TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Thạc sĩ Bùi Văn Liêm

BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP 1

Trình độ: Đại học

Ngành: Ngành thuộc khối kỹ thuật – Kinh Tế

Môn: Toán cao cấp 1

Thời lượng giảng dạy: 30tiết

TP. HỒ CHÍ MINH – 2019

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

Chương 1. GIỚI HẠN HÀM SỐ

Bài 1. NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Định nghĩa giới hạn của hàm số

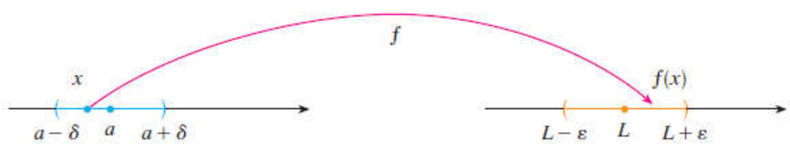
1.1. Giới hạn tổng quát

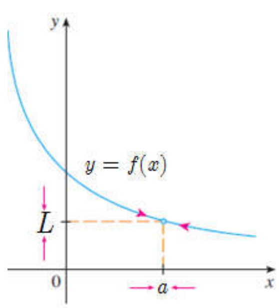
Ta viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ và đọc là "*giới hạn của* $f(x)$, *khi* x *tiến đến* a, *bằng* L" nếu ta có thể làm cho giá trị của $f(x)$ rất gần với L bằng cách cho x tiến gần đến a (kể cả hai phía của a) nhưng không bằng a.

- **Định nghĩa**

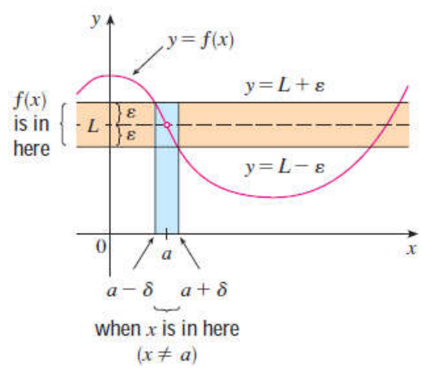
Xét hàm f xác định trên khoảng chứa điểm a. Ta nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a là L, và ta viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn:

$$\text{nếu } 0 < |\, x - a \,| < \delta \text{ thì } |\, f(x) - L \,| < \varepsilon .$$



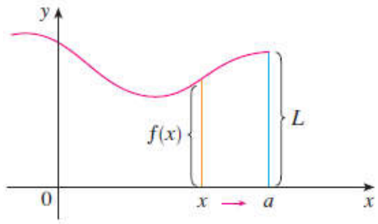


$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

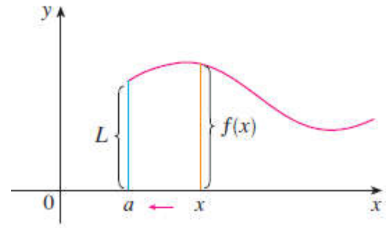


1.2. Giới hạn một phía

Ta viết $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ và đọc là "*giới hạn bên trái của* $f(x)$ *khi* x *tiến đến* a *bằng* L" nếu ta có thể làm cho giá trị của $f(x)$ rất gần với L bằng cách cho x tiến sát đến a và x nhỏ hơn a. Tương tự, nếu ta cho x tiến đến (và lớn hơn) a, ta được "*giới hạn bên phải của* $f(x)$ *khi* x *tiến đến* a *bằng* L" và viết là $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.



$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

- **Chú ý.** Ký hiệu "$x \to a^-$" nghĩa là ta chỉ xét $x < a$, và "$x \to a^+$" nghĩa là $x > a$.
- **Định nghĩa**

• $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn:

nếu $a - \delta < x < a$ thì $|\, f(x) - L \,| < \varepsilon$.

• $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn:

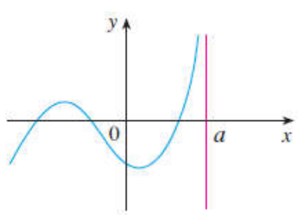
nếu $a < x < a + \delta$ thì $|\, f(x) - L \,| < \varepsilon$.

- **Định lý**

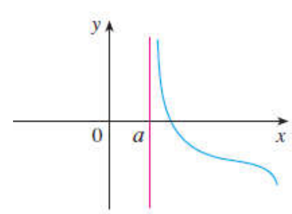
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

1.3. Giới hạn vô cùng

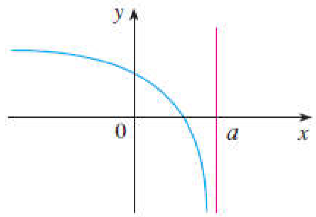
Xét hàm $f(x)$ xác định trên khoảng chứa điểm a. Khi đó, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ hay $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ có nghĩa là giá trị tuyệt đối của $f(x)$ vô cùng lớn khi x tiến đến a, nhưng khác a. Có 4 dạng sau



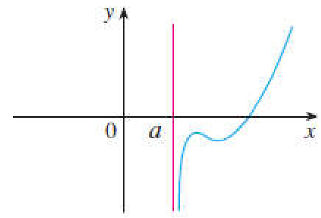
$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

▪ **Định nghĩa**

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng chứa điểm a. Khi đó $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi giá trị dương M tồn tại δ thỏa mãn

$$\text{nếu } 0 < |\, x - a \,| < \delta \text{ thì } f(x) > M.$$

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng chứa điểm a. Khi đó $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ có nghĩa là với mọi giá trị âm N tồn tại δ thỏa mãn

$$\text{nếu } 0 < |\, x - a \,| < \delta \text{ thì } f(x) < N.$$

2 Tính chất

Giả sử k là hằng số và $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó

1) $\lim_{x \to a} [k.f(x)] = k.\lim_{x \to a} f(x)$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$

4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ nếu $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

6) $\lim_{x \to a} \left\{[f(x)]^{g(x)}\right\} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim_{x \to a} g(x)}$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

7) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (nếu n chẵn, ta giả sử rằng $\lim_{x \to a} f(x) > 0$)

▪ **Định lý**

Nếu $f(x) \leq g(x)$ khi x tiến đến a ($x \neq a$) và $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

▪ **Định lý kẹp giữa**

Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x)$ khi x tiến đến a $(x \ne a)$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

▪ **Chú ý**

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \ \frac{1}{0^-} = -\infty, \ \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

▪ **Một số kết quả giới hạn cần nhớ**

$$1)\ \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} & (n = m) \\ 0 & (n < m) \\ \infty & (n > m) \end{cases}$$

$$2)\ \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\tan \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

$$3)\ \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{arc\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{arc\tan \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

$$4)\ \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1 \qquad 5)\ \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\ln(\alpha(x) + 1)}{\alpha(x)} = 1$$

$$6)\ \lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \frac{1}{n}$$

$$7)\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$8)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} = 0 \text{ nếu } \alpha \ge 1,\ \beta > 1.$$

Một số ví dụ

VD Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x \to x_0} (u(x) - 1) v(x)}$

Áp dụng tính $a) \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2x + 5}{3x^2 + x - 2}\right)^{3x}$ $b) \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 1}\right)^{2x - 1}$

Bài 2. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ, VÔ CÙNG LỚN

1. Đại lượng vô cùng bé

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa1: Đại lượng $\alpha(x)$ được gọi là *vô cùng bé* (viết tắt là VCB) khi x tiến đến a nếu $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

VD. $\alpha(x)=\tan\left(2x-1\right)$ là VCB khi $x\to\dfrac{1}{2}$

$\beta(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ là VCB khi $x\to+\infty$.

