Hàm suy rộng
Hàm Green

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 4 tháng 11 năm 2024

Preface

Giáo trình: Applie Functional Analasis(Griffel), Introductory Functional Analasis(Kreyzig), Equations of Mathematical Physics(Vladimirov), Mathmatical Methods (David Skinner). Có thể xem qua thêm như là Boas, Arfken & Weber.

Mục lục

Chương 1

Lý thuyết Sturm-Liouville

1.1 Ma trận tự phó(tự liên hợp)(self-adjoint)

Cho hai không gian vector: V và W

$$V : dim = n$$
$$W : dim = m$$
$$M : V \to W$$
$$\Rightarrow W = M.V \Leftrightarrow w = M.v$$

trong đó M: ánh xạ tuyến tính
Notation cho tích trong(innner product): (a,b)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ai} &= (\mathbf{w}_a, M\mathbf{v}_i)\\ &= (w_a^T)^* M v_i\end{aligned}$$

Khi $m = n$ có nghĩa là $\mathbf{M}$ là ma trận vuông nxn, ta có được:

$$\lambda_i = det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Một ma trận $\mathbf{M}$ được gọi là ma trận tự phó khi và chỉ khi: liên hợp Hermit của nó là $\mathbf{M}^\dagger \equiv (\mathbf{M}^\mathbf{T})^* = \mathbf{M}$. Ta có thể định nghĩa điều này một cách gọn gàng hơn thông qua notation tích trong: với hai vector $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{v}$, khi ma trận $\mathbf{B}$ là phó của ma trận $\mathbf{A}$ nếu như:

$$(\mathbf{Bu}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Av}) \tag{1.1}$$

bởi vì $\mathbf{Bu}^\dagger = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{B}^\dagger$.

1.2 Các tính chất của ma trận tự phó

- Trị riêng của nó phải là thực.
- Các vector riêng ứng với 1 trị riêng thì trực giao với tích trong.
- Tạo thành cơ sở trực chuẩn.
- Nến định thức $\neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ma trận nghịch đảo, và các trị riêng đều khác 0.

1.3 Toán tử vi phân(Differential operators)

Toán tử vi phân tuyến tính $\mathcal{L}$, Đây chỉ là tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm với các hệ số có thể trở thành hàm của x. $\mathcal{L}$ được gọi là toán tử vi phân tuyến tính bậc p khi:

$$\mathcal{L} = A_p(x)\frac{d^p}{dx^p} + A_{p-1}(x)\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + ... + A_1(x)\frac{d}{dp} + A_0(x)$$

Khi nó đánh lên một hàm $y(x)$(trơn). Ta có $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = \mathcal{L}(c_1y_1) + \mathcal{L}(c_2y_2)$
Ta quan tâm đến phương trình bậc 2 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}y = \left[P(x)\frac{d^2}{dx^2} + R(x)\frac{d}{dx} - Q(x)\right]y \tag{1.2}$$

* Phương trình thuần nhất:

$$Ly(x) = 0 \rightarrow y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

trong đó c_i : complementary function
* Phương trình không thuần nhất:

$$Ly(x) = f(x) : y = y_c + y_p$$

trong đó: y_p là nghiệm riêng(particular function)
* Toán tử vi phân tự phó

$$\begin{aligned} Ly(x) &= \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y \\ &= \left(\frac{d}{dx}p(x)\right)\frac{dy}{dx} + \frac{d^y}{dx^2}p(x) - q(x)y \\ &= p'(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} - q(x)y \end{aligned} \tag{1.3}$$

Đặt $p'(x) = R(x) \rightarrow$ nghiệm này không tổng quát
Giả sử $P(x) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{R(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{Q(x)}{P(x)}y(x) \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{p'(x)}{p(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{q(x)}{p(x)}y(x) \tag{1.5}$$

Mối liên hệ giữa p,q và P,Q

$$\Rightarrow \begin{cases} q(x) = p(x)\dfrac{Q(x)}{P(x)} \\ \dfrac{p'(x)}{p(x)} = \dfrac{R(x)}{P(x)} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{R(x)}{P(x)}dx \Rightarrow ln(p) = \int \dfrac{R(x)}{P(x)} + C \Rightarrow p(x) = e^{\int_0^x \frac{R(t)}{P(t)}dt} \end{cases}$$

