Ref: Applied Functional Analysis by D. H. Griffel, 1981
Principles of Advanced Mathematical Physics vol 1 by Robert D. Richtmyer
Equations of mathematical physics by V. S. Vladimirov, Marcel Dekker Incorporated (1971)

CHƯƠNG 1
PHÂN BỐ

I. Các khái niệm cơ bản

1. Hàm thử

Định nghĩa 1

Cho hàm $\varphi: R \to C$

Tập đóng supp $\varphi = \overline{\{x \in R: \varphi(x) \neq 0\}}$ được gọi là **support** của hàm φ.

Nếu supp$\varphi \subseteq [a, b]$ thì φ là hàm số có support bị chặn.

Ghi chú: $\overline{A}$ là **bao đóng** của tập A.

Định nghĩa 2

Hàm $\varphi: R \to C$ là một **hàm trơn** nếu nó có đạo hàm ở mọi cấp.

Tập hợp các hàm trơn được ký hiệu $C^\infty(R)$.

Định nghĩa 3

Hàm $\varphi: R \to C$ được gọi là một **hàm thử** nếu nó là một hàm trơn và có support bị chặn.

Tổng của hai hàm thử và tích của một số phức với một hàm thử cũng là các hàm thử. Vậy, các hàm thử lập thành một không gian tuyến tính, ký hiệu là D.

Để biết hàm thử tồn tại, hãy xét hàm số sau

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Rõ ràng $\psi(x)$ là trơn khi $x \neq 0$. Bằng quy nạp: $\psi^{(n)}(0) = 0 \quad n = 0,1,\dots$ Vậy $\psi(x)$ là hàm trơn tại mọi $x \in R$.

Đặt $\varphi(x) = \psi(a - x)\psi(x - b)$, $\quad -\infty < a \le b < +\infty$

Rõ ràng $\varphi(x)$ là hàm trơn và supp $\varphi \subseteq [a, b]$. Vậy $\varphi(x)$ là hàm thử.

Định nghĩa 4

Cho dãy $\varphi_n \subseteq D$ và $\varphi \in D$.

Dãy φ_n là **hội tụ** về φ, ký hiệu $\varphi_n \overset{D}{\rightarrow} \varphi$, nếu có đoạn [a, b] sao cho:

- $\mathrm{supp}\varphi_n \subseteq [a, b], \mathrm{supp}\varphi \subseteq [a, b]$, và
- Dãy $\varphi_n^{(k)}$ hội tụ đều về $\varphi^{(k)}$ trên $[a, b]$ khi $n \to \infty, \forall\, k = 0,1, \ldots$

Sự hội tụ đều có nghĩa $\max_{a \le x \le b} \left|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| \to 0$ khi $n \to \infty$.

2. Phân bố

Định nghĩa 5

Phiếm hàm là một ánh xạ $f: D \to C, \varphi \to < f, \varphi >$.

Phiếm hàm f là tuyến tính nếu

$$< f, \alpha\varphi + \beta\psi > = \alpha < f, \varphi > + \beta < f, \psi > \quad \alpha, \beta \in C$$

Định nghĩa 6

Phiếm hàm f: D → C là liên tục nếu

$$\lim_{n \to \infty} < f, \varphi_n > = < f, \varphi >, \forall\, \varphi_n \overset{D}{\rightarrow} \varphi.$$

Định nghĩa 7

Phân bố là một phiếm hàm tuyến tính liên tục f: D → C.

Định nghĩa 8

Hàm f: R → C được gọi là **khả tích địa phương** nếu tích phân $\int_a^b |f(x)| dx$ tồn tại, ở đây $-\infty < a \le b < +\infty$.

Các hàm liên tục, các hàm liên tục từng khoảng (liên tục ngoại trừ tại một số đếm được các điểm tại đó các giới hạn trái và giới hạn phải tồn tại).

Mệnh đề 1

Cho f (x) là một hàm khả tích địa phương.

Phiếm hàm $< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\,, \forall\ \varphi \in D$ là một phân bố.

Chứng minh:

Tích phân trên tồn tại vì supp φ bị chặn.Tính tuyến tính suy ra từ phép tích phân. Ta chứng minh tính liên tục:

Giả sử $\varphi_n \overset{D}{\rightarrow} \varphi, \text{supp}\varphi_n$ và $\text{supp}\varphi \subseteq [a, b]$. Ta có

$$|< f, \varphi_n > - < f, \varphi >| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n - \varphi)(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b f(x)(\varphi_n - \varphi)(x)dx\right|$$

$$\leq \max_{a\leq x\leq b}|(\varphi_n - \varphi)(x)| \int_a^b |f(x)|dx$$

$\max_{a\leq x\leq b}|(\varphi_n - \varphi)(x)| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ suy ra $\lim_{n\rightarrow\infty} < f, \varphi_n > = < f, \varphi >$.

Định nghĩa 9

Phân bố $< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in D$ được gọi là một **phân bố chính quy**.

Ví dụ:

Hàm Heaviside $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ là khả tích địa phương.

Phân bố chính quy θ

$$< \theta, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Hàm dấu $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ khả tích địa phương.

Phân bố chính quy sign

$$< \operatorname{sign}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Hàm logarithm $\ln|x|$ $x \neq 0$ là khả tích địa phương. Ta lấy tích phân suy rộng tại kỳ dị x = 0. Giả sử $-1 < a < 0 < b < 1$, ta có:

$$\int_a^b \left|\ln|x|\right| dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{-\epsilon} \left|\ln|x|\right| dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^b \left|\ln|x|\right| dx$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{-\epsilon} \ln|x| dx - \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^b \ln|x|\, dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\varepsilon \ln \varepsilon - a\ln|a| + \varepsilon + a)$$

$$- \lim_{\delta\to 0^+} (b \ln b - \delta \ln \delta - b + \delta)$$

$$= a\ln|a| - a - b\ln b + b$$

Phân bố chính quy $\ln|x|$:

$$< \ln|x|, \varphi(x) > = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\, \varphi(x)dx$$

Ngoài các phân bố chính quy các phân bố còn lại được gọi là **phân bố không chính quy**. Ta xem xét hai ví dụ sau đây là trị chính Cauchy và phân bố delta δ.

Hàm f(x) = 1/x (x ≠ 0) không khả tích địa phương nhưng trị chính Cauchy là một phân bố. Thật vậy:

Mệnh đề 2

Phiếm hàm $P\frac{1}{x}$ xác định như sau

$$< P\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

là một phân bố.

Chứng minh:

Tích phân suy rộng ở vế phải gọi là **trị chính** Cauchy (Principal value). Trước hết ta chứng minh tích phân suy rộng này hội tụ. Giả sử supp $\varphi \subseteq [-a, a]$ $(a > 0)$, ta có:

$$< P\frac{1}{x}, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\right)$$

Đặt $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} & x \neq 0 \\ \varphi'(0) & x = 0 \end{cases}$,

$\psi(x)$ là hàm liên tục trên R.

Rõ ràng $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ $(x \neq 0)$ và

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)dx\right)$$

$$= \int_{-a}^{a} \psi(x)dx$$

Tính tuyến tính là do phép tích phân. Để chứng minh tính liên tục ta có đánh giá:

$$< P\frac{1}{x}, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{a} \frac{2x\varphi'(\rho.x)}{x} dx\right), |\rho| < 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{a} 2\varphi'(\rho.x)dx\right)$$

$$\leq 2a \max_{-a \leq x \leq a} |\varphi'(x)|$$

Suy ra:

$$< P\frac{1}{x}, \varphi_n > - < P\frac{1}{x}, \varphi > = < P\frac{1}{x}, \varphi_n - \varphi > \leq 2a \max_{-a \leq x \leq a} |\varphi_n' - \varphi')(x)| \to 0$$

khi $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$.

Mệnh đề 3

Phiếm hàm **delta** $\delta: D \to C$ xác định bởi

$$< \delta , \varphi > = \varphi(0) , \varphi \in D.$$

là một phân bố.

Mệnh đề 4

Delta δ là một phân bố không chính quy.

Chứng minh:

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử δ là phân bố chính quy sinh bởi hàm khả tich địa phương $f(x)$

$$< \delta, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) , \quad \varphi \in D$$

Xét các hàm thử

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{2}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_a(x) = \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{2a^2}{x^2 - a^2}\right) & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad (a > 0)$$

Ta có

$$\varphi_a(0) = e^{-2} \text{ và } |\varphi_a(x)| \leq e^{-2} , x \in R.$$

Với $a > 0$ đủ bé

$$e^{-2} = \varphi_a(0) = < \delta , \varphi_a > \leq |< \delta , \varphi_a >| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)\varphi_a(x)dx\right| \leq$$

$$\leq e^{-2} \int_{-a}^{a} |f(x)|dx < e^{-2}.$$

Điều này là vô lý nên điều phải chứng minh là đúng.

3. Sự hội tụ của dãy phân bố

Định nghĩa 10

Dãy phân bố f_n $n = 1, 2, \ldots$ được gọi là **hội tụ** về phân bố f nếu

$$\lim_{n\to\infty} < f_n, \varphi > = < f, \varphi >, \quad \forall\varphi \in D$$

Khi đó ta ký hiệu $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ hay $f_n \to f$.

Nếu dãy f_n là các phân bố chính quy xác định bởi dãy hàm khả tích địa phương $f_n(x)$ thì để cho đơn giản ta nói dãy "phân bố" $f_n(x)$ hội tụ về phân bố f và viết là $f_n(x) \to f$ với nghĩa sau:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = < f, \varphi >, \forall\varphi \in D$$

Thay cho dãy rời rạc $f_n, n \in N$ ta có thể xét "dãy liên tục" $f_\alpha, \alpha \in R$ và định nghĩa:

Dãy phân bố f_α là hội tụ về phân bố f khi $\alpha \to \alpha_0$ nếu

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} < f_\alpha, \varphi >= < f, \varphi >, \quad \forall\, \varphi \in D$$

Ví dụ 1

$$f_n(x) = \sin(nx) \to 0$$

0 ở đây là phân bố không $< 0, \varphi > = 0, \forall\varphi \in D$

Giả sử $\varphi \in D$ và supp $\varphi \subseteq [-a, a]$, $a > 0$. Ta có

$$< f_n, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)dx = \int_{-a}^{a} \sin(nx)\, \varphi(x)dx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos(nx)\varphi(x)\Big|_{x=-a}^{x=a} + \frac{1}{n}\int_{-a}^{a} \cos(nx)\varphi'(x)dx$$

Số hạng thứ nhất bằng 0 và ta có đánh giá

$$|< f_n, \varphi >| \leq \frac{2a}{n} \max_{-a \leq x \leq a} |\varphi'(x)|$$

Suy ra: $\lim_{n\to\infty} |< f_n, \varphi > - < 0, \varphi >| = \lim_{n\to\infty} |< f_n, \varphi >| = 0$

Để ý rằng ta không có $\lim_{n\to\infty} \sin(nx) = 0$ theo nghĩa hội tụ của dãy hàm.