Định nghĩa 2

Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi x tiến đến a. Ta có:

• $\alpha(x)$ là vô cùng bé *bậc cao hơn* $\beta(x)$, ký hiệu là $\alpha(x)=O(\beta(x))$, nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

• $\alpha(x)$ là vô cùng bé *cùng bậc* với $\beta(x)$ nếu $0\neq\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq\pm\infty$.

• $\alpha(x)$ là vô cùng bé *tương đương* với $\beta(x)$, ký hiệu là $\alpha(x)\sim\beta(x)$, nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

VD

x^5 là VCB cấp cao hơn $2x^3$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{2x^3}=0$

x^5 là VCB cùng bậc $2x^5$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{2x^5}=\dfrac{1}{2}$

$\sin 2x$ là VCB tương đương với 2x khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$

Một số cặp vô cùng bé tương đương cấn nhớ khi x→0

1) $\sin x\sim x$ 2) $\tan x\sim x$ 3) $\arcsin x\sim x$ 4) $\arctan x\sim x$

6) $e^x-1\sim x$ 7) $\ln(1+x)\sim x$

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

8) $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{n}$

.

Khi $x \to 0 \Rightarrow \alpha(x) \to 0$ công thức trên vẫn đúng khi thay x bởi $\alpha(x)$

1.2. Tính chất

Giả sử $\alpha_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ là các vô cùng bé khi x tiến đến a. Ta có:

1) $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x) \Leftrightarrow \alpha_1(x) - \alpha_2(x) = O(\alpha_1(x)) = O(\alpha_2(x))$

2) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ và $\alpha_2(x) \sim \alpha_3(x)$ thì $\alpha_1(x) \sim \alpha_3(x)$

3) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_3(x)$ và $\alpha_2(x) \sim \alpha_4(x)$ thì $\alpha_1(x)\alpha_2(x) \sim \alpha_3(x)\alpha_4(x)$

4) Nếu $\alpha_1(x) = O(\alpha_2(x))$ thì $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x)$.

2. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng bé cấp cao

Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là tổng của những vô cùng bé khác cấp khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn tỉ số của vô cùng bé *cấp thấp nhất* của $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

VD 1. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 - \cos x + 1}{x^4 + x^2}$.

Chú ý: Việc thay thế VCB tương đương *không áp dụng được* cho hiệu hoặc tổng của các vô cùng bé nếu chúng làm *triệt tiêu* VCB cấp thấp nhất.

VD. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x - 1) + (e^{-x} - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + (-x)}{x^2} = 0$ (sai !).

Kết quả đúng là $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 1$ (xem bài quy tắc L'Hospital ở chương 2).

VD 2. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 - 2x\sin^2 x)}{\sin x^2.\tan x}$.

VD 3. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1} + \arctan^2 x - 1}{\cos^3 x - \cos x + 2x}$.

VD 4. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi $x = 2t - t^2$ và $y = t^2 + 3t^4$.

Khi $x \to 0$, chứng minh rằng $f(x) \sim \dfrac{x^2}{4}$.

3. Đại lượng vô cùng lớn

3.1 Định nghĩa

Định nghĩa1: Đại lượng $\beta(x)$ được gọi là đại lượng VCL khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$$

VD: $\frac{1}{x-1}$ là VCL khi $x \to 1$

Định nghĩa2: f(x) và g(x) là VCL khi $x \to x_0$ có $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

Nếu k=0 ta nói f(x) là VCL cấp thấp hơn g(x) khi $x \to x_0$ hay g(x) là VCL cấp cao hơn f(x)

Nếu $k \neq 0, \infty$ ta nói f(x) và g(x) là 2 VCL cùng bậc.

Đặc biệt k=1 ta nói f(x) và g(x) là 2 VCL tương đương.

VD: x^5 là VCL cấp cao hơn $2x^3$ khi $x \to \infty$ vì $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{2x^3} = \infty$

x^5 là VCB cùng bậc $2x^5$ khi $x \to 0$ vì $\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}, \frac{1}{\sin x}$ là 2 VCL cùng bậc khi $x \to 0$

3.2 Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là tổng của những vô cùng lớn khác cấp khi $x \to a$ thì $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn tỉ số của vô cùng bé *cấp cao nhất* của $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

VD: Tính a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 2x^3\sqrt{x} - 1}{3x^5\sqrt{x} - 2x^4 + 5}$ b) $\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3})$

Chú ý: Việc thay thế VCB tương đương *không áp dụng được* cho hiệu hoặc tổng của các vô cùng bé nếu chúng làm *triệt tiêu* VCB cấp thấp nhất.

4. Tiệm cận của đồ thị

4.1. Tiệm cận đứng

- **Định nghĩa**

Đường thẳng $x = a$ được gọi là *tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty .$$

VD. Do $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$, nên $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

VD . Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+2x-3}$.

4.2. Tiệm cận ngang

▪ **Định nghĩa**

Đường thẳng $y = L$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L .$$

▪ **Chú ý**

Đường cong $y = f(x)$ có miền xác định đóng thì không có tiệm cận ngang.

Chẳng hạn, đường cong $y = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x+2}$ không có tiệm cận ngang.

VD. Tìm tất cả các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

43. Tiệm cận xiên

▪ **Định nghĩa**

Đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là *tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{và} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right] = b .$$

VD. Tìm tất cả các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x-1}$.

▪ **Chú ý.** Ta viết $f(x) = \dfrac{3x^2-2x+4}{x-1} = 3x + 1 + \dfrac{5}{x-1}$ và $\dfrac{5}{x-1} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0$

.

Vì vậy, tiệm cận xiên cần tìm là $y = 3x + 1$.

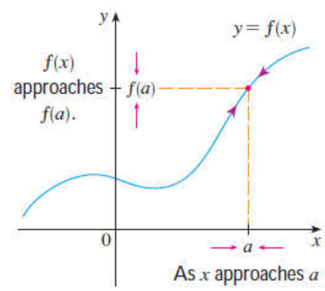
VD . Tìm tất cả các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$.

VD. Tìm tất cả các tiệm cận xiên hoặc ngang của đồ thị hàm số
$y = x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC. TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

1. Các định nghĩa

Đ/n 1: Hàm số f được gọi là *liên tục tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Định nghĩa hàm f liên tục tại a nếu thỏa mãn cả 3 điều:

1) $f(a)$ xác định (nghĩa là $a \in D_f$);

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tồn tại;

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

VD 1. Chứng tỏ hàm số sau liên tục tại $x = 2$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

VD 2. Chứng tỏ hàm $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ không liên tục tại $x = 1$.

Đ/n 2: Liên tục một phía

Hàm số f được gọi là *liên tục bên phải tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, và *liên tục bên trái tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

VD 3. Chứng tỏ hàm số sau không liên tục bên phải tại $x = 0$, nhưng liên tục bên trái tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$$

Đ/n 3: Liên tục trên khoảng

Hàm số f được gọi là *liên tục trên khoảng* $(a;b)$ nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc $(a;b)$. (Nếu f liên tục phải tại a và liên tục trái tại b thì f liên tục trên đoạn $[a;b]$).

VD 4. Chứng tỏ $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-1;\,1]$.

