Hạt cơ bản

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 18 tháng 12 năm 2024

Review Standard Model

Four-vector & hàm sóng

Vector phản biến

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$$

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}).$$

Vector hiệp biến

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x})$$

$$p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\mathbf{p}).$$

Đạo hàm hiệp biến

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Hàm sóng Fermion

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(E, \mathbf{p})e^{(i\mathbf{p}\mathbf{x} - Et)} = u(p)e^{-ipx}.$$

Trường

(a) Trường vô hướng: Xét $\Phi(x)$ là trường vô hướng thực. Ta thực hiện phép biến đổi Lorentz:

$$\mathcal{L} =: x^\mu \to x^{'\mu} = \Delta^\mu_\nu x^\nu.$$

Và biểu diễn của nhóm Lorentz tác động lên trường vô hướng thực:

$$\Phi(x) = \Phi^{'}_a(x') = M_{ab}(\Delta)\Phi_b(x).$$

Trong đó, biểu diễn nhóm $M_{ab}(\Delta)$ có dạng:

- I đối với trường vô hướng (scarlar field $s = 0$).
- $e^{\frac{1}{4}\sum^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}$ với $\sum^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ đối với trường spinor ($s = \dfrac{1}{2}$).

- Δ^μ_ν đối với trường vector $(s = 1, 3/2, 2, ..)$

Lagrangian có dạng:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \tag{1}$$

và có thể có các số hạng tự tương tác bậc cao $\alpha\Phi^3, ...$

Phương trình chuyển động(Phương trình Euler-Lagrange)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi)}\right) = 0.$$

Phương trình Klein-Gordon.

$$(\Box + m^2)\Phi = 0$$

có nghiệm là

$$\Phi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega + \overrightarrow{k}}}\left(a_{\overrightarrow{k}}e^{-i\omega_{\overrightarrow{k}}t + i\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{x}} + a^*_{\overrightarrow{k}}e^{i\omega_{\overrightarrow{k}}t - i\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{x}}\right)$$

Lượng tử hóa, định nghĩa xung lượng liên hợp

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = i\int \frac{d^3}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\overrightarrow{k}}}{2}}\left(-a_{\overrightarrow{k}}e^{-i\omega_{\overrightarrow{k}}t + i\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{x}} + a^*_{\overrightarrow{k}}e^{i\omega_{\overrightarrow{k}}t - i\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{x}}\right)$$

Giao hoán tử

$$[\Phi, \Pi] = i\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})$$

(b) Trường vector

Hàm trường

$$A_\mu = \phi, -\overrightarrow{A} \qquad ; A^\mu = \left(\phi, \overrightarrow{A}\right).$$

Tensor trường vector:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Phương trình chuyển động

$$\partial_\rho F^\sigma = 0$$

c Trường spinor

Hàm trường

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)_1 \\ \psi(x)_2 \\ \psi(x)_3 \\ \psi(x)_4 \end{pmatrix}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Toán tử chiếu

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$$
$$P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$$

với các tính chất

- $P^2 = P$
- $P_L + P_R = 1$
- $P_L P_R = 0$

Nhóm Gauge

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

trong đó

- $SU(3)_C$ là các tương tác mạnh thông qua 8 gluon $G^a (a = 1..8)$
- $SU(2)$ lầ các tương tác yếu thông qua 3 gauge bosons

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp iW^2); \qquad W^3$$

- $U(1)$ là các tương tác điện từ thông qua bởi duy một gauge boson là B

Thế hệ hạt

first generation	second generation	third generation	each quark
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u_R \\ d_R \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c_R \\ s_R \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} t_R \\ b_R \end{matrix}$	$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu_{eR}(?) \\ e_R \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu_{\mu R}(?) \\ \mu_R \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu_{\tau R}(?) \\ \tau_R \end{matrix}$	

Lagrangian của mô hình chuẩn

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \, i\overline{L}^i \not{D} L^i + i\overline{Q_L}^i \not{D} Q_L^i + i\overline{E_R}^i \not{D} E_R^i + i\overline{U_L}^i \not{D} U_L^i + i\overline{D_L}^i \not{D} D_L^i \\ & - \frac{1}{4} G^{a\,\mu\nu} G^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\,\mu\nu} W^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

trong đó

$$D_\mu(f) = \partial_\mu - ig\left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_w}\left[I_3^{(f)} - S_w^2 Q^{(f)}\right] Z_\mu - ieQ^{(f)} A_\mu$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Chứng minh công thức đạo hàm kéo dài

$$D_\mu(f) = \partial_\mu - ig\left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_w}\left[I_3^{(f)} - S_w^2 Q^{(f)}\right] Z_\mu - ieQ^{(f)} A_\mu$$

trong đó

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta xét đạo hàm hiệp biến dưới phép biến đổi sau:

$$\begin{cases} W_\mu^\pm = \dfrac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_W & -S_W \\ S_W & C_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu - ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\
&= \partial_\mu - \frac{ig}{2}\left(\sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2 + \sigma^3 W_\mu^3\right) - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\
&= \partial_\mu - \frac{ig}{2}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}\sigma^3 W_\mu^3 - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\
&= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}\sigma^3 W_\mu^3 - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \qquad (1)
\end{aligned}
$$

mà

$$
\begin{cases} g' = g t_W \\ T_3 L^i = \dfrac{\sigma^3}{2} L^i \end{cases}
$$

thay vào (1) ta được

$$
D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^-\right] - igI_3\left(C_W Z_\mu + S_W A_\mu\right) - igt_W\frac{Y}{2}\left(C_W A_\mu - S_W Z_\mu\right)
$$

với

$$
T^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
T^- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-\right) - ig\left(I_3 C_W - \frac{Y}{2}\frac{S_W^2}{C_W}\right) - igS_W\left(I_3 + \frac{Y}{2}\right)A_\mu
$$

