ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(45 tiết)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Toán học cao cấp, tập 1, Đại số và hình học giải tích, Nguyễn Đình Trí (chủ biên), NXB Giáo dục, 2009

[2] Toán cao cấp, Đại số tuyến tính, Đỗ Công Khanh (chủ biên), NXB ĐHQG TP.HCM, 2010

[3] Giáo trình Toán cao cấp A_3, TS. Đỗ Văn Nhơn, NXB ĐHQG TP.HCM, 2009

[4] Jean-Marie Monier, Giáo trình Toán, Đại số 1-2, NXB Giáo dục 2001

Chương 1. Ma trận – Định thức

§1. MA TRẬN

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho tập $M \neq \varnothing$, m, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta gọi một *ma trận cỡ $m \times n$* trên M là một bảng hình chữ nhật gồm m.n phần tử của M được xếp thành m hàng và n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} , ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) được gọi là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A (hay phần tử ở vị trí (i, j) của ma trận A). Ta gọi i là chỉ số hàng và j là chỉ số cột.

- Để đơn giản, ma trận A còn được viết dưới dạng $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m\times n}$

- Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cỡ và $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall$ i, j. Khi đó ta ký hiệu A = B.

- Khi m = n thì A là ma trận vuông cỡ n×n, ta gọi nó là *ma trận vuông cấp n*. Ký hiệu là $A = [a_{ij}]_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính* của A, đường chéo còn lại được gọi là *đường chéo phụ*.

- Ma trận cỡ 1×n được gọi là *ma trận hàng* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$
- Ma trận cỡ m×1 được gọi là *ma trận cột* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

- Ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là *ma trận không*.

Ký hiệu là O.

Chú ý. Từ nay về sau ta chỉ xét các ma trận thực, tức là các ma trận có mọi phần tử $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 2. Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$. Khi đó

- A được gọi là *ma trận chéo* nếu các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0, nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Ma trận chéo cấp n mà tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị* cấp n. Ký hiệu là I_n (hoặc I)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- A được gọi là *ma trận tam giác trên* (*dưới*) nếu tất cả các phần tử *nằm phía dưới* (*trên*) đường chéo chính đều bằng 0, nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j, (\forall i < j)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2. Các phép toán ma trận

1.2.1. Phép cộng ma trận

1. **Định nghĩa.** Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng A + B là ma trận

   $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$

VD.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Tính chất.**
   - $A + B = B + A$
   - $A + O = O + A = A$
   - $(A + B) + C = A + (B + C)$
   - Ký hiệu: $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận đối của ma trận A.

   Khi đó $A + (-A) = (-A) + A = O$

Hiệu của hai ma trận: $A - B = A + (-B)$

1.2.2. Phép nhân một số với một ma trận

1. Định nghĩa. Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Tích λA là ma trận $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, trong đó $\lambda a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$

<u>**VD.**</u>

$$5\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -20 & 0 \\ 15 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Tính chất.

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$
- $\lambda(\beta A) = (\lambda\beta)A$
- $1.A = A$; $0.A = O$

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

1. **Định nghĩa.** Cho A = $[a_{ij}]_{m\times n}$ và B = $[b_{ij}]_{n\times p}$. Điều kiện để thực hiện được phép nhân AB là số cột của A phải bằng số hàng của B. Khi đó tích AB là ma trận C = $[c_{ij}]_{m\times p}$, trong đó

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,p}$$

Nghĩa là để có phần tử đứng ở hàng i cột j trong ma trận tích, ta lấy lần lượt từng phần tử đứng ở hàng i trong ma trận A nhân với từng phần tử tương ứng đứng ở cột j trong ma trận B rồi cộng lại.

VD.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}9 & 12 & -11\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.\ \text{Không có tích BA}$$

- Tích của hai ma trận nói chung không giao hoán: $AB \neq BA$. Chẳng hạn

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 11 & 4\end{pmatrix};\ BA=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow AB\neq BA$$

2. Tính chất. Với giả thiết các phép toán thực hiện được, ta có

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; $\lambda \in \mathbb{R}$
- $A.I = A$; $I.B = B$ (I là ma trận đơn vị)
- $A.O = O$; $O.B = O$

3. Lũy thừa ma trận. Cho A là ma trận vuông cấp m và $n \in \mathbb{N}$.

Lũy thừa n của A là ma trận vuông cấp m, ký hiệu A^n, được định nghĩa như sau: $A^o = I$; $A^1 = A$; $A^2 = A.A$;...; $A^n = A^{n-1}.A$

VD. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^3

Ta có: $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính chất.

