BTVN1

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 20 tháng 10 năm 2024

Problem 3.4: $\mathcal{L}y = y'' - \lambda^2 y = f(x)$. $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Giải: Phương trình thuần nhất:

$$\begin{aligned} y'' - \lambda^2 y &= 0 \\ \Rightarrow y'' &= \lambda^2 y. \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$y_1 = A\cosh(\lambda x) + B\sinh(\lambda x). \tag{1}$$
$$y_2 = A\cosh(1 - \lambda x) + B\sinh(1 - \lambda x). \tag{2}$$

Áp dụng điều kiện biên cho (1):

$$\begin{cases} y_1(0) &= A\cosh(0) + B\sinh(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \\ y_2(1) &= B\sinh(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \sinh(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 &= \sinh(x) \\ y_2 &= \sinh(1-x). \end{cases} \tag{3}$$

Wronskian của y_1 và y_2:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y1 & y2 \\ y1' & y2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sinh(x) & \sinh(1-x) \\ \cosh(x) & -\cosh(1-x) \end{vmatrix} \\ &= -\sinh(x)\cosh(1-x) - \cosh(x)\sinh(1-x) \\ &= -\sinh 1. \end{aligned}$$

$\alpha(\xi) = 1$.
Hàm Green có dạng:

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{1}{\alpha(\xi)W(\xi)}\left[\Theta(\xi - x)y_1(x)y_2(1-\xi) + \Theta(x-\xi)y_2(1-x)y_1(\xi)\right] \\ &= -\frac{1}{\sinh 1}\left[\Theta(\xi - x)\sinh(x)\sinh(1-\xi) + \Theta(x-\xi)\sinh(1-x)\sinh(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Nghiệm của $\mathcal{L}y = f$ là:

$$
\begin{aligned}
y &= \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \\
&= y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(\xi)}{\alpha W} f(\xi) d\xi + y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(\xi)}{\alpha W} f(\xi) d\xi \\
&= \sinh(1-x) \int_a^x \frac{\sinh(\xi)}{\alpha W} f(\xi) d\xi + \sinh(x) \int_x^b \frac{\sinh(1-\xi)}{\alpha W} f(\xi) d\xi \qquad (5)
\end{aligned}
$$

với $\alpha = 1, W = -\sinh 1$

Tính tích phân: $g_n(\xi) = 2\int_0^1 G(x,\xi)\sin(n\pi x)dx.$
Trong đó :

$$G = \Theta(x-\xi)\sin\xi\cos x + \Theta(\xi - x)\cos\xi\sin x - \cot 1\sin\xi\sin x,$$

thay vô $g_n(\xi)$ ta được,

$$RHS = 2\int_0^1 \left[\Theta(x-\xi)\sin\xi\cos x + \Theta(\xi - x)\cos\xi\sin x - \cot 1\sin\xi\sin x\right]\sin(n\pi x)dx$$