*$\mathcal{L}$ tự phó với tích trong

$$(f,g) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Điều kiện biên

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f,g) &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\vec{f}}{dx}\right) - q(x)\vec{f}\right]g(x)dx \\ &= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\bigg|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx} - q(x)f(x)^*g(x)dx \\ &= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\bigg|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\bigg|_a^b + \int_a^b f^*\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x)\right)\right]dx\end{aligned}$$

trong đó: $\displaystyle\int_a^b f^*\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x)\right)\right]dx = (f,\mathcal{L}g)$ và $\displaystyle p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\bigg|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\bigg|_a^b = A$

Để $(\mathcal{L}f,g)(f,\mathcal{L}g) \Rightarrow A = 0$

1.4 Tính chất của $\mathcal{L}$

1.4.1 Hàm riêng và hàm trọng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)y(x)$$

hàm trọng $w(x)$ là hàm trọng và phải là thực.

$$(f,g)_w \equiv \int_a^b f^*gw(x)dx$$

tại vì w là thực nên ta có tính chất:

$$(f,g)_w = (f,wg) = (wf,g)$$

Tính tuyến tính và phản tuyến tính:

$$\begin{aligned}(f;c_1g_1 + c_2g_2)_w &= c_1(f,g_1) + c_2(f,g_2) \\ (c_1f_1 + c_2f_2;g)_w &= c_1^*(f_1,g) + c_2(f_2,g)\end{aligned}$$

*Hàm riêng: trực giao với mỗi λ

$$\int_a^b Y_m^*(x)Y_n(x)wdx = \delta_{m,n}$$

*Hàm cơ sở trực giao

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_m^* f(x) w \\ &= f_m(x)\delta_{m,n} \end{aligned}$$

Ex: Giải phương trình vi phân $\mathcal{L}y(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\sum_n y_n Y_N &= \sum_n y_n \lambda_n = \sum_n y_n \lambda_n Y_n \\ &= \sum_n f_n Y_n \to y_n \frac{f_n}{\lambda_n} \end{aligned}$$

Buổi 2 : Lý thuyết Sturm–Liouville(continue)

$*$Giải phương trình ma trận $Mu = \vec{f} \Rightarrow M^{-1}Mu = M^{-1}\vec{f} \Rightarrow u = M^{-1}\vec{f}$

$*$Toán tử của phương trình không thuần nhất:

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

$\mathcal{L}$: Toán tử vi phân tuyến tính.

Ta không giản được phương trình trên như ma trận bằng cách tìm hàm riêng trị riêng.

Cách 1: Giải phương trình vi phân thuần nhất

$$\mathcal{L}y(x) = 0.$$

Giải phương trình trên tìm ra được $y_{com} \to y(x) = y_{com} + y_p$

Cách 2:

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

$\mathcal{L}$ là tự phó với tích trong $(f, g) = \displaystyle\int f^*(x)g(x)dx$

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g)\,.$$

Bước 1: Tìm hàm riêng trị riêng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)g(x),$$

và đồng thời thay $\mathcal{L}y \to \dfrac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}(\dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}})$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda w(x)\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}} = \sqrt{w(x)}\lambda\tilde{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda\tilde{y}.$$

Tích trong của hàm trọng

$$\begin{cases} (f, g)_w &= \int f^* g w(x) dx = (f, gw) = (wf, g). \\ (f, f)_w &= 0 \to f = 0; w \neq 0. \end{cases}$$

Tính chất của toán tử Sturm-Liouville

Nếu:

$$\mathcal{L}y_i = \lambda w y_i(x), \begin{cases} \lambda: \text{ thực.} \\ \left(y_i, y_j\right)_w = 0 \text{ khi } \lambda_i \neq \lambda_j. \end{cases}$$

Và

$$Y_i = \frac{y_i}{(\sqrt{y_i y_i})_w},$$

là tập các hàm riêng trực giao và tuyến tính $\rightarrow$ đầy đủ.