2. Các định lý

▪ **Định lý 1**

Nếu f và g liên tục tại a và k là hằng số thì $k.f$, $f \pm g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) cũng liên tục tại a.

▪ **Định lý 2**

• Mọi đa thức đều liên tục trên $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

• Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.

▪ **Định lý 3**

Nếu hàm f liên tục tại b và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. Nghĩa là

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

VD 5. Tìm giá trị của α để hàm số sau đây liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\tan^2 x + \sin^2\sqrt{x}}{2x}, & x > 0 \\ \alpha & , x \le 0 \end{cases}$$

VD 6. Tìm giá trị của α để hàm số sau đây liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x)}{\arctan^2 x + 2x^2}, & x \neq 0 \\ 2\alpha - 3 & , x = 0 \end{cases}$$

Chương 2. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN

Bài 1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm

1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Đạo hàm của hàm số f tại a, ký hiệu bởi $f'(a)$, là

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

Tương tự, nếu thay a bởi x, ta được

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

▪ **Định lý**

Nếu f có đạo hàm (còn được gọi là *khả vi*) tại a thì f liên tục tại a

Chứng minh. Vì f khả vi tại a, nên ta có:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Mặt khác, $f(x)-f(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)\ (x\neq a)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a).0 = 0.$$

Vậy, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\{f(a)+[f(x)-f(a)]\} = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = f(a)$ ■

Định nghĩa 2

- Đạo hàm bên phải của f tại a được xác định bởi $f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nếu giới hạn tồn tại.
- Đạo hàm bên trái của f tại a được xác định bởi $f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nếu giới hạn tồn tại.

▪ **Chú ý**

Hàm số f có đạo hàm (khả vi) tại a nếu và chỉ nếu $f'_-(a) = f'_+(a)$.

VD 1. Chứng tỏ rằng hàm số sau đây liên tục tại $x = 1$, nhưng không khả vi tại $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \ x \le 1 \\ 2x^2 \quad , \ x > 1 \end{cases}$$

Định nghĩa 3

• Hàm số được gọi là khả vi trên một khoảng nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

• Hàm số f được gọi là khả vi trên đoạn $[a;b]$ nếu f khả vi trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $f'_+(a)$ và $f'_-(b)$.

• Hàm số được gọi là *khả vi liên tục* nếu nó có đạo hàm và đạo hàm đó liên tục.

▪ **Ghi nhớ**

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(a; f(a))$ được cho bởi công thức

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

1.2 Các quy tắc tính đạo hàm

Giả sử f, g và h là các hàm số khả vi, ta có:

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(C \in \mathbb{R})$, $[Cf(x)]' = C.f'(x)$

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x) \neq 0)$

5) Nếu $y = f(u)$ với $u = g(x)$ thì $y'(x) = y'(u).u'(x)$

6) Nếu $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ thì $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$

1.3. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp

1) $(x^{\alpha})' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^{\alpha})' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$
2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3) $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
4) $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
7) $(e^{x})' = e^{x}$	$(e^{u})' = u'e^{u}$
8) $(a^{x})' = a^{x}.\ln a$	$(a^{u})' = u'.a^{u}.\ln a$
9) $\left(\ln \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u}$
10) $\left(\log_a \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$\left(\log_a \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$
11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
14) $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\text{arccot}\, u)' = -\dfrac{u'}{1 + u^2}$

Các ví dụ

VD 2. Cho hàm số $y = \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}$. Tính $y'(x)$

VD 3. Tính các đạo hàm một phía của hàm số sau tại $x = 4 : f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x}, & x < 4 \\ 5 - x, & x \geq 4 \end{cases}$

VD 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\ln(\arcsin x)}$, $y = (2x+1)^{3x}$

1.4 Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa

$f'(x)$: đạo hàm cấp

$\left[f'(x)\right]' = f''(x)$ **:** đạo hàm cấp 2

$\left[f''(x)\right]' = f'''(x)$: đạo hàm cấp 3

…

$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$: đạo hàm cấp n

Tính chất

$$\left[k.f(x)\right]^{(n)} = k.f^{(n)}(x)$$
$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + (v)^{(n)}$$
$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

VD 1: Cho hàm số $y = 2(x+1)\arctan(x+1) - \ln(x^2+2x+2)$ Tính $y''(x)$.

VD 2: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây:

$a) y = \sin x$

$b) y = \cos(\alpha x)$ $\quad d) y = \ln(ax+b)$

$c) y = \dfrac{1}{ax+b}$ $\quad e) y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

1.5 Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm số $y = y(x)$ cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ được gọi là hàm ẩn.

VD 1. Hàm số $y = y(x)$ cho bởi phương trình $\tan(x+y) = xy$ là hàm ẩn.

Tính y'? (Lấy đạo hàm 2 vế)

VD 2. Tính $y'(0)$ của hàm ẩn được cho bởi $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

Cách khác: Nếu $y(x)$ là hàm số ẩn được xác định bởi $F(x,y) = 0$ thì $y'(x) = -\dfrac{dF(x,y)\,/\,dx}{dF(x,y)\,/\,dy}$

VD 3. Tính $y'(x)$, với $y(x)$ được xác định bởi $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$.

VD 4. Tính $y'(0)$, với $y(x)$ được xác định bởi $y^3 = e^x y + x\ln y$.

1.6 Đạo hàm của hàm số cho bởi phương trình tham số

Định nghĩa: Hàm số $y = y(x)$ cho bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (x(t) có hàm ngược t(x)) gọi là hàm số cho bởi phương trình tham số.

$$y'(x)? \qquad \begin{aligned} & y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (= g(t)) \\ & y''(x) = \frac{g'(t)}{x'(t)} \\ & \ldots \end{aligned}$$

VD 1. Tính $y'(x)$ biết hàm số y(x) cho bởi $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2t - 2\arctan t \end{cases}$

VD 2. Tính $y''(2)$ biết hàm số y(x) cho bởi $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = t + t^2 \end{cases}$

VD 3. Tính $y'(x)$ của hàm số cho bởi $x = 2t^2 - 1,\ y = 4t^3\ (t \neq 0)$.

VD 4. Tính $y'(x_0)$ tại $x_0 = 1$ của hàm số cho bởi $x = e^t,\ y = t^2 - 2t$.

▪ **Chú ý**

$$dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

2. Vi phân

Định nghĩa

Nếu đặt $\Delta x = dx$ là số gia của x thì $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ được gọi là số gia của $y = f(x)$.

Nếu hàm số f khả vi liên tục trên một khoảng chứa x thì

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x)dx + \varepsilon.dx \text{ } (\varepsilon \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0).$$

Đại lượng $dy = f'(x)dx$ được gọi là vi phân cấp 1của y hay $f(x)$.

$d(dy) = f''(x)dx^2$ gọi là vi phân cấp 2 của f(x) ký hiệu $d^2(y)$ *hay* $d^2(f)$

… $d^n(y) = f^{(n)}(x)dx^n$

VD 1: Tìm vi phân cấp 1 của hàm số $a) y = 3^{\ln(\arccos x)}$ $b) y = 2^{\sqrt{\tan x}}$

VD 2: Tìm vi phân cấp 2 của hàm số $y = \text{arccot}\left(x^2\right)$

Bài 2. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

1. Ứng dụng đạo hàm trong khảo sát hàm số

1.1 Xác định khoảng đồng biến (khoảng tăng), khoảng nghịch biến (khoảng giảm của hàm số.

Định lý 1

Nếu $f'(x) > 0$ trên (a,b) thì f đồng biến trên (a,b);

$f'(x) < 0$ trên (a,b) thì f nghịch biến trên (a,b).

