

Cơ học lượng tử 3

TRẦN KHÔI NGUYỄN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 6 tháng 12 năm 2024

Bài 1

Giả sử một hệ có cơ sở chỉ gồm hai trạng thái trực chuẩn $|1\rangle$ và $|2\rangle$, ứng với Hamiltonian toàn phần có biểu diễn ma trận là

$$\begin{pmatrix} E_1 & V_0 e^{i\omega t} \\ V_0 e^{-i\omega t} & E_2 \end{pmatrix}$$

trong đó V_0 là độc lập với thời gian. Ở thời điểm $t = 0$, hệ nằm trong trạng thái $|1\rangle$.

- (a) Chứng tỏ rằng xác suất chuyển dời từ trạng thái $|1\rangle$ sang trạng thái $|2\rangle$ trong khoảng thời gian t bằng

$$P(t) = \frac{4V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} \sin^2 \left(\frac{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)}{2\hbar} \right) + O(V^4)$$

tới bậc thấp nhất khác không theo V_0 .

- (b) Hãy giải bài toán hai trạng thái này một cách chính xác để tìm giá trị thực của $P(t)$ và do đó phát biểu các điều kiện cần để cách tiếp cận nhiễu loạn hợp lệ ở đây.

Giải:

(a) Ta có

$$H'_{11} = H'_{22} = 0 \quad (1)$$

Ta khai triển hàm sóng dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $|1\rangle$ và $|2\rangle$

$$\Psi(t) = c_1 |1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 |2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (2)$$

trong đó

$$\dot{c}_1 = -\frac{i}{\hbar} \left[c_1 H'_{11} + c_2 H'_{12} e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} \right] \quad (3)$$

$$\dot{c}_2 = -\frac{i}{\hbar} \left[c_2 H'_{22} + c_1 H'_{21} e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} \right] \quad (4)$$

Đặt $\omega_{12} = \frac{E_a - E_b}{\hbar} = -\omega_{21}$ Điều kiện đầu

$$\text{Tại } t = 0 \begin{cases} c_1(0) = 1 \equiv c_1^{(0)}(t) = 1 \\ c_2(0) = 0 \equiv c_2^{(0)}(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Ta thay vào (3) và (4), được

$$\begin{aligned} \frac{dc_1^{(1)}}{dt} &= 0 \Rightarrow c_1^{(1)}(t) = 1; \\ \frac{dc_2^{(1)}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} H'_{21} e^{i\omega_{21}t} \Rightarrow c_2^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_0 e^{-i\omega t'} e^{i\omega_{21}t'} dt' \\ &\Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{iV_0}{\hbar i(\omega_{21} - \omega)} \left[e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1 \right] \\ &= \frac{V_0}{\hbar(\omega - \omega_{21})} \left[e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Xác suất chuyển dời từ $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$

$$\begin{aligned} P_{12}(t) &= \left| c_2^{(1)}(t) \right|^2 \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} \left[(e^{i(\omega_{21} - \omega)t} - 1)(e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} - 1) \right] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} \left[1 - e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} - e^{i(\omega_{21} - \omega)t} + 1 \right] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} \left[2 - 2 \cos((\omega_{21} - \omega)t) \right] \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} 4 \sin^2 \left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2} t \right) \\ &= \frac{V_0^2}{(E_1 - E_2 + \hbar\omega)^2} 4 \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2 + \hbar\omega}{2\hbar} t \right) (DPCM) \end{aligned}$$

(b)