Hàm suy rộng
Hàm Green

TRẦN KHÔI NGUYÊN
VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 26 tháng 10 năm 2024

Preface

Giáo trình: Applie Functional Analasis(Griffel), Introductory Functional Analasis(Kreyzig), Equations of Mathematical Physics(Vladimirov), Mathmatical Methods (David Skinner). Có thể xem qua thêm như là Boas, Arfken & Weber.

Mục lục

Chương 1

Lý thuyết Sturm-Liouville

1.1 Ma trận tự phó(tự liên hợp)(self-adjoint)

Cho hai không gian vector: V và W

$$\begin{aligned} V &: dim = n \\ W &: dim = m \\ M &: V \to W \\ \Rightarrow W = M.V &\Leftrightarrow w = M.v \end{aligned}$$

trong đó M: ánh xạ tuyến tính
Notation cho tích trong(innner product): (a,b)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ai} &= (\mathbf{w}_a, M\mathbf{v}_i) \\ &= (w_a^T)^* M v_i \end{aligned}$$

Khi $m = n$ có nghĩa là $\mathbf{M}$ là ma trận vuông nxn, ta có được:

$$\lambda_i = det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Một ma trận $\mathbf{M}$ được gọi là ma trận tự phó khi và chỉ khi: liên hợp Hermit của nó là $\mathbf{M}^\dagger \equiv (\mathbf{M^T})^* = \mathbf{M}$. Ta có thể định nghĩa điều này một cách gọn gàng hơn thông qua notation tích trong: với hai vector $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{v}$, khi ma trận $\mathbf{B}$ là phó của ma trận $\mathbf{A}$ nếu như:

$$(\mathbf{Bu}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Av}) \tag{1.1}$$

bởi vì $\mathbf{Bu}^\dagger = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{B}^\dagger$.

1.2 Các tính chất của ma trận tự phó

- Trị riêng của nó phải là thực.
- Các vector riêng ứng với 1 trị riêng thì trực giao với tích trong.
- Tạo thành cơ sở trực chuẩn.
- Nến định thức $\neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ma trận nghịch đảo, và các trị riêng đều khác 0.

1.3 Toán tử vi phân(Differential operators)

Toán tử vi phân tuyến tính $\mathcal{L}$, Đây chỉ là tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm với các hệ số có thể trở thành hàm của x. $\mathcal{L}$ được gọi là toán tử vi phân tuyến tính bậc p khi:

$$\mathcal{L} = A_p(x)\frac{d^p}{dx^p} + A_{p-1}(x)\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + ... + A_1(x)\frac{d}{dp} + A_0(x)$$

Khi nó đánh lên một hàm $y(x)$(trơn). Ta có $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = \mathcal{L}(c_1y_1) + \mathcal{L}(c_2y_2)$
Ta quan tâm đến phương trình bậc 2 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}y = \left[P(x)\frac{d^2}{dx^2} + R(x)\frac{d}{dx} - Q(x)\right]y \tag{1.2}$$

* Phương trình thuần nhất:

$$Ly(x) = 0 \rightarrow y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

trong đó c_i : complementary function
* Phương trình không thuần nhất:

$$Ly(x) = f(x) : y = y_c + y_p$$

trong đó: y_p là nghiệm riêng(particular function)
* Toán tử vi phân tự phó

$$\begin{aligned}
Ly(x) &= \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y \\
&= \left(\frac{d}{dx}p(x)\right)\frac{dy}{dx} + \frac{d^y}{dx^2}p(x) - q(x)y \\
&= p'(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} - q(x)y
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Đặt $p'(x) = R(x) \rightarrow$ nghiệm này không tổng quát
Giả sử $P(x) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{R(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{Q(x)}{P(x)}y(x) \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{p'(x)}{p(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{q(x)}{p(x)}y(x) \tag{1.5}$$

Mối liên hệ giữa p,q và P,Q

$$\Rightarrow \begin{cases} q(x) = p(x)\dfrac{Q(x)}{P(x)} \\ \dfrac{p'(x)}{p(x)} = \dfrac{R(x)}{P(x)} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{R(x)}{P(x)}dx \Rightarrow ln(p) = \int \dfrac{R(x)}{P(x)} + C \Rightarrow p(x) = e^{\int_0^x \frac{R(t)}{P(t)}dt} \end{cases}$$