▪ **Chú ý**

Hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên (a,b) thì f được gọi là đơn điệu trên (a,b).

VD . Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$a) y = \ln(x^2+1)$ $b) y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

c) $y = y(x)$: $x = t^3$, $y = t^3 - 3t^2$

1.2 Tìm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong $(a;b)$ chứa x_0.

• Nếu $f(x_0) < f(x),\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì hàm số $f(x)$ đạt *cực tiểu* tại x_0.

• Nếu $f(x_0) > f(x),\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì hàm số $f(x)$ đạt *cực đại* tại x_0.

▪ **Định lý 2**

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $2n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ trên $(a;b)$ chứa x_0 thỏa $f'(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó:

• Nếu $f^{(2n)}(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt *cực tiểu* tại x_0,

• Nếu $f^{(2n)}(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt *cực đại* tại x_0.

VD. Tìm cực trị của hàm số $a) f(x) = -x^6 - 2x^3 + 3 \qquad c) y = 2x.e^{-x^2+x} + 3$
$b) y = x\ln x$.

1.3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa

Xét hàm số $y = f(x)$ và $X \subset D_f$.

• Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số $f(x)$ trên X, ký hiệu $M = \max\limits_{x \in X} f(x)$, nếu $\exists x_0 \in X : f(x_0) = M$ và $f(x) \le M,\ \forall x \in X$.

• Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $f(x)$ trên X, ký hiệu $m = \min\limits_{x \in X} f(x)$ nếu $\exists x_0 \in X : f(x_0) = m$ và $f(x) \ge m,\ \forall x \in X$.

▪ **Chú ý**

• Hàm số có thể không đạt max hoặc min trên $X \subset D_f$.

• $\forall x \in X : \min\limits_{x \in X} f(x) \le f(x) \le \max\limits_{x \in X} f(x)$.

Phương pháp tìm max – min

▪ **Hàm số liên tục trên đoạn [*a*; *b*]**

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Để tìm $\max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ và $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

• **Bước 1.** Giải $f'(x) = 0$. Giả sử có n nghiệm $x_1, ..., x_n \in [a; b]$. (loại các nghiệm nằm ngoài $[a; b]$).

• **Bước 2.** Tính các giá trị $f(a),\ f(x_1), ...,\ f(x_n),\ f(b)$.

• **Bước 3.** Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các giá trị đã tính ở bước 2 là các giá trị max, min cần tìm.

VD 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[0;\ 2]$.

- **Chú ý**

• Nếu đề bài chưa cho đoạn $[a; b]$ thì ta phải tìm MXĐ của hàm số trước khi làm bước 1.

• Ta có thể đổi biến $t = t(x)$ và viết $y = f(x) = g(t(x))$. Nếu gọi T là miền giá trị của hàm $t(x)$ thì

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{t \in T} g(t),\ \min_{x \in X} f(x) = \min_{t \in T} g(t).$$

VD 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$.

VD 3. Tìm max, min của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$.

VD. Tìm max, min của hàm số $y = e^{\sqrt{x^2+4}}$ trên $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{21}\right]$

- **Hàm số liên tục trên khoảng (*a*; *b*)**

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ (a, b có thể là ∞). Để tìm $\max\limits_{x \in (a;b)} f(x)$ và $\min\limits_{x \in (a;b)} f(x)$, ta thực hiện các bước:

• **Bước 1.** Giải $f'(x) = 0$. Giả sử có n nghiệm $x_1, ..., x_n \in (a; b)$. (loại các nghiệm nằm ngoài $(a; b)$).

• **Bước 2.** Tính $f(x_1), ...,\ f(x_n)$ và hai giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x \to a^+} f(x),\ L_2 = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

• **Bước 3.** Kết luận:

1) Nếu $\max\{f(x_1), ..., f(x_n)\} > \max\{L_1, L_2\}$ thì $\max\limits_{x \in (a;b)} f(x) = \max\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$;

2) Nếu $\min\{f(x_1),...,f(x_n)\} < \min\{L_1, L_2\}$ thì

$$\min_{x\in(a;b)} f(x) = \min\{f(x_1),...,f(x_n)\};$$

3) Nếu không thỏa 1) (hoặc 2)) thì hàm số không đạt max (hoặc min).

- **Chú ý**

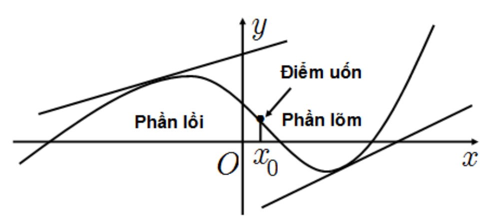
Ta có thể lập bảng biến thiên của $f(x)$ thay cho bước 3.

VD 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

VD 2. Tìm max, min của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2} - 1}$.

1.4 Xác định khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị hàm số

- **Định nghĩa**



• Nếu mọi tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ đều nằm *phía dưới* (tương tự, *phía trên*) (C) trên $(a;b)$ thì đồ thị (C) được gọi là *lõm* (tương tự, *lồi*) trên $(a;b)$.

• Điểm $M_0 \in (C): y = f(x)$ nằm giữa phần lõm và lồi được gọi là *điểm uốn* của đồ thị (C).

- **Định lý**

• Nếu $f''(x) > 0$ (hay $f''(x) < 0$) với mọi $x \in (a;b)$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ *lõm* (hay *lồi*) trên $(a;b)$.

• Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x chuyển từ trái sang phải qua x_0 thì $M_0(x_0;y_0)$ là *điểm uốn* của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

VD 1. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \arccos x$.

VD 2. Tìm các khoảng lồi, lõm của đồ thị hàm số

$$a) y = x^2 - 8\ln x \qquad b) y = \ln x - x\ln y$$

1.5 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M\left(x_0, y_0\right)$ là:

$$y = f^{'}(x_0)(x - x_0) + y_0$$

VD 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \arcsin\left(\frac{5}{2} - 2\cos x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 0.

VD 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 5^{\ln x}$ tại điểm $x = 1$

2. Quy tắc L'Hospital

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ đồng thời bằng 0 (hoặc bằng vô cùng) thì $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là dạng vô định $0/0$ (hoặc ∞/∞). Các dạng giới hạn này được giải quyết nhờ quy tắc L'Hospital sau

• Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trên (a,b) (có thể không khả vi tại x_0) và $g'(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

▪ **Chú ý**

Các dạng vô định: $0.\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞, và $\infty - \infty$ đều có thể biến đổi để áp dụng quy tắc L'Hospital.

VD 1. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

VD 2. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2.\arctan^2 x}$.

VD 3. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 \ln x)$ $(0 \times \infty)$.

VD 4. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$ $(\infty - \infty)$.

VD 5. Tính $L = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1^∞).

VD 6. Tính $L = \lim\limits_{x\to +\infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$ (∞^0).

VD 7. Tính $L = \lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln^2 x)$ $(\infty - \infty)$.

Bài 3. CÔNG THỨC TAYLOR

1. Công thức khai triển Taylor

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ có đạo hàm đến cấp $n+1$ trên $(a;b)$ với $x,\ x_0 \in (a;b)$ ta có các khai triển sau

• Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

với $c \in (a;b)$.

