

Cơ học lượng tử 3

TRẦN KHÔI NGUYỄN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 6 tháng 12 năm 2024

Bài 1

Giả sử một hệ có cơ sở chỉ gồm hai trạng thái trực chuẩn $|1\rangle$ và $|2\rangle$, ứng với Hamiltonian toàn phần có biểu diễn ma trận là

$$\begin{pmatrix} E_1 & V_0 e^{i\omega t} \\ V_0 e^{-i\omega t} & E_2 \end{pmatrix}$$

trong đó V_0 là độc lập với thời gian. Ở thời điểm $t = 0$, hệ nằm trong trạng thái $|1\rangle$.

- (a) Chứng tỏ rằng xác suất chuyển dời từ trạng thái $|1\rangle$ sang trạng thái $|2\rangle$ trong khoảng thời gian t bằng

$$P(t) = \frac{4V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} \sin^2 \left(\frac{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)}{2\hbar} \right) + O(V^4)$$

tới bậc thấp nhất khác không theo V_0 .

- (b) Hãy giải bài toán hai trạng thái này một cách chính xác để tìm giá trị thực của $P(t)$ và do đó phát biểu các điều kiện cần để cách tiếp cận nhiễu loạn hợp lệ ở đây.

Giải:

(a) Ta có

$$H'_{11} = H'_{22} = 0 \quad (1)$$

Ta khai triển hàm sóng dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $|1\rangle$ và $|2\rangle$

$$\Psi(t) = c_1 |1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 |2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (2)$$

trong đó

$$\dot{c}_1 = -\frac{i}{\hbar} [c_1 H'_{11} + c_2 H'_{12} e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar}] \quad (3)$$

$$\dot{c}_2 = -\frac{i}{\hbar} [c_2 H'_{22} + c_1 H'_{21} e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar}] \quad (4)$$

Đặt $\omega_{12} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} = -\omega_{21}$.

Điều kiện đầu

$$\text{Tại } t = 0 \begin{cases} c_1(0) = 1 \equiv c_1^{(0)}(t) = 1 \\ c_2(0) = 0 \equiv c_2^{(0)}(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Ta thay vào (3) và (4), được

$$\begin{aligned} \frac{dc_1^{(1)}}{dt} &= 0 \Rightarrow c_1^{(1)}(t) = 1; \\ \frac{dc_2^{(1)}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} H'_{21} e^{i\omega_{21}t} \Rightarrow c_2^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_0 e^{-i\omega t'} e^{i\omega_{21}t'} dt' \\ &\Rightarrow c_2^{(1)} = -\frac{iV_0}{\hbar i(\omega_{21} - \omega)} [e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1] \\ &= \frac{V_0}{\hbar(\omega - \omega_{21})} [e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1] \end{aligned} \quad (6)$$

Xác suất chuyển dời từ $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$

$$\begin{aligned} P_{12}(t) &= |c_2^{(1)}(t)|^2 \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} [(e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1)(e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} - 1)] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} [1 - e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} - e^{i(\omega_{21} - \omega)t} + 1] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} [2 - 2\cos((\omega_{21} - \omega)t)] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} 4\sin^2\left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2}t\right) \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} 4\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2 + \hbar\omega}{2\hbar}t\right) (DPCM) \end{aligned}$$

(b) Từ phương trình (3) và (4), ta lấy đạo hàm theo t một lần nữa cho phương trình (4), dẫn đến

$$\begin{aligned}
\ddot{c}_2 &= -\frac{i}{\hbar}\dot{c}_1 V_0 e^{-i(E_1-E_2-\omega)t/\hbar} + \frac{i}{\hbar} \frac{i(E_1-E_2-\omega)}{\hbar} c_1 V_0 e^{-i(E_1-E_2-\omega)t/\hbar} \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \left[c_2 H'_{12} e^{-i(E_2-E_1-\omega)t/\hbar} \right] H'_{21} e^{-i(E_1-E_2+\omega)t/\hbar} - \frac{(E_1-E_2-\omega)}{\hbar^2} c_1 V_0 e^{-i(E_1-E_2-\omega)t/\hbar} \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} c_2 V_0^2 - \frac{i(E_1-E_2)}{\hbar} \frac{\hbar}{-iH'_{21}} e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} H'_{21} e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar} \dot{c}_2 \\
&= -c_2 \left(\frac{V_0}{\hbar} \right)^2 - i(\omega_{21} - \omega) \dot{c}_2 \\
&\Rightarrow \ddot{c}_2 + i(\omega_{21} - \omega) \dot{c}_2 + \frac{V_0^2}{\hbar^2} c_2 = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Đặt $c_2 = e^{mt}$, nên (6) trở thành

$$m^2 e^{mt} + m e^{mt} i(\omega_{21} - \omega) + \frac{V_0^2}{\hbar^2} e^{mt} = 0,$$

với $\Delta < 0$

Điều kiện đầu

$$\begin{cases} c_1(0) = 1 \\ c_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c_2(t) &= \exp\left(i\frac{\omega_{21}-\omega}{2}t\right) A \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\
\dot{c}_2(t) &= i\frac{\omega_{21}-\omega}{2} \exp\left(i\frac{\omega_{21}-\omega}{2}t\right) A \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \exp\left(i\frac{\omega_{21}-\omega}{2}t\right) A \frac{\Omega}{2} \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\
c_1(t) &= \frac{i\hbar}{V_0} \dot{c}_2 \exp(i\omega t) \exp(i\omega_{12}t) \\
&= \frac{i\hbar}{V_0} i\frac{\omega_{21}-\omega}{2} \exp\left(i\frac{\omega-\omega_{12}}{2}t\right) A \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \exp\left(i\frac{\omega-\omega_{12}}{2}t\right) A \frac{\Omega}{2} \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện đầu

$$c_1(0) = A \frac{\Omega}{2} \cos(0) = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\Omega}.$$

Xác suất chuyển dời từ trạng thái $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$.

$$\begin{aligned}
P_{12}(t) &= |c_2(t)|^2 \\
&= \left(\frac{2}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right)^2
\end{aligned}$$