnh của axtt f.*

Tính chất: *Cho* $f: X \to Y$ *là axtt, khi đó*

a) *Kerf là không gian con của X.*

b) *Imf là không gian con của X.*

c) *Nếu dimX = n thì dimImf + dimKerf = dimX = n.*

Định lý 3: *Hạng của axtt f là số chiều của Imf : rankf = dimImf*

3.2. Cách tìm hạt nhân và ảnh.

Cho ánh xạ tuyến tính $f: X \to Y$, dimX = n, dimY = m.

3.2.1. Cách tìm hạt nhân.

Chọn E={$e_1, e_2, \dots, e_n$} là một cơ sở của X, F={$f_1, f_2, \dots, f_m$} là một cơ sở của Y.

Ta có: $[f(x)]_F = A[x]_E$. Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Kerf} &\Leftrightarrow f(x) = \theta \\ &\Leftrightarrow [f(x)]_F = \theta \\ &\Leftrightarrow A[x]_E = \theta \quad (*) \end{aligned}$$

Như vậy $x \in \mathrm{Kerf}$ khi và chỉ khi tọa độ của x trong cơ sở E là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (*). Từ đó để tìm Kerf ta làm như sau:

1. Tìm A=$A_{f/E,F}$ – ma trận của f đối với cơ sở E, F.
2. Giải hệ phương trình thuần nhất

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Kerf là tập tất cả các vectơ có tọa độ trong cơ sở E là nghiệm của (*). Hệ nghiệm cơ bản của (*) chính là cơ sở của Kerf trong cơ sở E.

Chú ý: Ta thường lấy E, F là cơ sở chính tắc của X, Y.

3.2.3.Cách tìm ảnh.

Vì $e_1, e_2, \dots, e_n$ là hệ sinh của X nên $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ là hệ sinh của Imf, hay Imf = span{ $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$}. Ta tìm một hệ con độc lập tuyến tính (đltt) tối đại của $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$, đó là cơ sở của Imf (Số vectơ đltt tối đại bằng hạng của các vectơ $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$).

Ví dụ 2: Cho axtt $f: R^3 \to R^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

a) Tìm Kerf, cơ sở Kerf và dimKerf.

b) Tìm cơ sở của Imf và dimImf.

Giải: a) $(x_1, x_2, x_3) \in \text{Kerf} \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \theta \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ta biến đổi ma trận hệ số:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = -t, \quad t \in R \\ x_1 = 3t \end{cases}$$

Vậy:

$\text{Kerf} = \{x \in R^3 \mid x = t(3,-1,1), t \in R\}$

$\{(3,-1,1)\}$ là cơ sở của Kerf và dimKerf =1.

b) Ta tìm ảnh của f đối với cơ sở chính tắc E=$\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

Ta có: $f(e_1)=(1,0,1)$, $f(e_2)=(2,1,1)$, $f(e_3)=(-1,1,-2)$,

Imf = span$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Tìm hệ con đltt cực đại của hệ $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ bằng cách tìm hạng của nó:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{h_3 \to h_3 + h_1}{\xrightarrow{h_2 \to h_2 - 2h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy cơ sở của Imf là $\{f(e_1), f(e_2)\}$ và dimImf =2.

Chú ý: Trong trường hợp này ta cũng hiểu rằng Imf = span$\{f(e_1), f(e_2)\}$. Nếu hạng của hệ $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ bằng 3 thì ta có Imf = R^3 (?).

4. Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

4.1. Các định nghĩa.

Cho $f: X \to Y$ *là axtt, khi đó*

- *f gọi là đơn cấu nếu f đơn ánh.*
- *f gọi là toàn cấu nếu f toàn ánh.*

- *f gọi là đẳng cấu nếu f song ánh.*

4.2. Các định lý.

Định lý 4: *Cho* $f: X \to Y$ *là axtt, khi đó*

1) f đơn cấu $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\theta\}$

2) f toàn cấu $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = Y$

Định lý 5: *Cho X, Y là các không gian tuyến tính hữu hạn chiều và axtt* $f: X \to Y$. *Khi đó f là đẳng cấu khi và chỉ khi dimX = dimY.*

II. GIÁ TRỊ RIÊNG – VECTƠ RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN, ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận, ánh xạ tuyến tính.

