Chương 4.
Chéo hóa ma trận – Dạng toàn phương

§1. TRỊ RIÊNG VÀ VÉCTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN

1.1. Định nghĩa. Cho ma trận vuông A cấp n. Số λ được gọi là *trị riêng* của A nếu tồn tại véctơ $x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta$ sao cho $Ax = \lambda x$

Khi đó véctơ $x \neq \theta$ được gọi là *véctơ riêng* của A ứng với trị riêng λ

Chú ý. Nếu x là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì với mọi số $\alpha \neq 0$ véctơ αx cũng là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ

- Để tìm các trị riêng của ma trận vuông A cấp n, ta viết $Ax = \lambda x$

thành $Ax = \lambda Ix$; I là ma trận đơn vị cấp n

$\Rightarrow (A - \lambda I)x = O$: là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Để λ là trị riêng của A thì hệ trên phải có nghiệm $x \neq \theta$

$\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$: đây là phương trình để xác định các trị riêng của A

và được gọi là *phương trình đặc trưng* của A.

Đa thức $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$: được gọi là *đa thức đặc trưng* của A.

- **Cách tìm trị riêng và véctơ riêng của ma trận vuông A:**

B1. Giải phương trình đặc trưng $\left|A - \lambda I\right| = 0$ (với ẩn là λ) để tìm các trị riêng của A.

B2. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\left(A - \lambda I\right)x = O$.

Nghiệm không tầm thường của hệ chính là véctơ riêng cần tìm.

Định nghĩa 1. Đặt $E(\lambda) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (A - \lambda I)x = O\right\}$: là *không gian nghiệm* của hệ $(A - \lambda I)x = O$ và được gọi là *không gian riêng* của A ứng với trị riêng λ

Định nghĩa 2. ▪ *Bội đại số* (*BĐS*) của trị riêng λ là bội của trị riêng λ trong phương trình đặc trưng.

▪ *Bội hình học* (*BHH*) của trị riêng λ là số chiều của không gian riêng ứng với trị riêng đó (tức $\dim E(\lambda)$).

Định lý 1. BHH của một trị riêng luôn bé hơn hoặc bằng BĐS của nó.

Chú ý. BHH của trị riêng luôn lớn hơn hoặc bằng 1.

Định lý 2. Các véctơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau thì đltt.

VD. Hãy tìm các cơ sở của không gian riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận đồng dạng

Định nghĩa. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Ma trận B được gọi là *đồng dạng* với ma trận A, ký hiệu $B \sim A$, nếu tồn tại ma trận vuông P cấp n không suy biến sao cho $B = P^{-1}AP$.

Chú ý. Nếu $B \sim A$ thì $A \sim B$

Định lý. Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng (tức có chung tập trị riêng).

§2. CHÉO HÓA MA TRẬN

2.1. Định nghĩa. Ma trận vuông A cấp n gọi là *chéo hóa* được nếu A đồng dạng với ma trận chéo, tức tồn tại ma trận khả nghịch P cấp n sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận chéo.

Khi đó ta nói ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

(Như vậy chéo hóa ma trận A là tìm ra ma trận khả nghịch P và ma trận chéo D).

Định lý. (Điều kiện cần và đủ để ma trận chéo hóa được)

Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A cấp n chéo hóa được là A có n véctơ riêng đltt.

Chứng minh. Xem [1]

Việc chứng minh Định lý trên đã chứng tỏ rằng:

- Ma trận P có các cột là các véctơ riêng đltt của A.
- Ma trận D có các phần tử nằm trên đường chéo chính lần lượt là các trị riêng tương ứng với các véctơ riêng tạo nên P.

Hệ quả 1. Nếu ma trận vuông A cấp n có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Hệ quả 2. Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi BHH của mọi trị riêng bằng BĐS của chúng.

2.2. Các bước chéo hóa một ma trận vuông A cấp n

B1. Giải phương trình đặc trưng $\left|A - \lambda I\right| = 0$ để tìm các trị riêng của A. Xác định BĐS của từng trị riêng.

B2. Giải các hệ phương trình tương ứng với từng trị riêng. Tìm cơ sở của các không gian riêng để từ đó xác định BHH của từng trị riêng.

B3. ▪ Nếu BHH của một trị riêng nào đó bé hơn BĐS của nó thì A không chéo hóa được.

▪ Nếu Hệ quả 2 thỏa mãn thì A chéo hóa được. Ma trận P có các cột là các véctơ riêng cơ sở của các không gian riêng. Các phần tử trên đường chéo chính của D lần lượt là các trị riêng ứng với các véctơ riêng tạo nên P. (Có thể thay đổi thứ tự các cột của P miễn sao trị riêng của ma trận D ứng với các véctơ riêng tạo nên P)

VD. Xét xem ma trận A có chéo hóa được không? Nếu được hãy tìm ma trận P làm chéo hóa A, viết dạng chéo của A và tính A^n.

