

**Bài 1:** Chứng minh trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác thì nằm ở ngoài tam giác đó.

**Giải:** Giả sử có tam giác ABC với góc A lớn hơn 90 độ, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (ký hiệu là (ABC)). Nếu O nằm trên một cạnh của tam giác thì tam giác ABC là tam giác vuông  $\Rightarrow$  điều này mâu thuẫn với giả thiết. Nếu O nằm trong tam giác thì mọi góc ở tâm đều nhỏ hơn 180 độ  $\Rightarrow$  mọi góc trong tam giác đều nhỏ hơn 90 độ  $\Rightarrow$  mâu thuẫn với giả thiết (1)

Giả sử tam giác ABC có H là trực tâm của tam giác. H không thể nằm trên cạnh (khác đỉnh) của tam giác vì như vậy đường cao sẽ trùng với cạnh của tam giác  $\Rightarrow$  điều này vô lý hiển nhiên (trong trường hợp tam giác vuông thì sẽ trùng đỉnh vuông). H trùng một trong 3 đỉnh của tam giác thì tức là tam giác vuông tại đỉnh đó. H nằm trong tam giác  $\Rightarrow$  cả 3 đường cao đều nằm trong tam giác ABC  $\Rightarrow$  tam giác ABC là tam giác nhọn  $\Rightarrow$  mâu thuẫn với giả thiết (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Bài 2:** Tính tỷ lệ diện tích của một tam giác với một tam giác khác có độ dài các cạnh là độ dài các đường trung tuyến của tam giác kia (ngôn ngữ hơi lằng nhằng, vào bài ta sẽ nhiều, đừng lo lằng 😊 )

**Giải:** Giả sử tam giác thứ nhất là tam giác ABC có 3 đường trung tuyến lần lượt là AX, BY, CZ. Từ đó ta dựng tam giác PCZ với PC song song và bằng AX, ZP song song và bằng BY. Ta thấy tứ giác APCX là hình bình hành nên AP song song và bằng CX  $\Rightarrow$  AP song song và bằng ZY (đường trung bình)  $\Rightarrow$  tứ giác APYZ là hình bình hành, gọi Q là giao điểm của AY và PZ  $\Rightarrow$  Q là trung điểm của AP.

Ta có  $S(ABC)/S(PCZ) = 2S(AZC)/(2S(PZC)) = AC/QC = 4/3$

**Bài 3:** Bất cứ tam giác nào có hai đường trung tuyến bằng nhau đều là tam giác cân

**Giải:** Giả sử ta có tam giác ABC có trung tuyến BM và CN bằng nhau (M, N lần lượt là trung điểm của AC và AB). Gọi G là giao

điểm của BM và CN, xét tam giác BGN và tam giác CGM có góc  $BGN = \text{góc } CGM$  (2 góc đối đỉnh), có  $GM = BM/3 = CN/3 = GN$ ,  $BG = 2BM/3 = 2CN/3 = CG$  (do G là trọng tâm tam giác ABC)

$\Rightarrow$  tam giác BGN = tam giác CGM (c-g-c)  $\Rightarrow BN = CM$  (2 cạnh tương ứng)  $\Rightarrow 2BN = 2CM \Rightarrow BA = CA \Rightarrow$  tam giác ABC cân tại A  $\Rightarrow$  đpcm.

**Bài 4:** Mọi tam giác nào có hai đường cao bằng nhau đều là tam giác cân.

**Giải:** Giả sử ta có tam giác ABC với các đường cao là BK và CJ (K thuộc AC, J thuộc AB). Xét tam giác BKA và tam giác CJA, có góc A là góc chung, góc  $BKA = 90^\circ = \text{góc } CJA \Rightarrow \text{góc } KBA = \text{góc } JCA$ , lại có  $BK = CJ$  (giả thiết)  $\Rightarrow$  tam giác BKA = tam giác CJA (g-c-g)  $\Rightarrow BA = CA \Rightarrow$  tam giác ABC cân tại A  $\Rightarrow$  đpcm.

**Bài 5:** Chứng minh 3 đường phân giác thì đồng quy

**Giải:** Giả sử ta có tam giác ABC với 3 đường phân giác là AX, BY, CZ (X thuộc BC, Y thuộc CA, Z thuộc AB). Xét tỷ tích các tỷ lệ  $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}$ . Theo tính chất đường phân giác ta có  $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$ ,  $\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{BA}$ ,  $\frac{AZ}{ZB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \Rightarrow$  AX, BY, CZ đồng quy  $\Rightarrow$  đpcm.