Quantum optics - Chapter 5 exercises

Nguyễn Minh Hiền

Ngày 25 tháng 11 năm 2024

Prove $P_\omega(n)$

Ta có số photon trung bình:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_\omega(n) \\ &= \frac{1}{e^{\hbar\mu/k_B T} - 1} \\ &= \frac{x}{1-x} \\ \implies x &= \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \end{aligned} \tag{1}$$

với

$$x = \exp(-\hbar\omega/k_B T)$$

và chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Từ định lý Boltzmann, ta có:

$$\begin{aligned} P_\omega(n) &= \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T)} \\ &= \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \\ &= \frac{x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \\ &= x^n(1-x) \\ &= \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1+\bar{n}}\right) \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \end{aligned} \tag{2}$$

Chứng minh $(\Delta n)^2$

Ta có định nghĩa

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \sum_{n=0} n^2 P_\omega(n) \\ &= \sum_{n} (n-\bar{n})^2 P_\omega(n) \\ &= \sum_{n} n^2 P_\omega(n) + \sum_{n} 2n\bar{n} P_\omega(n) + \sum_{n} \bar{n}^2 P_\omega(n) \end{aligned} \tag{3}$$

Xét từng thành phần

- $\sum_n n^2 P_\omega(n) = \sum_n n^2 x^n (1-x)$
- $\sum_n 2n\bar{n}P_\omega(n) = 2\bar{n}\sum_n nP_\omega(n)$
  Trong đó $\sum_n nP_\omega(n)$ là định nghĩa của $\bar{n}$, nên $\sum_n 2n\bar{n}P_\omega(n) = 2\bar{n}^2$
- $\sum_n \bar{n}^2 P_\omega(n) = \bar{n}^2 \sum_n P_\omega(n) = \bar{n}^2$ do $\sum_n P_\omega(n) = 1$ (xác suất).

Kết hợp lại, ta có:

$$\begin{aligned}(\Delta n)^2 &= \sum_n n^2 x^n (1-x) + 2\bar{n}^2 + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\sum_n n^2 x^n + \bar{n}^2\end{aligned} \tag{4}$$

mà

$$\begin{aligned}\sum_n \left(x^2 \frac{d^2 x^n}{dx^2} + x\frac{dx^n}{dx}\right) &= x^2 n(n-1)\sum_n x^{n-2} + xn\sum_n x^{n-1} \\ &= n(n-1)\sum_n x^n + n\sum_n x^n \\ &= \sum_n n^2 x^n + \sum_n nx^n - \sum_n nx^n \\ &= \sum_n n^2 x^n\end{aligned} \tag{5}$$

Thế vào $\Delta(n)^2$:

$$\begin{aligned}\Delta(n)^2 &= (1-x)\sum_n n^2 x^n + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\left[\sum_n \left(x^2 \frac{d^2 x^n}{dx^2} x^n + x\frac{dx^n}{dx}\right)\right] + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2}\sum_n x^n + x\frac{d}{dx}\sum_n x^n\right] + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\left[x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\left[2x^2(1-x)^{-3} + x(1-x)^{-2}\right] + \bar{n}^2 \\ &= (1-x)\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2}\right) + \bar{n}^2 \\ &= \bar{n} + 2\bar{n}^2 + \bar{n}^2 \\ &= \bar{n}^2 + \bar{n}\end{aligned} \tag{6}$$

Prove $\langle \Delta E^2 \rangle$

Ta bắt đầu từ định nghĩa của tổng thống kê Z:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\sum_s e^{-\beta E(s)} = \sum_s \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta E(s)} = \sum_s \big(-E(s)\big)e^{-\beta E(s)}. \tag{7}$$

Ta nhân thêm $-\frac{1}{Z}$, bỏ dấu trừ , và đưa Z vào trong tổng:

$$-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\sum_s \big(-E(s)\big)e^{-\beta E(s)} = \sum_s E(s)\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z} = \sum_s E(s)\mathcal{P}(s) = \overline{E}. \tag{8}$$

Lấy đạo hàm bậc hai:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\sum_s e^{-\beta E(s)} = \sum_s \frac{\partial}{\partial \beta}\big[-E(s)e^{-\beta E(s)}\big] = \sum_s \big[E(s)^2\big]e^{-\beta E(s)}. \tag{9}$$

$$= Z \cdot \sum_s \big[E(s)\big]^2 \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z} = Z \cdot \overline{E^2}. \tag{10}$$