• Khai triển Taylor với phần dư Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O((x-x_0)^n)$$

• Khai triển Maclaurin

Khai triển Taylor với phần dư Peano tại $x_0 = 0$ được gọi là *khai triển Maclaurin*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + O(x^n)$$

Hay

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^n)$$

VD: Khai triển Maclaurin hàm số $a)\ y = \sin x$ $b)\ y = \cos x$

2. Các khai triển Maclaurin cần nhớ

1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^n)$.

2) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + O(x^n)$.

3) $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + O(x^n)$.

4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n})$.

5) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1})$.

6)

$$(1+x)^m = 1 + m\frac{x}{1!} + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + ... + m(m-1)...(m-n+1)\frac{x^n}{n!} + O(x^n).$$

- **Chú ý**

Nếu $u(x)$ là vô cùng bé khi $x \to 0$ thì ta có thể thay x trong các công thức trên bởi $u(x)$.

VD 1. Khai triển Maclaurin của $f(x) = \tan x$ đến x^3.

VD 2. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 1}$ đến x^3.

Bài tập. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 3}$ đến x^3.

VD 3. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = \ln(1 - 2x^2)$ đến x^6.

Bài tập. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = \ln(3 + 2x^2)$ đến x^6.

VD 4. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = 2^x$ đến x^3.

Bài tập. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = 5^{(3x-2)^2}$ đến x^7.

VD 5. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = e^{\sin x}$ đến x^3.

VD 6. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$ đến số hạng chứa x^3

3. Ứng dụng tính đạo hàm cấp cao

VD 1. Cho hàm $f(x) = x^3 \cos 2x$. Giá trị của $f^{(7)}(0)$ là:

A. $f^{(7)}(0) = 480$. B. $f^{(7)}(0) = 560$. C. $f^{(7)}(0) = 3360$. D. $f^{(7)}(0) = 6720$.

VD 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, tính $f^{(4)}(0)$.

Bài tập. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5x^2-2x+3}{x^2-1}$, tính $f^{(7)}(0)$.

VD 3. Cho hàm số $y=\sin^3 x$,tính $f^{(5)}\left(0\right)$.

Bài tập. Cho hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, tính $f^{(6)}\left(0\right)$.

Chương 3. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN

Bài 1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Định nghĩa

Hàm số $F(x)$ được gọi là một *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, ký hiệu là $\int f(x)dx$, nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.

- **Nhận xét**

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$, mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ gọi là tích phân bất định của $f(x)$ kí hiệu $\int f(x)dx$. Như vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$

- **Tính chất**

1) $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$; 2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

4) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

1) $\int a.dx = ax + C,\ a \in \mathbb{R}$; 2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

5) $\int e^x dx = e^x + C$; 6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$; 8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$; 10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

11) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a>0$;

13) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$; 14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$;

15) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$;

17) $\int \sqrt{x^2+a}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$;

18) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C$.

2. Phương pháp tính tích phân bất định

2.1 Phương pháp đổi biến

Tính $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

ta có $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$

VD 1. Tính tích phân $I = \int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln^3 x+1}}dx$.

VD 2. Tính tích phân $I = \int \frac{\cot x}{2\sin^4 x+3}dx$.

VD 3. Tính tích phân $I = \int \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x+1}}dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Một số dạng tích phân đổi biến cần biết

- **Dạng 1:** $I = \int \frac{\alpha x + \beta}{(ax+b)^2} dx$.

Cách giải. Biến đổi $I = \int \left(\frac{p}{ax+b} + \frac{q}{(ax+b)^2} \right) dx$.

VD. $\int \frac{4x+3}{4x^2+4x+1} dx = \int \frac{2(2x+1)+1}{(2x+1)^2} dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx$

$= \ln|2x+1| - \frac{1}{2(2x+1)} + C.$

- **Dạng 2:** $I = \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx \ (\Delta > 0)$.

Cách giải. Biến đổi $I = \frac{1}{a} \int \left(\frac{p}{x-x_1} + \frac{q}{x-x_2} \right) dx$ (x_1, x_2 là nghiệm của ax^2+bx+c).

VD. $\int \frac{3x+2}{2x^2+3x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3x+2}{(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)} dx = \int \left(\frac{5}{7} . \frac{1}{x-1} + \frac{11}{7} . \frac{1}{2x+5} \right) dx$

$= \frac{5}{7} \ln|x-1| + \frac{11}{14} \ln|2x+5| + C$.

- **Dạng 3:** $I = \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx \ (\Delta < 0)$.

Cách giải. Biến đổi $I = \int \left(\frac{X}{X^2+\gamma} + \frac{p}{X^2+\gamma} \right) dx$.

VD. $I = \int \frac{2x+1}{4x^2-4x+5} dx = \int \frac{(2x-1)+2}{(2x-1)^2+4} dx$

$= \underbrace{\int \frac{2x-1}{(2x-1)^2+4} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{2}{(2x-1)^2+4} dx}_{I_2}$.

• $I_1 = \frac{1}{4} \int \frac{d[(2x-1)^2+4]}{(2x-1)^2+4} = \frac{1}{4} \ln[(2x-1)^2+4] + C$

• $I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{d\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)+C$.

Vậy $I = \dfrac{1}{4}\ln\left(4x^2-4x+5\right)+\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)+C$.

- **Dạng 4: Tích phân hàm hữu tỉ bậc cao.**

Cách giải. Biến đổi hàm dưới dấu tích phân về các phân thức tối giản.

VD. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3+3)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^3+3}\right)dx$

$= \dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{9}\displaystyle\int\dfrac{d(x^3+3)}{x^3+3} = \dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{x^3}{x^3+3}\right|+C$.

VD. Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$.

Giải. Phân tích: $\dfrac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$.

Quy đồng mẫu số, ta được: $x^2+4x+4 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \ (*)$.

Từ $(*)$ ta có: $x=0 \Rightarrow A=4,\ x=1\Rightarrow C=9,\ x=2\Rightarrow B=-3.$

Vậy $I = 4\displaystyle\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{x-1}+9\int\frac{dx}{(x-1)^2} = 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1}+C$.

- **Dạng 5: Tích phân hàm lượng giác** $I = \displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Cách giải

• Nếu $R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$, ta đặt $t=\cos x$.

• Nếu $R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$, ta đặt $t=\sin x$.

• Nếu $R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x)$ thì ta hạ bậc.

• Nếu $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{a\sin x + b\cos x + c}$ thì ta đặt

$t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

VD. Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x}$.

Giải. Đặt $t = \tan x \Rightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$,

$\sin x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x+1-\sqrt{2}}{\tan x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

VD. Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Giải. Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$\Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Vậy $$I = \int \frac{1}{\dfrac{8t}{1+t^2} + \dfrac{3-3t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = -\frac{1}{t+2} + C$$

$$= -\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2} + 2} + C.$$

2.2 Phương pháp tích phân từng phần

- **Công thức** $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$
- **Các dạng tích phân từng phần thường gặp**

• Đối với dạng tích phân $\displaystyle\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$ thì ta đặt $u = P(x),\ dv = e^{\alpha x}dx$.

• Đối với dạng tích phân $\int P(x)\ln^{\alpha} x\,dx$ thì ta đặt $u = \ln^{\alpha} x,\ dv = P(x)dx$.

VD 1. Tính tích phân $I = \int \frac{x}{2^x}\,dx$.

