KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

TỔ BỘ MÔN TOÁN

Bài tập giữa kỳ

Môn toán cao cấp 1

Nhóm: 7

Mã lớp học phần: 420300325987

Giảng viên giảng dạy: Bùi Văn Liêm

Số điện thoại thành viên đại diện nhóm: 0394682103

STT	MSSV	Họ và tên	Làm các câu
1	21013211	Nguyễn Thành An	
2	21010151	Nguyễn Trường An	
3	21010131	Nguyễn Chí Bảo	
4	21004841	Nguyễn Duy Cường	
5	21003361	Đinh Đức Định	
6	21007891	Nguyễn Thị Cẩm Nhung	
7	21010471	Nguyễn Thành Phát	
8	21009641	Châu Công Thoại	
9	21004231	Bùi Thị Ngọc Trân	
10	21008061	Trần Thị Thuỳ Trang	

21, tháng 11 năm 2021

Tên : Nguyễn Thị Cẩm Nhung

MSSV : 21007891

Câu 1.

a) $f(x) = 1 - \cos 2x + \ln^3(1 + \tan^2 2x) + 2\arcsin^3 x$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \cos 2x + \ln^3(1 + \tan^2 2x) + 2\arcsin^3 x$

Khi $x \to 0$, ta có

$1 - \cos 2x + \ln^3(1 + \tan^2 2x) + 2\arcsin^3 x$

$\sim \dfrac{(2x)^2}{2} + (\tan^2 2x)^3 + 2x^3$

$\sim 2x^2 + [(2x)^2]^3 + 2x^3$

$\sim 2x^2$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2$

b) $f(x) = e^{4x} - 1 + (\sqrt{1 + 2\tan x} - 1)\sin x + \tan^4 x + x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{4x} - 1 + (\sqrt{1 + 2\tan x} - 1)\sin x + \tan^4 x + x^2$

Khi $x \to 0$, ta có:

$e^{4x} - 1 + (\sqrt{1 + 2\tan x} - 1)\sin x + \tan^4 x + x^2$

$\sim 4x + \dfrac{2\tan x}{2} . \sin x + x^4 + x^2$

$\sim 4x + \tan x . \sin x + x^4 + x^2$

$\sim 4x + x . x + x^4 + x^2$

$\sim 4x + 2x^2 + x^4$

$\sim 4x .$

Nguyễn Duy Cường
21004841

1) c) $(x^2 + \sin 3x)(1 - \cos 2x) + (e^{2x} - 1)\ln(\cos 4x)$
$+ \arctan(x^4)$

Khi $x \to 0$

$f(x) \Leftrightarrow (x^2 + 3x)\left(\frac{(2x)^2}{2}\right) + 2x.(\cos 4x - 1)$
$+ x^4$

Khi $x \to 0 \Rightarrow f(x) \sim \cancel{x^4}\ 0$

1) d) $\sin x - \tan x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos 2x}$

$\sqrt{1 + 2\sin^2 x} - 1 \sim x^2$

$= \cancel{x} - x + - 1 + (\cos 2x)^{1/3} \sim 1/2\,(2x$

$f(x) = x - x + x^2 + 1/2\,(2x)^{2/3}$

Do $x \to 0$ nên $f(x) = 0$ khi $x = 0$

Trần Thị Thuỳ Trang

MSSV: 21008061

2a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \ln(1+x^3)}{\sin^4 x + \tan^2 x}$$

$$\approx \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^3}{x^4 + x^2} \simeq \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{\cos 2x} + \sin 3x}{\tan 2x + \arcsin(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - \sqrt{\cos 2x} + \sin 3x}{\tan 2x + \arcsin(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 2x^2 + 3x}{2x + x^2} = \frac{4x}{2x} = 2$$

Thứ Ngày Tháng Năm

Nguyễn Thành An - 21013211

2. c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 + \sqrt{1+6\sin^2 x} - \sqrt[3]{1+\ln(\cos x)}}{\sin^3 2x + \arctan(x^2)}$

$\sim \frac{(e^{x^3} - 1) + [\sqrt{1+6\sin^2 x} - 1] - [\sqrt[3]{1+\ln(1+(\cos x - 1))} - 1]}{\sin^3 2x + \arctan(x^2)}$

$\sim \frac{x^3 + 6\sin^2 x - \ln[1+(\cos x - 1)]}{3.2(8x^3 + x^2)}$

$\sim \frac{x^3 + 6x^2 - (\cos x - 1)}{\cancel{3.2}\, 6(8x^3 + x^2)}$

$\sim \frac{x^3 + 6x^2 + x^2}{2.6.(8x^3 + x^2)}$

$\sim \frac{x^3 + 6x^2 + x^2}{12(8x^3 + x^2)}$

$\sim \frac{x^3 + 7x^2}{96x^3 + 12x^2}$

$\sim \frac{7x^2}{12x^2} \sim \frac{7}{12}$

Thứ Ngày Tháng Năm

Nguyễn Thành An - 21013211

2 d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - \arctan 2x}$

$\sim \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - 2x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - 2x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2 - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^x + e^{-x} - 2 = 0$

Họ và tên: Nguyễn Chí Bảo

Mssv: 21010131.

Câu 2.

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin 2x)^{\frac{1}{\ln(\sin 3x)}}$

$\sim \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 + (2x - 1)\right]^{\frac{1}{\ln(\sin 3x)}}$

$\sim \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 + (2x - 1)\right]^{\frac{1}{3x-1}}$

$\sim \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 + (2x - 1)\right]^{\frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{3x-1}}$

$\sim \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\left[1 + (2x - 1)\right]^{\frac{1}{2x-1}}\right]^{\frac{2x-1}{3x-1}}$

$\sim e^{\lim \frac{2x-1}{3x-1}} \sim e^{\frac{-1}{-1}} = e$

Nguyễn Chí Bảo - 21010131.

