Hạt cơ bản

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 14 tháng 12 năm 2024

Review Standard Model

Chứng minh công thức đạo hàm kéo dài

$$D_\mu(f) = \partial_\mu - ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_w}\left[I_3^{(f)} - S_w^2 Q^{(f)}\right] Z_\mu - ieQ^{(f)}A_\mu$$

trong đó

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta xét đạo hàm hiệp biến dưới phép biến đổi sau:

$$\begin{cases} W_\mu^\pm = \dfrac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_W & -S_W \\ S_W & C_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\ &= \partial_\mu - \frac{ig}{2}\left(\sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2 + \sigma^3 W_\mu^3\right) - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\ &= \partial_\mu - \frac{ig}{2}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}\sigma^3 W_\mu^3 - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \\ &= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}\sigma^3 W_\mu^3 - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \qquad (1) \end{aligned}$$

mà

$$\begin{cases} g' = gt_W \\ T_3 L^i = \dfrac{\sigma^3}{2} L^i \end{cases}$$

thay vào (1) ta được

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^-\right] - igI_3\left(C_W Z_\mu + S_W A_\mu\right) - igt_W\frac{Y}{2}\left(C_W A_\mu - S_W Z_\mu\right)$$

với

$$T^{+}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$T^{-}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - ig\left(I_3C_W - \frac{Y}{2}\frac{S_W^2}{C_W}\right) - igS_W\left(I_3 + \frac{Y}{2}\right)A_\mu$$

Theo hệ thức Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \Rightarrow \frac{Y}{2} = Q - I_3$$

Ta có

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left[I_3C_W^2 - (Q - I_3)\,S_W^2\right]Z_\mu - igS_W\,(I_3 - Q + I_3)\,A_\mu \\ &= \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left(I_3 - QS_W^2\right)Z_\mu - igS_WQA_\mu \end{aligned}$$

ta đặt $e = gS_W = g'C_W$. Nên ta có

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) - \frac{ig}{C_W}\left(I_3 - QS_W^2\right)Z_\mu - ieQA_\mu$$

Viết Lagrange cho quá trình phân rã sau

$$W^\pm \to \tau\overline{\nu_\tau}$$

Ta có Lagrange cho mô hình chuẩn tổng quát miêu tả toàn bộ quá trình

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

thay $\psi = \Psi$ là các đa tuyến, ta được

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\overline{L}^i D\!\!\!\!/\, L^i + i\overline{Q_L}^i D\!\!\!\!/\, Q_L^i + i\overline{E_R}^i D\!\!\!\!/\, E_R^i + i\overline{U_L}^i D\!\!\!\!/\, U_L^i + i\overline{D_L}^i D\!\!\!\!/\, D_L^i \\ &\quad - \frac{1}{4}G^{a\,\mu\nu}G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W^{a\,\mu\nu}W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}B^{a\,\mu\nu}B_{\mu\nu}^a \end{aligned}$$

mà quá trình phân rã $W^{\pm} \to \tau\overline{\nu_\tau}$, thành phần phải có là τ, ν_τ. Ta có

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{W^{\pm}\to\tau\nu_\tau} = i\overline{L}^3 \not{D} L^3 = i\overline{L}^3 \gamma^\mu D_\mu L^3, \tag{1}$$

trong đó

$$D_\mu(f) \propto \partial_\mu - ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) \tag{2}$$

và $m = 0$. Thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W^{\pm}\to\tau\nu_\tau} &\subset i\overline{L}^3\gamma^\mu\left[\partial_\mu - ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\right]L^3 \\
&\subset i\overline{L}^3\gamma^\mu\partial_\mu L^3 - i\overline{L}^3\gamma^\mu\partial_\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)L^3 \\
&\subset -i\overline{L}^3\gamma^\mu\partial_\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)L^3 \\
&\subset -i\begin{pmatrix}\overline{\tau} & \overline{\nu_\tau}\end{pmatrix}\gamma^\mu\partial_\mu ig\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\begin{pmatrix}\tau \\ \nu_\tau\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Xét $\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)$

$$\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right) = \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\mathcal{L}_{W^{\pm}\to\tau\nu_\tau} \subset \not{\partial} g(\overline{\tau}W_\mu^+\nu_\tau + \overline{\nu_\tau}W_\mu^-\tau).$$

Tính số hạng khối lượng M_h

Ta có Lagrange cho trường Higgs

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D^\mu\phi)^\dagger\left(D_\mu\phi\right) - V(\phi), \tag{1}$$

trong đó

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x)\end{pmatrix}$$

và

$$V = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4,$$
$$|\phi|^2 = \phi^\dagger\phi.$$

Khai triển thế V ta được

$$\begin{aligned}
V &= -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\begin{pmatrix}0 & v+h(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ v+h(x)\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0 & v+h(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ v+h(x)\end{pmatrix}\right]^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right) + \lambda\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right)^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + h^2(x) + 2vh(x)\right) + \lambda\left(v^4 + h^4(x) + 4v^2h^2(x) + 2v^2h^2(x) + 2v^3h(x) + 4vh^3(x)\right)
\end{aligned}$$

Khối lượng M_h là hệ số đứng trước số hạng $\frac{1}{2}h^2(x)$, ta có

$$\begin{aligned}
M_h^2 &= -2\mu^2 + 6\lambda v^2 \\
&= -2\mu^2 + 6\lambda\frac{u^2}{\lambda}
\end{aligned}$$

nên ta có khối lượng của Higgs là

$$M_{\text{Higgs}} = \mu\sqrt{2}$$

Viết Lagrange tương tác cho $hZ_\mu Z^\mu, hhZ_\mu Z^\mu$

Xét

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} \supset \left(D^\mu\phi\right)^\dagger\left(D_\mu\phi\right)$$

trong đó

$$D_\mu(f) \supset -\frac{ig}{C_W}I_3Z_\mu$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[I_3 Z_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix}^\dagger I_3 Z^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} \right] \\
&\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}(v+h(x)) \end{pmatrix} Z_\mu Z^\mu \right] \\
&\supset \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left[\frac{1}{8} \left(v^2 + 2vh(x) + h^2(x) \right) \right] Z_\mu Z^\mu \\
&\supset \frac{1}{8} \left(-\frac{ig}{C_W}\right)^2 \left(v^2 Z_\mu Z^\mu + 2vh Z_\mu Z^\mu + hh Z_\mu Z^\mu \right)
\end{aligned}
$$