Vậy ta có:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\big(-Z\overline{E}\big) = -\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta}Z + \overline{E}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) = -\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta} + \big(\overline{E}\big)^2. \tag{11}$$

Nói cách khác,

$$\langle\Delta E^2\rangle = \overline{E^2} - \big(\overline{E}\big)^2 = -\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta} = -\frac{\partial T}{\partial\beta}\frac{\partial\overline{E}}{\partial T}. \tag{12}$$

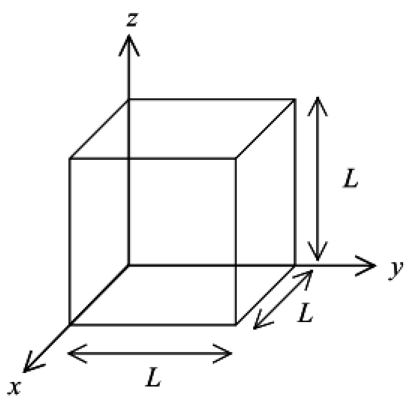
Và $\partial T/\partial\beta = \big(\partial\beta/\partial T\big)^{-1} = \big(-1/kT^2\big)^{-1} = -kT^2$.

Vậy, ta có:

$$\langle\Delta E^2\rangle = kT^2\frac{\partial\overline{E}}{\partial T} \tag{13}$$

Mật độ trạng thái

Xét một hộp lập phương có bộ vector cơ sở $\big(\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z\big)$



Ta có biến đổi Fourier:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

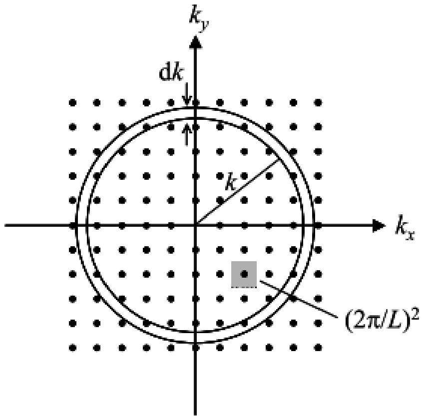
với:

- $k_x L = 2\pi n_x$
- $k_y L = 2\pi n_y$
- $k_z L = 2\pi n_z$

Tổng quát:

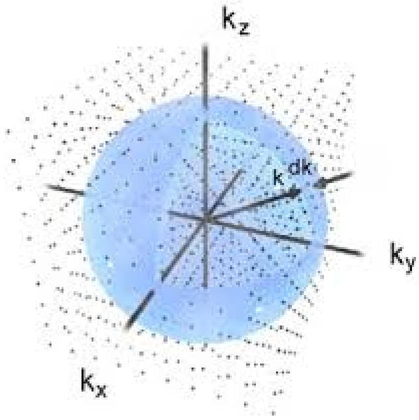
$$\vec{k} = \big(k_x, k_y, k_z\big) = \frac{2\pi}{L}\big(n_x, n_y, n_z\big)$$

Số trạng thái k nằm trong khoảng từ k đến k + dk được xác định bằng cách tính diện tích của vùng không gian được giới hạn bởi các vector k trong vùng k đến k + dk.
Ví dụ trong mặt phẳng 2D:



$$g^{2D}(k)dk = \frac{2\pi k dk}{(2\pi/L)^2} = L^2\frac{k}{2\pi}dk$$

Trong không gian 3D:



$$g^{3D}(k)dk = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3\frac{k^2}{2\pi^2}dk = V\frac{k^2}{2\pi^2}dk$$

Chuẩn hóa:

$$g(k) \equiv g^{3D}(k)/V = \frac{k^2}{2\pi^2}$$

Sau khi tính toán mật độ trạng thái trong không gian k, bây giờ chúng ta có thể tính số lượng trạng thái trên một đơn vị thể tích trên một đơn vị tần số góc $g(\omega)$. Để làm điều này, chúng ta ánh xạ các giá trị của k và $k+dk$ vào các tần số góc tương ứng của chúng, cụ thể là ω và $\omega + d\omega$, và nhớ rằng có hai phân cực photon cho mỗi trạng thái k. Và ta có $\omega = c|k| \Rightarrow d\omega = cdk$ Do đó, chúng ta viết:

$$g(\omega)d\omega = 2g(k)dk \Rightarrow g(\omega) = \frac{2g(k)}{d\omega}dk = \frac{2g(k)}{d\omega/dk} = \frac{2k^2}{2\pi^2 c} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

