

# Chương 3. Không gian véctor

## §1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉCTOR

**1.1. Định nghĩa.** Một tập  $V \neq \emptyset$  được gọi là *không gian véctor* (*không gian tuyến tính*) trên  $\mathbb{R}$  (hay  $\mathbb{R}$  - không gian véctor) nếu:

- Có 2 phép toán:
- Phép cộng 2 véctor:

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V && \text{(Phép cộng khép kín)} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

- Phép nhân 1 số với véctor ( phép nhân vô hướng):

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\rightarrow V && \text{(Phép nhân vô hướng khép kín)} \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

- Hai phép toán trên thỏa mãn 8 tiên đề sau:  $\forall x, y, z \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) Cộng kết hợp:  $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) Cộng giao hoán:  $x + y = y + x$

3) Tồn tại phần tử  $\theta \in V$  sao cho:  $\theta + x = x$ .

Phần tử  $\theta$  được gọi là phần tử trung hòa.

4) Với  $\forall x \in V, \exists (-x) \in V$  sao cho:  $x + (-x) = \theta$ .

Phần tử  $-x$  được gọi là phần tử đối của  $x$ .

5)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

8) Tiên đề Unita:  $1.x = x$

Mỗi phần tử của  $V$  được gọi là một véctơ. Mỗi phần tử trong  $\mathbb{R}$  được gọi là vô hướng.

**VD1.**

Tập gồm tất cả các bộ  $n$  số thực:  $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1, n} \right\}$

là không gian véctơ trên  $\mathbb{R}$  với

- Phép cộng 2 véctơ :  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

với  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

- Phép nhân vô hướng:  $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$\Rightarrow \theta = (0, 0, \dots, 0)$ ;  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

**VD2.** Ký hiệu:  $R_2$  là tập hợp tất cả các véctơ tự do trong mặt phẳng với phép cộng véctơ và phép nhân 1 số thực với véctơ được định nghĩa như ở phổ thông. Khi đó  $R_2$  là không gian véctơ trên  $\mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \theta = \vec{0}$ ; véctơ đối của  $\vec{x}$  là  $-\vec{x}$

Tương tự:  $R_3$  là tất cả các véctơ tự do trong không gian với phép cộng và nhân vô hướng như trên cũng là không gian véctơ trên  $\mathbb{R}$

**VD3.** Ký hiệu:  $P_n[x]$  là tập tất cả các đa thức với hệ số thực có bậc không quá  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), tức:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}; i = \overline{0, n}\}$$

với phép cộng 2 đa thức và phép nhân 1 số với đa thức thông thường.

Khi đó  $P_n[x]$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \theta &= 0 + 0.x + 0.x^2 + \dots + 0.x^n \\ - p(x) &= -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n \end{aligned}$$

**VD4.** Ký hiệu:  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  là tập tất cả các ma trận cỡ  $m \times n$  trên  $\mathbb{R}$  với phép toán cộng 2 ma trận và nhân 1 số với ma trận. Khi đó  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{R}$

## 1.2. Các tính chất.

**Định lý.** Trong không gian véctor  $V$  ta có:

- Véctor  $\theta$  là duy nhất
- Véctor đối của véctor  $x \in V$  là duy nhất
- $\forall x \in V$  ta có  $0.x = \theta$
- $\forall x \in V$  ta có  $(-1).x = -x$
- $\forall k \in \mathbb{R}$  ta có  $k.\theta = \theta$
- Với  $x \in V, k \in \mathbb{R}$  ta có  $kx = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x = \theta \end{cases}$

**Định nghĩa.**

$$\forall x, y \in V : x - y = x + (-y)$$

## §2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

**2.1. Định nghĩa.** Cho không gian vectơ  $V$  và hệ vectơ  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$

- Một **tổ hợp tuyến tính (thtt)** của hệ vectơ đã cho là 1 tổng có dạng:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \in V, \text{ trong đó: } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Khi đó ta nói  $x$  **biểu thị tuyến tính** qua các vectơ  $a_i, i = \overline{1, n}$

Như vậy, vectơ  $\theta$  là thtt của mọi hệ vectơ.