1.1. Giá trị riêng, giá trị riêng của ma trận.

1.1.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1: Số $\lambda \in K$ gọi là giá trị riêng (GTR) của A nếu tồn tại vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\tau \in K^n, x \neq \theta$ sao cho:

$$Ax = \lambda x \ (*) \quad (A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}).$$

Khi đó vectơ x gọi là vectơ riêng (VTR) của A ứng với GTR λ.

Nhận xét: Từ $(*)$ ta có: $(A - \lambda I)x = \theta \ (x \neq \theta)$.

Định nghĩa 2: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K), \lambda \in K$.

a) Đa thức

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

gọi là đa thức đặc trưng của A.

b) Phương trình

$$P_A(\lambda) = 0$$

gọi là phương trình đặc trưng của A.

Định nghĩa 3: *Tập hợp tất cả các VTR của A ứng với GTR* λ *và bổ sung vectơ* θ *gọi là không gian riêng (KGR) của A ứng với GTR* λ.

Nhận xét: KGR của A ứng với GTR λ là không gian nghiệm của hệ phương trình: $(A-\lambda I)x=\theta.$

Định nghĩa 4: *Hai ma trận* $A, B \in M_n(K)$ *gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P không suy biến (* $\det P \neq 0$*) sao cho:*

$$B = P^{-1}AP.$$

1.1.2. Tính chất.

Định lý 1: *Nếu x là VTR của A ứng với GTR* λ*, thì* $\alpha x\ (\alpha \neq 0)$ *cũng là VTR của A ứng với GTR* λ.

Định lý 2: *Hai ma trận đồng dạng có cùng GTR.*

1.1.3. Cách tìm GTR, VTR của ma trận vuông A.

Ta tiến hành các bước sau:

1) Giải phương trình đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0 \quad (**).$$

Nghiệm của $(**)$ là GTR của A.

2) Giả sử λ_k là một nghiệm của $(**)$. Ta giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$(A-\lambda_k I)x = \theta \quad (3*).$$

Nghiệm không tầm thường của $(3*)$ là VTR của A ứng với GTR λ_k.

Chú ý: $r = r(A-\lambda_k I) < n$ (vì $\det(A-\lambda_k I)=0$) nên KGR S_k của A ứng với GTR λ_k (tức là không gian nghiệm S_k của $(3*)$) có $\dim S_k = n-r$ (hay nói cách khác, KGR S_k của A ứng với GTR λ_k có $(n-r)$ VTR độc lập tuyến tính).

Ví dụ 1. Tìm GTR, VTR, cơ sở của KGR và các KGR của ma trận A

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Giải: a) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda)=0$.

Ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \quad (m_1=1) \\ \lambda_2 = 1 \quad (m_2=2) \end{array}\right.$$

- $\lambda_1 = -1\,(m_1 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x = \theta$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0\,, \quad t \in R \setminus \{0\}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$ có dạng:
  $x = (-t, 0, t) = t(-1,0,1), \quad t \in R \setminus \{0\}.$
- Một cơ sở của KGR $S_1 (\dim S_1 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$: $a_1 = (-1,0,1)$.
- KGR $S_1 = \text{span}\{a_1\} = \{x \in R^3 | \ x = t(-1,0,1),\ t \in R\}$

- $\lambda_2 = 1\,(m_2 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A-I)x = \theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-I)x = \theta \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v, \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$ có dạng:
  $x = (t, v, t) = t(1,0,1) + v(0,1,0), \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$
- Một cơ sở của KGR $S_2 (\dim S_2 = 2)$ của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$:
  $a_2 = (1,0,1), a_3 = (0,1,0)$.
- KGR $S_2 = \text{span}\{a_2, a_3\} = \{x \in R^3 | x = t(1,0,1) + v(0,1,0),\ t, v \in R\}$

b) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

Ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 \\ -3 & -7-\lambda & -7 \\ 4 & 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & (m_1 = 2) \\ \lambda_2 = 3 & (m_2 = 1) \end{array}\right..$$