Bước 2$*$:

$$f(x) = \sum_i f_i Y_i(x)$$
$$f_i = (Y_i f(x))_w$$

Bước 2:

$$\mathcal{L}\phi(x) = w(x)F(x)$$
$$\begin{cases} \phi(x) &= \sum_i \phi_i Y_i(x) \\ F(x) &= \sum_i F_i Y_i(x) \end{cases}$$

Bước 3:

$$\Rightarrow \mathcal{L}\sum_i \phi_i Y_i(x) = w\sum_i F_i Y_i(x)$$
$$\rightarrow \sum_i \underbrace{\phi_i \mathcal{L} Y_i(x)}_{\lambda_i w(x) Y_i(x)} = \sum_i F_i w(x) Y_i(x)$$
$$\rightarrow \sum_i \left(\phi_i\lambda_i - F_i\right) w(x) Y_i(x) = 0 \rightarrow \phi = \frac{F_i}{\lambda_i}$$

$$\phi_p(x) = \sum_i \frac{F_i}{\lambda_i} Y_i(x) \text{ nghiệm đặc biệt,}$$

nghiệm tổng quát cho ϕ:

$$\phi = \phi_c(c) + \phi_p(x) \text{ đây chính là nghiệm cho phương trình } \mathcal{L}\phi_i = 0.$$

Nghiệm đặc biệt

$$\begin{aligned}
\phi_p(x) &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i}\big(Y_i(t), F(t)\big)_w Y_i(x) \\
&= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x)\int_a^b Y_i^*(t)F(t)w(x)dt \\
&= \int_a^b \left[\sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) Y_i^*(t)\right] w(t)F(t)dt \\
&= \int_a^b G(x,t)f(t)dt
\end{aligned}$$

trong đó: G là hàm Green (với 2 biến $\neq$ nhau: x và t và chia cho trị riêng).

$f(t)$: ngoại lực $\begin{cases} \text{Bài toán dao động.} \\ \text{Forcing function.} \end{cases}$

Hàm Green cho nghịch đảo hình thức.

1.5 Đồng nhất thức Parseval

$$
\begin{aligned}
(F, F)_w &= \int \sum_i F_i^* Y_i \sum_j F_j Y_j w dx \\
&= \sum_{i,j} F_i^* F_j \underbrace{(Y_i, Y_j)_w}_{\delta_{i,j}} = \sum_i |F_i|^2
\end{aligned}
$$

1.6 Một số ví dụ

Toán tử đạo hàm bậc 2

Cho trước $\mathcal{L} = \dfrac{d^2}{dx^2}b$, hàm riêng cho phương trình là:

$$\mathcal{L}y(x) = -\lambda y(x)$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{cases} y(L) = y(-L), \\ y'(L) = y'(-L). \end{cases}$$

Với $\lambda < 0$ nghiệm thỏa điều kiện biên là nghiệm tầm thường với $y(x) = 0$. Với $\lambda \geq 0$, nghiệm thỏa điều kiện biên là

$$y_n(x) = \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{với} \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}(n \in \mathbb{Z}).$$

Chương 2

Hàm suy rộng

2.1 Hàm suy rộng và phân bố

Định nghĩa hàm thử:
Lớp các hàm thử, chọn miền $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nằm trong khôg gian có $Dim = n$. Hàm thử là các hàm trơn vô hạn $\phi =\in C^{\infty}(\Omega)$ mà tồn tại một tập compact support nằm trong (Ω). Tồn tại một tập compact $K \subset \Omega$ mà làm cho $\phi(x) = 0$, khi $x \notin K$. Một ví dụ đơn giản cho hàm thử một chiều là:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(1-x)^2}}; & \text{khi } |x| < 1 \\ 0 & \end{cases}$$

Gọi $\mathcal{D}(\Omega)$ là không gian các hàm thử. Sau khi đã chọn lớp các hàm thử, ta định nghĩa một phân bố T là một ánh xạ tuyến tính:

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\phi \to T[\phi]$$

Tập hợp các $T \to$ không gian các phân bố $\to$ không gian hàm thử $\mathcal{D}'(\Omega)$