- Hệ vectơ  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  được gọi là **phụ thuộc tuyến tính (pttt)** nếu tồn tại các số  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  không đồng thời bằng 0 sao cho thtt của hệ bằng  $\theta$  (tức  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \theta$ ).

- Hệ vectơ  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  được gọi là **độc lập tuyến tính (đltt)** nếu nó không pttt, tức là từ  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \theta$

suy ra  $\lambda_i = 0; \forall i = \overline{1, n}$

### **VD 1.**

1) Trong  $\mathbb{R}^3$  :  $x = (1, 2, 3)$ ;  $y = (4, 5, 6)$

Ta có:  $z = -2x + 3y = (-2, -4, -6) + (12, 15, 18) = (10, 11, 12)$

Khi đó  $z = (10, 11, 12)$  là thtt của các véctơ  $x$  và  $y$

2) Véctơ  $z = (7, -3, 0) \in \mathbb{R}^3$  có phải là thtt của hệ hai véctơ

$x = (1, 1, 0)$ ;  $y = (1, -1, 0)$  không ?

## **VD 2.**

Trong  $\mathbb{R}^2$  :  $x = (1, -1)$ ;  $y = (2, 3)$ . Hệ  $\{x, y\}$  đltd vì:

$$\text{Xét } \lambda_1 x + \lambda_2 y = \theta \Leftrightarrow (\lambda_1, -\lambda_1) + (2\lambda_2, 3\lambda_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ suy ra  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  (hoặc vì hệ phương trình tuyến tính thuần

nhất có  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$  nên hệ chỉ có nghiệm tầm thường).



**VD 3.** Trong  $\mathbb{R}^3$  :  $x = (-1, 3, 2)$ ;  $y = (2, 0, 1)$ ;  $z = (0, 6, 5)$ .

Hệ  $\{x, y, z\}$  pttt vì: Xét  $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = \theta; (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

nên hệ có nghiệm không tầm thường, tức tồn tại các số  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  không đồng thời bằng 0 để  $(*)$  đúng. Vậy hệ pttt.

**2.2. Định lý.** Hệ vectơ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  trong không gian vectơ  $V$  là pttt khi và chỉ khi có một trong các vectơ của hệ là thtt của các vectơ còn lại.

**2.3. Hệ quả.** ▪ Mọi hệ chứa vectơ không đều pttt

▪ Nếu có một hệ con của hệ pttt thì hệ đã cho cũng pttt

$\Rightarrow$  Như vậy, nếu hệ đltt thì mọi hệ con của hệ cũng đltt

**VD.** Xét VD.1) ở trên thì hệ  $\{x, y, z\}$  pttt vì  $z = -2x + 3y$ .

Nhưng hệ  $\{x, y\}$  đltt vì:

$$\text{Xét } \lambda_1 x + \lambda_2 y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

## §3. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉCTƠ

### 3.1. Định nghĩa.

Cho không gian véctơ  $V$ . Hệ véctơ  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  được gọi là *cơ sở* của  $V$  nếu

- Hệ  $E$  đltt.
- Hệ  $E$  là *hệ sinh* (hay *tập sinh*) của  $V$ , tức với  $\forall x \in V$  thì  $x$  là thtt của hệ  $E$ , nghĩa là tồn tại các số  $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$  sao cho

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Khi đó ta cũng nói  $E$  *sinh ra*  $V$ .

