HẠT CƠ BẢN
BÀI TẬP TUẦN 6

TRẦN KHÔI NGUYÊN

Ngày 25 tháng 10 năm 2024

Ta đã chứng minh được

$$G'_\mu = S_G G_\mu S_G^\dagger - \frac{1}{ig}(\partial_\mu S_G)S_G^\dagger$$

tuy nhiên, khi tham khảo một số tài liệu khác, G'_μ được viết:

$$G'_\mu = S_G G_\mu S_G^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu S_G)S_G^\dagger.$$

Chứng minh$-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}$ bất biến

Ta có phép biến đổi gauge:

$$S_G \equiv exp\left[-ig\sum T^a\alpha^a(x)\right],$$

và giao hoán tử:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = -igF_{\mu\nu} = -igF^a_{\mu\nu}t^a. \tag{1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
D_\mu\psi \to (\partial_\mu - igG'_\mu)\psi' &= (\partial_\mu - igG'_\mu)S_G\psi(x)\\
&= S_G\partial_\mu\psi(x) + (\partial_\mu S_G)\psi(x) - igG'_\mu S_G\psi(x)\\
&= S_G\partial_\mu\psi(x) + S_G S_G^\dagger(\partial_\mu S_G)\psi(x) - igS_G S_G^\dagger G'_\mu S_G\psi(x)\\
&= S_G\left(\partial_\mu + S_G^\dagger(\partial_\mu S_G) - igS_G^\dagger G'_\mu S_G\right)\psi(x)\\
&= S_G D_\mu\psi(x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Dễ thấy, đạo hàm hiệp biến cũng biến đổi dưới phép đổi xứng gauge giống như hàm $\psi(x)$, như vậy, đạo hàm của chúng cũng thế. Ta có phép biến đổi gauge cho giao hoán tử của đạo hàm hiệp biến:

$$\begin{aligned}
\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi \to (\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi)' &= S_G(\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi) \\
&= S_G(-igF^a_{\mu\nu}t^a\psi) \\
&= -igF'_{\mu\nu}\psi' \\
&= -igF'_{\mu\nu}S_G\psi. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Vì ψ là hàm bất kỳ, nên ta có

$$S_G F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}S_G$$

$$\implies F'_{\mu\nu} = S_G F_{\mu\nu} S_G^\dagger.$$

Số hạng $-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}$ (còn được gọi là số hạng động năng bất biến gauge cho trường đối xứng gauge $A_m u$) được biến đổi:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}F^A_{\mu\nu}F^{B,\mu\nu}Tr\left[T^AT^B\right] \\
&= -\frac{1}{2}F^A_{\mu\nu}F^{B,\mu\nu}Tr\frac{1}{2}\delta^{AB} \qquad (4) \\
&= -\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}.
\end{aligned}$$

mà ta thấy rằng $TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ bất biến dưới phép biến đổi trên $F'_{\mu\nu} = S_G F_{\mu\nu} S_G^\dagger$, nên $-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}$ bất biến gauge.

Đi tìm dạng của $F_{\mu\nu}$

Ta khai triển:

$$\begin{aligned}
-igF_{\mu\nu}\psi &= \left[D_\mu, D_\nu\right]\psi \\
&= \left[\partial_\mu - igG_\mu, \partial_\nu - igG_\nu\right]\psi \\
&= \left[\partial_\mu, \partial_\nu\right]\psi - ig\left[G_\mu, \partial_\nu\right]\psi - ig\left[\partial_\mu, G_\nu\right]\psi - g^2\left[G_\mu, G_\nu\right]\psi \\
&= 0 - ig\left[G_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu(G_\mu\psi)\right] - ig\left[\partial_\mu(G_\nu\psi) - G_\nu(\partial_\mu\psi)\right] - g^2\left[G_\mu, G_\nu\right]\psi \\
&= -ig\left[-(\partial_\nu G_\mu)\psi + (\partial_\mu G_\nu)\psi\right] - g^2\left[G_\mu, G_\nu\right]\psi
\end{aligned}$$

$$\implies -igF_{\mu\nu} = -ig\left[(\partial_\mu G_\nu) - (\partial_\nu G_\mu)\right]\psi - g^2\left[G_\mu, G_\nu\right]\psi$$

(5)

Vì hàm ψ là hàm bất kỳ, ta có:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu G_\nu) - (\partial_\nu G_\mu) - ig\left[G_\mu, G_\nu\right]$$

