# Hàm suy rộng
# Hàm Green

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

# Preface

Giáo trình: Applie Functional Analasis(Griffel), Introductory Functional Analasis(Kreyzig), Equations of Mathematical Physics(Vladimirov), Mathmatical Methods (David Skinner). Có thể xem qua thêm như là Boas, Arfken & Weber.

# Mục lục

# Chương 1

# Lý thuyết Sturm-Liouville

## 1.1 Ma trận tự phó(tự liên hợp)(self-adjoint)

Cho hai không gian vector: $V$ và $W$

$$\begin{aligned} V &: dim = n \\ W &: dim = m \\ M &: V \to W \\ \Rightarrow W = M.V &\Leftrightarrow w = M.v \end{aligned}$$

trong đó M: ánh xạ tuyến tính
Notation cho tích trong(innner product): (a,b)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ai} &= (\mathbf{w}_a, M\mathbf{v}_i) \\ &= (w_a^T)^* M v_i \end{aligned}$$

Khi $m = n$ có nghĩa là $\mathbf{M}$ là ma trận vuông $nxn$, ta có được:

$$\lambda_i = det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Một ma trận $\mathbf{M}$ được gọi là ma trận tự phó khi và chỉ khi: liên hợp Hermit của nó là $\mathbf{M}^\dagger \equiv (\mathbf{M}^\mathbf{T})^* = \mathbf{M}$. Ta có thể định nghĩa điều này một cách gọn gàng hơn thông qua notation tích trong: với hai vector $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{v}$, khi ma trận $\mathbf{B}$ là phó của ma trận $\mathbf{A}$ nếu như:

$$(\mathbf{Bu}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Av}) \tag{1.1}$$

bởi vì $\mathbf{Bu}^\dagger = \mathbf{u}^\dagger\mathbf{B}^\dagger$.

## 1.2 Các tính chất của ma trận tự phó

- Trị riêng của nó phải là thực.
- Các vector riêng ứng với 1 trị riêng thì trực giao với tích trong.
- Tạo thành cơ sở trực chuẩn.
- Nến định thức $\neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ma trận nghịch đảo, và các trị riêng đều khác 0.

## 1.3 Toán tử vi phân(Differential operators)

Toán tử vi phân tuyến tính $\mathcal{L}$, Đây chỉ là tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm với các hệ số có thể trở thành hàm của $x$. $\mathcal{L}$ được gọi là toán tử vi phân tuyến tính bậc $p$ khi:

$$\mathcal{L} = A_p(x)\frac{d^p}{dx^p} + A_{p-1}(x)\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + ... + A_1(x)\frac{d}{dp} + A_0(x)$$

Khi nó đánh lên một hàm $y(x)$(trơn). Ta có $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = \mathcal{L}(c_1y_1) + \mathcal{L}(c_2y_2)$
Ta quan tâm đến phương trình bậc 2 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}y = \left[P(x)\frac{d^2}{dx^2} + R(x)\frac{d}{dx} - Q(x)\right]y \tag{1.2}$$

* Phương trình thuần nhất:

$$Ly(x) = 0 \to y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

trong đó $c_i$ : complementary function
* Phương trình không thuần nhất:

$$Ly(x) = f(x) : y = y_c + y_p$$

trong đó: $y_p$ là nghiệm riêng(particular function)
* Toán tử vi phân tự phó

$$\begin{aligned}
Ly(x) &= \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y \\
&= \left(\frac{d}{dx}p(x)\right)\frac{dy}{dx} + \frac{d^y}{dx^2}p(x) - q(x)y \\
&= p'(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} - q(x)y \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Đặt $p'(x) = R(x) \to$ nghiệm này không tổng quát
Giả sử $P(x) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{R(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{Q(x)}{P(x)}y(x) \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{p'(x)}{p(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{q(x)}{p(x)}y(x) \tag{1.5}$$

Mối liên hệ giữa p,q và P,Q

$$\Rightarrow \begin{cases} q(x) = p(x)\dfrac{Q(x)}{P(x)} \\ \dfrac{p'(x)}{p(x)} = \dfrac{R(x)}{P(x)} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dp}{p} = \int \frac{R(x)}{P(x)}dx \Rightarrow ln(p) = \int \frac{R(x)}{P(x)} + C \Rightarrow p(x) = e^{\int_0^x \frac{R(t)}{P(t)}dt} \end{cases}$$

*$\mathcal{L}$ tự phó với tích trong

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Điều kiện biên

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}f, g) &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx}\left( p(x)\frac{d\vec{f}}{dx} \right) - q(x)\vec{f} \right] g(x)dx \\
&= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\bigg|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx} - q(x)f(x)^*g(x)dx \\
&= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\bigg|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\bigg|_a^b + \int_a^b f^*\left[ \frac{d}{dx}\left( p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x) \right) \right] dx
\end{aligned}
$$

trong đó: $\int_a^b f^*\left[ \frac{d}{dx}\left( p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x) \right) \right] dx = (f, \mathcal{L}g)$ và $p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\Big|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\Big|_a^b = A$

Để $(\mathcal{L}f, g)(f, \mathcal{L}g) \Rightarrow A = 0$

## 1.4 Tính chất của $\mathcal{L}$

### 1.4.1 Hàm riêng và hàm trọng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)y(x)$$

hàm trọng $w(x)$ là hàm trọng và phải là thực.

