BTVN3

TRẦN KHÔI NGUYÊN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 18 tháng 10 năm 2024

Câu 1: Xét Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1}$$

Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases} \psi(x) \to \psi' = e^{ie\alpha}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}' = e^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x) \end{cases} \tag{2}$$

với $\alpha \notin x$. Thay $\psi', \overline{\psi}'$ vào $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{ie\alpha}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu e^{ie\alpha}\psi(x) - me^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x)e^{ie\alpha}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x)i\gamma^\mu e^{ie\alpha}\partial_\mu\psi(x) - me^{-ie\alpha}\overline{\psi}(x)e^{ie\alpha}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Vậy Lagrangian $\mathcal{L}$ bất biến dưới phép biến đổi (2)

Câu 2: Xét Lagrangian (1), thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases} \psi(x) \to \psi' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}' = e^{-ie\alpha(x)}\overline{\psi}(x) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu e^{ie\alpha(x)}\psi(x) - me^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\left[ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x)\right] - me^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x)e^{ie\alpha}\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= e^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi - me^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x)e^{ie\alpha}\psi(x) \\
&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x) + \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x)
\end{aligned}$$

Vậy Lagrangian $\mathcal{L}$ không bất biến dưới phép biến đổi (3)

Câu 3: Sử dụng Lagrangian ở (1), thực hiện $\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\right]\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Thực hiện các phép biến đổi:

$$\begin{cases} \psi(x) & \to \psi(x)' = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) & \to \bar{\psi}(x)' = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \\ A_\mu & \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\right]\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Thay $\psi'(x), \bar{\psi}(x)', A'_\mu$ vào Lagrangian, "ngầm" hiểu rằng $\alpha = \alpha(x), \psi = \psi(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= e^{-ie\alpha}\bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu - ie\partial_\mu\alpha\right) - m\right]e^{ie\alpha}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= ie^{-ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu e^{ie\alpha}\psi - ee^{-ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu e^{ie\alpha}\psi + ee^{-ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\alpha e^{ie\alpha}\psi \\
&- me^{-ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{ie\alpha}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \left[ie^{-ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu(ie\psi e^{ie\alpha}\partial_\mu\alpha + e^{ie\alpha}\partial_\mu\psi)\right] - e\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\left(A_\mu - \partial_\mu\alpha\right)\psi\right] - m\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(*).
\end{aligned}$$

Tiếp tục khai triển số hạng cuối:

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right],$$

thay $A_\mu = A'_\mu$:

$$\begin{aligned}
LHS &= \frac{1}{4}\left\{\left[\partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\alpha)\right]\left[\partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu\alpha) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu\alpha)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\alpha - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu\alpha\right]\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu\alpha - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu\partial^\mu\alpha\right]
\end{aligned}$$

thay vào Lagrangian (*), ta được:

$$\begin{aligned}
&= -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x)\psi(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\nu\alpha(x)\psi(x) \\
&\quad - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}\left[\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\right] \\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Vậy dưới phép biến đổi (4), Lagrangian $\mathcal{L}$ là bất biến.

Ý nghĩa vật lý của $\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ và phép biến đổi (4)

Xét thành phần Larangian tự do $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Phương trình Euler - Lagrange có dạng:

$$\partial_\mu A^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\left[\partial_\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)\right] = 0$$

Phương trình trên bất biến với phép biến Gauge:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

A_μ không phải là đại lượng quan sát được và xác định không duy nhất. Lúc đó phải chọn thêm điều kiện để thu được A_μ. Điều kiện đó gọi là điều kiện cố định Gauge (Gauge fixing condition). Thông thường là Gauge Coulomb và Gauge Lorentz.

Câu 4: Xây dựng Lagrangian tương tác cho trường vô hướng thức & spinor

Bắt đầu với Lagrangian $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Klein-Gordon} + \mathcal{L}_{int} \;, \tag{5}$$

Trong đó, ta đi xây dựng Lagrangian tương tác $\mathcal{L}_{int}$ như sau:

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda}{n!}(\bar{\psi}\psi\phi) \tag{6}$$

với ϕ là trường vô hướng, $\bar{\psi}\psi$ là tích vô hướng của trường spinor.

Để kiểm chứng tính đúng đắn của Lagrangian tương tác, ta phải kiểm chứng 5 tính chất của Lagrangian tương tác:

- Vì λ là hằng số, ϕ là trường vô hướng, $\bar{\psi}\psi$ là tích vô hướng của trường spinor(vô hướng Lorentz), nên Lagrangian $\mathcal{L}_{int}$ là bất biến dưới phép biến đổi Lorentz.
- $\mathcal{L}_{int}$ không phụ thuộc hiển vào x^μ, x_μ nên $\mathcal{L}_{int}$ là bất biến dưới phép biến đổi tịnh tiến.
- $\mathcal{L}_{int} \subset$ tích của các hàm trường cùng 1 điểm không thời gian nên $\mathcal{L}_{int}$ thỏa mãn Causality.
- Dạng đầy đủ của Lagrangian $\mathcal{L}_{int}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda}{n!}(\bar{\psi}\psi\phi)^n \tag{7}$$

Điều kiện tái chuẩn hóa cho Lagrangian $\mathcal{L}_{int}$:

$$\int d^4x\mathcal{L}_{int} \tag{8}$$

Khảo xát thứ nguyên của (8):

$$\begin{aligned} [S] &= 0 \\ [d^4] &= M^{-4} \\ \Rightarrow [\mathcal{L}] &= M^4 \\ \left[m^2\phi^2\right] &= M^4 \\ \Rightarrow [\phi] &= M^1 \\ \left[m\bar{\psi}\psi\right] &= M^4 \\ \Rightarrow [\psi] &= M^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

$\Rightarrow \left[(\bar{\psi}\psi\phi)^n\right] = (\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1) \times n = 4n$. Bởi vì thứ nguyên của $\mathcal{L}_{int}$ phải là 4, so sánh với các số hạng khác, nên n phải bằng 1.

- Thỏa tính đối xứng trong

Vậy ta có thể xây dựng Lagrangian đầy đủ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \lambda(\bar{\psi}\psi\phi)^n \tag{10}$$