- **Chú ý**

Đối với tích phân khó, ta phải đổi biến trước khi lấy từng phần hoặc tách thành tổng của các tích phân.

VD 5. Tính tích phân $I = \int \cos^3 x\, e^{\sin x} dx$.

VD. Tính tích phân $I = \int \cos(\ln x)\,dx$.

Giải. Đặt $t = \ln x \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\Rightarrow I = \int e^t \cos t\,dt = \int e^t\, d(\sin t) = e^t \sin t + \int e^t d(\cos t)$$

$$\Rightarrow I = e^t(\sin t + \cos t) - \int e^t \cos t dt \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C$$

Vậy $I = \frac{1}{2}e^{\ln x}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$.

VD. Tính tích phân $I = \int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$.

Giải. Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$

$$\Rightarrow I = 3\int t^2 \cos t\,dt = 3\int t^2\, d(\sin t) = 3t^2 \sin t + 6\int t d(\cos t)$$

$$= 3t^2 \sin t + 6t\cos t - 6\sin t + C = \left(3\sqrt[3]{x^2} - 6\right)\sin\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

VD 6. Tính tích phân $I = \int (2x^2 + x + 1)e^{x^2+x} dx$.

Bài 2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Định nghĩa

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;\ b]$.

Ta chia đoạn $[a;\ b]$ thành *n* đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Trên mỗi đoạn $[x_k;\ x_{k+1}]$ ta lấy điểm tùy ý $x = \xi_k$, $k = \overline{0,\ n-1}$.

Gọi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ và $d = \max\limits_k \left\{\Delta x_k\right\}$. Lập tổng tích phân (Riemann)

$\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$.

• Giới hạn hữu hạn (nếu có) $I = \lim\limits_{d\to 0}\sigma$ được gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$, ký hiệu $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

- **Tính chất**

1) $\int\limits_a^b k.f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$;

2) $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;\ \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ c \in [a;\ b]$;

5) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

6) $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$;

7) $a < b \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$;

8) $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;

9) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ thì $\exists c \in [a; b]$ sao cho $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

.

2. Công thức Newton – Leibnitz

2.1. Công thức Newton – Leibnitz

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $F(x) = \varphi(x) + C$ với $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$. Vậy ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Chú ý**

• Có hai phương pháp tính tích phân như bài 1.

• Nếu $f(x)$ liên tục và *lẻ* trên $[-\alpha;\ \alpha]$ thì $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

• Nếu $f(x)$ liên tục và *chẵn* trên $[-\alpha;\ \alpha]$ thì $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

• Để tính tích phân $\int_a^b \left|f(x)\right| dx$ ta dùng bảng xét dấu của $f(x)$.

Trường hợp đặc biệt: Nếu $f(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $\int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$.

VD 3. Tính tích phân $I = \int_{-3}^{3} \left|\, |x|^3 - 4\,|x| \,\right| dx$.

2.2. Tích phân với cận thay đổi

Cho hàm $f(x)$ khả tích trên $[a;b]$, với mỗi $x \in [a;b]$ thì hàm số $\int_a^x f(t)dt$ liên tục tại $\forall x_0 \in [a;b]$ và $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

VD. $\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)' = e^{x^2}$

Tổng quát: $\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$

VD 1. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int\limits_0^x (\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

VD 2. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{2t}\,dt}{\int\limits_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

Bài 3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

1.1. Biên hình phẳng cho trong tọa độ Descartes

1.1.1. Biên hình phẳng cho bởi hàm tường minh

• Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ là

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx$$

trong đó $x = \alpha,\ x = \beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình

$$f_1(x) = f_2(x)\ \ (\alpha < \beta).$$

• Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường $x = g_1(y)$ và $x = g_2(y)$ là

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \left|g_1(y) - g_2(y)\right| dy$$

trong đó $y = \alpha,\ y = \beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình

$$g_1(y) = g_2(y)\ \ (\alpha < \beta).$$

VD 1. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3$ và $x = 0$.

VD 2. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $y = \left|x^2 - 4\,|\,x\,|\, + 3\right|$ và trục hoành.

1.1.2. Biên hình phẳng cho bởi phương trình tham số

Hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $t \in [\alpha; \beta]$ thì

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| y(t)x'(t) \right| dt$$

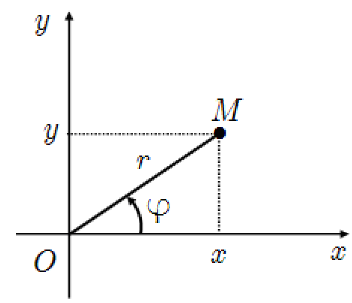
VD 3. Tính diện tích hình elip $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

VD 4. Tính diện tích S giới hạn bởi đường cong $x = t^2 - 1$, $y = 4t - t^3$.

1.2. Diện tích hình quạt cong trong tọa độ cực

1.2.1. Hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng ta chọn điểm O cố định gọi là *cực* và tia Ox gọi là *tia cực*. Vị trí điểm M tùy ý trong mặt phẳng hoàn toàn xác định bởi $r = OM$ và $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$. Khi đó, cặp (r, φ) được gọi là *tọa độ cực* của điểm M.



Mối liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes là

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

1.2.2. Phương trình đường cong trong tọa độ cực

• Phương trình đường cong trong tọa độ cực có dạng $r = f(\varphi)$.

• Cho đường cong (C) trong tọa độ Descartes có phương trình $F(x, y) = 0$. Thay $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$ vào $(*)$ ta được $F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$. Giải r theo φ thì ta thu được phương trình của (C) trong tọa độ cực.

VD1. Xét đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$. Thay $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$ vào (C), ta được:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2a(r\cos\varphi) - 2b(r\sin\varphi) = 0.$$

Vậy phương trình của (C) trong tọa độ cực là $r = 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)$.

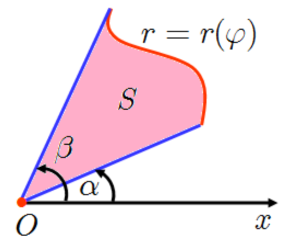
VD2. Xét đường thẳng $(d) : x + y = 0$. Thay $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$ vào (d), ta được:

$$r\cos\varphi + r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \tan\varphi = -1 \Rightarrow (d): \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ hoặc } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

1.2.3. Diện tích hình quạt cong trong tọa độ cực

Diện tích hình quạt cong S có biên được cho trong tọa độ cực giới hạn bởi $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$ là

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$



VD 1. Tính diện tích hình quạt cong S giới hạn bởi $r = 2\cos 4\varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$.

VD 2. Tính diện tích hình quạt cong S giới hạn bởi: $y = 0$, $y = \sqrt{3}\,x$ và $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

VD 3. Tính diện tích hình quạt cong S giới hạn bởi: $x = 0$, $y = x$ và $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

2. Tính độ dài đường cong phẳng

2.1. Đường cong trong tọa độ Descartes

2.1.1. Đường cong có phương trình *y* = *f*(*x*)

Độ dài $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ là $l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

VD 8. Tính độ dài l của cung $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

VD 9. Tính độ dài cung $y = \frac{x^2}{2}$ từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

2.1.2. Đường cong có phương trình tham số

Độ dài $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ là

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

VD 10. Tính độ dài l của cung có phương trình: $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$, $t \in \left[0;\, 1\right]$.

3.2.2. Đường cong có phương trình trong tọa độ cực

Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$ là

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

VD 11. Tính độ dài l của cung: $r = 3 + 3\cos\varphi,\ \varphi \in [0;\, \pi]$.