2. f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin 2x}{\ln(1+2\tan^3 x)}$

Khi $x \to 0 \Rightarrow \ln(1+2\tan^3 x) \sim \ln(1+2x^3) \sim 2x^3$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin 2x}{2x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{6x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-4x^2} - 1}{3x^2 \cdot \sqrt{1-4x^2}}$

Khi $x \to 0 \Rightarrow \sqrt{1-4x^2} - 1 = -2x^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^2}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$

Châu Công Thoại 21009641

Câu 3.

a. $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$

$I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_{e}^{b} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đ/C

x	b	e
t	$\ln b$	1

$I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_{1}^{\ln b} \frac{1}{1+t^2} dt$

$I = \lim\limits_{b \to +\infty} \arctan t \Big|_{1}^{\ln b}$

$I = \lim\limits_{b \to +\infty} \arctan(\ln b) - \arctan(1)$

$I = \lim\limits_{b \to +\infty} \arctan(+\infty) - \arctan(1)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

b). $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_{t}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

Đ/C

x	$\pi/2$	t
t	1	$\sin t$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_{\sin t}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_{\sin t}^{1} \frac{dt}{t^{1/2}}$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_{\sin t}^{1} t^{-1/2} dt$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{t^{1/2}}{1/2} \Big|_{\sin t}^{1}$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} 2 - 2(\sin t)^{1/2}$

$I = \lim\limits_{t \to 0^+} 2[1 - (\sin t)^{1/2}]$

$= 2$

Nguyễn Trường An 21010151

Câu 3.

c) $\int_{-\infty}^{0} e^x . x\,dx$: Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$.

$= (x . e^x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^x\,du \quad \left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\right)$

$= -e^x\Big|_{-\infty}^{0} = -1$. Vậy $\int_{-\infty}^{0} e^x . x\,dx = -1$.

d)

$\int_{1/2}^{e/2} \frac{dx}{x . \ln^3 2x}$ đặt $t = \ln 2x$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$.

Đổi cận

x	$e/2$	$1/2$
t	1	0

$= \int_0^1 \frac{1}{t^3}\,dt$

Vì đây là tích phân suy rộng loại 2

ta có : $\frac{1}{x^\alpha}$ khi $\alpha \geq 1$ phân kì

mà $t > 0 \Rightarrow$ hàm $\int_0^1 \frac{dt}{t^3} = +\infty$.

Vậy $\int_{1/2}^{e/2} \frac{dx}{x \ln^3 2x} = +\infty$.

Họ và tên: Bùi Thị Ngọc Trân. MSSV: 21004231

Câu 4

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{3x^5-x^2+5}\,dx$

Khi $x \to +\infty$, ta có:

$\frac{x^2+3x+1}{3x^5-x^2+5} \sim \frac{x^2}{3x^5} = \frac{1}{3x^3}$

~~Do $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^2}$~~ Do $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3}$ hội tụ ($\alpha = 3 > 1$) nên

$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{3x^5-x^2+5}$ hội tụ.

b) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

Ta có: $\ln x > \sqrt{x}$, $\forall x > e$.

$\Rightarrow \frac{1}{\ln x} < \frac{1}{x^{1/2}}$

Do $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx < \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}$ (phân kỳ vì $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

$\Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ phân kỳ

4c)

Ta có $x=0$ là điểm bất thường.

Đặt $I = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin x}.\ln(1+\tan^2 x)} dx$

Khi $x \to 0$: $\frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin x}.\ln(1+\tan^2 x)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}.\tan^2 x} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}.x^2}$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

Mà $\int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ Hội tụ do $\frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ Tích phân I Hội tụ

$\Rightarrow$ Tích phân đã cho Hội tụ

⇒ Tích phân đã cho Hội tụ

4d) : Ta có $x = 1$ là điểm bất thường

Đặt $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots$ (chép lại đề)

Ta có $x \to 1$: $\dfrac{\tan(2-2x) + \ln x}{\sqrt[4]{(1-x).\sin^2(1-x)}} \sim \dfrac{(2-2x)+(x-1)}{\sqrt[4]{(1-x).(1-x)^2}}$

$= \dfrac{1-x}{(1-x)^{3/4}} = \dfrac{1}{(1-x)^{-\frac{1}{4}}}$

Mà $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{1}{(1-x)^{-\frac{1}{4}}} dx$ Hội tụ do $-\frac{1}{4} < 1$

⇒ I Hội tụ ⇒ TP đã cho HT

Đinh Đức Định

21003361

Câu 4 : e) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^4(x+1)}} dx$

Khi $x \longrightarrow 0$. $\sin x \sim x$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}} dx = 1$

$\Rightarrow I$ hội tụ

f) $\int_0^2 \frac{\sin^2(1-x)}{\sqrt[3]{(1-x)^8(x+7}} dx$

Khi $x \longrightarrow 0$ (VCB)

$\frac{\sin^2(1-x)}{\sqrt[3]{(1-x)^8(x+7)}} \sim \frac{(1-x)^2}{(1-x)^{8/3}(x+7)^{1/3}} \sim \frac{(1-x)^2}{(x+7)^{1/3}}$

Mà $\int_0^2 \frac{(1-x)^2}{(x+7)^{1/3}} dx$ phân kì (vì $\alpha = \frac{1}{3} < 1$)

$\Rightarrow$ Tích phân phân kì