$$(f, g)_w \equiv \int_a^b f^*gw(x)dx$$

tại vì $w$ là thực nên ta có tính chất:

$$(f, g)_w = (f, wg) = (wf, g)$$

Tính tuyến tính và phản tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
(f; c_1g_1 + c_2g_2)_w = c_1(f, g_1) + c_2(f, g_2) \\
(c_1f_1 + c_2f_2; g)_w = c_1^*(f_1, g) + c_2(f_2, g)
\end{aligned}
$$

*Hàm riêng: trực giao với mỗi $\lambda$

$$\int_a^b Y_m^*(x)Y_n(x)wdx = \delta_{m,n}$$

*Hàm cơ sở trực giao

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_nY_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_m^*f(x)w \\
&= f_m(x)\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

Ex: Giải phương trình vi phân $\mathcal{L}y(x) = f(x)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\sum_n y_nY_N = \sum_n y_n\lambda_n &= \sum_n y_n\lambda_nY_n \\
&= \sum_n f_nY_n \to y_n\frac{f_n}{\lambda_n}
\end{aligned}
$$

Buổi 2 : Lý thuyết Sturm–Liouville(continue)

$*$Giải phương trình ma trận $Mu = \vec{f} \Rightarrow M^{-1}Mu = M^{-1}\vec{f} \Rightarrow u = M^{-1}\vec{f}$

$*$Toán tử của phương trình không thuần nhất:

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

$\mathcal{L}$ : Toán tử vi phân tuyến tính.

Ta không giản được phương trình trên như ma trận bằng cách tìm hàm riêng trị riêng.

**Cách 1: Giải phương trình vi phân thuần nhất**

$$\mathcal{L}y(x) = 0.$$

Giải phương trình trên tìm ra được $y_{com} \rightarrow y(x) = y_{com} + y_p$

**Cách 2:**

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

$\mathcal{L}$ là tự phó với tích trong $(f,g) = \int f^*(x)g(x)dx$

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g)\,.$$

**Bước 1: Tìm hàm riêng trị riêng**

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)g(x),$$

và đồng thời thay $\mathcal{L}y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}})$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda w(x)\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}} = \sqrt{w(x)}\lambda\tilde{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda\tilde{y}.$$

***Tích trong của hàm trọng***

$$\begin{cases} (f,g)_w &= \int f^*gw(x)dx = (f,gw) = (wf,g). \\ (f,f)_w &= 0 \rightarrow f = 0; w \neq 0. \end{cases}$$

***Tính chất của toán tử Sturm-Liouville***

Nếu:

$$\mathcal{L}y_i = \lambda w y_i(x), \begin{cases} \lambda: \text{ thực.} \\ \left(y_i, y_j\right)_w = 0 \text{ khi } \lambda_i \neq \lambda_j. \end{cases}$$

Và

$$Y_i = \frac{y_i}{(\sqrt{y_i y_i})_w},$$

là tập các hàm riêng trực giao và tuyến tính $\rightarrow$ đầy đủ.

**Bước 2∗:**

$$f(x) = \sum_i f_i Y_i(x)$$
$$f_i = (Y_i f(x))_w$$

**Bước 2:**

$$\mathcal{L}\phi(x) = w(x)F(x)$$
$$\begin{cases} \phi(x) &= \sum_i \phi_i Y_i(x) \\ F(x) &= \sum_i F_i Y_i(x) \end{cases}$$

**Bước 3:**

$$\Rightarrow \mathcal{L}\sum_i \phi_i Y_i(x) = w\sum_i F_i Y_i(x)$$
$$\to \sum_i \underbrace{\phi_i \mathcal{L} Y_i(x)}_{\lambda_i w(x) Y_i(x)} = \sum_i F_i w(x) Y_i(x)$$
$$\to \sum_i (\phi_i \lambda_i - F_i)\, w(x) Y_i(x) = 0 \to \phi = \frac{F_i}{\lambda_i}$$

$$\phi_p(x) = \sum_i \frac{F_i}{\lambda_i} Y_i(x) \text{ nghiệm đặc biệt,}$$

nghiệm tổng quát cho $\phi$:

$$\phi = \phi_c(c) + \phi_p(x) \text{ đây chính là nghiệm cho phương trình } \mathcal{L}\phi_i = 0.$$

**Nghiệm đặc biệt**

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i}\big(Y_i(t), F(t)\big)_w Y_i(x) \\ &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) \int_a^b Y_i^*(t) F(t) w(x) dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) Y_i^*(t)\right] w(t) F(t) dt \\ &= \int_a^b G(x,t) f(t) dt \end{aligned}$$

trong đó: $G$ là hàm Green (với 2 biến $\neq$ nhau: $x$ và $t$ và chia cho trị riêng).

f(t): ngoại lực $\begin{cases} \text{Bài toán dao động.} \\ \text{Forcing function.} \end{cases}$

Hàm Green cho nghịch đảo hình thức.

## 1.5 Đồng nhất thức Parseval

$$
\begin{aligned}
(F, F)_w &= \int \sum_i F_i^* Y_i \sum_j F_j Y_j w dx \\
&= \sum_{i,j} F_i^* F_j \underbrace{(Y_i, Y_j)_w}_{\delta_{i,j}} = \sum_i |F_i|^2
\end{aligned}
$$