Bộ số  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  được gọi là *tọa độ* của véctơ  $x$  đối với cơ sở  $E$  và ký hiệu là  $x_E = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

**Bổ đề.** Với mỗi vectơ  $x \in V$  thì tọa độ đối với một cơ sở  $E$  là duy nhất

**Định lý.** Nếu  $x_E = (x_1, \dots, x_n)$  và  $y_E = (y_1, \dots, y_n)$  thì

- $(x + y)_E = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $(\lambda x)_E = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n); \lambda \in \mathbb{R}$

**VD.**

1) Trong  $\mathbb{R}^2$  : Xét  $e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)$ . Hệ  $E = \{e_1, e_2\}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^2$  và được gọi là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^2$ . Thật vậy:

- $E$  đltt vì: Xét  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \theta \Leftrightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- $E$  là hệ sinh vì:  $\forall x \in \mathbb{R}^2$  ta có

$x = (x_1; x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2$ . Vậy  $x$  là một thtt của  $E$ .

2) Trong  $\mathbb{R}^2$  : Xét hệ  $F = \{e_1 = (1, -1); e_2 = (0, 1)\}$ . Ta có

- Hệ  $F$  đltt vì: Xét  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \theta \Leftrightarrow (\lambda_1, -\lambda_1) + (0, \lambda_2) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- Hệ  $F$  là hệ sinh vì: Lấy bất kỳ  $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ , tìm  $a, b$  sao cho

$$x = a e_1 + b e_2 \Leftrightarrow (x_1; x_2) = a(1, -1) + b(0, 1) = (a, b - a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x_1 \\ b - a = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_1 \\ b = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow x = x_1 e_1 + (x_1 + x_2) e_2$$

$\Rightarrow x$  là một thtt của  $F$ .

Vậy  $F$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^2$ .

3) Hoàn toàn tương tự, trong  $\mathbb{R}^n$  : Xét hệ vectơ  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

.....

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

$\Rightarrow$  Hệ  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  và được gọi là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$ .

**Nhân xét.** Một không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở.

### 3.2. Hạng của hệ vectơ

Trong không gian vectơ  $V$  cho hệ vectơ  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Giả sử không gian vectơ  $V$  có cơ sở  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Biểu diễn mỗi vectơ của hệ  $S$  theo cơ sở  $E$  ta có

$$a_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n$$

$$a_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n$$

.....

$$a_m = a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \dots + a_{mn}e_n$$

$$\text{Ma trận } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ được gọi là } \textcolor{red}{\text{ma trận tọa độ}}$$

*của hệ véctơ* S đối với cơ sở E

**Định nghĩa .** *Hạng của hệ véctơ* S (ký hiệu:  $r(S)$ ) là số  $r$  sao cho:

- Có  $r$  véctơ của S đltt.
- Mọi véctơ của hệ S đều là thtt của  $r$  véctơ đó.

## **Nhân xét.**

- Hạng của hệ véctơ  $S$  là số  $r$  khi và chỉ khi tồn tại  $r$  véctơ của hệ  $S$  đltt và mọi hệ gồm  $(r + 1)$  véctơ của  $S$  đều pttt.
- Hạng của hệ véctơ  $S$  là số tối đa các véctơ đltt của hệ.
- Có thể xét sự đltt hay pttt của hệ  $S$  gồm  $m$  véctơ thông qua xét hạng của hệ, nếu  $r(S) = m$  thì hệ  $S$  đltt, nếu  $r(S) < m$  thì hệ  $S$  pttt



**Định lý 1.** Nếu  $V$  là không gian vectơ có một cơ sở hữu hạn thì hạng của một hệ vectơ trong  $V$  bằng hạng của ma trận tọa độ của hệ đó đối với một cơ sở bất kỳ của  $V$ .

**Nhân xét.** Xét hệ  $S$  có  $m$  vectơ. Khi đó:

- Nếu  $r(A) = m$  thì hệ  $S$  đltd.
- Nếu  $r(A) < m$  thì hệ  $S$  pttd

**VD.** Tìm hạng của hệ vectơ  $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{R}^3$  với  $a_1 = (1, 3, 0)$ ,  $a_2 = (0, 2, 4)$ ,  $a_3 = (1, 5, 4)$ ,  $a_4 = (1, 1, -4)$ .