- $\lambda_1 = -1\,(m_1 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x = \theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to \frac{1}{4}h_3]{h_1 \to \frac{1}{2}h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 + 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_2 \leftrightarrow h_3]{h_2 \to h_2 + 2h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad t \in R \setminus \{0\}.$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$ có dạng:
  $x = (-2t, t, 0) = t(-2,1,0), \quad t \in R \setminus \{0\}.$
- Một cơ sở của KGR $S_1(\dim S_1 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$: $a_1 = (-2,1,0)$.
- KGR $S_1 = \text{span}\{a_1\} = \{x \in R^3 | \, x = t(-2,1,0), t \in R\}$

- $\lambda_2 = 3\,(m_2 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A-3I)x = \theta$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -3 & -10 & -7 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to \frac{1}{4}h_3]{h_1 \to \frac{1}{2}h_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & -10 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 + h_1]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -16 & -16 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 4h_2]{h_2 \to -\frac{1}{16}h_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-3I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t, \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in R \setminus \{0\}.$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2 = 3$ có dạng:
  $x = (t, -t, t) = t(1,-1,1), \quad t \in R \setminus \{0\}.$
- Một cơ sở của KGR $S_2(\dim S_2 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_2 = 3$: $a_2 = (1,-1,1)$.

KGR $S_2 = \text{span}\{a_2\} = \{x \in R^3 | x = t(1,-1,1), t \in R\}$

1.2. Giá trị riêng, giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính.

1.2.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 5: *Cho X là một K-không gian vectơ,* $\dim X = n$, $f \in L(X,X)$. *Số* $\lambda \in K$ *được gọi là giá trị riêng (GTR) của f, nếu tồn tại vectơ* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\tau \in K^n, x \neq \theta$ *sao cho:*

$$f(x) = \lambda x.$$

Khi đó vectơ x được gọi là vectơ riêng (VTR) của f ứng với GTR λ.

Định nghĩa 6: *Tập hợp tất cả các VTR của f ứng với GTR* λ *và bổ sung vectơ* θ *gọi là không gian riêng (KGR) của f ứng với GTR* λ.

1.2.2. Tính chất.

Định lý 3: *Cho X là một K-không gian vectơ,* $\dim X = n$, $f: X \to X$ *và A là ma trận của f trong một cơ sở bất kỳ E={e₁, e₂,..., eₙ} của X. Khi đó:*

1) *GTR của f cũng là GTR của A và ngược lại.*
2) *Vectơ x là VTR của f ứng với GTR* λ *khi và chỉ khi cột tọa độ* $[x]_{/E}$ *của x trong cơ sở E là VTR của A ứng với GTR* λ.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow A[x]_{/E} = \lambda[x]_{/E}.$$

$$\text{(với } [x]_{/E} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n\text{)}$$

1.2.3. Cách tìm GTR, VTR của ánh xạ tuyến tính.

Dựa vào định lý 3 ta thấy việc tìm GTR và VTR của ánh xạ tuyến tính f đưa về việc tìm GTR và VTR của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó. Bởi vậy ta tiến hành các bước sau:

1) Lập ma trận A của f trong một cơ sở nào đó.
2) Tìm GTR và VTR của A.

Chú ý: Nếu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là VTR của A ứng với GTR λ thì $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ là VTR của f ứng với GTR λ.