*$\mathcal{L}$ tự phó với tích trong

$$(f,g) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Điều kiện biên

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f,g) &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\vec{f}}{dx}\right) - q(x)\vec{f}\right] g(x)dx \\ &= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\Big|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx} - q(x)f(x)^*g(x)dx \\ &= p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\Big|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b f^*\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x)\right)\right]dx \end{aligned}$$

trong đó: $\displaystyle\int_a^b f^*\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dg}{dx} - q(x)g(x)\right)\right]dx = (f,\mathcal{L}g)$ và $\displaystyle p(x)\frac{df^*}{dx}g(x)\Big|_a^b - f^*p\frac{dy}{dx}\Big|_a^b = A$
Để $(\mathcal{L}f,g)(f,\mathcal{L}g) \Rightarrow A = 0$

1.4 Tính chất của $\mathcal{L}$

1.4.1 Hàm riêng và hàm trọng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)y(x)$$

hàm trọng $w(x)$ là hàm trọng và phải là thực.

$$(f,g)_w \equiv \int_a^b f^*gw(x)dx$$

tại vì w là thực nên ta có tính chất:

$$(f,g)_w = (f,wg) = (wf,g)$$

Tính tuyến tính và phản tuyến tính:

$$\begin{aligned} (f;c_1g_1 + c_2g_2)_w &= c_1(f,g_1) + c_2(f,g_2) \\ (c_1f_1 + c_2f_2;g)_w &= c_1^*(f_1,g) + c_2(f_2,g) \end{aligned}$$

*Hàm riêng: trực giao với mỗi λ

$$\int_a^b Y_m^*(x)Y_n(x)wdx = \delta_{m,n}$$

*Hàm cơ sở trực giao

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_m^* f(x) w \\
&= f_m(x)\delta_{m,n}
\end{aligned}$$

Ex: Giải phương trình vi phân $\mathcal{L}y(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\sum_n y_n Y_N &= \sum_n y_n \lambda_n = \sum_n y_n \lambda_n Y_n \\
&= \sum_n f_n Y_n \to y_n \frac{f_n}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

Buổi 2 : Lý thuyết Sturm–Liouville(continue)
$*$Giải phương trình ma trận $Mu = \vec{f} \Rightarrow M^{-1}Mu = M^{-1}\vec{f} \Rightarrow u = M^{-1}\vec{f}$
$*$Toán tử của phương trình không thuần nhất:

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

$\mathcal{L}$: Toán tử vi phân tuyến tính.
Ta không giản được phương trình trên như ma trận bằng cách tìm hàm riêng trị riêng.

Cách 1: Giải phương trình vi phân thuần nhất

$$\mathcal{L}y(x) = 0.$$

Giải phương trình trên tìm ra được $y_{com} \to y(x) = y_{com} + y_p$

Cách 2:

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

$\mathcal{L}$ là tự phó với tích trong $(f,g) = \displaystyle\int f^*(x)g(x)dx$

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g)\,.$$

Bước 1: Tìm hàm riêng trị riêng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)g(x),$$

và đồng thời thay $\mathcal{L}y \to \dfrac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}(\dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}})$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda w(x)\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}} = \sqrt{w(x)}\lambda\tilde{y}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) = \lambda\tilde{y}.$$

Tích trong của hàm trọng

$$\begin{cases} (f,g)_w & = \int f^* g w(x)dx = (f, gw) = (wf, g). \\ (f,f)_w & = 0 \to f = 0; w \neq 0. \end{cases}$$

Tính chất của toán tử Sturm-Liouville
Nếu:

$$\mathcal{L}y_i = \lambda w y_i(x), \begin{cases} \lambda : \text{ thực.} \\ \left(y_i, y_j\right)_w = 0 \text{ khi } \lambda_i \neq \lambda_j. \end{cases}$$

Và

$$Y_i = \frac{y_i}{(\sqrt{y_i y_i})_w},$$

là tập các hàm riêng trực giao và tuyến tính → đầy đủ.

