

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

TRẦN KHÔI NGUYỄN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 17 tháng 11 năm 2024

Chứng minh rằng $(\Delta n)^2 = \sum_n (n - \bar{n})P_\omega(n) = \bar{n} + \bar{n}^2$

Giải:

Đặt $x \equiv \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$, mà từ công thức (5.20) Mark Fox, ta biết $P(\omega)$ có dạng

$$\begin{aligned} P_\omega(n) &= \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} (\exp(-E_n/k_B T))} \\ &= \frac{\exp(-n\hbar\omega/k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} (\exp(n\hbar\omega/k_B T))}, \\ &= \frac{x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta xét chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \tag{2}$$

khi $x < 1$, thì (2) trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \tag{3}$$

dẫn đến ta có thể viết lại $P_\omega(n)$

$$\begin{aligned} P_\omega(n) &= x^n(1 - x) \\ &\equiv \left(1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)\right) \exp(-n\hbar\omega/k_B T). \end{aligned} \tag{4}$$

Số photon trung bình được cho bởi

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\omega}(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n (1-x) \\
&= (1-x)x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \text{ (Tại vì đạo hàm thì số bậc của } x \text{ là } n-1) \\
&= (1-x)x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\
&= (1-x)x \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Phương trình (5) dẫn đến được

$$x = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1},$$

ta thay vào phương trình $P_{\omega}(n) = x^n(1-x)$, và được

$$\begin{aligned}
P_{\omega}(n) &= \left(1 - \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right) \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{\bar{n} + 1}\right) \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^n.
\end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn $\text{Var}(n) \equiv \Delta n$

$$\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 P_{\omega}(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n\bar{n} + \bar{n}^2) x^n (1-x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n (1-x) - \sum_{n=0}^{\infty} 2n\bar{n} x^n (1-x) + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{n}^2 x^n (1-x) \\
&= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - 2\bar{n}(1-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}_{\frac{x}{(1-x)^2}} + \bar{n}^2(1-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\frac{1}{1-x}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Xét số hạng đầu tiên $(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\
\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \right) \\
\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \\
\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n) x^{n-2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Nhân 2 vế của (6) cho x^2 ta được

$$\begin{aligned}
x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
&= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) + x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right). (DPCM)
\end{aligned} \tag{8}$$

Thay vào (6) ta được

$$\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &= (1-x) \left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) + x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \right] - \frac{2\bar{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \bar{n}^2 \\
&= (1-x) \left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-x} \right) + x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \right] - \frac{2\bar{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \bar{n}^2 \\
&= (1-x) \left[\frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \right] - \frac{2\bar{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \bar{n}^2 \\
&= [2\bar{n}^2 + \bar{n}] - 2\bar{n}^2 + \bar{n}^2 \\
&= \bar{n} + \bar{n}^2 (DPCM).
\end{aligned} \tag{9}$$

Chứng minh rằng $\langle \Delta E^2 \rangle = k_B T^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{T}$

Chứng minh rằng $D(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$

Giải:

Mỗi trạng thái \mathbf{k} trong mạng có 1 cặp trạng thái 1 hạt.

$$\begin{cases} 2 \text{ trạng thái chiếm thể tích : } \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \\ ? \text{ số trạng thái chiếm thể tích : } d\mathbf{k} \end{cases}$$

số trạng thái trong $d\mathbf{k}$ là

$$D(k)dk = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d\mathbf{k} = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} k^2,$$

mà

$$\begin{aligned} D(\omega)D\omega &= D(k)dk \\ \Rightarrow D(\omega) &= \frac{D(k)}{d\omega/dk}. \end{aligned}$$

Đặt $\omega = ck$ ta có được

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (DPCM).$$

Bài tập trong Mark Fox

5.1

Ta có bước sóng $\lambda = 633 \text{ nm}$, với công suất là $P = 0.01 \text{ pW}$, với hiệu suất lượng tử là $\eta = 30\%$ với khoảng thời gian là $\tau = 10 \text{ ms}$

(a) Tốc độ đếm $\mathcal{R} = \frac{\eta P}{\hbar \omega} = 0.03 \frac{0.01^{-12}}{\hbar \frac{2\pi c}{\lambda}} = 9553.174 \text{ count/s}$

(b) Tốc độ đếm trung bình $\Phi =$