Chương 4. KHÔNG GIAN EUCLIDE

4.1. Không gian Euclide

4.1.1. Các định nghĩa và ví dụ.

Định nghĩa 1: Cho V – KGVT trên R. Ta gọi tích vô hướng của hai vectơ $u, v \in V$ là ánh xạ

$$<,>: V \times V \to R$$
$$(u, v) \to <u, v>$$

thỏa 4 tiên đề sau: $\forall u, v, w \in V, \forall k \in R$

1. $<u, v> = <v, u>$
2. $<u + v, w> = <u, w> + <v, w>$
3. $<ku, v> = k<u, v>$
4. $<u, u> \geq 0, <u, u> = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

Định nghĩa 2: KGVT V có trang bị một tích vô hướng gọi là KG Euclide.

Ví dụ 1: Trong KGVT R^2, R^3 các vectơ tự do trong mặt phẳng và không gian, ta xét tích vô hướng của 2 vectơ theo ý nghĩa thông thường:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

thì R^2, R^3 là các KG Euclide.

Ví dụ 2: Xét KGVT R^n với $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, ta định nghĩa:

$$<u, v> = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$$

thì (R^n, < , >) là KGVT Euclide.

4.1.2. Độ dài và góc trong không gian Euclide, các bất đẳng thức.

Định nghĩa 3: Cho (V, < , >) – KG Euclide. Với mỗi $u \in V$ ta định nghĩa và ký hiệu độ dài (môđun) hay chuẩn của u:

$$\|u\| := \sqrt{<u, u>}$$

Nếu $\|u\| = 1$ thì u được gọi là vectơ đơn vị.

Ví dụ 3: Trong R^n, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, ta có:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2} = (u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2)^{1/2}$$

Tính chất của độ dài.

Độ dài của vectơ có các tinh chất sau:

1. $\|u\| \geq 0, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

2. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Định nghĩa 4: Cho (V, < , >) – KG Euclide. Góc giữa hai vectơ $u, v \in V$ được cho bởi công thức:

$$\cos(u\hat{,}v) := \frac{<u, v>}{\|u\|.\|v\|}$$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwars (BĐT C-S):

Cho (V, < , >) – KG Euclide. Khi đó $\forall u, v \in V$ thì

$$|<u, v>| \leq \|u\|.\|v\| \quad .$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi u,v tỉ lệ.

Áp dụng BĐT C-S vào KG Euclide R^n ta có BĐT Bunnhiacopsky:

$\forall u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ thì

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2)$$

4.2. Hệ trực giao. Quá trình trực giao – trực chuẩn hóa Gram – Schmid

4.2.1. Hệ trực giao – Hệ trực chuẩn.

Định nghĩa 1: Trong một KG Euclide, hai vectơ u và v gọi là trực giao, ký hiệu $u \perp v$, nếu $<u, v> = 0$.

Định nghĩa 2: Giả sử V là một KG Euclide. Ta gọi hệ $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ là

i) trực giao nếu $<u_i, u_j> = 0, \forall i, j = 1, ..., k, i \neq j.$

ii) trực chuẩn nếu nó là trực giao và $\|u_i\| = 1, \forall i = 1, ..., k.$

Định lý 1: Mọi hệ trực giao các vectơ khác không (trực chuẩn) là hệ độc lập tuyến tính.

Định lý 2: Giả sử $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính các vectơ của KG Euclide của V. Khi đó ta có thể tìm được hệ trực giao (trực chuẩn) $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sao cho $\text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, \forall k = 1, 2, ..., n.$

4.2.2. Quá trình trực giao- trưc chuẩn hóa Gram – Schmidt.

Trong không gian Euclide Vcho hệ vectơ đltt $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Quá trình trực trao:

Đặt

$$v_1 = u_1,$$

$$v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1,$$

. . . . . .

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< u_n, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i.$$

Khi đó $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n\}$ là hệ trực giao.

Quá trình trực chuẩn:

Đặt

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},$$

$$\overline{v}_2 = u_2 - < u_2, v_1 > v_1, \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|}$$

. . . . . .

$$\overline{v}_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} < u_n, v_i > v_i \quad \rightarrow v_n = \frac{\overline{v}_n}{\|\overline{v}_n\|}$$

Khi đó $\{v_1,\ v_2, \ldots, v_n\}$ là hệ trực chuẩn.

Ví dụ: Hãy trực chuẩn hóa hệ $S = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ trong R^3

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (1,2,1)$$

Giải:

- $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}),$

- $\overline{v}_2 = u_2 - < u_2, v_1 > v_1 = (-1,1,1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}) = (-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3})$

$$\|\overline{v}_2\| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),$$

- $\overline{v}_3 = u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2 =$

$$= (1,2,1) - \frac{4}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\|\overline{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vậy $S' = \{v_1,\ v_2, v_3\}$ là hệ trực chuẩn hóa của hệ S.

Bổ sung:

Định nghĩa: Một cơ sở của KGVT V mà là hệ trực giao (trực chuẩn) được gọi là một cơ sở trực giao (trực chuẩn).

Định lý: Mọi hệ trực giao (trực chuẩn) của KGVT V đều có thể bổ sung để trở thành cơ sở trực giao (trực chuẩn).

Hệ quả: Mọi KGVT V đều tồn tại cơ sở trực giao (trực chuẩn).