Bước 2∗:

$$f(x) = \sum_i f_i Y_i(x)$$

$$f_i = (Y_i f(x))_w$$

Bước 2:

$$\mathcal{L}\phi(x) = w(x)F(x)$$

$$\begin{cases} \phi(x) &= \sum_i \phi_i Y_i(x) \\ F(x) &= \sum_i F_i Y_i(x) \end{cases}$$

Bước 3:

$$\Rightarrow \mathcal{L} \sum_i \phi_i Y_i(x) = w \sum_i F_i Y_i(x)$$

$$\to \sum_i \underbrace{\phi_i \mathcal{L} Y_i(x)}_{\lambda_i w(x) Y_i(x)} = \sum_i F_i w(x) Y_i(x)$$

$$\to \sum_i \left(\phi_i \lambda_i - F_i\right) w(x) Y_i(x) = 0 \to \phi = \frac{F_i}{\lambda_i}$$

$$\phi_p(x) = \sum_i \frac{F_i}{\lambda_i} Y_i(x) \text{ nghiệm đặc biệt,}$$

nghiệm tổng quát cho ϕ:

$$\phi = \phi_c(c) + \phi_p(x) \text{ đây chính là nghiệm cho phương trình } \mathcal{L}\phi_i = 0.$$

Nghiệm đặc biệt

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \big(Y_i(t), F(t)\big)_w Y_i(x) \\ &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) \int_a^b Y_i^*(t) F(t) w(x) dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) Y_i^*(t) \right] w(t) F(t) dt \\ &= \int_a^b G(x,t) f(t) dt \end{aligned}$$

trong đó: G là hàm Green (với 2 biến $\neq$ nhau: x và t và chia cho trị riêng).

$f(t)$: ngoại lực $\begin{cases} \text{Bài toán dao động.} \\ \text{Forcing function.} \end{cases}$

Hàm Green cho nghịch đảo hình thức.

1.5 Đồng nhất thức Parseval

$$\begin{aligned}(F,F)_w &= \int \sum_i F_i^* Y_i \sum_j F_j Y_j w dx \\ &= \sum_{i,j} F_i^* F_j \underbrace{(Y_i, Y_j)_w}_{\delta_{i,j}} = \sum_i |F_i|^2\end{aligned}$$

Chương 2

Hàm suy rộng

2.1 Hàm suy rộng và phân bố

Định nghĩa hàm thử:

Lớp các hàm thử, chọn miền $\Omega \subseteq \mathscr{R}^n$ nằm trong khôg gian có $Dim = n$. Hàm thử là các hàm trơn vô hạn $\phi = \in C^\infty(\Omega)$ mà tồn tại một tập compact support nằm trong (Ω). Tồn tại một tập compact $K \subset \Omega$ mà làm cho $\phi(x) = 0$, khi $x \notin K$. Một ví dụ đơn giản cho hàm thử một chiều là:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(1-x)^2}}; & \text{khi } |x| < 1 \\ 0 & \end{cases}$$

Gọi $\mathcal{D}(\Omega)$ là không gian các hàm thử. Sau khi đã chọn lớp các hàm thử, ta định nghĩa một phân bố T là một ánh xạ tuyến tính:

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathscr{R}$$
$$\phi \to T[\phi]$$

Tập hợp các $T \to$ không gian các phân bố $\to$ không gian hàm thử $\mathcal{D}'(\Omega)$

Chương 3

Hàm Green cho phương trình đạo hàm riêng thuần nhất

content...

3.1 Bài tập trong Arfken & Weber

10.1.1/p456

Chứng minh rằng:

$$G(x,t) = \begin{cases} x, & 0 \le x < t, \\ t, & t < x \le 1, \end{cases}$$

là hàm Green cho toán tử $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$, và điều kiện biên $y(0) = 0, y'(1) = 0$.