**Định lý 2.** Nếu trong không gian vectơ  $V$  có một cơ sở gồm  $n$  vectơ thì mọi hệ gồm  $(n+1)$  vectơ trong  $V$  đều pttt.

**Hệ quả.** Nếu không gian vectơ  $V$  có một cơ sở gồm  $n$  vectơ thì số vectơ của một cơ sở bất kỳ của  $V$  cũng bằng  $n$ .

**3.3. Định nghĩa.** Một không gian vectơ  $V$  được gọi là *không gian vectơ hữu hạn chiều* nếu tồn tại một cơ sở trong  $V$  gồm một số hữu hạn vectơ. Số vectơ trong cơ sở của  $V$  gọi là *số chiều của  $V$*  và ký hiệu là:  $\dim V$

**VD.** 1)  $\mathbb{R}^n$  là không gian vectơ hữu hạn chiều,  $\dim \mathbb{R}^n = n$

2) Trong  $P_n[x]$ : Hệ vectơ  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  là cơ sở chính tắc của  $P_n[x]$ , do đó  $P_n[x]$  là không gian vectơ hữu hạn chiều,  $\dim P_n[x] = n + 1$ .

3) Trong không gian vectơ  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ :

Xét hệ vectơ  $\{e_{ij}\}$  mà  $e_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  là ma trận cỡ  $m \times n$  mà phần tử ở vị trí  $(i, j)$  bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác bằng 0, tức

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \dots; e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ  $E = \{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{mn}\}$  là cơ sở chính tắc của  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Vậy  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

là không gian vectơ hữu hạn chiều,  $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m.n$

**Định lý.** Nếu  $V$  là không gian vectơ  $n$  chiều thì mọi hệ gồm  $n$  vectơ đlitt trong  $V$  đều là cơ sở của  $V$ .

**VD.** Hệ

$$S = \{a_1 = (1, 1, 2), a_2 = (1, -1, 0), a_3 = (2, 0, 1)\}$$

có là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  không?

## 3.4. Không gian véc tơ con

### 3.4.1. Định nghĩa.

Cho không gian véc tơ  $V$ . Tập con  $\emptyset \neq A \subset V$  được gọi là *không gian véc tơ con* (hay *không gian con*) của  $V$  nếu  $A$  cũng là không gian véc tơ với hai phép toán trên  $V$ .

### 3.4.2. Định lý. (Tiêu chuẩn không gian con)

Cho không gian véc tơ  $V$ . Tập con  $\emptyset \neq A \subset V$  là không gian véc tơ con của  $V$  khi và chỉ khi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall a, b \in A \text{ thì } a + b \in A \\ \bullet \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a \in A \text{ thì } \alpha a \in A \end{array} \right.$$

### **VD1.**

Cho  $V$  là một không gian véc tơ. Khi đó

- $V$  là không gian con của  $V$ .
- Tập  $\{\theta_V\}$  là không gian con của  $V$ .

Hai không gian con  $\{\theta_V\}$  và  $V$  là hai không gian con tầm thường của  $V$

### **VD2.**

Cho tập hợp  $A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ .

Chứng minh rằng  $A$  là không gian véc tơ con của  $\mathbb{R}^3$

### **VD3.**

Chứng minh rằng tập hợp  $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  là không gian con của không gian véc tơ  $M_2(\mathbb{R})$

### 3.4.3. Không gian con sinh bởi hệ véctơ.

**Định nghĩa 1.** Cho không gian véctơ  $V$  và  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  là một hệ véctơ của  $V$ . Ta gọi tập tất cả các thtt của hệ  $S$  là *bao tuyến tính* của  $S$ , ký hiệu là  $\text{span}S$ . Như vậy

$$\text{Span}S = \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}; a_i \in V \right\}$$