3. Tính thể tích vật thể tròn xoay

3.1. Vật thể quay quanh *Ox*

Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ quay quanh Ox là $V = \pi\int_a^b \left|f_1^2(x) - f_2^2(x)\right| dx$

VD 12. Tính thể tích V do hình phẳng S giới hạn bởi
$y = \sqrt{\ln x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$ quay quanh Ox.

VD 13. Tính V do $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox.

3.3.2. Vật thể quay quanh *Oy*

- Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ quay quanh Oy là $V = \pi\int_c^d \left|g_1^2(y) - g_2^2(y)\right| dy$

- Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ quay quanh Oy là $V = 2\pi\int_a^b x.f(x)dx$

VD 14. Tính thể tích V do hình phẳng S giới hạn bởi $y = 2x - x^2$ và $y = 0$ quay xung quanh Oy

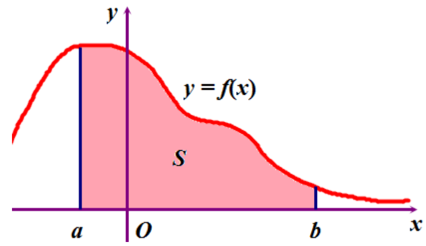
Bài 4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

- **Khái niệm mở đầu**

• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\ b]$.

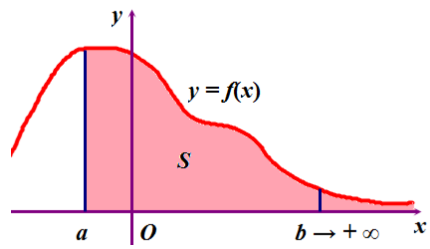
Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

$$S = \int_a^b f(x)dx\,.$$



• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;+\infty)$ ($b \to +\infty$). Khi đó, diện tích S có thể tính được cũng có thể không tính được. Trong trường hợp tính được hữu hạn thì

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$



1. Tích phân suy rộng loại 1

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a;b]$. Giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại* 1 của $f(x)$ trên $[a;+\infty)$, ký hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Định nghĩa tương tự:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

- **Chú ý**

• Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn, ta nói *tích phân hội tụ*; ngược lại là *tích phân phân kỳ*.

• Nghiên cứu về tích phân suy rộng là *khảo sát sự hội tụ* và *tính giá trị hội tụ* (nếu được).

VD 1. Tính $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$

VD 2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

• *Trường hợp* $\alpha = 1$: $I = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln x\Big|_1^b \right) = +\infty$ (phân kỳ).

• *Trường hợp* α *khác* 1: $I = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b\to+\infty} \left(x^{1-\alpha}\Big|_1^b \right)$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \; \alpha > 1 \\ +\infty, \; \alpha < 1. \end{cases}$$

Vậy I hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$

I phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \le 1$. Kết quả trên đúng với $\int\limits_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

VD 3. Tìm α để $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ hội tụ.

VD 4. Tìm α để $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^\alpha x + 1}}$ hội tụ

VD 5. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$.

- **Chú ý**

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$.

• Tương tự: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$.

VD 6. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

1.2.1. Tiêu chuẩn 1 $\begin{cases} 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a;+\infty) \\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \quad \text{HT} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \;\; \text{HT}$

$$\Leftrightarrow \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \quad PK \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \quad PK \right)$$

VD 1. Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}; \qquad J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x - \cos^2 x}$$

VD 2. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^{10}} dx$.

1.2.2. Tiêu chuẩn 2 $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx \text{ HT} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ HT}$

VD. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\cos 3x\, dx$; $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2+1} dx$.

1.2.3. Tiêu chuẩn 3 Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục, dương trên $[a;+\infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

• Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ* thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*.

• Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ* thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ*.

• Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ* hoặc *phân kỳ*.

Đặc biệt $k = 1$ có $f(x) \sim g(x) \quad (x \to +\infty)$ Vậy 2 hàm tương đương tích phân suy rộng có cùng tính chất hội tụ, phân kỳ.

VD 1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $I=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}dx;\quad J=\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}dx$

VD 2. Xét sự hội tụ của tích phân $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+2x^3}$.

VD 3. Xét sự hội tụ của tích phân $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+\sin x+x}$.

VD 4. Tìm điều kiện của α để $I=\int_1^{+\infty}\frac{(x^2+1)dx}{2x^\alpha+x^4-3}$ hội tụ ?

Chú ý: Tiêu chuẩn 1,2,3 cũng đúng cho $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx;\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

1.2.4 Nguyên lý Đirichle

Xét tích phân $I=\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$.

Nếu g(x) khả vi, liên tục, giảm dần về 0 khi $x\to+\infty$

f(x) có nguyên hàm F(x) giới nội $\left(|F(x)|\le c\in R\right)$ thì I hội tụ.

VD. Tìm α để tích phân sau phân kỳ $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{3x+5}{x^\alpha+4x+1}\right)dx$

2. Tích phân suy rộng loại 2

2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;\,b)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$ và khả tích trên mọi đoạn $[a;\,b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$.

Giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại* 2 của $f(x)$ trên $[a;\,b)$, ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

Định nghĩa tương tự:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \left(\lim_{x \to a^+} = \infty \right);$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \left(\lim_{x \to a^+} = \infty, \lim_{x \to b^-} = \infty \right)$$

- **Chú ý**

Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói *tích phân hội tụ*; ngược lại là *tích phân phân kỳ*.

VD 1. Tính tích phân suy rộng $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

VD 2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha},\ b > 0$.

• *Trường hợp α* = 1: $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln x \Big|_\varepsilon^b \right) = \ln b - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = +\infty$.

• *Trường hợp α khác* 1: $I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^b \right)$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ \alpha < 1 \\ +\infty,\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} I \quad HT \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ I \quad PK \Leftrightarrow \alpha \ge 1 \end{cases}$

VD 3. Tính tích phân suy rộng $I = \int_1^e \frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

VD 4. Tính tích phân suy rộng $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - x}$.

2.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ như tích phân suy rộng loại 1.

- **Chú ý**

Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to b$ (với b là cận suy rộng) thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ *có cùng tính chất hội tụ, phân kỳ*

VD 1. Tích phân suy rộng $I = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{x(x+1)(2-x)}}dx$ hội tụ khi và chỉ khi:

A. $\alpha < -1$; B. $\alpha < -\frac{1}{2}$; C. $\alpha > -\frac{1}{2}$; D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

VD 2. Tích phân suy rộng $I = \int_0^1 \frac{x^\alpha + 1}{\sqrt{(x^2+1)\sin x}}dx$ phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \le -1$ B. $\alpha \le -\frac{1}{2}$ C. $\alpha \ge -\frac{1}{2}$ D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Chú ý**

Giả sử $I = I_1 + I_2$ với I, I_1, I_2 là các tích phân suy rộng ta có:

1) I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

2) $\begin{cases} I_1 \to -\infty\,(\textit{phân ky}) \\ I_2 \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty\,(\textit{phân ky}) \\ I_2 \ge 0 \end{cases}$ thì I phân kỳ.

3) $\begin{cases} I_1 \to -\infty\,(\textit{phân ky}) \\ I_2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty\,(\textit{phân ky}) \\ I_2 < 0 \end{cases}$ thì ta chưa thể kết luận I phân kỳ.