Ví dụ 2

$$\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x} \to \delta$$

Nhớ rằng

$$\text{P.v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} dx = 1 \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ta có

$$< \delta_n, \varphi > - < \delta, \varphi > = \text{P.v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} \varphi(x) dx - \varphi(0)$$

$$= \text{P.v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right) dx$$

Đặt

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \,, \quad x \neq 0$$

Ta thấy

$$\lim_{x\to 0} \psi(x) = \varphi'(0) \text{ và } \lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0$$

$$\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(0)}{x^2} \,, x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \psi'(x) = \frac{1}{2} \varphi''(0) \text{ và } \lim_{|x|\to\infty} \psi'(x) = 0$$

và $\psi'(x)$ là hàm bị chặn, liên tục từng khoảng.

Bằng phép tích phân từng phần ta có

$$< \delta_n, \varphi > - < \delta, \varphi > = -\frac{1}{n\pi}\cos(nx)\,\psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(nx)\,\psi'(x)dx$$

Số hạng thứ nhất bằng 0 và ta có đánh giá

$$|< \delta_n, \varphi > - < \delta, \varphi >| \le \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|dx$$

Giả sử supp $\varphi \subseteq$ [-a, a], a > 0, và gọi m = $\sup|\psi'(x)|$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|dx = \int_{-\infty}^{-a}\frac{|\varphi(0)|}{x^2}\,dx + \int_{a}^{\infty}\frac{|\varphi(0)|}{x^2}\,dx + \int_{-a}^{a}|\psi'(x)|\,dx$$

$$\le \frac{2}{a}\,|\varphi(0)| + 2am$$

Sự hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|dx$ suy ra điều cần chứng minh:

$$\lim_{n\to\infty} < \delta_n, \varphi > = < \delta, \varphi >$$

Dãy phân bố hội tụ về phân bố δ được gọi là một **dãy delta**. Một số dãy delta như sau:

$$\delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \to \delta, \text{khi } \alpha \to 0^+$$

$$\delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\alpha^2x^2} \to \delta, \text{khi } \alpha \to \infty$$

Ta cũng có

$$\frac{x}{\varepsilon^2 + x^2} \to P\frac{1}{x}\,, \text{khi } \varepsilon \to 0^+$$

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} \to \mp\, i\pi\delta + P\frac{1}{x}\,, \text{khi } \varepsilon \to 0^+$$

II. Các phép toán trên phân bố

1. Các phép toán đại số

Định nghĩa 11

f và g là phân bố

$$f = g \text{ nếu } < f, \varphi > = < g, \varphi > \quad \forall \varphi \in D.$$

Định nghĩa 12

Cho f và g là các phân bố. Tổng hai phân bố và tích của một vô hướng với một phân bố là các phân bố xác định như sau:

$$< f + g, \varphi > = < f, \varphi > + < g, \varphi > \quad \forall\, \varphi \in D$$

$$< \alpha f, \varphi > = \alpha < f, \varphi > \quad \alpha \in C$$

Định nghĩa 13

f là một phân bố và h là một hàm trơn. Phân bố hf được định nghĩa bởi:

$$< hf, \varphi > = < f, h\varphi > \quad \forall \varphi \in D$$

Ví dụ:

$$xP\frac{1}{x} = 1$$

Thật vậy

$$< xP\frac{1}{x}, \varphi > = < P\frac{1}{x}, x\varphi(x) > = \lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}x\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}x\varphi(x)dx\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx \quad = < 1, \varphi >$$

Ví dụ:

$$x\delta = 0$$

$$e^x\delta = \delta$$

Ví dụ:

Tìm tất cả các phân bố f thỏa phương trình xf = 0.

Ta đã biết f = cδ là một nghiệm. Để chứng minh đó là nghiệm tổng quát thì không dễ dàng.

Đặt $Z = \{\varphi \in D : \varphi(0) = 0\}$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x} & x \neq 0 \\ \varphi'(0) & x = 0 \end{cases} \quad \varphi \in Z$$

Bằng quy nạp ta có $\psi^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}\varphi^{(n+1)}(0) \quad n = 0,1, \dots$

Hơn nữa $\mathrm{supp}\psi \subseteq \mathrm{supp}\varphi \cup \{0\}$ nên $\psi(x)$ là một hàm thử.

Dễ thấy $x\psi(x) = \varphi(x) \ \ \forall x \in R$.

Với mọi $\varphi \in Z$, ta có

$$< f, \varphi > = < f, x\psi > = < xf, \psi > = < 0, \psi > = 0$$

Nghĩa là phân bố f triệt tiêu trên Z.

Chọn $\varphi_0 \in D$ sao cho $\varphi_0(0) = 1$

Với mỗi $\eta \in D$ ta đặt

$$\varphi(x) = \eta(x) - \eta(0)\varphi_0(x)$$

Rõ ràng $\varphi(x) \in Z$ và

$$< f, \eta(x) > = < f, \varphi(x) + \eta(0)\varphi_0(x) > = \eta(0) < f, \varphi_0(x) >$$

$$= c < \delta, \eta >$$

Ở đây $c = < f, \varphi_0(x) >$ là một hằng số.

Suy ra: $f = c\delta$

Ví dụ:

Phân bố f thỏa phương trình xf = 1 khi và chỉ khi $f = P\frac{1}{x} + c\delta$

Định nghĩa 14

f là một phân bố và y∈R. Ta định nghĩa các phân bố $f_{\pm y}$ như sau:

$$< f_{\pm y}, \varphi(x) > = < f, \varphi(x \mp y) > \quad \varphi \in D$$

Nếu f là phân bố chính quy sanh bởi hàm khả tích địa phương f(x) thì

$$< f_{\pm y}, \varphi(x) > = < f, \varphi(x \mp y) > \quad \varphi \in D$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x \mp y) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x \pm y)\, \varphi(x) dx$$

Nghĩa là $f_{\pm y}$ là phân bố chính quy sanh bởi hàm khả tích địa phương $f(x \pm y)$.

Ví dụ:

$$< \delta_{\pm y}, \varphi(x) > = < \delta, \varphi(x \mp y) > = \varphi(\mp y)$$

Khi xem phân bố δ như là "hàm" δ(x), công thức trên có dạng

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \pm y) \varphi(x) dx = \varphi(\mp y)$$

Tức là phân bố không chính quy $\delta_{\pm y}$ được viết **một cách hình thức** như là một phân bố chính qui $\delta(x \pm y)$.

Định nghĩa 15

f là một phân bố và y là một số thực khác 0. Phân bố $f_{.y}$ xác định như sau:

$$< f_{.y}, \varphi(x) > = \frac{1}{|y|} < f, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) >$$

Trường hợp f là một phân bố chính quy sanh bởi hàm khả tích địa phương f(x):

$$< f_{.y}, \varphi(x) > = \frac{1}{|y|} < f, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) >$$

$$= \frac{1}{|y|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(yx)\, \varphi(x)dx$$

Ví dụ:

$$< \delta_{.y}\, , \varphi(x) > = \frac{1}{|y|} < \delta\, , \varphi\left(\frac{x}{y}\right) >= \frac{1}{|y|}\ \varphi(0) = \frac{1}{|y|} < \delta, \varphi(x) >$$

Suy ra: $\delta_{.y} = \frac{1}{|y|}\ \delta$

Khi xem δ như là một phân bố "chính quy" ta gặp công thức quen thuộc

$$\delta(yx) = \frac{1}{|y|}\ \delta(x)$$

Định nghĩa 16

f và g là các phân bố.

$f = g$ trên khoảng (a, b) nếu $< f, \varphi > = < g, \varphi > \quad \varphi \in D$ có $\mathrm{supp}\varphi \subseteq (a, b)$.

Ví dụ:

$\delta_{-y} = 0$ trên khoảng (y, ∞)

Giả sử supp $\varphi \subseteq (y, \infty)$. Rõ ràng $\varphi(y) = 0$ và

$$< \delta_{-y}\, , \varphi(x) > = < \delta\, , \varphi(x + y) > = \varphi(y) = 0 = < 0\, , \varphi(x) >$$

Tương tự

$\delta_{-y} = 0$ trên khoảng (-∞, y)

Các phương trình trên thường được thấy dưới dạng:

$\delta(x - y) = 0$ khi $x > y$,

$\delta(x - y) = 0$ khi $x < y$.

2. Đạo hàm suy rộng

Cho $f : R \to C$ là một hàm khả vi liên tục (f khả vi và $f'(x)$ liên tục) trên R. Như vậy $f(x)$ và $f'(x)$ xác định các phân bố chính quy f và f'. Ta có

$$< f', \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -< f, \varphi' >$$

Ta có định nghĩa mở rộng sau

Định nghĩa 17

Cho f là một phân bố. **Đạo hàm** của phân bố f, ký hiệu f', là phân bố xác định như sau

$$< f', \varphi > = -< f, \varphi' > \quad \forall \varphi \in D$$

Dễ dàng chứng minh tính thỏa đáng của định nghĩa trên, tức là f'là một phiếm hàm tuyến tính liên tục.

Như vậy khác với các hàm số, mọi phân bố đều có đạo hàm và đạo hàm của một phân bố cũng là một phân bố.