**Định lý 1.**  $\text{Span}S$  là một không gian con của  $V$

**Định nghĩa 2.**  $\text{Span}S$  được gọi là *không gian véctơ con sinh bởi hệ véctơ*  $S$  và ký hiệu là  $\langle S \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \text{Span}S$

**VD1.** Xét  $A$  là không gian con của  $\mathbb{R}^3$  như trong VD2 trong mục 4.2.

Ta có:  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in A \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1 - x_2$

Do đó:  $x = (x_1, x_2, -2x_1 - x_2) = x_1(1, 0, -2) + x_2(0, 1, -1)$

Suy ra  $A = \langle S \rangle$  với  $S = \{(1, 0, -2); (0, 1, -1)\}$ . Vậy  $S$  là hệ sinh của  $A$ .

Kiểm tra thấy  $S$  đltt. Do đó  $S$  là cơ sở của  $A$ . Vậy  $\dim A = 2$

**Định lý 2.** Nếu  $S$  là không gian véc tơ con của không gian véc tơ hữu hạn chiều  $V$  thì  $S$  là không gian véc tơ hữu hạn chiều và  $\dim S \leq \dim V$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $S = V$ .

**Mệnh đề.** Nếu  $\{e_1, \dots, e_k\}$  là cơ sở của không gian véc tơ con  $S$  của không gian véc tơ  $n$  chiều  $V$  thì tồn tại các véc tơ  $e_{k+1}, \dots, e_n$  thuộc  $V$  sao cho  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  là cơ sở của  $V$ .



### **Định lý 3.**

- 1)  $\langle S \rangle$  là không gian con nhỏ nhất chứa  $S$ .
- 2)  $\dim \langle S \rangle = r(S)$ .

**Nhân xét.** Nếu  $\dim \langle S \rangle = k$  thì mọi hệ gồm  $k$  vectơ đlitt của  $S$  đều là cơ sở của  $\langle S \rangle$

**VD2.** Xét hệ vectơ  $S$  trong VD mục 3.2. Tìm  $\dim \langle S \rangle$  và một cơ sở của  $\langle S \rangle$

### 3.5. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $m$  phương trình,  $n$  ẩn:

$$AX = O \quad (1)$$

Ký hiệu: *Tập hợp nghiệm* của hệ (1) là  $N$

**Định lý 1.**  $N$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^n$ , nó được gọi là *không gian nghiệm* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) và  $\dim N = n - r$ ; với  $r = r(A)$

**Định nghĩa.** Mỗi cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) được gọi là một *hệ nghiệm cơ bản* của hệ phương trình đó.

Nếu  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r}\}$  là một hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) thì  $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_{n-r}\beta_{n-r}$ ; với  $c_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1, n-r}$  được gọi là một *ng nghiệm tổng quát* của (1). Do đó

$$N = \left\{ c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_{n-r}\beta_{n-r}; \text{ với } c_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1, n-r} \right\}$$

**Nhân xét.** Nếu (1) là hệ phương trình Cramer thì hệ chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường. Tức  $N = \{(0, 0, \dots, 0)\}$ , do đó  $\dim N = 0$

**VD1.** Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau và giải hệ phương trình đó

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

Dựa vào mối liên hệ giữa nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát và nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng ta suy ra: Nếu biết một nghiệm  $\lambda$  nào đó của hệ phương trình tuyến tính tổng quát và tập hợp  $N$  các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng thì ta suy ra tập tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát là:

$$\lambda + N = \{\lambda + u \mid u \in N\}$$

**VD2.** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 13 \\ 3x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 7 \end{cases}$$

### 3.6. Đổi cơ sở và phép biến đổi tọa độ.

Cho  $V$  là không gian vectơ  $n$  chiều có các cơ sở là

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}; \quad E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$$

Giả sử biểu diễn các phần tử của cơ sở  $E'$  qua cơ sở  $E$  ta được:

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

.....

$$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ cơ sở E sang cơ sở E' và ký hiệu là  $A_{E \rightarrow E'}$

Khi đó  $A^{-1}$  được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở E' sang cơ sở E.