2.2 Bài tập

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda x,$$

với $\mathcal{L}$ là toán tử tuyến tính đạo hàm bậc 2, có dạng là

$$\mathcal{L}(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)$$

$\mathcal{L}$ được gọi là tự phó khi và chỉ khi

$$p_0'(x) = p_1(x),$$

ta có thể viết lại $\mathcal{L}$ thành

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d}{dx}\left[p_0(x)\frac{d}{dx}\right] + p_2(x)$$

2.2.1 Prob 3.3 D.Skinner

$$\ddot{\theta}(t) + 2p\dot{\theta} + (p^2 + q^2)\theta(t) = f(t),$$

Chương 3

Hàm Green cho phương trình đạo hàm riêng thuần nhất

$$\mathcal{L}y = \alpha(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \beta(x)\frac{dy}{dx}\gamma(x) = f(x), \tag{3.1}$$

với α, β, γ là những hàm liên tục trên $[a, b]$, và α là $non - zero$. Định nghĩa hàm Green $G(x; \xi)$ của $\mathcal{L}$ để là nghiệm đặc biệt

$$\mathcal{L}G = \delta(x - \xi) \tag{3.2}$$

thỏa điều kiện biên thuần nhất $G(a; \xi) = G(b; \xi) = 0$.

Tầm quan trọng của Hàm Green đó là đưa ra nghiệm $G(x; \xi)$ của phương trình (3.2), chúng ta có thể lập tức giải được một vấn đề tổng quá hơn $\mathcal{L}y(x) = f(x)$ của (3.1) với thành phần lực $f(x)$ bất kì bằng cách viết

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi. \tag{3.3}$$

Để kiểm chứng điều đó, chúng ta dùng toán tử $\mathcal{L}$ tác dụng lên $y(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}y(x) = \mathcal{L}\left[\int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi\right] &= \int_a^b \left[\mathcal{L}G(x, \xi)\right] f(\xi)d\xi \\ &= \int_a^b \delta(x - \xi)f(\xi)d\xi = f(x),\end{aligned} \tag{3.4}$$

hàm Green lúc này chỉ phụ thuộc vào x.

3.1 Xây dựng hàm Green

Việc xây dựng hàm Green dựa vào $x \neq \xi$, $\mathcal{L}G = 0$. Do đó, cả $x < \xi$ và $x > \xi$ đều có thể viết G dưới dạng là nghiệm của phương trình thuật nhất. Giả sử $\{y_1, y_2\}$ là cơ sở độc lập tuyến tính của $\mathcal{L}y = 0$ trên $[a, b]$.

$$\begin{cases} a < x < \xi : y_1(a) = 0 \to G(x,\xi) = A(\xi)y_1(x). \\ \xi < x < b : y_2(b) = 0 \to G(x,\xi) = B(\xi)y_2(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

Tại $x = \xi$, ta lấy tích phân hai vế của (3.2) trong vùng lân cận theo ξ, ta có:

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \left[\alpha(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}dx + \beta(x)\frac{\partial G}{\partial x} + \gamma(x)G \right] = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \delta(x-\xi)d\xi = 1. \tag{3.6}$$

Ta đã biết $G(x,\xi)$ là liên tục, vậy nên số hạng cuối cùng của LHS đóng góp bằng *không* nếu như ta lấy tích phân trong vùng cực nhỏ. Vì G là liên tục nên $\partial_x G$ là hàm có bước nhảy tại $x = \xi$,vì thế cũng cho đóng góp bằng *không* khi lấy tích phân trong vùng cực kì nhỏ. Cuối cùng ta còn lại:

$$\lim_{\xi \longrightarrow 0^+} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \alpha(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}dx = \alpha(x)\left[\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\epsilon^+} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\epsilon^-} \right]. \tag{3.7}$$

Nhờ tính liên tục nên ta có các điều kiện

$$\begin{cases} \left.G(x,\xi)\right|_{x=\xi^-} & = \left.G(x,\xi)\right|_{x=\xi^+}, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\epsilon^+} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\epsilon^-} & = \dfrac{1}{\alpha(\xi)} \end{cases} \tag{3.8}$$