Và ta cũng đã biết:

- $G_\mu \equiv G_\mu^A T^A$
- $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^A T^A$
- $\left[T^A, T^B\right] = if^{ABC}T^C$
- Giao hoán tử ở số hạng cuối:

$$\begin{aligned}
\left[G_\mu, G_\nu\right] &= G_\mu^A T^A G_\nu^B T^B - G_\nu^B T^B G_\mu^A T^A \\
&= G_\mu^A G_\nu^B T^A T^B - G_\nu^B G_\mu^A T^B T^A \\
&= G_\mu^A G_\nu^B \left[T^A, T^B\right]
\end{aligned} \tag{6}$$

do G_μ^A là số hoặc hàm, nên có thể giao hoán với T^A là các ma trận.

Thế vào $F_{\mu\nu}$, ta có:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^A T^A &= (\partial_\mu G_\nu) - (\partial_\nu G_\mu) - ig\left[G_\mu, G_\nu\right] \\
&= \partial_\mu(G_\nu^A T^B) - \partial_\nu(G_\mu^A T^A) - igG_\mu^A G_\nu^B \left[T^A, T^B\right] \\
&= T^B \partial_\mu G_\nu^A - T^A \partial_\nu G_\mu^A - igG_\mu^A G_\nu^B if^{ABC}T^C
\end{aligned} \tag{7}$$

Vậy

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + gG_\mu^A G_\nu^B f^{ABC}$$

có dạng trùng với phương trình 15.49 trong Perskin.

Tóm tắt lại, ta có:

- $\Psi \to \Psi' = S_G \Psi$
- $\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} S_G^\dagger$
- $G_\mu \to G'_\mu = S_G G_\mu S_G^\dagger - \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{g}}(\partial_\mu S_G) S_G^\dagger$

- $[\gamma^\mu, S_G] = \left[\gamma^\mu, S_G^\dagger\right] = 0$
- $S_G^\dagger S_G = \mathbb{I}$ (có vẻ hiển nhiên)

Ta xét lại Lagrangian: $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$

Tạm bỏ qua số hạng $-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}$ vì đã được chứng minh là bất biến ở mục c.

Thay đạo hàm thường bằng đạo hàm hiệp biến

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \\ &= \bar{\Psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igG_\mu) - m]\Psi \\ &= \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\Psi\gamma^\mu G_\mu\Psi - m\Psi\bar{\Psi}\end{aligned} \tag{8}$$

Ta cũng bỏ qua số hạng $m\bar{\Psi}\Psi$ vì dễ thấy:

$$\begin{aligned}m\bar{\Psi}\Psi &= m\bar{\Psi}S_G^\dagger S_G\Psi \\ &= m\bar{\Psi}\Psi\end{aligned} \tag{9}$$

Thay Ψ', $\bar{\Psi}'$ và G'_μ:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\Psi\gamma^\mu G_\mu\Psi \\ &= \bar{\Psi}S_G^\dagger i\gamma^\mu\partial_\mu(S_G\Psi) + g\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu G_\mu S_G\Psi \\ &= \bar{\Psi}S_G^\dagger i\gamma^\mu(\partial_\mu S_G)\Psi + \bar{\Psi}S_G^\dagger i\gamma^\mu S_G\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu(S_G G_\mu S_G^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu S_G)S_G^\dagger)S_G\Psi \\ &= i\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu(\partial_\mu S_G)\Psi + \bar{\Psi}S_G^\dagger i\gamma^\mu S_G\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu S_G G_\mu S_G^\dagger S_G\Psi - ig\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu(\partial_\mu S_G)\Psi \\ &= \bar{\Psi}S_G^\dagger i\gamma^\mu S_G\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}S_G^\dagger\gamma^\mu S_G G_\mu S_G^\dagger S_G\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu S_G^\dagger S_G\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu S_G^\dagger S_G G_\mu S_G^\dagger S_G\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{I}\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{I}G_\mu\mathcal{I}\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu G_\mu\Psi\end{aligned}$$

Ta mang trở lại những số hạng ta đã bỏ qua

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^{\mu}G_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu} \\
&= \bar{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu} + g\bar{\Psi}\gamma^{\mu}G_{\mu}\Psi \\
&= \mathcal{L} + g\bar{\Psi}\gamma^{\mu}G_{\mu}\Psi
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã xây dựng

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\Psi}\gamma^{\mu}G_{\mu}\Psi$$