Cho  $x \in V$ . Giả sử  $x_E = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $x_{E'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$

Khi đó ta có công thức chuyển từ tọa độ  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  sang tọa độ

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là  $[x]_E = A[x]_{E'}$

Trong đó:  $[x]_E$  và  $[x]_{E'}$  là các ma trận cột tọa độ

$$[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T ; [x]_{E'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n]^T$$

Vì ma trận chuyển từ cơ sở  $E'$  sang cơ sở  $E$  là  $A^{-1}$  nên công thức chuyển từ tọa độ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sang tọa độ  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  là

$$[x]_{E'} = A^{-1} [x]_E$$



**Nhân xét.** Cho  $E = \{e_i\}$ ,  $E' = \{e'_i\}$ ,  $E'' = \{e''_i\}$  là các cơ sở của không gian vectơ  $n$  chiều  $V$

Nếu  $A$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $E$  sang cơ sở  $E'$

$B$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $E'$  sang cơ sở  $E''$

thì  $AB$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $E$  sang cơ sở  $E''$

**VD1.** Trong  $\mathbb{R}^2$ , cho các cơ sở  $E = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$   
 $E' = \{e'_1 = (1, 1); e'_2 = (2, 1)\}$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở  $A_{E \rightarrow E'}$

b) Tìm  $[x]_{E'}$ , nếu  $x_E = (7, 2)$

**VD2.** Trong  $\mathbb{R}^2$ , cho các cơ sở  $E = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, -1)\}$   
 $E' = \{e'_1 = (2, -1); e'_2 = (1, 1)\}$

Tìm  $[x]_E$  biết  $x_{E'} = (1, 2)$

## §4. KHÔNG GIAN EUCLIDE

**4.1. Định nghĩa.** Cho không gian vectơ  $V$  trên  $\mathbb{R}$ , lấy bất kỳ  $x, y \in V$ .

*Tích vô hướng* của  $x$  và  $y$  là một số thực, ký hiệu là  $\langle x, y \rangle$  thỏa mãn

các tính chất sau: 1)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  và  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$$2) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$3) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \forall z \in V$$

$$4) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

▪ Không gian vectơ  $V$  hữu hạn chiều trên  $\mathbb{R}$  cùng với một tích vô hướng đã cho trên  $V$  được gọi là một *không gian Euclide*.

**VD.** Không gian vectơ  $\mathbb{R}^n$  là không gian Euclide với tích vô hướng thông thường (tích vô hướng Euclide) tương tự như trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

## 4.2. Độ dài của vectơ

**Định nghĩa.** Cho không gian Euclide  $V$  và  $x \in V$ . **Độ dài** (hay **chuẩn**) của vectơ  $x$ , ký hiệu  $\|x\|$  là số thực được xác định bởi  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- Nếu  $\|x\| = 1$  thì  $x$  được gọi là **vectơ đơn vị**.
- $d(x, y) = \|x - y\|$  được gọi là **khoảng cách** giữa  $x$  và  $y$ .
- Việc chia một vectơ khác  $\theta$  cho độ dài của nó được gọi là **chuẩn hóa vectơ** đó. Khi đó ta sẽ được vectơ đơn vị. Tức  $\frac{x}{\|x\|} = y \Rightarrow \|y\| = 1$

**VD.** Trong không gian Euclide  $\mathbb{R}^n$ , cho  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ta có

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  gọi là độ dài Euclide của  $x \in \mathbb{R}^n$

### **Tính chất.**

- $\|x\| \geq 0$  và  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ; (bất đẳng thức tam giác)
- Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

### **VD.**

Trong không gian Euclide  $\mathbb{R}^n$  với tích vô hướng thông thường, bất đẳng thức C-S là:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

### 4.3. Véc tơ trực giao

**Định nghĩa.** Trong một không gian Euclide  $V$ , hai véc tơ  $x, y \neq \theta$  được gọi là *trực giao* (hay *vuông góc*) nếu  $\langle x, y \rangle = 0$  và ký hiệu  $x \perp y$