Vậy ta có:

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{14}$$

5.1

Ta có: $\lambda = 633.10^{-9}m, t = 1.10^{-2}s, p = 0,01.10^{-12} = 10^{-14}W, \eta = 30\%$

a) The count rate

$$R = \frac{\eta P}{\hbar\omega} = \frac{\eta P\lambda}{2c\hbar\pi} = \frac{2\pi.30\%, 10^{-14}.633.10^{-9}}{6,625.10^{-34}.2\pi.3.10^{8}} = 9554,72 \approx 9600 \text{ (số đếm }^{-1}) \tag{15}$$

b) The avarage count number:

$$N(T) = RT = 9600.10^{-2} = 96 \tag{16}$$

c) The standard deviation in the count value (We assume that the detected counts have Poissonian statistics with a standard deviation given by eqn 5.16:

$$\Delta n = \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{N} = \sqrt{9600} = 9.8 \approx 10 \tag{17}$$

5.4

Ta có: $\lambda = 500.10^{-9}(m), T = 2000(K)$
Đặt

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{6,625.10^{-34}3.10^8}{500.10^{-9}.1,38.10^{-23}.2000} = 14.402$$

Mean photon number $\bar{n}$:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} = \frac{1}{14.402 - 1} = 5,56.10^{-7} \text{ photon }^{-1}$$

Tương tự như vậy, ứng với trường hợp $\bar{n} = 1$ thì nhiệt độ được tính:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{1}{e^x - 1} = 1 \\ &\implies e^x = 2 \\ &\implies \frac{hc}{\lambda k_B T} = ln2 \\ &\implies T = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{500.10^{-9}.1,38.10^{-23} ln2} \\ &\implies T = 41555,9(K) \end{aligned} \tag{18}$$

Với $\lambda = 10\mu m$, ta có:

$$T = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{10.10^{-6}.1,38.10^{-23} ln2} = 2077,79(K)$$

5.8

Trong cả 3 trường hợp, số N không đổi:

$$N = \eta\Phi T = 20\%.1000.10 = 2000 \text{ photon }^{-1}$$

(a) Trong phân bố Poisson: $\bar{n} = N$
Ta có:

$$\Delta\bar{N} = \Delta n = \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{N} = 20\sqrt{5}$$

(b) Trong phân bố super-Poisson, đã được cho $\Delta n = 2\Delta n_{Poisson}$
Ta có:

$$N = \eta\bar{n} \implies \bar{n} = \frac{N}{\eta} = \frac{2000}{20\%} = 10000 \text{ photon }^{-1}$$

Độ lệch chuẩn:

$$\begin{aligned} (\Delta\bar{N})^2 &= \eta^2.(2 \times \Delta n_{Poisson})^2 + \eta(1-\eta)\bar{n} \\ &= 0,2^2.(2 \times 20\sqrt{5})^2 + 0,,2.(1-0,2).10000 \\ &= 3200 \\ \implies \Delta\bar{N} &= \sqrt{3200} \end{aligned} \tag{19}$$

(c) Photon đang ở "photon number state", nên $\Delta\bar{N} = 0$

5.9

Ta có: $P = 10.10^{-3}(W),\ \lambda = 632,8.10^{-9}(nm),\ R = 50(\Omega),\ \eta = 90\%$
The photon current:

$$i = e\eta\Phi = e\eta\frac{P}{\hbar\omega} = 90\%.1,6.10^{-19}.\frac{10^{-2}.632,8.10^{-9}}{6,625.10^{-9}.3.10^{8}} = 4,58.10^{-3}(A) \equiv \Delta f$$

Và:

$$\Delta i_{ins} = \sqrt{2e\Delta f\langle i\rangle} = \sqrt{2.1,6.10^{-19}.4,58.10^{-3}} = 3,8.10^{-11}(A)$$

"Noise power":

$$P_{\text{noise}} = (\Delta i_{ins})^2.R_L = (3,8.10^{-11})^2.50 = 7,3.10^{-20}(W)$$

5.12

Ta cần chứng minh rằng Johnson noise nhỏ hơn Shot noise khi $V > \frac{2k_BT}{e}$.

