

Hàm suy rộng

Hàm Green

TRẦN KHÔI NGUYỄN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 2 tháng 10 năm 2024

Preface

Giáo trình: Applied Functional Analysis(Griffel), Introductory Functional Analysis(Kreyzig), Equations of Mathematical Physics(Vladimirov), Mathematical Methods (David Skinner). Có thể xem qua thêm như là Boas, Arfken & Weber.

Mục lục

1	Lý thuyết Sturm-Liouville	3
1.1	Ma trận tự phó(tự liên hợp)(self-adjoint)	3
1.2	Các tính chất của ma trận tự phó	4
1.3	Toán tử vi phân(Differential operators)	4
1.4	Tính chất của \mathcal{L}	6
1.4.1	Hàm riêng và hàm trọng	6
1.5	Đồng nhất thức Parseval	9

Chương 1

Lý thuyết Sturm-Liouville

1.1 Ma trận tự phó(tự liên hợp)(self-adjoint)

Cho hai không gian vector: V và W

$$V : \dim = n$$

$$W : \dim = m$$

$$M : V \rightarrow W$$

$$\Rightarrow W = M.V \Leftrightarrow w = M.v$$

trong đó M : ánh xạ tuyến tính

Notation cho tích trong(inner product): (a, b)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ai} &= (\mathbf{w}_a, M\mathbf{v}_i) \\ &= (w_a^T)^* M v_i\end{aligned}$$

Khi $m = n$ có nghĩa là \mathbf{M} là ma trận vuông $n \times n$, ta có được:

$$\lambda_i = \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Một ma trận \mathbf{M} được gọi là ma trận tự phó khi và chỉ khi: liên hợp Hermit của nó là $\mathbf{M}^\dagger \equiv (\mathbf{M}^T)^* = \mathbf{M}$. Ta có thể định nghĩa điều này một cách gọn gàng hơn thông qua

notation tích trong: với hai vector $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{v}$, khi ma trận \mathbf{B} là phó của ma trận \mathbf{A} nếu như:

$$(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}) \quad (1.1)$$

bởi vì $\mathbf{B}\mathbf{u}^\dagger = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{B}^\dagger$.

1.2 Các tính chất của ma trận tự phó

- Trị riêng của nó phải là thực.
- Các vector riêng ứng với 1 trị riêng thì trực giao với tích trong.
- Tạo thành cơ sở trực chuẩn.
- Nếu định thức $\neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ma trận nghịch đảo, và các trị riêng đều khác 0.

1.3 Toán tử vi phân(Differential operators)

Toán tử vi phân tuyến tính \mathcal{L} , Đây chỉ là tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm với các hệ số có thể trở thành hàm của x . \mathcal{L} được gọi là toán tử vi phân tuyến tính bậc p khi:

$$\mathcal{L} = A_p(x) \frac{d^p}{dx^p} + A_{p-1}(x) \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + \dots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x)$$

Khi nó đánh lên một hàm $y(x)$ (trơn). Ta có $\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \mathcal{L}(c_1 y_1) + \mathcal{L}(c_2 y_2)$

Ta quan tâm đến phương trình bậc 2 \mathcal{L}

$$\mathcal{L}y = \left[P(x) \frac{d^2}{dx^2} + R(x) \frac{d}{dx} - Q(x) \right] y \quad (1.2)$$

* Phương trình thuần nhất:

$$Ly(x) = 0 \rightarrow y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

trong đó c_i : complementary function

* Phương trình không thuần nhất:

$$Ly(x) = f(x) : y = y_c + y_p$$

trong đó: y_p là nghiệm riêng(particular function)

* Toán tử vi phân tự phó

$$\begin{aligned} Ly(x) &= \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y \\ &= \left(\frac{d}{dx} p(x) \right) \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} p(x) - q(x)y \\ &= p'(x) \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} - q(x)y \end{aligned} \quad (1.3)$$

Đặt $p'(x) = R(x) \rightarrow$ nghiệm này không tổng quát

Giả sử $P(x) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{R(x)}{P(x)} \frac{dy}{dx} - \frac{Q(x)}{P(x)} y(x) \quad (1.4)$$

$$\frac{dy}{dx^2} + \frac{p'(x)}{p(x)} \frac{dy}{dx} - \frac{q(x)}{p(x)} y(x) \quad (1.5)$$

Mối liên hệ giữa p,q và P,Q

$$\Rightarrow \begin{cases} q(x) = p(x) \frac{Q(x)}{P(x)} \\ \frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{R(x)}{P(x)} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{R(x)}{P(x)} dx \Rightarrow \ln(p) = \int \frac{R(x)}{P(x)} + C \Rightarrow p(x) = e^{\int_0^x \frac{R(t)}{P(t)} dt} \end{cases}$$

* \mathcal{L} tự phó với tích trong

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Điều kiện biên

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f, g) &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\vec{f}}{dx} \right) - q(x)\vec{f} \right] g(x)dx \\ &= p(x) \frac{df^*}{dx} g(x) \Big|_a^b - \int_a^b p(x) \frac{df^*}{dx} \frac{dg}{dx} - q(x)f(x)^* g(x)dx \\ &= p(x) \frac{df^*}{dx} g(x) \Big|_a^b - f^* p \frac{dy}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b f^* \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dg}{dx} - q(x)g(x) \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\text{trong đó: } \int_a^b f^* \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dg}{dx} - q(x)g(x) \right) \right] dx = (f, \mathcal{L}g) \text{ và } p(x) \frac{df^*}{dx} g(x) \Big|_a^b - f^* p \frac{dy}{dx} \Big|_a^b = A$$

$$\text{Để } (\mathcal{L}f, g)(f, \mathcal{L}g) \Rightarrow A = 0$$

1.4 Tính chất của \mathcal{L}

1.4.1 Hàm riêng và hàm trọng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)y(x)$$

hàm trọng $w(x)$ là hàm trọng và phải là thực.