VD 3. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^\alpha + 1}{\sqrt{x^2 \sin x}}dx$ phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \le \frac{1}{4}$ B. $\alpha \le -\frac{1}{4}$ C. $\alpha \le -\frac{1}{2}$ D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chương 4. CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI LŨY THỪA

Bài 1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

1. Định nghĩa

• Cho dãy số có vô hạn các số hạng $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,\ldots$. Biểu thức

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *chuỗi số*.

• Các số $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,\ldots$ là các số hạng và u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi số.

• Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là *tổng riêng thứ* n của chuỗi số.

• Nếu dãy $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số S hữu hạn thì ta nói chuỗi số *hội tụ* và có tổng là S, ta ghi là

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Ngược lại, ta nói chuỗi số *phân kỳ*.

VD 1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$

• *Trường hợp* $q = 1$: $S_n = n \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

• *Trường hợp* $q \neq 1$: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Nếu $|q| < 1$ thì $S_n \to \dfrac{1}{1-q} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ;

Nếu $|q| > 1$ thì $S_n \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ HT $\Leftrightarrow |q| < 1$

2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Định lý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

$\Leftrightarrow$ (nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ).

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + n + 2}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4 + 1}$.

Tính chất

1) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số không đổi nếu ta thêm hoặc bớt đi hữu hạn số hạng.

Bài 2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu $u_n \geq 0, \ \forall n$.

Khi $u_n > 0, \ \forall n$ thì chuỗi số là dương thực sự.

2. Các định lý so sánh

- **Định lý 1**

Giả sử hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa $0 \leq u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$. Khi đó:

• Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ* thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ*.

• Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ* thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
.

- **Định lý 2**

Giả sử hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa mãn $u_n > 0$ và $v_n > 0$ với n đủ lớn và

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$.

• $k = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ*.

• $k = +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ*.

• $0 < k < +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cùng tính chấthội tụ,phân kỳ*.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n.3^{n+1}}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\Pi}{2^n}$

3. Các tiêu chuẩn hội tụ

3.1. Tiêu chuẩn D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Ta có:

• Nếu $D < 1$ thì *chuỗi số hội tụ*;

• Nếu $D > 1$ thì *chuỗi số phân kỳ*;

• Nếu $D = 1$ thì ta chưa thể kết luận.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}$.

3.2. Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ và $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$. Ta có:

- Nếu $C<1$ thì *chuỗi số hội tụ*;
- Nếu $C>1$ thì *chuỗi số phân kỳ*;
- Nếu $C=1$ thì ta chưa thể kết luận.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n}$.

3.3. Tiêu chuẩn Tích phân Maclaurin – Cauchy

Giả sử hàm số $f(x)$ *liên tục*, $f(x)\geq 0$ và *giảm trên* $[k;+\infty), k\in\mathbb{N}$. Ta có:

- $\sum_{n=k}^{\infty}f(n)\text{ HT}\Leftrightarrow\int_{k}^{+\infty}f(x)dx\text{ HT}$

  Chú ý: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\leq 1$.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Bài 3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU TÙY Ý

1. Chuỗi số đan dấu

1.1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ được gọi là *chuỗi số đan dấu* nếu $u_n > 0, \forall n$.

VD. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ là các chuỗi số đan dấu.

3.1.2. Định lý Leibniz

Nếu dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ giảm và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ.

Khi đó, ta gọi chuỗi số là *chuỗi Leibniz*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2. Chuỗi số có dấu tùy ý

2.1. Định nghĩa

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n \ (u_n \in \mathbb{R})$ được gọi là *chuỗi có dấu tùy ý*.

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ.

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là *bán hội tụ* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ.

VD. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ vì $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (VD 1) và $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

2.2. Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *hội tụ* thì chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *hội tụ*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^n)}{n^2}$.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{3^n}$.

Bài 4. CHUỖI LŨY THỪA

1. Khái niệm chung về chuỗi hàm

• Cho dãy hàm $u_1(x),\ u_2(x),...,\ u_n(x),...$ cùng xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Tổng hình thức

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \quad (1)$$

được gọi là chuỗi hàm số hay *chuỗi hàm* trên $D \subset \mathbb{R}$.

• Nếu tại $x_0 \in D$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ *hội tụ* (hay *phân kỳ*) thì x_0 được gọi là *điểm hội tụ* (hay *phân kỳ*) của chuỗi (1).

• Tập hợp các điểm hội tụ x_0 của chuỗi (1) được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi (1).

• Chuỗi (1) được gọi là *hội tụ tuyệt đối* tại $x_0 \in D$ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x_0)\right|$ hội tụ.

• Tổng $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ được gọi là *tổng riêng* thứ n của chuỗi (1).

Trong miền hội tụ của chuỗi (1), tổng $S_n(x)$ hội tụ về một hàm số $f(x)$ nào đó.

• Hàm $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ xác định trong miền hội tụ của chuỗi (1) được gọi là *tổng* của chuỗi (1).

Ta viết là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$. Khi đó, $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ được gọi là *phần dư* của (1) và tại mỗi x thuộc miền hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

VD 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

VD 2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

2. Chuỗi lũy thừa

2.1. Định nghĩa

Chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ với a_n và x_0 là các hằng số được gọi là *chuỗi lũy thừa*.

- **Nhận xét**

• Đặt $x' = x - x_0 \Rightarrow$ chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

• Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chứa $x = 0$ nên khác rỗng.

2.2. Bổ đề Abel

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = \alpha \neq 0$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \left(-|\alpha|;\ |\alpha|\right)$.

Hệ quả Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x = \beta$ thì phân kỳ tại mọi x thỏa $|x| > |\beta|$.

2.3. Bán kính hội tụ

2.3.1. Định nghĩa

• Số thực $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trên $(-R;\ R)$ và phân kỳ tại $\forall x : |\,x\,| > R$ được gọi là *bán kính hội tụ*.

• Khoảng $(-R;\ R)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- **Nhận xét**

• Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $R = +\infty$.

• Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ với mọi $x \neq 0$ thì $R = 0$.

4.2.3.2. Phương pháp tìm bán kính hội tụ

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ thì $R = \begin{cases} 0, & r = +\infty \\ \dfrac{1}{r}, & 0 < r < +\infty \\ +\infty, & r = 0 \end{cases}$

• Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Bước 1. Tìm bán kính hội tụ $R \Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-R;\ R)$.

Bước 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số tại $x = \pm R$.

Bước 3. Kết luận:

1) Nếu các chuỗi số phân kỳ tại $x = \pm R$ thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-R;\ R)$;

2) Nếu các chuỗi số hội tụ tại $x = \pm R$ thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $[-R;\ R]$;

3) Nếu chuỗi số phân kỳ tại $x = R$ và hội tụ tại $x = -R$ thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $[-R;\ R)$;

4) Nếu chuỗi số phân kỳ tại $x = -R$ và hội tụ tại $x = R$ thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-R;\ R]$.

VD 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

VD 2. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n.2^n}$.

VD 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

VD 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+2)^{n^2}$.

Hết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp* A1 – C1 – ĐH Công nghiệp TP. HCM.

2. Nguyễn Đình Trí – *Toán cao cấp* (Tập 2) – NXB Giáo dục.

3. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp* (Tập 1, 4) – NXB ĐHQG TP.HCM.

4. Nguyễn Viết Đông – *Toán cao cấp* (Tập 1) – NXB Giáo dục.

5. James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, Sixth Edition – Copyright © 2008, 2003 Thomson Brooks.