Giải:
Ta có $\mathcal{L}y = -\frac{d^2y}{dx^2} = -y''$. Ta đi giải phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y = 0$.
Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y = 0$ là:

$$y^2 = 0$$

Nghiệm tổng quát cho $\mathcal{L}y = 0$ là:

$$y_1 = A + Bx.$$
$$y_2 = A + B(1 - x).$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$y_1(0) = A + Bx = 0 \to A = 0 \to y_1(x) = x,$$
$$y_2{}'(1) = B = 0 \to y_2(x) = 1.$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -1.$$

Hàm Green cho $\mathcal{L}y = 0$:

$$G(x,\xi) = \Theta(\xi - x)y_1(x)y_2(\xi) + \Theta(x-\xi)y_2(x)y_1(\xi)(DPCM)$$

10.1.2

Tìm hàm Green cho

(a) $\mathcal{L}y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x), \quad \begin{cases} y(0) &= 0, \\ y'(1) &= 0. \end{cases}$

(b) $\mathcal{L}y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x), \quad y(x)$ hữu hạn khi $-\infty < x < \infty$

Giải

(a) Ta đi giải phương trình thuần nhất $\mathcal{L}y(x) = 0$.

Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$ là:

$$y^2 + 1 = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$y_1 = A\cos x + B\sin x,$$
$$y_2 = A\cos(1-x) + B\sin(1-x).$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$y_1(0) = 0 = A\cos 0 + B\sin 0 \to A = 0 \to y_1(x) = \sin x,$$
$$y_2'(1) = 0 = A\sin 0 - B\cos 0 \to B = 0 \to y_2(x) = \cos(1-x).$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos(1-x) \\ \cos x & \sin(1-x) \end{vmatrix}$$
$$= \sin x \sin(1-x) - \cos x\cos(1-x)$$
$$= -\cos 1 = W.$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}y$ với $\alpha = 1$ và $W = -\cos 1$:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{\cos 1}\left[\Theta(\xi - x)\sin x\cos(1-\xi) + \Theta(x-\xi)\cos(1-x)\sin\xi\right].$$

(b) Phương trình đặc trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$:

$$y^2 - 1 = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$y_1(x) = Ae^x + Be^{-x},$$
$$y_2(x) = Ae^{x-1} + Be^{1-x}.$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$y_1(x \to -\infty) \to B = 0 \to y_1(x) = e^x,$$
$$y_2(x \to +\infty) \to A = 0 \to y_2(x) = e^{1-x}.$$

Wronskian cho y_1, y_2 là:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^x & e^{1-x} \\ e^x & -e^{1-x} \end{vmatrix} \\ &= -e^x e^{1-x} - e^x e^{1-x} \\ &= -2e^x e^{1-x} = W.\end{aligned}$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}y$ với $\alpha = 1$ và $W = -2e^x e^{1-x}$:

$$\begin{aligned}G(x,\xi) &= -\frac{1}{2e^x e^{1-x}}\left[\Theta(\xi - x)e^x e^{1-\xi} + \Theta(x-\xi)e^\xi e^{1-x}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\Theta(\xi - x)e^{x-\xi} + \Theta(x-\xi)e^{\xi-x}\right].\end{aligned}$$

10.1.4/p.457

Tìm hàm Green cho phương trình sau:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{4} = f(x),$$

với điều kiện biên là $y(0) = y(\pi) = 0$.

Giải:

Ta đi giải phương trình thuần nhất cho $\mathcal{L}y(x) = -\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{y}{4} = 0$. Phương trình đăcj trưng cho $\mathcal{L}y(x) = 0$:

$$-y^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

nghiệm tổng quát cho phương trình trên là:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}, \\ y_2(x) &= A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= A\cos 0 + B\sin 0 \to A = 0 \to y_1(x) = \sin\frac{x}{2}, \\ y_2(\pi) &= A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2} = 0 \to B = 0 \to y_2(x) = \cos\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$Wronskian$ cho y_1, y_2 là:

$$\begin{aligned} W = y_1 y_2' - y_2 y_1' &= -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hàm Green cho phương trình $\mathcal{L}$ với $\alpha = -1$ và $W = -\dfrac{1}{2}$:

$$G(x,\xi) = 2\left[\Theta(\xi - x)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\xi}{2} + \Theta(x-\xi)\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$$