**VD.** Trong  $\mathbb{R}^2$  với tích vô hướng Euclide cho

$$x = (2, -1), y = (2, 4)$$

Khi đó:  $\langle x, y \rangle = 2.2 + (-1).4 = 0$

Vậy  $x, y$  là hai véc tơ trực giao

**Nhân xét.** Véc tơ  $\theta$  được coi là trực giao với mọi véc tơ của  $V$

## 4.4. Hệ véctor trực giao, trực chuẩn

### Định nghĩa 1.

- Một hệ véctor trong không gian Euclide được gọi là *hệ trực giao* nếu các véctor của hệ trực giao từng đôi một.
- Một hệ véctor trong không gian Euclide được gọi là *hệ trực chuẩn* nếu hệ này trực giao và mọi véctor của hệ đều có chuẩn bằng 1.

**VD1.** Trong  $\mathbb{R}^3$  với tích vô hướng thông thường

- $\{(1,1,0);(-1,1,2);(1,-1,1)\}$ : hệ véctor trực giao
- $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ : hệ véctor trực chuẩn

**Định lý.** Trong không gian Euclide nếu  $u_1, u_2, \dots, u_k$  là một hệ véctơ trực giao và các véctơ  $u_i \neq \theta, i = \overline{1, k}$  thì hệ véctơ này đltt.

**Nhân xét.** Trong một không gian Euclide  $n$  chiều, mọi hệ gồm  $n$  véctơ khác  $\theta$  trực giao đều là một cơ sở của không gian đó.

**Định nghĩa 2.** Cơ sở trong Nhận xét trên được gọi là *cơ sở trực giao* của không gian Euclide. Nếu độ dài của mỗi véctơ trong cơ sở trực giao bằng 1 thì ta gọi nó là một *cơ sở trực chuẩn* của không gian Euclide.

**VD2.** Hệ các véctơ trong VD1 cho ta một cơ sở trực giao và một cơ sở trực chuẩn trong  $\mathbb{R}^3$

## 4.5. Quá trình trực giao hóa Gram - Schmidt

Dùng để xây dựng cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide từ một cơ sở cho trước.

## **Thuật toán.**

**B1.** Chọn  $\{e_1, \dots, e_n\}$  là một cơ sở bất kỳ của không gian Euclide  $n$  chiều  $V$ .

**B2.** Xây dựng cơ sở trực giao  $\{u_1, \dots, u_n\}$  của  $V$  như sau:

Đặt  $u_1 = e_1$

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

.....

$$u_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle e_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$



**B3.** Xây dựng cơ sở trực chuẩn  $\{v_1, \dots, v_n\}$  của  $V$  bằng việc chuẩn hóa các vectơ ở B2. Tức:  $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \Rightarrow \|v_i\| = 1; \forall i = \overline{1, n}$

**VD1.** Trong không gian Euclide  $\mathbb{R}^3$ , hãy trực chuẩn hóa cơ sở

$$E = \{e_1 = (1, -1, 0); e_2 = (0, 1, -1); e_3 = (1, 1, -1)\}$$

**VD2.** Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con của  $\mathbb{R}^3$  sau

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + 2x_3 \right\}$$

**Định lý 1.** Mọi không gian Euclide  $n$  chiều đều tồn tại cơ sở trực chuẩn

**Định lý 2.** Nếu  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  là cơ sở trực chuẩn của không gian

Euclide  $n$  chiều  $V$  thì mọi  $x \in V$ ,  $x$  có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

**VD 3.** Xét cơ sở trực chuẩn  $\{v_1, v_2, v_3\}$  của  $\mathbb{R}^3$  ở VD1. Hãy biểu

diễn  $x = (1, 2, 3)$  thành một thtt của các véctơ của cơ sở trực chuẩn đó