Ví dụ 3. Tìm GTR và cơ sở trong KGR của ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$, xác định bởi:

$$f(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2.$$

Giải:

Xác định ma trận A của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{1,x,x^2\}$:

$$\begin{cases} f(1)=3-2x \\ f(x)=-2+3x \\ f(x^2)=5x^2 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải phương trình đặc trưng:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1=1 & (m_1=1) \\ \lambda_2=5 & (m_2=2) \end{array}\right..$$

Vậy GTR của f : $\lambda_1=1\,(m_1=1)$, $\lambda_1=5\,(m_2=2)$

- $\lambda_1=1\,(m_1=1)$

Giải hệ phương trình $(A-I)x=\theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-I)x=\theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-2x_2=0 \\ 4x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=t \\ x_2=t, \quad t\in R\setminus\{0\}. \\ x_3=0 \end{cases}$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1=1$ có dạng:

$$x=(t,t,0)=t(1,1,0), \quad t\in R\setminus\{0\}.$$

- Một cơ sở của KGR $S_1(\dim S_1=1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1=1$: $a_1=(1,1,0)$. Nó là tọa độ của đa thức $P_1=1+x$ trong cơ sở E. Vậy một cơ sở của KGR tương ứng của f là $\{P_1\}$.

- $\lambda_2=5\,(m_2=2)$

Giải hệ phương trình $(A-5I)x=\theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-5I)x = \theta \Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t\ , \\ x_3 = v \end{cases} \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2 = 5$ có dạng:

  $x = (t, v, t) = t(-1,1,0) + v(0,0,1), \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$

- Một cơ sở của KGR $S_2 (\dim S_2 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$: $a_2 = (-1,1,0)$, $a_3 = (0,0,1)$. Chúng là tọa độ của các đa thức tương ứng $P_2 = -1 + x, P_3 = (0,0,1)$ trong cơ sở E. Vậy một cơ sở của KGR tương ứng của f là $\{P_2, P_3\}$.

2. Chéo hóa ma trận, ánh xạ tuyến tính.

2.1. Chéo hóa ma trận.

2.1.1. Định nghĩa 7**:** Cho *ma trận vuông A*, nếu *tồn tại ma trận khả đảo T* sao cho *$T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo* thì ta nói rằng *ma trận A chéo hóa được và ma trận T làm chéo hóa ma trận A* hay *ma trận A đưa được về dạng chéo hóa nhờ ma trận T.*

2.1.2. Điều kiện chéo hóa được của một ma trận.

Trong các định lý sau đây, ta luôn giả thiết rằng A ma trận vuông cấp n.

Định lý 4: *Điều kiện cần và đủ để ma trận A chéo hóa được là nó có n VTR độc lập tuyến tính.*

Định lý 5: *Nếu ma trận A đưa được về dạng chéo B thì các phần tử trên đường chéo chính của B là các GTR của A.*

Định lý 6: *p VTR ứng với p GTR khác nhau của A là độc lập tuyến tính (đltt).*

Định lý 7: *Nếu λ_k là nghiệm bội m_k của phương trình đặc trưng của A và nếu*

$$r(A - \lambda_k I) = n - m_k$$

thì A có m_k VTR đltt ứng với GTR λ_k đó.

Từ các định lý trên ta có:

Định lý 8: *Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi với mỗi GTR λ_k bội m_k của A $(m_1 + m_2 + ... + m_p = n)$, có*

$$r(A - \lambda_k I) = n - m_k \quad (\forall k = 1, 2, ..., p).$$

Chú ý: Nếu ma trận vuông A cấp n có n GTR phân biệt thì A chéo hóa được.

Ví dụ 4: Cho $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Từ kết quả của ví dụ 1, ta có:

$$r(A-\lambda_1 I)=1=3-2,$$
$$r(A-\lambda_2 I)=2=3-1.$$

Vậy (theo định lý 8) A chéo hóa được.

Ví dụ 5: Cho $A=\begin{pmatrix}1&4&6\\-3&-7&-7\\4&8&7\end{pmatrix}$.

Từ kết quả của ví dụ 2, ta có:

$$r(A-\lambda_1 I)=2\neq 3-2=1.$$

Vậy (theo định lý 8) A không chéo hóa được.