Để thấy định nghĩa đạo hàm của một phân bố là sự mở rộng của phép đạo hàm thông thường của một hàm số ta xem mệnh đề sau:

$$f' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(f_{+\varepsilon} - f)$$

Thật vậy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \tfrac{1}{\varepsilon}(f_{+\varepsilon} - f), \varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle f, \tfrac{1}{\varepsilon}\big(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x)\big) \rangle$$

$$= \langle f, \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{1}{\varepsilon}\big(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x)\big) \rangle$$

$$= \langle f, -\varphi'(x) \rangle$$

$$= \langle f', \varphi(x) \rangle$$

Ví dụ:

$$< |x|', \varphi > = -< |x|, \varphi' > = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \varphi'(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, \varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx$$

$$= < \operatorname{sign}, \varphi >$$

Vậy $|x|' = \operatorname{sign}$.

Ví dụ:

$$< \theta', \varphi > = - < \theta, \varphi' > = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\ dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx$$

$$= \varphi(0) = < \delta, \varphi >$$

Vậy $\theta' = \delta$.

Ví dụ:

$$(\ln|x|)' = P\frac{1}{x}$$

Định nghĩa 18

Cho hàm số f: R → C không liên tục tại x = a, nhưng các giới hạn một phía $f(a^{\pm})$ tồn tại.

Hàm f được gọi là có bước nhảy tại a nếu $\Delta f(a) = f(a^+) - f(a^-) \neq 0$.

Chẳng hạn, ta có: $\Delta\theta(0) = 1,\ \Delta \operatorname{sign}(0) = 2$

Mệnh đề 5

Hàm số f: R → C khả vi liên tục ngoại trừ tại x = a sao cho các giới hạn một phía $f(a^{\pm})$, $f'(a^{\pm})$ tồn tại.Ta có:

$$f' = f'(x) + \Delta f(a)\delta(x - a)$$

Chứng minh:

f(x) và đạo hàm thông thường $f'(x)\ \ (x \neq a)$ xác định các phân bố chính quy f và $f'(x)$. Ta tính đạo hàm suy rộng f' của phân bố f:

$$< f', \varphi > = - < f, \varphi' > = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{a} f\,(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{\infty} f\,(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\, f(a^{-})\varphi(a) + f(a^{+})\varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= \ \Delta f(a)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= \ \Delta f(a)\, \langle \delta_{-a}\,, \varphi(x)\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Suy ra: $f' = f'(x) + \Delta f(a)\delta(x - a)$

Vậy nếu hàm f(x) có bước nhảy tại x = a thì công thức của đạo hàm phân bố f' có chứa phân bố δ.

Ví dụ:

Hàm Heaviside $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ là khả vi liên tục ngoại trừ tại x = 0

Đạo hàm thông thường $\theta'(x) = 0,\ x \neq 0$

và bước nhảy $\Delta\theta(0) = 1$.

Suy ra: $\theta' = \theta'(x) + \Delta\theta(0)\delta(x - 0) = \delta$

Ví dụ:

Hàm $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Đạo hàm thông thường $(|x|)' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \mathrm{sign}(x)$

Và $\Delta|x|(0) = 0$.

Suy ra: $|x|' = (|x|)' + \Delta|x|(0)\delta = \mathrm{sign}(x)$

Nếu $f'(x)$ trong Mệnh đề 5 lại thỏa các điều kiện như f(x), lấy đạo hàm phân bố một lần nữa ta được công thức của đạo hàm phân bố cấp 2:

$$f'' = f''(x) + \Delta f'(a)\delta(x-a) + \Delta f(a)\delta'(x-a)$$

Ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$$f'' = \delta + \delta'$$

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ HÀM GREEN

I. Tích phân của một phân bố

Định nghĩa 19

Phân bố F được gọi là một **tích phân** của phân bố f nếu $F' = f$.

Ví dụ:

Phân bố $\ln|x|$ là một tích phân của phân bố $P\frac{1}{x}$ vì $(\ln|x|)' = P\frac{1}{x}$

Phân bố θ là một tích phân của phân bố δ vì $\theta' = \delta$

Bổ đề 6

Cho $\varphi \in D$ và $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$.

$\psi \in D$ khi và chỉ khi $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = 0$.

Chứng minh:

Rõ ràng $\psi'(x) = \varphi(x)$ và $\psi(x)$ trơn.

Gỉa sử $\psi \in D$ nghĩa là có $a > 0$ sao cho $\operatorname{supp}\psi \subseteq [-a, a]$. Do $\psi(x) = 0,\ x \geq a$ nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$$

Gỉa sử $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = 0$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-a, a]$ $a > 0$.

Khi $x \leq -a$: $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$

Khi $x \geq a$: $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy - \int_{x}^{\infty} \varphi(y)dy = 0 - \int_{x}^{\infty} 0dy = 0$

Vậy $\operatorname{supp}\psi \subseteq [-a, a]$. Suy ra $\psi \in D$.

Bây giờ ta tìm tích phân F của phân bố f cho trước theo các bước sau:

Gọi $Z = \{\, \eta \in D: \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)dx = 0 \,\}$

Chọn $\varphi_0 \in D$ sao cho $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 1$

Với mỗi $\varphi \in D$, đặt $\eta(x) = \varphi(x) - k\varphi_0(x), \quad k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ (1)

Rõ ràng $\eta(x) \in Z$.

Gọi $$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \eta(y)dy \qquad (2)$$

Bổ đề 6 cho thấy $\psi \in D$.

Với phân bố f cho trước, gọi F là phiếm hàm xác định như sau

$$< F, \varphi > = - < f, \psi > \quad \varphi \in D \qquad (3)$$

Ở đây ψ xác định bởi (1) và (2).

Hai mệnh đề sau cho ta thấy F là một tích phân của f.

Mệnh đề 7

F là một phân bố.

Mệnh đề 8

$$F' = f$$

Chứng minh:

Ta phải chứng minh $< F', \varphi > = < f, \varphi >, \quad \forall \varphi \in D$

Ta có: $$< F', \varphi > = - < F, \varphi' >$$

Để tính $< F, \varphi' >$ ta dùng các công thức (1), (2) và (3):

Gọi $\eta(x) = \varphi'(x) - k\varphi_0(x), \quad k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)dx = 0$

Vậy $\eta(x) = \varphi'(x)$

Gọi $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \eta(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \varphi'(y)dy = \varphi(x)$

Theo (3)

$$< F, \varphi' > = - < f, \psi > = - < f, \varphi >$$

Suy ra $\quad < F', \varphi > = < f, \varphi > \quad \varphi \in D$

Việc tìm tích phân F của f là việc giải phương trình vi phân suy rộng $F' = f$

Ví dụ

Giải phương trình $F' = P\frac{1}{x}$

Ta có

$$< F, \varphi > \; = - < P\frac{1}{x}, \psi > = -\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\psi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\psi(x)}{x}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\psi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\psi'(x)dx\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\psi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\eta(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\big(\varphi(x) - k\varphi_0(x)\big)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(\ln|x| + c)\varphi(x)dx, \qquad c = \int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\varphi_0(x)dx$$

Vậy $\quad F = \ln|x| + c$

Ví dụ

Giải phương trình $F' = \delta$

Mệnh đề 9

Hai tích phân của một phân bố thì sai khác nhau một phân bố hằng.

Chứng minh:

Gỉa sử f là một phân bố cho trước và $F' = G' = f$

Ta có $< F - G, \varphi > = < F - G, \eta + k\varphi_0 >$

$$= < F - G, \eta > + k < F - G, \varphi_0 >$$

$$= \; < F - G\,, \psi' > + kc\,, \qquad c = < F - G\,, \varphi_0 >$$

$$= \; - < F' - G', \psi > + kc$$

$$= \; kc$$

$$= \; \int_{-\infty}^{\infty} c\,\varphi(x)dx$$

Vậy F – G = c

Ví dụ

Giải phương trình $f' = \delta$

Ta đã biết $\theta' = \delta$

Vậy nghiệm tổng quát là $f = \theta + c$

Ví dụ

Phương trình $xf' = 0$ có nghiệm tổng quát $f = c_1 + c_2\theta$

Nghiệm riêng $f = c_1$ gọi là **nghiệm cổ điển** vì nó là hàm khả vi thông thường.

Nghiệm tổng quát với $c_2 \neq 0$ được gọi là **nghiệm yếu** vì hàm Heaviside $\theta(x)$ không khả vi tại x = 0. Nghiệm yếu là một phân bố chính quy.

Ví dụ

Phương trình $xf' = 1$ có nghiệm tổng quát $f = c_1 + c_2\theta + \ln|x|$

Nghiệm tổng quát đây là nghiệm yếu.

Ví dụ

Phương trình $x^2f' = 0$ có nghiệm tổng quát $f = c_1 + c_2\theta + c_3\delta$

Nghiệm tổng quát này gọi là **nghiệm phân bố** vì nó là một phân bố không chính quy. Phép đạo hàm trong phương trình phải được hiểu là đạo hàm phân bố.

II. Phương trình vi phân và hàm Green

Xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp hai

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f$$

Ở đây: - $a_i(x)$ i = 0, 1, 2 là các hàm trơn,

- u' , u'' là các đạo hàm thường(hay suy rộng) của hàm (hay phân bố) u,

- f là một hàm (hay phân bố) cho trước.

Đặt $D = a_0 d^2 + a_1 d + a_2$, d là phép đạo hàm thường (hay suy rộng).

Phương trình trên có dạng

$$Du = f \tag{1}$$

Việc giải phương trình này là việc tìm ra toán tử D^{-1} sao cho

$$u = D^{-1}f$$

Trong trường hợp phương trình vi phân thường, D là một toán tử vi phân nên ta thử tìm nghiệm u(x) bằng phép tích phân sau

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x;y)f(y)dy \tag{2}$$

Gỉa sử g(x;y) và f(y) đủ tốt để ta có thể xem tích phân trên như một phân bố chính quy, nghĩa là g(x;y) khả tích địa phương, f(y) là hàm thử:

$$u(x) = \langle g(x;y), f(y) \rangle$$

Phép đạo hàm phân bố cho ta

$$Du(x) = \langle Dg(x;y), f(y) \rangle$$

Nếu g(x;y) thỏa phương trình vi phân suy rộng

$$Dg(x;y) = \delta(x - y)$$

thì $\qquad Du(x) = \langle Dg(x;y), f(y) \rangle = \langle \delta(x - y), f(y) \rangle = f(x)$

Khi đó (2) sẽ là nghiệm của (1).