$$(f, g)_w \equiv \int_a^b f^* g w(x) dx$$

tại vì w là thực nên ta có tính chất:

$$(f, g)_w = (f, wg) = (wf, g)$$

Tính tuyến tính và phản tuyến tính:

$$(f; c_1 g_1 + c_2 g_2)_w = c_1 (f, g_1) + c_2 (f, g_2)$$

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2; g)_w = c_1^* (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$$

*Hàm riêng: trực giao với mỗi λ

$$\int_a^b Y_m^*(x) Y_n(x) w dx = \delta_{m,n}$$

*Hàm cơ sở trực giao

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_m^* f(x) w \\ &= f_m(x) \delta_{m,n} \end{aligned}$$

Ex: Giải phương trình vi phân $\mathcal{L}y(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sum_n y_n Y_n &= \sum_n y_n \lambda_n = \sum_n y_n \lambda_n Y_n \\ &= \sum_n f_n Y_n \rightarrow y_n \frac{f_n}{\lambda_n} \end{aligned}$$

Buổi 2 : Lý thuyết Sturm–Liouville(continue)

*Giải phương trình ma trận $Mu = \vec{f} \Rightarrow M^{-1}Mu = M^{-1}\vec{f} \Rightarrow u = M^{-1}\vec{f}$

*Toán tử của phương trình không thuần nhất:

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

\mathcal{L} : Toán tử vi phân tuyến tính.

Ta không giải được phương trình trên như ma trận bằng cách tìm hàm riêng trị riêng.

Cách 1: Giải phương trình vi phân thuần nhất

$$\mathcal{L}y(x) = 0.$$

Giải phương trình trên tìm ra được $y_{com} \rightarrow y(x) = y_{com} + y_p$

Cách 2:

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y.$$

\mathcal{L} là tự phối với tích trong $(f, g) = \int f^*(x)g(x)dx$

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g).$$

Bước 1: Tìm hàm riêng trị riêng

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda w(x)g(x),$$

và đồng thời thay $\mathcal{L}y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) &= \lambda w(x) \frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}} = \sqrt{w(x)}\lambda\tilde{y} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{w(x)}}\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{w(x)}}\right) &= \lambda\tilde{y}. \end{aligned}$$

Tích trong của hàm trọng

$$\begin{cases} (f, g)_w = \int f^* g w(x) dx = (f, gw) = (wf, g). \\ (f, f)_w = 0 \rightarrow f = 0; w \neq 0. \end{cases}$$

Tính chất của toán tử Sturm-Liouville

Nếu:

$$\mathcal{L}y_i = \lambda w y_i(x), \begin{cases} \lambda : \text{thực.} \\ (y_i, y_j)_w = 0 \text{ khi } \lambda_i \neq \lambda_j. \end{cases}$$

Và

$$Y_i = \frac{y_i}{(\sqrt{y_i y_i})_w},$$

là tập các hàm riêng trực giao và tuyến tính \rightarrow đầy đủ.

Bước 2*:

$$f(x) = \sum_i f_i Y_i(x)$$

$$f_i = (Y_i f(x))_w$$

Bước 2:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi(x) &= w(x)F(x) \\ \begin{cases} \phi(x) &= \sum_i \phi_i Y_i(x) \\ F(x) &= \sum_i F_i Y_i(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Bước 3:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L} \sum_i \phi_i Y_i(x) &= w \sum_i F_i Y_i(x) \\ \rightarrow \sum_i \underbrace{\phi_i \mathcal{L}Y_i(x)}_{\lambda_i w(x)Y_i(x)} &= \sum_i F_i w(x)Y_i(x) \\ \rightarrow \sum_i (\phi_i \lambda_i - F_i) w(x)Y_i(x) &= 0 \rightarrow \phi = \frac{F_i}{\lambda_i} \\ \phi_p(x) &= \sum_i \frac{F_i}{\lambda_i} Y_i(x) \text{ nghiệm đặc biệt,} \end{aligned}$$

nghiệm tổng quát cho ϕ :

$$\phi = \phi_c(c) + \phi_p(x) \text{ đây chính là nghiệm cho phương trình } \mathcal{L}\phi_i = 0.$$

Nghiệm đặc biệt

$$\begin{aligned}\phi_p(x) &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} (Y_i(t), F(t))_w Y_i(x) \\ &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) \int_a^b Y_i^*(t) F(t) w(x) dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_i \frac{1}{\lambda_i} Y_i(x) Y_i^*(t) \right] w(t) F(t) dt \\ &= \int_a^b G(x, t) f(t) dt\end{aligned}$$

trong đó: G là hàm Green (với 2 biến \neq nhau: x và t và chia cho trị riêng).

f(t): ngoại lực $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bài toán dao động.} \\ \text{Forcing function.} \end{array} \right.$

Hàm Green cho nghịch đảo hình thức.

1.5 Đồng nhất thức Parseval

$$\begin{aligned}(F, F)_w &= \int \sum_i F_i^* Y_i \sum_j F_j Y_j w dx \\ &= \sum_{i,j} F_i^* F_j\end{aligned}$$