So sánh với (3.5) các điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} A(\xi)y_1(\xi) = B(\xi)y_2(\xi), \\ A(\xi)y_1'(\xi) - B(\xi)y_2'(\xi) = \dfrac{1}{\alpha(\xi)}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ta tìm được các hệ phương trình tuyến tính cho A, B là:

$$\begin{cases} A(\xi) & = \dfrac{y_2(\xi)}{\alpha(\xi)\left[y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)\right]} \\ B(\xi) & = \dfrac{y_1(\xi)}{\alpha(\xi)\left[y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)\right]} \end{cases} \tag{3.10}$$

với

$$y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi) = W(x), \tag{3.11}$$

gọi là $Wronskian$ của y_1, y_2. $Wronskian$ được tính tại $x = \xi$ và $W \neq 0$.

Vậy hàm Green của $\mathcal{L}G = \delta(x-\xi)$ thỏa $G(\alpha,\xi) = G(\beta,\xi) = 0$ có dạng là:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{\alpha(\xi)W(\xi)} & a \le x < \xi, \\ \dfrac{y_2(x)y_1(\xi)}{\alpha(\xi)W(\xi)} & \xi < x \le b. \end{cases} \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{\alpha(\xi)W(\xi)}\left[\Theta(\xi - x)y_1(x)y_2(\xi) + \Theta(x-\xi)y_1(\xi)y_2(x)\right], \tag{3.13}$$

với Θ là hàm Heaviside. Dẫn đến nghiệm của $\mathcal{L}y = f$ là

$$\begin{aligned} by(x) &= \int_a^b G(x;\xi)f(\xi)d\xi \\ &= y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(\xi)}{\alpha(\xi)W(\xi)}f(\xi)d\xi + y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(\xi)}{\alpha(\xi)W(\xi)}f(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2 Hàm Green với điều kiện biên không thuần nhất

Sự xây dựng hàm Green của chúng ta cho bài toán ngoại lực dựa trên hàm Green tuân theo điều kiện không thuần nhất. Để giải quyết các bài toán điều kiện biên không thuần nhất bằng phương pháp hàm Green, chúng ta phải làm theo các bước nhất định.

Đầu tiên, tìm *bất cứ* nghiệm riêng $y_p(x)$ với phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y = 0$ mà thỏa được điều kiện biên không thuần nhất. Khi toán tử vi phân tuyến tính $\mathcal{L}$ là tuyến tính, nghiệm tổng quát cho phương trình $\mathcal{L}y = f$ tuân theo điều kiện biên không thuần nhất chỉ đơn giản là:

$$y(x) = y_p(x) + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{3.15}$$

Ta đã có hàm Green cho bài toán điều kiên biên thuần nhất là (3.13). Bên cạnh đó, ta đã biết được hàm Green cho toán tử tự phó có thể được viết thành

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} Y_n(x) Y_n^*(\xi), \tag{3.16}$$

dưới dạng của các hàm riêng $\{Y_n(x)\}$ và trị riêng λ_n của toán tử Sturm-Liouville.

Lấy ví dụ cho bài toán $\mathcal{L}y = -y'' - y$ trên $[a,b] = [0,1]$ và điều kiện biên $y(0) = y(1) = 0$ (Xem trong sách).

3.3 Bài tập trong Arfken & Weber

10.1.1/p456

Chứng minh rằng:

$$G(x,t) = \begin{cases} x, & 0 \le x < t, \\ t, & t < x \le 1, \end{cases}$$

là hàm Green cho toán tử $\mathcal{L} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, và điều kiện biên $y(0) = 0, y'(1) = 0$.