- $O^n = O; \ \forall n \geq 1$
- $I^n = I; \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $(AB)^n = A^n B^n \Leftrightarrow AB = BA$
- $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^n \end{pmatrix}$
- $A^n = O \not\rightarrow A = O$
- $AB = O \not\leftrightarrow A = O$ hoặc $B = O$

1.3. Phép chuyển vị

1. Định nghĩa. (Ma trận chuyển vị)

Cho ma trận

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là *ma trận chuyển vị* của A, ký hiệu là: A^T (hoặc A^C)

Vậy:

$$A^T = \left[a_{ji}\right]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

VD.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ thì } A^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ thì } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Đường chéo chính không đổi qua phép chuyển vị nếu A là ma trận vuông

Tính chất.

- $I_n^T = I_n$
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

2. Định nghĩa. Ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$ được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $A^T = A$, tức $a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j = \overline{1, n}$

VD.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ là ma trận đối xứng

(Các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau)

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa. Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$. *Định thức* của ma trận A được ký hiệu là |A| hoặc detA, được định nghĩa như sau:

- A là ma trận cấp 1: $A = (a_{11})$ thì ta có định thức cấp 1 của ma trận A là

$|A| = |a_{11}| = a_{11}$

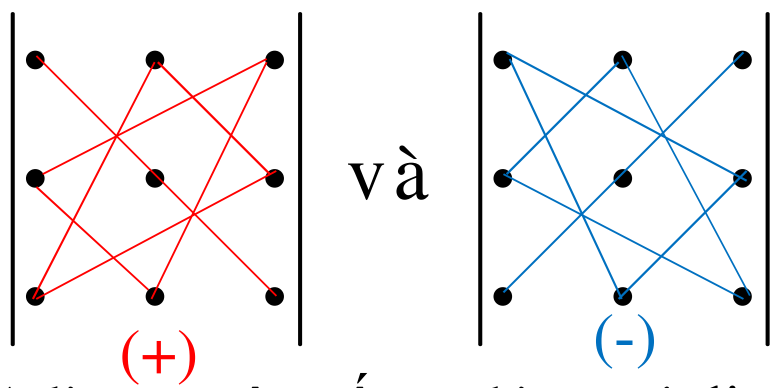
- A là ma trận cấp 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì ta có định thức cấp 2 của ma trận A là $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

▪ A là ma trận cấp 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ thì ta có định thức cấp 3 của ma trận A là

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

<u>Quy tắc Sarius.</u> Ta tính định thức cấp 3 theo hai sơ đồ sau



▪ Tương tự, nếu A là ma trận cấp n thì ta có định thức cấp n của ma trận A.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2;$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

2.2. Các định thức đặc biệt

- $|I_n| = 1$
- Định thức đường chéo $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$
- Định thức tam giác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Tam giác trên

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Tam giác dưới

2.3. Các tính chất của định thức

Tính chất 1. Định thức không đổi qua phép chuyển vị: $|A^T| = |A|$

VD.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Tính chất 2. Nếu đổi chỗ 2 hàng thì định thức đổi dấu.

VD.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tính chất 3. Một định thức có 2 hàng giống nhau thì định thức bằng 0.

VD.
$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ y & y^3 & y^5 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 4. Một định thức có một hàng bằng 0 (tức mọi phần tử của hàng đó bằng 0) thì định thức bằng 0.

VD.

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & y^3 & y^5 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 5. Nếu nhân một hàng với một số k (tức nhân tất cả các phần tử của hàng đó với k) thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

VD.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3.2 & 0 & 3.1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tính chất 6. Một định thức có 2 hàng tỉ lệ thì định thức bằng 0.

VD. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 7. Nếu một hàng nào đó của định thức có các phần tử là tổng của hai số thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức.

VD. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 60$$

Tính chất 8. Nếu cộng vào một hàng một bội của hàng khác thì định thức không đổi.

VD.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2+2.1 & 3+2.(-1) & 1+2.0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Chú ý.

- Từ tính chất 1 ta thấy rằng *các tính chất của định thức đúng đối với hàng thì cũng đúng đối với cột và ngược lại*. Do đó *khi tính định thức, đồng thời biến đổi trên hàng có thể chuyển sang biến đổi trên cột và ngược lại*.
- Để tính định thức ta có thể áp dụng 8 tính chất trên để đưa định thức về các dạng định thức đơn giản hoặc đặc biệt.

VD. Tính định thức:

$$1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

3)
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

2.4. Công thức khai triển định thức

Định nghĩa. Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$. Ta ký hiệu M_{ij} là ma trận vuông cấp n – 1 thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i, cột thứ j và gọi nó là *ma trận con* của A ứng với phần tử a_{ij}.

Định lý. Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$, ta có các khai triển của |A| như sau:

1) Khai triển theo hàng i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

2) Khai triển theo cột j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(Trong đó: $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij})

VD. Tính định thức:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}; \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Nhận xét. Nên khai triển định thức theo dòng hoặc cột chứa nhiều số 0 để việc tính toán đơn giản hơn.