Ví dụ 6: Cho $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&2&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Ta có:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-2\\2&2-\lambda&-2\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=-1\quad(m_1=1)\\\lambda_2=1\quad(m_2=1)\\\lambda_3=2\quad(m_3=1)\end{array}\right..$$

Vì A la ma trận vuông cấp 3 có 3 GTR phân biệt nên A chéo hóa được.

Ví dụ 7: Cho $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Bản thân A là ma trận đường chéo. Dễ dàng thấy A thỏa mãn điều kiện chéo hóa.

Thực vậy đối với GTR $\lambda=0\,(m=3)$, ta có:

$$r(A-\lambda I)=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0=3-3.$$

2.1.3. Cách chéo hóa ma trận.

1) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ để tìm các GTR của A: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ với bội tương ứng $m_1, m_2, ..., m_p$.

2) Kiểm tra điều kiện chéo hóa.

   a) Nếu $p = n$ thì A chéo hóa được.

   b) Nếu $\forall k\,(k = 1, 2, ..., p)$: $r(A - \lambda_k I) = n - m_k$ thì A chéo hóa được.

   c) Nếu $\exists k : r(A - \lambda_k I) \neq n - m_k$ thì A không chéo hóa được.

Chú ý: Nếu A chéo hóa được thì A được đưa về ma trận chéo B có dạng:

a) $$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}\right\} m_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \left.\begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix}\right\} m_p \end{pmatrix}$$

Để tìm ma trận T không suy biến $(\det T \neq 0)$: $B = T^{-1}AT$ ta tiến hành bước tiếp sau:

3) • Ứng với mỗi GTR λ_k, giải hệ phương trình $(A - \lambda_k I)x = \theta$, tìm được m_k VTR đltt

$$a_1^k, a_2^k, ..., a_{m_k}^k \text{ ứng với } \lambda_k.$$

• Sau đó ta lập hệ:

$$(a) = \{a_1^1, a_2^1, ..., a_{m_k}^1, ..., a_1^p, a_2^p, ..., a_{m_p}^p\}$$

là cơ sở của không gian K^n, bao gồm các VTR.

• Lập ma trận T

$$T = \begin{pmatrix} | & & | & & | & & | \\ a_1^1 & \cdots & a_{m_1}^1 & \cdots & a_1^p & \cdots & a_{m_p}^p \\ | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

là ma trận mà có cột thứ j là vectơ thứ j trong cơ sở (a).

Ví dụ 8: Chéo hóa ma trận $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Giải: Trong ví dụ 4 đã chỉ ra rằng ma trận A chéo hóa được. Ví dụ 1 đưa ra một cơ sở mới bao gồm các VTR

$a_1=(-1,0,1),\quad a_2=(1,0,1),\quad a_3=(0,1,0),$

Lập ma trận T

$$T=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

Vậy

$$B=T^{-1}AT=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

***Chú ý:** Nếu A là ma trận chéo hóa được thì ta luôn tìm được ma trận T và ma trận chéo B như trong phương pháp trên: $A=TBT^{-1}$.Khi đó

$$A^2=A.A=(TBT^{-1}).(TBT^{-1})=TB(T^{-1}T)BT^{-1}=TB^2T^{-1}$$

$$A^3=A^2.A=(TB^2T^{-1}).(TBT^{-1})=TB^3T^{-1}$$

....

$$A^n=A^{n-1}.A=TB^{n-1}T^{-1}.TBT^{-1}=TB^nT^{-1}$$

Đây là một trong những lợi ích của việc chéo hóa ma trận.

Ví dụ 9: Cho $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Tìm A^n.

Giải: Theo ví dụ 8, ta biểu diễn được: $A=TBT^{-1}$, trong đó

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Vậy

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-1)^n & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & 2 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 0 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Chéo hóa phép biến đổi tuyến tính.

Cho phép biến đổi tuyến tính $f : X \to X, \dim X = n$. Lấy E là một cơ sơ bất kì của X, khi đó ta có ma trận của f là $A = A_{f/E}$.

Ta tiến hành chéo hóa ma trận A. Nếu A là ma trận chéo hóa được thì ta có n VTR đltt. Chọn n vectơ này lập thành cơ sở của X, khi đó ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở vừa lập được chính là ma trận chéo $B=T^{-1}AT$.