Định nghĩa 20

Mỗi nghiệm g(x;y) của phương trình

$$Dg(x;y) = \delta(x - y) \tag{3}$$

được gọi là một **nghiệm cơ bản** của toán tử D.

Mệnh đề 10

Nếu $a_0(x) \neq 0$ $\forall x \in R$ thì **tồn tại nghiệm cơ bản** của toán tử D.

Chứng minh:

Ta có phương trình vi phân suy rộng cho g = g(x;y)

$$a_0(x)g'' + a_1(x)g' + a_2(x)g = \delta(x - y) \qquad \text{(a)}$$

Khi x < y, rõ ràng g(x;y) = 0 thỏa phương trình trên.

Khi x ≥ y, vì vế phải của phương trình là phân bố δ(x – y) nên tại x = y ta áp đặt g(x;y) liên tục

$$g(y_+; y) = g(y_-; y) = g(y; y) = 0$$

và $g'(x; y)$ phải có bước nhảy, hay $\Delta g'(y; y) \neq 0$.

Đạo hàm phân bố cho ta

$$g' = g'(x; y) + \Delta g(y; y)\delta(x - y) = g'(x; y)$$

$$g'' = g''(x; y) + \Delta g'(y; y)\delta(x - y) + \Delta g(y; y)\delta'(x - y)$$

$$= g''(x; y) + \Delta g'(y; y)\delta(x - y)$$

Thay vào phương trình (a) ta được

$$a_0(x)g''(x; y) + a_1(x)g'(x; y) + a_2(x)g(x; y) + a_0(x)\Delta g'(y; y)\delta(x - y)$$

$$= \delta(x - y) \qquad \text{(b)}$$

Áp dụng (b) cho hàm thử $\varphi(x)$ có supp φ = $[y - \varepsilon, y + \varepsilon]$, ta có:

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} g(x;y)[(a_0\varphi)'' - (a_1\varphi)' + a_2\varphi](x)dx + a_0(y)\Delta g'(y;y)\varphi(y) = \varphi(y)$$

Tích phân có thể chọn nhỏ tùy ý khi $\varepsilon \to 0$ nên:

$$a_0(y)\Delta g'(y;y) = a_0(y)\big(g'(y_+;y) - g'(y_-;y)\big) = 1$$

Vì $g'(y_-;y) = 0$ và $a_0(y) \neq 0\ \forall y \in R$

Suy ra $g'(y_+;y) = a_0(y)^{-1}$

Khi x > y, cũng từ (b) ta có phương trình vi phân thường (ODE)

$$a_0(x)g''(x;y) + a_1(x)g'(x;y) + a_2(x)g(x;y) = 0 \qquad \text{(c)}$$

với các điều kiện biên $g(y_+;y) = 0$ và $g'(y_+;y) = a_0(y)^{-1}$

Định lý tồn tại và duy nhất (Existence and Uniqueness Theorem) bảo đảm phương trình trên có nghiệm g(x;y) khả vi đến cấp 2 trên khoảng (y,∞).

Nghiệm cơ bản g = g(x;y) tìm được là một **nghiệm yếu**.

Các nghiệm cơ bản còn lại sai khác với nghiệm cơ bản g bởi một nghiệm cổ điển w = w(x; y) (hàm khả vi cấp 2) của phương trình thuần nhất Dw = 0

$$D(g + w) = Dg + Dw = \delta(x - y)$$

Như vậy mọi nghiệm cơ bản của toán tử D là nghiệm yếu.

Mệnh đề 11

Nghiệm cơ bản có tính đối xứng:

$$g(x;y) = g(y;x)$$

Chứng minh:

Ta viết nghiệm (2) dưới dạng

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y;x)f(y)dy$$

Nghiệm cơ bản h = h(y; x) bây giờ thỏa phương trình

$$Dh(y; x) = \delta(y - x)$$

Lặp lại các bước trong chứng minh Mệnh đề 10 ta có

Khi $x < y$: $h(y; x) = 0$

Khi $x > y$, $h(y; x)$ thỏa phương trình

$$a_0(x)h''(y;x) + a_1(x)h'(y;x) + a_2(x)h(y;x) = 0$$

với các điều kiện biên $h(y;y_+) = 0$ và $h'(y;y_+) = a_0(y)^{-1}$

Phương trình này và các điều kiện biên lại chính là phương trình (c). Định lý tồn tại và duy nhất cho ta $h(y; x) = g(x; y)$.

Tóm lại

$x \leq y$: $h(y; x) = g(x; y) = 0$

$x > y$: $h(y; x) = g(x; y)$

Khi cố định y ta có $h(.; x) = g(x; .)$ $\forall x \in R$, nghĩa là $h = g$.

Vậy $g(y; x) = g(x; y)$.

Khi giải một phương trình vi phân ta thường phải tìm nghiệm thỏa các điều kiện ban đầu hay các điều kiện biên cho trước.Trong trường hợp phương trình vi phân cấp 2, điều kiện biên thường là các giá trị của nghiệm hay đạo hàm bậc 1 của nó tại các điểm trên biên. Các điều kiện biên được cho bởi các phương trình tuyến tính thuần nhất của các giá trị này được gọi là các điều kiện biên thuần nhất:

$$\alpha g(a;y) + \beta g'(a;y) = 0$$

$$\gamma g(b;y) + \mu g'(b;y) = 0$$

ở đây $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in R$.

Định nghĩa 21

Các nghiệm cơ bản g(x;y) của toán tử D thỏa **các điều kiện biên thuần nhất** được gọi là các **hàm Green**.

Mệnh đề sau đây cho thấy (2) là nghiệm của phương trình không thuần nhất (1).

Mệnh đề 12

Gỉa sử g(x;y) là hàm Green của toán tử D, f(x) là một hàm khả tích địa phương, và các tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} g(x;y)f(y)dy$ và $\int_{-\infty}^{\infty} g'(x;y)f(y)dy$ **hội tụ đều**. Khi đó hàm $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x;\ y)f(y)dy$ là một nghiệm yếu của phương trình không thuần nhất Du(x) = f(x) thỏa các điều kiện biên của g(x;y).

Chứng minh:

Vì f(y), g(x; y), và $g'(x;y)$ là các hàm khả tích địa phương và các tích phân suy rộng $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x;\ y)f(y)dy$, $\int_{-\infty}^{\infty} g'(x;y)f(y)dy$ hội tụ đều nên u(x) là hàm khả vi liên tục và

$$u'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x;y)f(y)dy\ ,\ \forall x \in R$$

(Dùng Lebesgue's Dominated Convergence Theorem để chứng minh).

Nếu hàm f(x) trong phương trình Du(x) = f(x) không liên tục tại điểm $x = x_o$ thì hàm u(x) không khả vi liên tục đến cấp 2 tại đó nên u(x) là một nghiệm yếu. Ta chứng minh $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x;\ y)f(y)dy$ là nghiệm của phương trình vi phân suy rộng Du = f, hay < Du, φ > = < f, φ > ∀φ∈D.

Ta có:

$$
\begin{aligned}
< Du, \varphi > &= < a_o(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u\ , \varphi > \\
&= < u\ , (a_0\varphi)''(x) - (a_1\varphi)'(x) + (a_2\varphi)(x) > \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)(\,(a_0\varphi)'' - (a_1\varphi)' + (a_2\varphi))(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} g(x;\ y)f(y)dy\,(\,(a_0\varphi)'' - (a_1\varphi)' + (a_2\varphi))(x))dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} g(x;\ y)\,(\,(a_0\varphi)'' - (a_1\varphi)' + (a_2\varphi))(x))dx)f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{y}^{\infty} g(x;\ y)\,(\,(a_0\varphi)'' - (a_1\varphi)' + (a_2\varphi))(x))dx)f(y)dy
\end{aligned}
$$

Phép tích phân từng phần cho ta

$$\int_y^\infty g(x;y)(a_o\varphi)''(x)dx = g(x;y)(a_o\varphi)'(x)\Big|_{x=y}^{x=\infty} - \int_y^\infty g'(x;y)(a_o\varphi)'(x)dx$$

(Số hạng thứ nhất bằng 0 do supp φ bị chặn và g(y; y) = 0)

$$= -g'(x;y)(a_o\varphi)(x)\Big|_{x=y}^{x=\infty} + \int_y^\infty g''(x;y)(a_o\varphi)(x)dx$$

$$= g'(y_+,y)a_o(y)\varphi(y) + \int_y^\infty g''(x;y)(a_o\varphi)(x)dx$$

$$= \varphi(y) + \int_y^\infty g''(x;y)(a_o\varphi)(x)dx$$

Tương tự ta có

$$\int_y^\infty g(x;\ y)\,(a_1\varphi)'(x)dx = -\int_y^\infty g'(x;\ y)\,(a_1\varphi)(x)dx$$

Suy ra

$< Du, \varphi > =$

$$= \int_{-\infty}^\infty [\varphi(y) + \int_y^\infty (a_o g''(x;\ y) + a_1 g'(x;y) + a_2 g(x;y))\ \varphi\,(x)dx] f(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^\infty f(y)\varphi(y)dy$$

Ví dụ:

Giải phương trình $u''(x) + k^2u(x) = f(x), \quad 0 \le x \le l$

u(0) = 0, u(l) = 0.

Hàm green g(x; y) thỏa phương trình

$$g''(x;y) + k^2g(x;y) = \delta(x-y), \quad 0 \le x, y \le l$$

và điều kiện biên g(0; y) = 0, g(l; y) = 0.