2.5. Định thức của tích các ma trận

Định lý. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có:

$$|AB| = |A||B|$$

§3. HẠNG CỦA MA TRẬN

3.1. Định thức con cấp k

Định nghĩa. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số nguyên dương $k \leq \min\{m,n\}$. Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k hàng và k cột được gọi là ma trận con cấp k của A. Định thức của ma trận con đó được gọi là *định thức con cấp k* của A.

VD. Cho $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ là định thức con cấp 2 của ma trận con cấp hai: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ của A

Định lý. Nếu ma trận A có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp cao hơn k cũng bằng 0.

3.2. Hạng của ma trận

Định nghĩa. Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận $A \neq O$ được gọi là *hạng của ma trận* A. Ký hiệu là r(A)

Nhận xét.

- $A = O \Leftrightarrow r(A) = 0$
- Nếu $A = (a_{ij})_{m\times n} \neq O$ thì $1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- Vì $\left|A^T\right| = \left|A\right|$ nên $r(A^T) = r(A)$
- Đối với ma trận vuông A cấp n ta có $r(A) = n \Leftrightarrow \left|A\right| \neq 0$

VD.

- $r(I_n) = n$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 1$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(C) = 2$

3.3. Các phép biến đổi sơ cấp

Cho ma trận A. Ta có *3 PBĐSC trên hàng* của ma trận A là:

1) Đổi chỗ 2 hàng.
2) Nhân một hàng với một số khác 0.
3) Cộng vào một hàng một bội của hàng khác.

Tương tự ta cũng có các PBĐSC trên cột của ma trận A.

Định lý. Các PBĐSC không làm thay đổi hạng của ma trận.

3.4. Ma trận bậc thang

Ma trận bậc thang là những ma trận có 2 tính chất sau:

1) Các hàng bằng 0 (nếu có) luôn ở dưới các hàng khác 0.
2) Phần tử khác 0 đầu tiên của một hàng bất kỳ luôn nằm bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên nó.

VD.

- O, I_n : ma trận bậc thang
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: ma trận bậc thang
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$: không là ma trận bậc thang

Định lý. Mọi ma trận đều có thể đưa về dạng bậc thang bằng các PBĐSC trên hàng và cột.

Nhận xét. Hạng của một ma trận bậc thang bằng số hàng khác 0 của nó.

3.5. Cách tìm hạng của ma trận bằng PBĐSC

Bước 1: Đưa ma trận cần tìm về dạng bậc thang bằng PBĐSC trên hàng và cột.

Bước 2: Số hàng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận đã cho.

Chú ý. Ở bước 1 có thể "nhảy" từ hàng sang cột và ngược lại.

VD 1. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

VD 2. Tìm hạng của ma trận sau theo tham số m

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

§4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

4.1. Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại một ma trận B vuông cấp n sao cho $AB = BA = I_n$ thì B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A và nói A *khả nghịch* (hoặc *khả đảo*).

▪ Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}. Như vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, do đó $(A^{-1})^{-1} = A$ và nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

VD. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

vì $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.2. Định lý. (Tính duy nhất của ma trận nghịch đảo)

Ma trận nghịch đảo nếu tồn tại là duy nhất

4.3. Định nghĩa. Ma trận A được gọi là *không suy biến* nếu $|A| \neq 0$

4.4. Định lý. (Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo)

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$. Ta nói A có nghịch đảo khi và chỉ khi nó không suy biến, tức là $|A| \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

trong đó: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}

VD. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Nhận xét.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

VD.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5. Định lý. Giả sử A và B là hai ma trận khả nghịch. Khi đó AB cũng là ma trận khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4.6. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

1) **PP1.** Dùng định nghĩa ma trận nghịch đảo

Giả sử ma trận A có ma trận nghịch đảo là B. Khi đó theo định nghĩa ta có $\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases} \Rightarrow$ Giải hệ phương trình tìm B.

2) **PP2.** Dùng Định lý 4.4

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_n$. Tính $|A|$

- Nếu $|A| = 0$ thì kết luận không tồn tại A^{-1}.
- Nếu $|A| \neq 0$ thì tồn tại A^{-1} được tính bởi công thức như trong Định lý 4.4

3) **PP3.** (PP Gauss – Jordan) Dùng PBĐSC **trên hàng**

Cho ma trận A vuông cấp n. Ta tìm A^{-1} như sau:

Bước 1. Lập ma trận $[A|I_n]$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép ma trận đơn vị cùng cấp I_n vào bên phải của A.

Bước 2. Dùng PBĐSC **trên hàng** để đưa $[A|I_n]$ về dạng $[I_n|B]$. Khi đó $A^{-1} = B$.

VD. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau bằng phương pháp Gauss - Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$