Giải:
Ta có $\mathcal{L}y = -\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y''$. Ta đi giải phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y = 0$.
Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y = 0$ là:

$$y^2 = 0$$

Nghiệm tổng quát cho $\mathcal{L}y = 0$ là:

$$\begin{aligned} y_1 &= (A + Bx). \\ y_2 &= A + B(1-x). \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{aligned} &y_1(0) = A + Bx = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow y_1(x) = x, \\ &{y_2}'(1) = B = 0 \rightarrow y_2(x) = 1. \end{aligned}$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -1.$$

Hàm Green cho $\mathcal{L}y = 0$:

$$G(x,\xi) = \Theta(\xi - x) y_1(x) y_2(\xi) + \Theta(x - \xi) y_2(x) y_1(\xi) (DPCM)$$

10.1.2

Tìm hàm Green cho

(a) $\mathcal{L}y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x), \quad \begin{cases} y(0) &= 0, \\ y'(1) &= 0. \end{cases}$

(b) $\mathcal{L}y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x), \quad y(x)$ hữu hạn khi $-\infty < x < \infty$

Giải

(a) Ta đi giải phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y(x) = 0$.
Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$ là:

$$y^2 + 1 = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$\begin{aligned} y_1 &= A\cos x + B\sin x, \\ y_2 &= A\cos(1-x) + B\sin(1-x). \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 = A\cos 0 + B\sin 0 \to A = 0 \to y_1(x) = \sin x, \\ y_2'(1) &= 0 = A\sin 0 - B\cos 0 \to B = 0 \to y_2(x) = \cos(1-x). \end{aligned}$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos(1-x) \\ \cos x & \sin(1-x) \end{vmatrix} \\ &= \sin x \sin(1-x) - \cos x \cos(1-x) \\ &= -\cos 1 = W. \end{aligned}$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}y$ với $\alpha = 1$ và $W = -\cos 1$:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{\cos 1}\left[\Theta(\xi - x)\sin x\cos(1-\xi) + \Theta(x-\xi)\cos(1-x)\sin\xi\right].$$

(b) Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$:

$$y^2 - 1 = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= Ae^x + Be^{-x}, \\ y_2(x) &= Ae^{x-1} + Be^{1-x}. \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{aligned} y_1(x \to -\infty) &\to B = 0 \to y_1(x) = e^x, \\ y_2(x \to +\infty) &\to A = 0 \to y_2(x) = e^{1-x}. \end{aligned}$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{1-x} \\ e^x & -e^{1-x} \end{vmatrix}$$
$$= -e^x e^{1-x} - e^x e^{1-x}$$
$$= -2e^x e^{1-x} = W.$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}y$ với $\alpha = 1$ và $W = -2e^x e^{1-x}$:

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= -\frac{1}{2e^x e^{1-x}} \left[\Theta(\xi - x) e^x e^{1-\xi} + \Theta(x-\xi) e^{\xi} e^{1-x} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\Theta(\xi - x) e^{x-\xi} + \Theta(x-\xi) e^{\xi - x} \right]. \end{aligned}$$

10.1.4/p.457

Tìm hàm Green cho phương trình sau:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{4} = f(x),$$

với điều kiện biên là $y(0) = y(\pi) = 0$.

Giải:

Ta đi giải phương trình thuần nhất cho $\mathcal{L}y(x) = -\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{y}{4} = 0$. Phương trình đăcj trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$:

$$-y^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$y_1(x) = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2},$$
$$y_2(x) = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}.$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$y_1(0) = A\cos 0 + B\sin 0 \to A = 0 \to y_1(x) = \sin\frac{x}{2},$$
$$y_2(\pi) = A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2} = 0 \to B = 0 \to y_2(x) = \cos\frac{x}{2}.$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$\begin{aligned} W = y_1y_2' - y_2y_1' &= -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}$ với $\alpha = -1$ và $W = -\dfrac{1}{2}$:

$$G(x,\xi) = 2\left[\Theta(\xi - x)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\xi}{2} + \Theta(x-\xi)\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{x}{2} \right]$$

10.1.5/p.457**

Tìm hàm Green cho:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(k^2x^2-1\right)y=0,$$

với điều kiện biên $\begin{cases} y(0) &= 0, \\ y(1) &= 1. \end{cases}$

Giải:

Ta có toán tử Sturm-Liouville tác động lên hàm Green:

$$\mathcal{L}G=\delta(x-\xi),$$

với $x\neq\xi$:

$$\mathcal{L}G=0.$$

Ta đi giải phương trình thuần nhất cho $\mathcal{L}y=0$, nghiệm tổng quát cho phương trình này là (Eq 16.5/p.594 Boas):

$$\begin{cases} y_1 &= AJ_1(kx)+BN_1(kx)\to y_1(0)=0\to BN_1(0)=0\to B=0 \\ y_2 &= CJ_1(kx)+DN_1(kx)\to y_2(1)=0\to CJ_1(k)+DN_1(k)=0\to C=\dfrac{DN_1(k)}{J_1(k)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1 &= J_1(kx) \\ y_2 &= N_1(k)J_1(kx)-J_1(k)N_1(kx) \end{cases}$$

Hàm Green sẽ có dạng, với $\alpha\Big|_{x=\xi}$

$$\begin{cases} G(x,\xi)=A(\xi)J_1(kx) & ,x<\xi \\ G(x,\xi)=B(\xi)\left[N_1(k)J_1(kx)-J_1(k)N_1(kx)\right] & ,x>\xi \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} G(\xi^-,\xi)=G(\xi^+,\xi) \\ \xi^2\left[G(\xi^+,\xi)-G(\xi^-,\xi)\right]=1 \end{cases}$$

$Wronskian$ cho y_1,y_2 là:

$$W=y_1y_2'-y_2y_1'=J_1(k)\left[-J_1(kx)N_1'(kx)+N_1(kx)J_1'(kx)\right]$$

Vậy hàm Green có dạng là

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{N_1(k)J_1(k\xi)-J_1(k)N_1(k\xi)}{\alpha W}J_1(kx) & ,0<x<\xi \\ J_1(k\xi)\dfrac{N_1(k)J_1(kx)-J_1(\xi)N_1(kx)}{\alpha W} & ,\xi<x<1 \end{cases}$$

10.1.6/p.457

$$\mathcal{L} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$$

Giải:
Với $x \neq \xi : \mathcal{L}G = 0$ Ta đi giải phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y = 0$, nghiệm tổng quát là

$$y = AP_0(x) + \underbrace{BQ_0(x)}_{\text{phân kì tại } x=\pm 1}.$$

Điều kiện hữu hạn

$$G(\pm 1, \xi) \to finite$$

ta có hai nghiệm động lập tuyến tính nhưng chỉ có 1 một nghiệm là thỏa điều kiện hữu hạn đó là $AP_0(x)$ (Ex p.566 Boas).

10.1.7/p.457

Tìm hàm Green cho

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt} = f(t),$$

với điều kiện đầu là $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, giải phương trình này với $t > 0$ và $f(t) = \exp(-t)$ là cho trước.

Giải:
Ta đi giải phương trình thuần nhất cho $\mathcal{L}\psi = 0$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

(a) với $k > 0$

$$y = A\cos\left(\sqrt{k}t\right) + B\sin\left(\sqrt{k}t\right)$$

vậy nên hàm Green là $G(t,\tau) = 0$.
Với $t > \tau$: Hàm Green có dạng

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= Cy_1(t-\tau) + Dy_2(t-\tau) \\ &= C\cos\left(\sqrt{k}t\right) + D\sin\left(\sqrt{k}t\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

tại $t = \tau = 0$, ta áp dụng điều kiện biên. Khi $G = 0$, $t < \tau$ ta có:

$$\begin{cases} G(t,\tau) & = C\cos\left(\sqrt{k}t\right) + D\sin\left(\sqrt{k}t\right) = 0 \to C = 0 \\ G'(t,\tau) & = \dfrac{1}{\alpha} \to \sqrt{k}D\cos 0 = 1 \to D = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(t-\tau) \qquad (t>0)$$

Ta có được nghiệm là:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

(b) với $k<0$

Ta được nghiệm là:

$$y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Tại $t<\tau$, áp dụng điều kiện biên:

$$\psi(0) = Ae^{k0} + Be^{-k0} = 0 \to A = -B$$
$$\psi'(0) = Ake^{k0} + Ake^{-k0} = 0 \to A = 0$$

tại $t=\tau$ ta áp dụng điều kiện biên. Khi $G=0$, $t<\tau$ ta có:

$$\psi(0) = Ae^{k0} + Be^{-k0} = 0 \to A = -B$$
$$\psi'(0) = Ake^{k0} + Ake^{-k0} = \frac{1}{\alpha} \to A = \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow G(t,\tau) = \frac{1}{2k}e^{kt}$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2k}\int_0^t e^{kt}f(\tau)d\tau$$