Khi x < y:

Phương trình $g''(x;y) + k^2g(x;y) = 0$ với $g(0;y) = 0$ có nghiệm

$$g(x;y) = c_1(y)\sin(kx)$$

Khi x > y:

Phương trình $g''(x;y) + k^2 g(x;y) = 0$ với $g(l;y) = 0$ có nghiệm

$$g(x;y) = c_2(y)\sin k(x-l)$$

Hàm green g(x; y) còn phải thỏa các điều kiện sau:

$$g(y_-,y) = g(y_+,y) = 0$$

$$g'(y_+,y) - g'(y_-,y) = 1$$

Suy ra:

$$g(x;y) = \begin{cases} \frac{\sin k(y-l)}{k\sin(kl)}\sin(kx) & x \le y \\ \frac{\sin(ky)}{k\sin(kl)}\sin k(x-l) & x > y \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình không thuần nhất là:

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sin(ky)}{k\sin(kl)}\sin k(x-l)f(y)dy + \int_x^l \frac{\sin k(y-l)}{k\sin(kl)}\sin(kx)f(y)dy$$

Ví dụ:

Giải phương trình $u''(x) - k^2u(x) = f(x), \quad 0 \le x \le l$

$$u(0) = 0, \ u(l) = 0.$$

Hàm green

$$g(x;y) = \begin{cases} \frac{\sinh(kx)}{k(e^{2kl}-1)}\left(e^{ky} - e^{k(2l-y)}\right) & x \le y \\ \frac{\sinh(ky)}{k(e^{2kl}-1)}\left(e^{kx} - e^{k(2l-x)}\right) & x > y \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình không thuần nhất là:

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sinh(ky)}{k(e^{2kl}-1)}\left(e^{kx} - e^{k(2l-x)}\right)f(y)dy + \int_x^l \frac{\sinh(kx)}{k(e^{2kl}-1)}\left(e^{ky} - e^{k(2l-y)}\right)f(y)dy$$

Ví dụ:

Giải phương trình $u''(x) - k^2 u(x) = f(x) \quad -\infty < x < \infty$

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

Ví dụ:

Giải phương trình $u''(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$

$$u'(0) = 0\,, u'(l) = 0.$$

Ví dụ:

Giải phương trình $u''(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$

$$u(0) = 0\,, u(l) = 0.$$

CHƯƠNG 3
BIẾN ĐỔI FOURIER

I. Biến đổi Fourier cổ điển

Định nghĩa 22

Hàm f: R → C được gọi là **khả tích tuyệt đối** nếu $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$.

Nếu hàm f: R → C khả tích địa phương và có các số thực M > 0, α > 0, và

a > 0 sao cho $|f(x)| \leq M|x|^{-(1+\alpha)}$ khi $|x| \geq a$ thì f khả tích tuyệt đối.

Định nghĩa 23

Cho f: R → C là một hàm khả tích tuyệt đối. Tích phân suy rộng

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \quad k \in R$$

được gọi là **phép biến đổi Fourier**.

Vì hàm f là khả tích tuyệt đối nên tích phân suy rộng này **hội tụ tuyệt đối và đều**. Suy ra $\hat{f}$: R→ C là một hàm bị chặn và liên tục. Hơn nữa

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

(Riemann- Lebesgue lemma).

Mệnh đề sau nói về **phép biến đổi Fourier ngược**:

Mệnh đề 13

Nếu hàm f: R→ C là khả tích tuyệt đối, khả vi liên tục từng khoảng thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

Nếu f liên tục tại x thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk = f(x)$$

Chứng minh:

Dùng bổ đề Riemann- Lebesgue.

Ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Biến đổi Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{2\sin(ka)}{k}$$

Biến đổi Fourier ngược

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin ka}{k} e^{ikx} dk = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & x = \pm a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Khi x = 0 ta có tích phân quen thuộc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{\pi k} dk = 1 \quad (a > 0)$$

Ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\varepsilon x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (\varepsilon > 0)$$

Biến đổi Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\varepsilon + ik}$$

Biến đổi Fourier ngược

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\varepsilon + ik} dk = \begin{cases} e^{-\varepsilon x} & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Cho $\varepsilon \to 0^+$ ta có biểu diễn tích phân của hàm Heaviside

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\varepsilon + ik} dk$$

Ví dụ:

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

Biến đổi Fourier

$$\hat{f}(k) = \frac{2a}{a^2+k^2}$$

Biến đổi Fourier ngược

$$e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{a^2+k^2}dk$$

Mệnh đề 14

Gỉa sử f: R→ C là hàm khả tích tuyệt đối, khi đó:

1. $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ nếu f liên tục và f' khả tích tuyệt đối .
2. $\left(\hat{f}\right)'(k) = -i\left(\widehat{xf}\right)(k)$ nếu xf khả tích tuyệt đối .
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)g(x)dx$ nếu g khả tích tuyệt đối .

Chứng minh:

1. Dùng phép tích phân từng phần và để ý rằng

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx$$

$f'(x)$ khả tích tuyệt đối nên $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại, f(x) liên tục và khả tích tuyệt đối nên $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Tương tự: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. Dùng Định lý hội tụ bị chặn (Lebesgue’s Dominated Convergence Theorem).

3. Có thể hoán đổi thứ tự các tích phân (Fubini Theorem) bởi vì các tích phân $\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-ixy} dy$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy} dx$ và $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \hat{g}(x) dx$ hội tụ tuyệt đối và đều.

II. Biến đổi Fourier của phân bố tăng chậm

1. Phân bố tăng chậm

Định nghĩa 24

Một hàm giảm nhanh φ: R→ C là một hàm trơn sao cho

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n \varphi^{(k)}(x) = 0 \quad n, k = 0, 1, \ldots$$

Các hàm giảm nhanh lập thành một không gian tuyến tính S (Schwartz space).

Ví dụ:

$\varphi(x) = e^{-\alpha x^2}$ $(\alpha > 0)$ là hàm giảm nhanh.

Ví dụ:

Mỗi hàm thử là một hàm giảm nhanh, D ⊂ S.

Mệnh đề 15

1. Nếu $\forall n, k \in N \cup \{0\}, \exists C_{n,k} > 0 : \left|x^n \varphi^{(k)}(x)\right| \leq C_{n,k}\ \forall x \in R$, thì $\varphi \in S$.

2. Nếu $\varphi \in S$ thì $x^n \varphi^{(k)} \in S$ $(n, k = 0, 1, \ldots)$.

3. Nếu $\varphi \in S$ thì φ là khả tích tuyệt đối.

Chứng minh:

Dùng Định nghĩa 24.

Mệnh đề 16

Nếu $\varphi \in S$ thì $\hat{\varphi} \in S$.

Chứng minh:

Nếu $\varphi \in S$ thì $x^r\varphi \in S$ và $x^r\varphi$ là khả tích tuyệt đối (Mệnh đề 15)

Ta có: $\widehat{\varphi}^{(r)}(k) = (-i)^r\widehat{x^r\varphi}(k)$ $r = 0, 1, \ldots$ (Mệnh đề 14)

Vậy $\widehat{\varphi}$ là hàm trơn.

Ta sẽ chứng minh $k^n\widehat{\varphi}^{(r)}(k)$ bị chặn, do đó $\widehat{\varphi} \in S$. (Mệnh đề 15)

$$\left|k^n\widehat{\varphi}^{(r)}(k)\right| = \left|k^n\widehat{x^r\varphi}\,(k)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x^r\varphi(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-ikx}dx\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{dx^n}(x^r\varphi(x))e^{-ikx}dx\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(x^r\varphi(x)\right)\right|dx = C_{n,r} < \infty \text{ (Mệnh đề 15)}$$

Định nghĩa 25

Dãy $\varphi_m \subseteq S$ hội tụ về $\varphi \in S$, ký hiệu $\varphi_m \overset{S}{\to} \varphi$, nếu $\forall n, k \in N^*$:

Dãy $x^n\varphi_m^{(k)}$ hội tụ đều về $x^n\varphi^{(k)}$ khi $m \to \infty$.

Sự hội tụ đều có nghĩa là $\max\limits_{-\infty<x<\infty}\left|x^n\varphi_m^{(k)}(x) - x^n\varphi^{(k)}(x)\right| \to 0$ khi $m \to \infty$.

Mệnh đề 17

1. Nếu $\varphi_m \overset{S}{\to} \varphi$ thì $\varphi'_m \overset{S}{\to} \varphi'$ và $p(x)\varphi_m \overset{S}{\to} p(x)\varphi$ (p(x) là một đa thức)

2. Dãy $\varphi_m \subseteq D$ và $\varphi \in D$, $\varphi_m \overset{D}{\to} \varphi$ thì $\varphi_m \overset{S}{\to} \varphi$.

Chứng minh:

1. Rõ ràng từ Định nghĩa 25.

2. Theo Định nghĩa 4 có đoạn $[a, b]$ chứa supports của $\varphi_m^{(k)}$ và $\varphi^{(k)}$ nên:

$$\max_{-\infty<x<\infty}\left|x^n\varphi_m^{(k)}(x) - x^n\varphi^{(k)}(x)\right| = \max_{a\leq x\leq b}\left|x^n\varphi_m^{(k)}(x) - x^n\varphi^{(k)}(x)\right| \leq$$

$$\leq C\max_{a\leq x\leq b}\left|\varphi_m^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| \to 0 \text{ khi } m \to \infty.$$

Ở đây $C = \max\limits_{a\leq x\leq b}|x|^n$.

Mệnh đề 18

Nếu $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$ thì $\widehat{\varphi}_m \xrightarrow{S} \widehat{\varphi}$.

Chứng minh:

$$\left|k^n\widehat{\varphi}_m^{(r)}(k) - k^n\widehat{\varphi}^{(r)}(k)\right| = \left|k^n\widehat{x^r\varphi_m}\,(k) - k^n\widehat{x^r\varphi}\,(k)\right|$$

$$= \left|\widehat{(x^r\varphi_m)^{(n)}}(k) - \widehat{(x^r\varphi)^{(n)}}(k)\right| \quad \text{(Mệnh đề 14)}$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(x^r(\varphi_m - \varphi)(x))^{(n)}e^{-ikx}dx\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(x^r(\varphi_m - \varphi)(x)\right)^{(n)}\right|dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|(1 + x^2)\left(x^r(\varphi_m - \varphi)(x)\right)^{(n)}\right|\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\leq \pi \max_{x\in R}\left|(1 + x^2)\left(x^r(\varphi_m - \varphi)(x)\right)^{(n)}\right|$$

$\to 0$ khi $m \to \infty$ độc lập với k.