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};\qquad 2)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3)\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix};\qquad 4)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

§3. CHÉO HÓA TRỰC GIAO

3.1. Định nghĩa. ▪ Ma trận vuông A cấp n được gọi là *ma trận trực giao* nếu: $A^TA = I$ (hay $A^{-1} = A^T$)

▪ Ma trận vuông A cấp n được gọi là *chéo hóa trực giao* được nếu tồn tại ma trận trực giao P cấp n sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận chéo. Khi đó ta nói ma trận P làm chéo hóa trực giao ma trận A.

Định lý. *(Điều kiện cần và đủ để ma trận chéo hóa trực giao được)*
Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A cấp n chéo hóa trực giao được là A có một hệ trực chuẩn gồm n véctơ riêng.

3.2. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A cấp n chéo hóa trực giao được là A đối xứng.

Định lý 2. Cho ma trận vuông A đối xứng. Khi đó các véctơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau sẽ trực giao.

3.3. Quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng A

B1. Giải phương trình đặc trưng $\left|A - \lambda I\right| = 0$ để tìm các trị riêng của A.

B2. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian riêng của A.

B3. Sử dụng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt vào mỗi cơ sở đó để được một cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng.

B4. Lập ma trận P có các cột là các véctơ cơ sở trực chuẩn xây dựng ở B3. Ma trận P này sẽ làm chéo hóa trực giao ma trận A và $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là các trị riêng ứng với các véctơ riêng tạo nên P.

VD. Hãy chéo hóa trực giao ma trận A và tính A^n, với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

§5. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

5.1. Định nghĩa. *Dạng toàn phương* trong không gian véctơ n chiều V được ký hiệu $\omega(x_1,\ldots,x_n)$ là đa thức đẳng cấp bậc hai theo các biến x_i. Nghĩa là

$$\omega(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j;\ \left(a_{ij}\in\mathbb{R},\ a_{ij}=a_{ji},i=\overline{1,n},j=\overline{1,n}\right)$$

VD. $\omega(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+x_1x_2+3x_2x_3$

là dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$

5.2. Ma trận của dạng toàn phương

Ký hiệu: $x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ và

$A = (a_{ij})$ là ma trận vuông thực cấp n với các phần tử a_{ij} ;

Khi đó dạng toàn phương ω có thể được viết dưới dạng ma trận:

$$\omega(x) = x^T A x$$

Nhận xét. A là ma trận đối xứng thực.

VD 1. Dạng toàn phương

$$\omega\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$$

có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

VD 2. Dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$$

có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

5.3.1. Định nghĩa.

Giả sử ω là một dạng toàn phương trên không gian véctơ n chiều V. Nếu trong một cơ sở $E = \{e_i\}; i = \overline{1, n}$ nào đó của V, dạng toàn phương ω có dạng $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ $(*)$

thì (*) được gọi là *dạng chính tắc* của ω.

Ma trận của dạng chính tắc này trong cơ sở E là ma trận chéo

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

VD. $\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2$

5.3.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Giả sử $E = \{e_i\}; i = \overline{1, n}$ là một cơ sở của V và dạng toàn phương ω trên V có dạng

$$\omega(x) = \omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

<u>TH1.</u> Tồn tại một hệ số $a_{ii} \neq 0$

a) Nếu $a_{11} \neq 0$ ta nhóm các số hạng chứa x_1

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \left(a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n} x_1 x_n\right) + \ldots + \omega'(x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n\right)^2 + \omega''(x_2, \ldots, x_n)$$

Trong đó: ω'' không chứa x_1

Đặt $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$

$y_k = x_k;\ k = \overline{2, n}$

Ta có: $\omega(x_1, ..., x_n) = \omega(y_1, ..., y_n) = \dfrac{1}{a_{11}} y_1^2 + \omega_1(y_2, ..., y_n)$

trong đó: $\omega_1(y_2, ..., y_n)$ là dạng toàn phương của n – 1 biến y_2, ..., y_n.

Lặp lại quá trình trên với dạng toàn phương ω_1. Sau một số hữu hạn bước ta thu được dạng chính tắc của ω

VD. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi Lagrange và tìm cơ sở ứng với dạng chính tắc đó

1) $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

2) $\omega(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 8x_2^2 - 7x_3^2 + 6x_1x_3 - 14x_2x_3$

3) $\omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 9x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$

b) Nếu $\exists a_{ii} \neq 0$ với i > 1 và $a_{11} = 0$ ta làm tương tự như trên với chú ý x_i đóng vai trò x_1. Tức là ta đặt

$$\begin{aligned} y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ y_k &= x_k;\ k \neq i \end{aligned}$$

Khi đó: $\omega(x_1,\ldots,x_n) = \omega(y_1,\ldots,y_n) = \dfrac{1}{a_{i1}} y_i^2 + \omega_2(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n)$

Trong đó: ω_2 là dạng toàn phương của n – 1 biến $y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n$

Lặp lại quá trình trên với dạng toàn phương ω_2. Sau một số hữu hạn bước ta thu được dạng chính tắc của ω.