10.1.8/p.457

Chứng minh hàm Green sau

$$G(x,x') = -\frac{i}{2k}\exp\Big(ik\big|x-x'\big|\Big)$$

là nghiệm của phương trình

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)\psi(x) = g(x)$$

Giải:

Ta đi giải phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y=0$

$$r^2+k^2=0,$$

với $\Delta = b^2 - 4ac = -4k^2 < 0$. Nên có nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx},\\ \psi_2(x) &= Ae^{ik(1-x)} + Be^{-ik(x-1)}.\end{aligned}$$

Áp dụng điều kiên biên:

$$\psi_1(x \to -\infty) \to B = 0 \to \psi_1(x) = e^{ikx}$$
$$\psi_2(x \to \infty) \to A = 0 \to \psi_2(x) = e^{-ikx}$$

$Wronskian$ cho $\psi_1(x), \psi_2(x)$

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 2ik$$

Hàm Green cho $\mathcal{L}y$ là:

$$\begin{aligned}G(x,\xi) &= -\frac{1}{\alpha(\xi)W(\xi)}\left[\Theta(\xi - x)y_1(x)y_2(\xi) + \Theta(x-\xi)y_1(\xi)y_2(x)\right]\\ &= \frac{1}{2ik}\left[\Theta(\xi - x)e^{ikx}e^{-ik\xi} + \Theta(x-\xi)e^{ik\xi}e^{-ikx}\right].\end{aligned}$$

Đạo hàm bậc 1 của hàm Green

$$G' = \begin{cases}\frac{1}{2}e^{-ik(x-\xi)}, & x < \xi\\ \frac{1}{2}e^{ik(x-\xi)}, & x > \xi\end{cases}$$

đạo hàm bậc 2 có dạng là

$$G'' = \begin{cases}\frac{ik}{2}e^{-ik(x-\xi)} + \delta(x-\xi),\\ \frac{ik}{2}e^{ik(x-\xi)} + \delta(x-\xi).\end{cases}$$

$$\Rightarrow G'' + k^2 G = \delta(x-\xi).$$

10.1.10/p.458

Từ khai triển hàm riêng của hàm Green chứng minh

(a) $\displaystyle \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2} = \begin{cases}x(1-t), & 0 \le x < t,\\ t(1-x), & t < x \le 1,\end{cases}$

(b) $\displaystyle \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{(n+\frac{1}{2})^2} = \begin{cases}x, & 0 \le x < t,\\ t, & t < x \le 1,\end{cases}$

Giải

(a) Khai triển hàm Green như chuỗi Fourier sin, ta có

$$G(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin n\pi x.$$

Hệ số Fourier được cho bởi

$$g_n(t) = 2\left[\int_0^t x(1-t)\sin n\pi x dx + \int_t^1 t(1-x)\sin n\pi x dx\right],$$

tích phân từng phần ta giải được

$$g_n(t) = 2\left[(1-t)\left(-\frac{t}{n\pi}\cos n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t\right) + t\left(\frac{1-t}{n\pi}\cos n\pi t - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t\right)\right]$$
$$= 2\frac{\sin n\pi t}{n^2\pi^2}$$

Thay vào hàm Green ta được

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2}$$

(b) Khai triển hàm Green như chuỗi Fourier cos, ta có

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \cos n\pi x.$$

Hệ số Fourier được cho bởi

$$\begin{aligned} g_n(t) &= 2\left[\int_0^t x\cos n\pi x dx + \int_t^1 t\cos n\pi x dx\right] \\ &= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t + \frac{\cos n\pi t - 1}{(n\pi)^2} - \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right] \\ &= 2\frac{\cos n\pi t - 1}{(n\pi)^2} \end{aligned}$$

Thay vô hàm Green ta được,

$$G(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi t - 1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$

khi xét giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n\pi)^2} \to 0$$

Nên hàm Green sẽ có dạng là

$$G(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$