Định nghĩa 26

Phiếm hàm f: S $\to$ C, $\varphi \to <f, \varphi>$ là liên tục nếu

$$\lim_{m\to\infty} < f, \varphi_m > = < f, \varphi > \text{ khi } \varphi_m \xrightarrow{S} \varphi.$$

Định nghĩa 27

Phân bố tăng chậm là một phiếm hàm tuyến tính liên tục f: S $\to$ C.

Ví dụ:

Phiếm hàm δ: S $\to$ C, $< \delta, \varphi > = \varphi(0)$ là một phân bố tăng chậm.

Ví dụ:

Phiếm hàm $< x^n, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\varphi(x)dx$, $\varphi\in S$, $n \in N \cup \{0\}$ cũng là một phân bố tăng chậm.

Một phiếm hàm liên tục trên S thì cũng liên tục trên D (Mệnh đề 17) nên phân bố tăng chậm cũng là một phân bố thông thường. Do đó các phép toán đại số, phép đạo hàm phân bố và sự hội tụ của dãy phân bố vẫn được áp dụng bình thường.

Định nghĩa 28

Hàm khả tích địa phương f: R → C được gọi là một **hàm tăng chậm** nếu có B ≥ 0, M > 0 và n ∈ N ∪ {0} sao cho: $|f(x)| \leq B|x|^n$ khi $|x| > M$.

Ví dụ:

Hàm khả tích địa phương bị chặn $|f(x)| \leq B\ \ x \in R$, là một hàm tăng chậm.

Đa thức $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ là hàm tăng chậm vì $|p(x)| \leq B|x|^n$ khi $|x| > 1$, ở đây $B = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$.

Hàm $f(x) = e^x$ không phải là hàm tăng chậm.

Mệnh đề 19

f: R → C là một hàm tăng chậm.

Phiếm hàm $< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ φ∈S, là một phân bố tăng chậm.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng tỏ phiếm hàm trên tồn tại:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(1+x^2)^{n+1}\varphi(x)| \left|\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right| dx$$

$$\leq \sup_{x\in R} |(1+x^2)^{n+1}\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right| dx$$

Theo Định nghĩa 28, ta có

$$\left|\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right| \leq B|x|^{-2},\ \ |x| > M$$

nên tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right| dx$ hội tụ.

Suy ra tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Tính tuyến tính đã rõ ràng nên ta chứng minh tính liên tục:

Giả sử $\varphi_m \overset{S}{\to} \varphi$, ta có:

$$|< f, \varphi_m > - < f, \varphi >| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\varphi_m - \varphi)(x)dx\,|$$

$$= |\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{n+1}(\varphi_m - \varphi)(x)\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}dx|$$

$$\leq \sup_{x\in R}|(1+x^2)^{n+1}(\varphi_m - \varphi)(x)|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right|dx$$

$\to 0$ khi $m \to \infty$.

Định nghĩa 29

Phân bố tăng chậm f trong Mệnh đề 19 được gọi là **phân bố tăng chậm chính quy** xác định bởi hàm tăng chậm f(x).

Ví dụ:

Hàm hằng $f(x) = 1 \ \ x \in R$ là hàm tăng chậm, xác định phân bố tăng chậm 1:

$$\langle 1, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$$

Ví dụ:

Hàm $f(x) = e^{\pm iax}$ xác định phân bố tăng chậm

$$\langle e^{\pm iax}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iax}\varphi(x)dx = \widehat{\varphi}\,(\mp a)$$

Ví dụ:

Đa thức $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ là hàm tăng chậm, xác định phân bố tăng chậm

$$\langle p, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\varphi(x)dx$$

2. Biến đổi Fourier của phân bố tăng chậm

Mệnh đề 20

Cho f là một phân bố tăng chậm

Phiếm hàm $< \hat{f}, \varphi > = < f, \widehat{\varphi} > \quad \varphi \in S$, là một phân bố tăng chậm.

Chứng minh:

Tính tuyến tính của $\hat{f}$ suy ra từ tính tuyến tính của biến đổi Fourier cổ điển $\widehat{\varphi}$.

Tính liên tục của $\hat{f}$ suy ra từ tính liên tục của f và Mệnh đề 18.

Định nghĩa 30

Phân bố tăng chậm $\hat{f}$ được gọi là **biến đổi Fourier suy rộng** của phân bố tăng chậm f.

Như vậy mọi phân bố tăng chậm f đều có biến đổi Fourrier suy rộng $\hat{f}$ và $\hat{f}$ cũng là một phân bố tăng chậm.

Trong trường hợp f(x) là một hàm khả tích tuyệt đối thì phiếm hàm

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in S$$

là một phân bố tăng chậm chính quy.

Biến đổi Fourier suy rộng $\hat{f}$:

$$< \hat{f}, \varphi > = < f, \widehat{\varphi} > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\,\varphi(x)dx \qquad \text{(Mệnh đề 14)}$$

Vậy $\hat{f}$ là phân bố tăng chậm chính quy xác định bởi hàm tăng chậm $\hat{f}(x)$.

($\hat{f}$ là biến đổi Fourier suy rộng, $\hat{f}(x)$ là biến đổi Fourier cổ điển).

Ví dụ:

Hàm hằng f(x) = 1 $x \in R$, là một hàm tăng chậm. Nó xác định phân bố tăng chậm chính quy ký hiệu bởi 1 (Mệnh đề 19):

$$< 1, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in S$$

Biến đổi Fourier suy rộng:

$$< \hat{1}, \varphi > = < 1, \hat{\varphi} >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)e^{i0k}dk$$

$$= 2\pi\, \varphi(0) \qquad \text{(Mệnh đề 13)}$$

$$= < 2\pi\delta, \varphi >$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2\pi}\hat{1} = \delta$$

Ví dụ:

Đơn thức $f(x) = x^n$ là một hàm tăng chậm xác định phân bố tăng chậm f. Tính biến đổi Fourier suy rộng $\widehat{x^n}$.

$$< \widehat{x^n}, \varphi > = < x^n, \hat{\varphi} > = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \hat{\varphi}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \widehat{\varphi^{(n)}}(x)dx$$

$$= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi^{(n)}}(x)e^{i0x}dx$$

$$= (-i)^n 2\pi \varphi^{(n)}(0)$$

$$= < 2\pi\, i^n \delta^{(n)}, \varphi >$$

Vậy

$$\widehat{x^n} = 2\pi\, i^n \delta^{(n)}$$

Ví dụ:

$$< \widehat{\delta_{-a}}, \varphi > = < \delta_{-a}, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-iax}\, dx$$

Suy ra: $\widehat{\delta_{-a}} = e^{-iax}$

Ví dụ:

$$\widehat{e^{\pm iax}} = 2\pi\delta_{\mp a}$$

Ví dụ:

$$\widehat{\theta(\pm x)} = \mp iP\frac{1}{x} + \pi\delta$$

CHƯƠNG 4

HÀM GREEN

I. Biến đổi Fourier nhiều chiều

1. Phân bố 3-chiều

R^3 là không gian Euclide 3-chiều gồm các vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in R$.

Chuẩn Euclide của vector $\mathbf{x}$ ký hiệu bởi $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Một hộp đóng trong R^3 là tập $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

$\varphi: R^3 \to C$ là một hàm 3 biến thực, giá trị phức $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$

Tập hợp $\text{supp}\varphi = \overline{\{\mathbf{x} \in R^3 : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}}$ được gọi là support của φ.

Nếu có hộp đóng B sao cho $\text{supp}\varphi \subseteq B$ thì hàm φ được gọi là có support bị chặn.

Ký hiệu $\partial^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3} \varphi$, $\alpha_i \in N \cup \{0\}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ là đạo hàm riêng cấp α của φ.

$\varphi(\mathbf{x})$ là một hàm trơn nếu nó có các đạo hàm riêng mọi cấp.

Định nghĩa 31

Hàm thử $\varphi: R^3 \to C$ là một hàm trơn và có support bị chặn.

Tập hợp các hàm thử được ký hiệu là D.

Định nghĩa 32

Dãy các hàm thử φ_m được gọi là hội tụ về hàm thử φ khi $m \to \infty$ nếu

- Có hộp đóng B sao cho $\text{supp}\, \partial^\alpha \varphi_m \subseteq B$, $\text{supp}\, \partial^\alpha \varphi \subseteq B$,

- $\partial^\alpha \varphi_m$ hội tụ đều về $\partial^\alpha \varphi$ trên B khi $m \to \infty$.

Ký hiệu $\varphi_m \overset{D}{\to} \varphi$.

Định nghĩa 33

Phân bố là một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f: D \to C, \varphi \to < f, \varphi >$.

Tính liên tục của f được định nghĩa tương tự như Định nghĩa 6.

Định nghĩa 34

Hàm $f : R^3 \to C$ được gọi là khả tích địa phương nếu tích phân

$\iiint_B |f(\mathbf{x})|\, d^3\mathbf{x}$ tồn tại với mọi hộp đóng $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Mệnh đề 21

Mỗi hàm khả tích địa phương $f(\mathbf{x})$ xác định một phân bố chính quy

$$< f, \varphi > = \iiint_{R^3} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad \varphi \in D \quad .$$

Chứng minh:

Tương tự Mệnh đề 1.

Ví dụ:

Hàm $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ là khả tích địa phương, xác định phân bố chính quy

$$< f, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iiint_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d^3\mathbf{x} \quad \varphi \in D$$

Các phép toán đại số trên các phân bố và sự hội tụ của dãy phân bố được định nghĩa tương tự như phân bố 1-chiều.

Phép đạo hàm suy rộng bây giờ được định nghĩa như sau :

$$< \partial_j f, \varphi > = - < f, \partial_j \varphi > \quad j = 1,2,3.$$

Suy ra: $< \partial^\alpha f, \varphi > = (-1)^\alpha < f, \partial^\alpha \varphi >$

2. Biến đổi Fourier cổ điển

Định nghĩa 35

Hàm $f: R^3 \to C$ là khả tích tuyệt đối nếu tích phân $\iiint_{R^3} |f(\mathbf{x})|\, d^3\mathbf{x}$ tồn tại.