VD. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi Lagrange $\omega(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$

TH2. Mọi hệ số $a_{ii} = 0$ và tồn tại một hệ số $a_{ij} \neq 0; (i \neq j)$

Ta đặt:

$$x_i = y_i + y_j$$

$$x_j = y_i - y_j$$

$$x_k = y_k; k \neq i, j$$

Khi đó ta có: $2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}\left(y_i^2 - y_j^2\right)$. Nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện các số hạng bình phương với hệ số khác 0. Ta tiếp tục thực hiện như trong trường hợp 1.

VD. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi Lagrange

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

5.3.3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao

Trong không gian véctơ n chiều V, cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = x^T A x$$

Vì A là ma trận đối xứng thực nên A chéo hóa được bởi ma trận trực giao P và dạng chéo hóa của A là:

$$D = P^{-1} A P$$

$\Rightarrow A = PDP^{-1} = PDP^{T}$ (do P trực giao nên $P^{-1} = P^{T}$). Khi đó

$$\omega(x) = x^{T}PDP^{T}x = \left(P^{T}x\right)^{T} D\left(P^{T}x\right)$$

Đặt $y = P^{T}x \Leftrightarrow x = Py \quad (*)$

Ta được dạng chính tắc:

$$\omega(y) = y^{T}Dy = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$; với $\lambda_i; i = \overline{1, n}$ là các trị riêng của A

Như vậy, dạng toàn phương $\omega(x) = x^{T}Ax$ luôn luôn có thể đưa về dạng chính tắc $\omega(y) = y^{T}Dy$ bằng cách chéo hóa trực giao ma trận A của dạng toàn phương.

Phép đổi biến (*) có ma trận chuyển cơ sở là ma trận trực giao P nên phương pháp này gọi là phép biến đổi trực giao. Phương pháp này dựa vào quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng A nên cũng được gọi là phương pháp chéo hóa trực giao ma trận.

B1. Viết ma trận A của dạng toàn phương trong cơ sở chính tắc.

B2. Chéo hóa trực giao A bởi ma trận trực giao P và có được dạng chéo của A là ma trận D.

B3. Kết luận: Dạng chính tắc cần tìm là

$$\omega(y) = y^T D y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$; với D là ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở trực chuẩn tạo nên từ các cột của ma trận trực giao P; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lần lượt là các phần tử trên đường chéo chính của D.

Phép biến đổi cần tìm là: x = Py

VD. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép biến đổi.

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

5.4. Luật quán tính

Tồn tại nhiều phương pháp để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc. Các dạng chính tắc này thường khác nhau nhưng các hệ số trong dạng chính tắc tuân theo một luật mà được gọi là Định luật quán tính.

Định lý. (Định luật quán tính)

Số các hệ số dương, hệ số âm và hệ số bằng 0 trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương trên một không gian véctơ không phụ thuộc vào cơ sở của không gian véctơ đó (tức là không phụ thuộc vào cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc).

Định nghĩa.

Số các hệ số dương, hệ số âm và hệ số bằng 0 trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương ω được gọi là các *chỉ số quán tính* của ω.

§6. DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH

6.1. Định nghĩa.

Giả sử ω là một dạng toàn phương trên không gian véctơ V. Dạng toàn phương ω được gọi là *xác định* nếu $\omega(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

6.2. Định nghĩa.

Giả sử ω là một dạng toàn phương xác định

- Nếu $\omega(x) > 0; \forall x \neq \theta$ thì ω được gọi là *xác định dương*
- Nếu $\omega(x) < 0; \forall x \neq \theta$ thì ω được gọi là *xác định âm*

6.3. Định lý.

- Điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương ω xác định dương là tất cả các hệ số trong dạng chính tắc của nó đều dương.
- Điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương ω xác định âm là tất cả các hệ số trong dạng chính tắc của nó đều âm.

Hệ quả.

- Dạng toàn phương ω xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các trị riêng dương.
- Dạng toàn phương ω xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các trị riêng âm.

6.4. Định nghĩa.

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_n$. Các định thức:

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được gọi là các *định thức con chính* của A

6.5. Định lý. (Tiêu chuẩn Sylvester)

- Dạng toàn phương $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_n$ đều dương. Tức là $\Delta_i > 0; i = \overline{1, n}$

- Dạng toàn phương ω xác định âm khi và chỉ khi A có các định thức con chính cấp chẵn dương, cấp lẻ âm. Tức là:

$$(-1)^i \Delta_i > 0; i = \overline{1, n}$$

<u>VD.</u> Tìm m để dạng toàn phương sau xác định dương

$$\omega(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3$$