3. Ánh xạ tự liên hợp và chéo hóa ma trận đối xứng thực.

3.1. Ma trận trực giao.

Định nghĩa 8.1: *Ma trận trực giao la ma trận vuông có tổng bình phương các phần tử của mỗi hàng bằng 1, còn tổng các tích các phần tử tương ứng của hai hàng khác nhau thì bằng 0.*

Ví dụ: Các ma trận sau đây là ma trận trưc giao:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 8.1: *Cho* $A \in M_n(R)$, $\det A \neq 0$. *Ma trận A là ma trận trực giao nếu* $A^T = A^{-1}$.

3.2. Phép biến đổi tự liên hợp.

Cho X là không gian Euclide n chiều và phép biến đổi tuyến tính (PBĐTT) $f : X \to X$.

Định nghĩa 9: *PBĐTT f được gọi là phép biến đổi (PBĐ) tự liên hợp nếu*

$$\forall x, y \in X \text{ ta có: } < f(x), y > = < x, f(y) >.$$

Định lý 9: *PBĐTT f được gọi là phép biến đổi tự liên hợp khi và chỉ khi ma trận A của nó trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng* $A = A^T$.

Từ định lý 9 suy ra các tính chất phát biểu cho PBĐ tự liên hợp cũng là các tính chất của ma trận đối xứng của nó trong một cơ sở trực chuẩn nào đó và ngược lại.

Định lý 10: *Cho A là ma trận đối xứng thực. Khi đó*

a) Mọi GTR của ma trận đối xứng thực A là các số thực.

b) Nếu λ_k *là một GTR bội* m_k *của A thì KGR ứng với* λ_k *là không gian k chiều, nghĩa là nó có k VTR (ứng* λ_k*) đltt.*

3.3. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

1) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

2) Tìm một cơ sở trực chuẩn cho KGR ứng với mỗi GTR.

a) Nếu λ_k bội $m_k = 1$, thì lấy một VTR bất kỳ ứng với λ_k, rồi chuẩn hóa nó.

b) Nếu λ_k bội $m_k > 1$, thì có thể tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với λ_k bằng cách tìm một cơ sở của KGR ứng với λ_k, sau đó áp dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.

Và tiếp tục quá trình như vậy sao cho vectơ nghiệm sau trực giao với mọi vectơ nghiệm đã chọn trước đó và có chuẩn bằng 1. Cuối cùng ta được cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_k, \forall k$. Và ghép chúng lại ta được cơ sở trực chuẩn gồm các VTR.

Ví dụ 10: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm ma trận trực giao Q để đưa A về dạng chéo $B = Q^{-1}.A.Q$. Tìm ma trận chéo B.

Giải: Trước hết ta nhận xét A là ma trận đối xứng nên A chéo hóa trực giao được.

1) Giải phương trình đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \, (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = -1 \, (m_2 = 2) \end{array} \right.$$

2) Tìm một cơ sở trực chuẩn của từng KGR:

- $\lambda_1 = 5 \, (m_1 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A - 5I)x = \theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (A-I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t, \quad t \in R \setminus \{0\}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Lấy $a_1 = (1,1,1)$, chuẩn hóa a_1 được $a_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

- $\lambda_2 = -1\,(m_2 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x = \theta \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v \quad , \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0. \\ x_3 = -t - v \end{cases}$$

Để tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_2 = -1$, ta làm như sau:

Lấy $a_2 = (1,0,-1)$, $a_3 = (0,1,-1)$ là cơ sở.

Đặt $a_2' = \frac{a_2}{\|a_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

$$\overline{a}_3 = a_3 - \langle a_3, a_2' \rangle a_2' = (0,1,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a_2' = \frac{\overline{a}_3}{\|\overline{a}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$

3) Ma trận Q và B cần tìm là:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Ma trận Q không là duy nhất vì Q phụ thuộc vào cách chọn VTR.