Định nghĩa 36

Cho $f: R^3 \to C$ là một hàm khả tích tuyệt đối. Biến đổi Fourier là tích phân sau:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \iiint_{R^3} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ là các vector trong R^3,

$\mathbf{k}.\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ là tích vô hướng Euclide.

Phép biến đổi Fourier ngược:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{R^3} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}$$

Ký hiệu R^{3+1} là không- thời gian Minkowski gồm các 4-vector $x = (\mathbf{x}, t)$,

$x.k = \mathbf{x}.\mathbf{k} - \omega t$ là tích vô hướng của hai 4-vector $x = (\mathbf{x}, t)$ và $k = (\mathbf{k}, \omega)$.

Biến đổi Fourier của hàm $f(\mathbf{x}, t)$ là tích phân sau:

$$\hat{f}(\mathbf{k}, \omega) = \iiint_{R^3} d^3\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i(\mathbf{k}.\mathbf{x} - \omega t)} f(\mathbf{x}, t)$$

Biến đổi Fourier ngược:

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{R^3} d^3\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x} - \omega t)} \hat{f}(\mathbf{k}, \omega)$$

Nếu $f(\mathbf{x}, t)$ có các đạo hàm riêng liên tục và khả tích tuyệt đối thì

$$\widehat{\partial_j f} = ik_j \hat{f} \quad j = 1,2,3.$$

$$\widehat{\Delta f} = -k^2 \hat{f}, \quad k = |\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$$

Ở đây $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ là toán tử Laplace.

$$\widehat{\partial_t f} = -i\omega \hat{f}, \qquad \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} = -\omega^2 \hat{f}.$$

3. Biến đổi Fourier suy rộng

Với $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ là một vector trong R^3

Ta ký hiệu $\mathbf{x}^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ và $\beta_i \in N \cup \{0\}$

Định nghĩa 37

Hàm trơn $\varphi: R^3 \to C$ được gọi là một hàm giảm nhanh nếu

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} \mathbf{x}^\beta \, \partial^\alpha \varphi(\mathbf{x}) = 0, \forall \alpha, \beta \in N \cup \{0\}$$

Tập hợp các hàm giảm nhanh lập thành không gian tuyến tính S.

Dễ thấy $D \subset S$.

Định nghĩa 38

Dãy φ_m trong S hội tụ về $\varphi \in S$, ký hiệu $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$, nếu $\forall \alpha, \beta \in N \cup \{0\}$

$\mathbf{x}^\beta \, \partial^\alpha \varphi_m$ hội tụ đều về $\mathbf{x}^\beta \, \partial^\alpha \varphi$ khi $m \to \infty$.

Rõ ràng nếu $\varphi_m \xrightarrow{D} \varphi$ thì $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$.

Mệnh đề 22

Nếu $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$ thì $\widehat{\varphi_m} \xrightarrow{S} \widehat{\varphi}$.

Chứng minh:

Với $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ và $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ta có:

$$\left|\mathbf{k}^\beta \, \partial^\alpha \widehat{\varphi_m}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^\beta \, \partial^\alpha \widehat{\varphi}\,(\mathbf{k})\right| = \left|\mathbf{k}^\beta \widehat{\mathbf{x}^\alpha \varphi_m}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^\beta \widehat{\mathbf{x}^\alpha \varphi}(\mathbf{k})\right|$$

$$= \left|\iiint_{R^3} \mathbf{x}^\alpha (\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x}) (\partial^\beta e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}) d^3\mathbf{x}\right|$$

$$= \left|\iiint_{R^3} \partial^\beta [\mathbf{x}^\alpha (\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x})] e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}\right|$$

$$\leq \iiint_{R^3} \left|\partial^\beta [\mathbf{x}^\alpha (\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x})]\right| d^3\mathbf{x}$$

$$= \iiint_{R^3} (1 + |\mathbf{x}|^6)\left|\partial^\beta[\mathbf{x}^\alpha(\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x})]\right| \frac{d^3\mathbf{x}}{1 + |\mathbf{x}|^6}$$

$$\le \max_{\mathbf{x}\in R^3}\left|(1 + |\mathbf{x}|^6)\, \partial^\beta[\mathbf{x}^\alpha(\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x})]\right| \iiint_{R^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{1+|\mathbf{x}|^6}$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} \max_{\mathbf{x}\in R^3}\left|(1 + |\mathbf{x}|^6)\, \partial^\beta[\mathbf{x}^\alpha(\varphi_m - \varphi)(\mathbf{x})]\right|$$

$\to 0$ khi $m \to \infty$ độc lập với k.

Định nghĩa 39

Phân bố tăng chậm f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ S vào C.

Phân bố tăng chậm cũng là một phân bố thông thường.

Định nghĩa 40

Hàm khả tích địa phương $f: R^3 \to C$ là một hàm tăng chậm nếu có $B \ge 0$, $M > 0$ và $\beta \in N \cup \{0\}$ sao cho:

$$|f(\mathbf{x})| \le B\left|\mathbf{x}^\beta\right| \text{ khi } \left|\mathbf{x}^\beta\right| > M$$

Mệnh đề 23

Hàm tăng chậm $f: R^3 \to C$ xác định phân bố tăng chậm sau

$$< f, \varphi > = \iiint_{R^3} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}, \ \forall\varphi \in S.$$

Chứng minh:

Tương tự Mệnh đề 19.

Để ý rằng $\mathbf{x}^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}$, $\beta_i \ge 0$ và tích phân sau đây hội tụ

$$\iiint_{|\mathbf{x}^\beta|>M} \frac{|\mathbf{x}^\beta|}{(1+x_1^{2\beta_1+2})(1+x_2^{2\beta_2+2})(1+x_3^{2\beta_3+2})} d^3\mathbf{x}$$

Mệnh đề 22 xác nhận tính đúng đắn của định nghĩa sau đây

Định nghĩa 41

Cho f: S → C là một phân bố tăng chậm. Biến đổi Fourier suy rộng $\hat{f}$ là phân bố tăng chậm xác định như sau

$$< \hat{f}, \varphi > = < f, \widehat{\varphi} > \quad \varphi \in S$$

Ví dụ:

Cho $\mathbf{a} \in R^3$:

$$\begin{aligned}
< \widehat{\delta_{-\mathbf{a}}}, \varphi(\mathbf{x}) > &= < \delta_{-\mathbf{a}}, \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) > \\
&= < \delta, \widehat{\varphi}(\mathbf{k}+\mathbf{a}) > \\
&= \widehat{\varphi}(\mathbf{a}) \\
&= \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{a}.\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \\
&= < e^{-i\mathbf{a}.\mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x}) >
\end{aligned}$$

Suy ra: $\widehat{\delta_{-\mathbf{a}}} = e^{-i\mathbf{a}.\mathbf{x}}$

Ví dụ:

$\varphi(x)$ là một hàm giảm nhanh với biến không-thời gian $x = (\mathbf{x}, t) \in R^{3+1}$ và $y = (\mathbf{y}, \tau)$ là một 4-vector.

$$\begin{aligned}
< \widehat{\delta_{-y}}, \varphi(x) > &= < \delta_{-y}, \widehat{\varphi}(k) > \\
&= < \delta, \widehat{\varphi}(k+y) > \\
&= \widehat{\varphi}(y) \\
&= \iiint_{R^3} d^3\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i(\mathbf{y}.\mathbf{x}-\tau t)} \varphi(\mathbf{x}, t) \\
&= < e^{-i(\mathbf{y}.\mathbf{x}-\tau t)}, \varphi(\mathbf{x}, t) >
\end{aligned}$$

Vậy: $\widehat{\delta_{-y}} = e^{-i(\mathbf{y}.\mathbf{x}-\tau t)} = e^{-iy.x}$

Ta thường gặp công thức này dưới hình thức sau $\delta\widehat{(x-y)} = e^{-iy.x}$.

II. Hàm Green

1. Hàm Green của toán tử Laplace

Xét phương trình Poisson 3-chiều

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ là Laplacian,

$f(\mathbf{x})$ là hàm cho trước và $u(\mathbf{x})$ là nghiệm.

Nghiệm cơ bản của Laplacian là hàm $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ thỏa phương trình với vế phải là phân bố delta $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$$\Delta G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Biến đổi Fourier suy rộng cho ta

$$-k^2 \widehat{G}(\mathbf{k}; \mathbf{y}) = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{y}}, \; k = |\mathbf{k}|$$

Biến đổi Fourier ngược cho ta

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{R^3} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3\mathbf{k}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{R^3} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{u}} d^3\mathbf{k}$$

ở đây $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad u = |\mathbf{u}|.$

Hàm dưới dấu tích phân chứa kỳ dị tại $k = 0$ nên ta đặt

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{|\mathbf{k}| \geq \varepsilon} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{u}} d^3\mathbf{k} \;, \; \varepsilon > 0$$

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{y}).$$

Ta tính tích phân này trong tọa độ cầu với trục của thành phần k_3 của $\mathbf{k}$ là vector **u:**

$$\varepsilon \le k = |\mathbf{k}| < \infty$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \phi \le 2\pi$$

Ta có

$$G_\varepsilon(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_\varepsilon^\infty dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{iku\cos\theta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 u}\int_\varepsilon^\infty dk \frac{\sin ku}{k}$$

Do đó

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi^2 u}\int_0^\infty dk \frac{\sin ku}{k}$$

Ta đã biết

$$\int_0^\infty dk \frac{\sin ku}{k} = \frac{\pi}{2} \quad (u > 0)$$

Suy ra

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi u} \quad (u > 0)$$

Hay

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Hàm $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ là một hàm khả tích địa phương nên nó xác định một phân bố chính quy.

Mệnh đề 24

Phân bố $-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ là nghiệm cơ bản của toán tử Laplace.

Chứng minh:

Ta phải chứng minh

$$< \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right), \varphi(\mathbf{x}) > = \varphi(\mathbf{y}) \ \forall\varphi \in \mathrm{D}$$

Toán tử $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ở đây được hiểu là phép đạo hàm suy rộng.