Theo hệ thức Gell-Mann-Nishijima

$$
Q = I_3 + \frac{Y}{2} \Rightarrow \frac{Y}{2} = Q - I_3
$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left[I_3 C_W^2 - \left(Q - I_3\right) S_W^2\right] Z_\mu - igS_W\left(I_3 - Q + I_3\right) A_\mu \\
= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left(I_3 - QS_W^2\right) Z_\mu - igS_W Q A_\mu
\end{aligned}
$$

ta đặt $e = gS_W = g'C_W$. Nên ta có

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left(I_3 - QS_W^2\right)Z_\mu - ieQA_\mu$$

Viết Lagrange cho quá trình phân rã sau

$$W^\pm \to \tau\overline{\nu_\tau}$$

Ta có Lagrange cho mô hình chuẩn tổng quát miêu tả toàn bộ quá trình

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

thay $\psi = \Psi$ là các đa tuyến, ta được

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\, i\overline{L}^i D\!\!\!\!/\, L^i + i\overline{Q_L}^i D\!\!\!\!/\, Q_L^i + i\overline{E_R}^i D\!\!\!\!/\, E_R^i + i\overline{U_L}^i D\!\!\!\!/\, U_L^i + i\overline{D_L}^i D\!\!\!\!/\, D_L^i \\ &- \frac{1}{4}G^{a\,\mu\nu}G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W^{a\,\mu\nu}W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\end{aligned}$$

mà quá trình phân rã $W^\pm \to \tau\overline{\nu_\tau}$, thành phần phải có là τ, ν_τ. Ta có

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{W^\pm\to\tau\nu_\tau} = i\overline{L}^3 D\!\!\!\!/\, L^3 = i\overline{L}^3\gamma^\mu D_\mu L^3, \tag{1}$$

trong đó

$$D_\mu(f) \propto \partial_\mu - ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) \tag{2}$$

và $m = 0$. Thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W^\pm\to\tau\nu_\tau} &\subset i\overline{L}^3\gamma^\mu\left[\partial_\mu - ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\right]L^3 \\ &\subset i\overline{L}^3\gamma^\mu\partial_\mu L^3 - i\overline{L}^3\gamma^\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)L^3 \\ &\subset -i\overline{L}^3\gamma^\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)L^3 \\ &\subset -i\begin{pmatrix}\overline{\tau} & \overline{\nu_\tau}\end{pmatrix}\gamma^\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\begin{pmatrix}\tau \\ \nu_\tau\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Xét $\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)$

$$\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) = \begin{pmatrix}0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0\end{pmatrix}$$

Ta có

$$\mathcal{L}_{W^\pm\to\tau\nu_\tau} \subset g(\overline{\tau}W_\mu^+\nu_\tau + \overline{\nu_\tau}W_\mu^-\tau).$$

Tính số hạng khối lượng M_h

Ta có Lagrange cho trường Higgs

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D^\mu\phi)^\dagger \left(D_\mu\phi\right) - V(\phi), \tag{1}$$

trong đó

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

và

$$V = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4,$$
$$|\phi|^2 = \phi^\dagger\phi.$$

Khai triển thế V ta được

$$\begin{aligned}
V &= -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & v + h(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} + \lambda\left[\begin{pmatrix} 0 & v + h(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}\right]^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right) + \lambda\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right)^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right) + \lambda\left(v^4 + h^4(x) + 4v^2h^2(x) + 2v^2h^2(x) + 2v^3h(x) + 4vh^3(x)\right)
\end{aligned}$$

Khối lượng M_h là hệ số đứng trước số hạng $\frac{1}{2}h^2(x)$, ta có

$$\begin{aligned}
M_h^2 &= -2\mu^2 + 6\lambda v^2 \\
&= -2\mu^2 + 6\lambda\frac{u^2}{\lambda}
\end{aligned}$$

nên ta có khối lượng của Higgs là

$$M_{\text{Higgs}} = \mu\sqrt{2}$$

Viết Lagrange tương tác cho $hZ_\mu Z^\mu, hhZ_\mu Z^\mu$

Xét

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} \supset (D^\mu \phi)^\dagger \left(D_\mu \phi\right)$$

trong đó

$$D_\mu(f) \supset -\frac{ig}{C_W} I_3 Z_\mu$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[I_3 Z_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix}^\dagger I_3 Z^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} \right] \\
&\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} Z_\mu Z^\mu \right] \\
&\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[\frac{1}{8} \left(v^2 + 2vh(x) + h^2(x) \right) \right] Z_\mu Z^\mu \\
&\supset \frac{1}{8} \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left(v^2 Z_\mu Z^\mu + 2vhZ_\mu Z^\mu + hhZ_\mu Z^\mu \right)
\end{aligned}$$