$$(\Delta i)^2_{\text{Johnson}} = \frac{4k_BT\Delta f}{R}, \tag{20}$$

$$(\Delta i)^2_{\text{shot}} = 2e\Delta f I = 2e\Delta f\frac{V}{R} \tag{21}$$

Ta chia tỉ lệ:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta i)^2_{\text{Johnson}}}{(\Delta i)^2_{\text{shot}}} &= \frac{\frac{4k_BT\Delta f}{R}}{2e\Delta f\frac{V}{R}} \\ &= \frac{2k_BT/e}{V} \end{aligned} \tag{22}$$

mà $V > \frac{2k_BT}{e} \implies \frac{2k_BT/e}{V} < 1 \implies (\Delta i)^2_{\text{Johnson}} < (\Delta i)^2_{\text{shot}}$
Vậy nếu $V > \frac{2k_BT}{e}$ thì $(\Delta i)^2_{\text{Johnson}} < (\Delta i)^2_{\text{shot}}$
Tại T=300(K):

$$\begin{aligned} V &= \frac{2k_BT}{e} \\ &= \frac{2.1,38.10^{-23}.300}{1,6.10^{-19}} \\ &= 0,05175 \\ &\equiv 50(mV) \end{aligned} \tag{23}$$

5.13

(a) Năng lượng của photon:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^{8}}{800.10^{-9}1,6.10^{-19}} = 1,553(eV)$$

Với điện thế được cản lại xấp xỉ năng lượng photon $\implies E_{LED} = 1,553(eV)$
$\implies V_R = V - V_{LED} = 9 - 1,553 = 7,447(eV)$
Ta có:

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{7,447}{1000} = 7,447.10^{-3}$$

(b) Ta có $F_{Fano} = \frac{\text{measured noise}}{\text{shot noise limit}}$, với:

Measured noise $\equiv$ Johnson noise:

$$\frac{4k_BT\Delta f}{R}$$

Shot noise limit:

$$P_{noise}(f) = 2e\Delta f\langle i\rangle$$

Ta có:

$$i_{avg} \approx \frac{V}{R_{LED} + R} = \frac{9}{1000 + R_{LED}}$$

Do mạch nối tiếp $\implies \langle i \rangle = i_{avg} = I_R = 7,45.10^{-3}(A)$. Vậy

$$F_{Fano} = \frac{4k_B T \Delta f r^{-1}}{2e\Delta f i_{avg}} = \frac{2.1,38.10^{-23}.293}{10^3.1,6.10^{-19}.7,45.10^{-3}} = 6,678.10^{-3}$$

(c) $I_d = I = \frac{n.q}{dt}$
Tại LED: $N_{em} = n.\eta = n.0,4$
Số photon phát xạ: $N_{em} = n.0,4.0,8$
Số photon nhận được: $N_{cl} = N_{em}.0,9 = n.0,288$
$\implies I_C = \frac{0,288n.q}{dt} = 0,288.I_d = 7,45.10^{-3}.0,288 = 2,15.10^{-3}$
(d) Ta có tổng số quang tử đến photodiode = 40%.80% = $0,32 = \eta_{total}$

$$F_{Fano_{cl}} = 0,32.6,742.10^{-3}.(1 - 0,32) = 0,6822$$

(e) $P_{photon_1} = 2eR_L\Delta f = 2e.50.10.10^3 = 1,6.10^{-13}$
Shot noise: $\langle (\Delta i)^2 \rangle = 2e\Delta f \langle i \rangle = 2.1,6.10^{-19}.10^4.7,45.10^{-3} = 2,38.10^{-17}$
$\implies P_{photon_1} \approx 1,49.10^4.2,38.10^{-17}$

5.5

Ta có số modes trong 3D đã được dẫn ra (đã nhân thêm 2, ứng với 2 phân cực):

$$g^{3D}(k) = \frac{Vk^2}{\pi^2}dk$$

Số sóng:

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} \implies dk = \frac{2\pi}{c}d\nu$$

Thế vào $g^{3D}(k)$, ta có:

$$g^{3D}(\nu) = \frac{V(2\pi)^2\nu^2}{c^2\pi^2}\frac{2\pi}{c}d\nu = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

Vậy ta có số modes trên một đơn vị thể tích theo từng tần số:

$$\frac{N_m}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} = \frac{8\pi}{c\lambda} = \frac{8\pi}{3.10^8.500.10^{-9}} =$$