Ta có

$$< \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right), \varphi(\mathbf{x}) > = < -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \Delta\varphi(\mathbf{x}) >$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\Delta\varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

Hàm dưới dấu tích phân chứa kỳ dị tại **x** = **y** nên đây là tích phân suy rộng tại điểm đó**.** Gọi S_ε là mặt cầu tâm **y** bán kính $\varepsilon > 0$ và S là một mặt cầu đủ lớn bao quanh suppφ, S_ε và điểm **y**. Ta có:

$$< \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right), \varphi(\mathbf{x}) > = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{4\pi}\iiint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geq\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\Delta\varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

Tích phân này thực ra chỉ cần lấy trên thể tích V giới hạn bởi các mặt S và S_ε vì S bao quanh suppφ.

Cho f và g là hai hàm có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong miền V có bề mặt trơn ∂V. Định lý Green phát biểu rằng

$$\iiint_V (g\Delta h - h\Delta g) dV = \iint_{\partial V} (g\nabla h - h\nabla g).\mathbf{n} d\sigma$$

ở đây **n** là vector pháp tuyến hướng ngoài của mặt ∂V.

Hai hàm $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ và $\varphi(\mathbf{x})$ thỏa các điều kiện của Định lý Green. Để ý thêm rằng:

$\Delta\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 0, \nabla\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}$ khi $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ và $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = 0$ khi $\mathbf{x} \in$ S.

Ta có:

$$< \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right), \varphi(\mathbf{x}) > = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\nabla\varphi + \varphi\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right).\mathbf{n} d\sigma$$

Với $\mathbf{x} \in S_\varepsilon$: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = -\varepsilon\mathbf{n}$ và $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \varepsilon$. Gỉa sử $\varepsilon, \theta, \psi$ là tọa độ cầu cho S_ε, vậy $d\sigma = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\psi$ và

$$< \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right), \varphi(\mathbf{x}) > = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi(-\varepsilon\mathbf{n}.\nabla\varphi + \varphi)$$

Đánh giá tích phân của số hạng thứ nhất

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi(-\varepsilon\mathbf{n}.\nabla\varphi)\right| \le \varepsilon \max_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon}|\nabla\varphi| \to 0 \text{ khi } \varepsilon \to 0$$

Bởi vì φ là hàm liên tục trên tập compact S_ε nên

$$\min_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon} \varphi \le \varphi(\varepsilon, \theta, \psi) \le \max_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon} \varphi$$

Do đó:

$$\min_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon} \varphi \le \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi\, \varphi(\varepsilon, \theta, \psi) \le \max_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon} \varphi$$

Suy ra:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi\, \varphi(\varepsilon, \theta, \psi) \to \varphi(\mathbf{y}) \text{ khi } \varepsilon \to 0$$

Vậy

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi(-\varepsilon\mathbf{n}.\nabla\varphi + \varphi) = \varphi(\mathbf{y}).$$

2. Hàm Green của toán tử d'Alambert

Ta xét phương trình sóng

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ là toán tử Laplace

$(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$ là toán tử d'Alambert

$f(\mathbf{x}, t)$ là hàm cho trước, $u(\mathbf{x}, t)$ là nghiệm.

Hàm Green G(x;y) của toán tử d'Alambert thỏa phương trình:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(x; y) = \delta(x - y)$$

ở đây $x = (\mathbf{x}, t), y = (\mathbf{y}, t) \in R^{3+1}$.

Biến đổi Fourier suy rộng cho ta:

$$(-k^2 + \omega^2 c^{-2})\widehat{G}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{y}, \tau) = e^{-i(\mathbf{k}.\mathbf{y} - \omega\tau)}, \quad k = |\mathbf{k}|$$

Biến đổi Fourier ngược cho ta:

$$G(x; y) = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{R^3} d^3\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x} - \omega t)}\widehat{G}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{y}, \tau)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{R^3} d^3\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{(-k^2 + \omega^2 c^{-2})} e^{i[\mathbf{k}.(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \omega(t - \tau)]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-\tau)}\left(-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R^3} d^3\mathbf{k}\frac{1}{k^2 - \kappa^2} e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x} - \mathbf{y})}\right), \ \kappa = \frac{\omega}{c}$$

Đặt

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R^3} d^3\mathbf{k}\frac{1}{k^2 - \kappa^2} e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \ u = |\mathbf{u}| > 0$$

Ta tính tích phân này trong tọa độ cầu với trục của thành phần k_3 là vector $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^\pi d\theta\,\frac{k^2}{k^2-\kappa^2}\sin\theta\, e^{iku\cos\theta}$$

$$= -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\int_0^\infty dk\,\frac{k}{k^2-\kappa^2}\left(e^{iku}-e^{-iku}\right)$$

$$= -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\int_{-\infty}^\infty dk\,\frac{k}{k^2-\kappa^2}\, e^{iku}$$

Tích phân trên trục thực k này được tính bằng tích phân theo một chu tuyến đơn đóng trong mặt phẳng phức k.Ta cần hai bổ đề sau trong hàm biến phức:

Bổ đề Jordan

Gỉa sử f(z) là hàm liên tục trên nửa mặt phẳng trên $\mathrm{Im}(z) \ge 0$.

$C_R = \{Re^{i\theta}: 0 \le \theta \le \pi\}$ là nửa vòng tròn định hướng dương trong nửa mặt phẳng trên.

Nếu $\max\limits_{z\in C_R}|f(z)| = M_R \to 0$ khi $R \to \infty$ thì

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \quad (a > 0)$$

Bổ đề (Indented contour integrals)

Gỉa sử g(z) là một hàm giải tích trong đĩa mở đục lỗ $0 < |z - z_0| < R$ và z_0 là một cực đơn của g(z).

$C_r = \left\{re^{i\theta}: \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \pi\right\}$ $(0 < r < R)$ là nửa vòng tròn trong đĩa nói trên.

Khi đó:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\pm C_r} g(z)dz = \pm i\pi \mathrm{Res}(g, z_0)$$

(hình vẽ)

Hàm biến phức $g(k) = \frac{k}{k^2-\kappa^2}e^{iku}$, $k \in C$ $(u > 0)$ thỏa hai Bổ đề trên và có hai cực đơn trên trục thực $k = \mp\kappa$. Lấy tích phân của hàm g(k) theo chu tuyến như hình vẽ, sau đó cho $R \to \infty$ và $r \to 0$ ta có:

$$\mathrm{P.v}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2-\kappa^2} e^{iku} = i\pi \mathrm{Res}(g,-\kappa) + i\pi \mathrm{Res}(g,\kappa)$$

$$= \frac{i\pi}{2}\left(e^{-i\kappa u} + e^{i\kappa u}\right)$$

Suy ra

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{8\pi u}\left(e^{-i\kappa u} + e^{i\kappa u}\right)$$

và

$$G(x;y) = -\frac{1}{8\pi u}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-\tau)}\left(e^{-i\kappa u} + e^{i\kappa u}\right) \qquad \left(\kappa = \frac{\omega}{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{8\pi u}\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.v}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(e^{-i\omega(t-\tau+\frac{u}{c})} + e^{-i\omega(t-\tau-\frac{u}{c})}\right)$$

$$= -\frac{1}{8\pi u}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} d\omega\left(e^{-i\omega(t-\tau+\frac{u}{c})} + e^{-i\omega(t-\tau-\frac{u}{c})}\right)$$

$$= -\frac{1}{8\pi u}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{\sin a(t-\tau+\frac{u}{c})}{\pi(t-\tau+\frac{u}{c})} + \frac{\sin a(t-\tau-\frac{u}{c})}{\pi(t-\tau-\frac{u}{c})}\right)$$

$$= -\frac{1}{8\pi u}\left[\delta\left(t-\tau+\frac{u}{c}\right) + \delta\left(t-\tau-\frac{u}{c}\right)\right]$$

theo nghĩa hội tụ của dãy phân bố.

Hay

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{y},\tau) = -\frac{1}{8\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\left[\delta\left(t-\tau+\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right) + \delta\left(t-\tau-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)\right]$$

Tiếp theo, ta sẽ tính tích phân

$$G(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2-\kappa^2} e^{iku}$$

theo một cách khác bằng cách đặt:

$$G_+(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2-(\kappa+i\varepsilon)^2} e^{iku}$$

$$G_-(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2-(\kappa-i\varepsilon)^2} e^{iku}$$

Các hàm dưới dấu tích phân $g_{\pm}(k) = \frac{k}{k^2-(\kappa\pm i\varepsilon)^2}e^{iku}, u > 0$ thỏa các điều kiện của Bổ đề Jordan, ta chọn chu tuyến là các nửa vòng tròn trên của k- mặt phẳng phức;

(hình vẽ)

Ta được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2-(\kappa+i\varepsilon)^2}e^{iku} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g_+(k)dk = 2\pi i \mathrm{Res}(g_+, \kappa+i\varepsilon)$$

$$= \pi i e^{-\varepsilon u}e^{iku}$$

Suy ra:

$$G_+(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{i(2\pi)^2 u}\pi i e^{-\varepsilon u}e^{iku} = -\frac{e^{i\kappa u}}{4\pi u}$$

Tương tự:

$$G_-(\mathbf{x};\mathbf{y}) = -\frac{e^{-iku}}{4\pi u}$$

Suy ra:

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{y},\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-\tau)}G_{\pm}(\mathbf{x};\mathbf{y})\ ,\ \ \kappa = \frac{\omega}{c}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4\pi u}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega s}e^{\pm i\kappa u}, \quad s = t-\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi u}\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.v}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i(s\mp\frac{u}{c})\omega}$$

$$= -\frac{1}{4\pi u}\delta(s \mp \frac{u}{c})$$

$$= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta(t-\tau \mp \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})$$

Đặt:

$$G_{ret}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta(t-\tau-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})$$

$$G_{adv}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta(t-\tau+\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})$$

Để ý rằng:

$G_{ret}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \neq 0$ khi $t = \tau + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c} > \tau$: Hàm Green trễ (retarded).

$G_{adv}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \neq 0$ khi $t = \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c} < \tau$: Hàm Green sớm(advanced).