Tóm tắt QO chương 7

Ngày 23 tháng 12 năm 2024

Nội dung:

1. **Coherent state**
2. **Fock state**
3. **Squeezed light → tương ứng sub-posisson, anti punch light**

1 Light waves as classical harmonic oscillators

$$\text{Light(wave)} \longleftrightarrow \text{H.O}$$

$*$ **H.O**

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ &\quad \rightarrow x = x_0 \sin(\omega t) \\ &\Rightarrow p_x(t) = m\dot{x} = p_0 \cos(\omega t) \quad \text{với } p_0 = m\omega x_0 \end{aligned}$$

Đổi sang hệ tọa độ canonical: $(x, p_x) \rightarrow (q, p)$ với $q \equiv \sqrt{m}x$; $p \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} p_x$

$*$ **Light**

Ánh sáng truyền theo trục z:

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(kz) \sin(\omega t)$$

$\rightarrow$ đã chọn pha $\varphi = 0 \Rightarrow$ Tổng quát $\sin(\omega t + \varphi)$
Tổng quát:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}\varepsilon(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} + c.c$$

trong đó:
+ $\vec{\epsilon}$: Vecto phân cực (vecto đơn vị), vuông góc với $\vec{k}$
+ $\varepsilon(t)$: số phức, là biên, phụ thuộc vào ω, φ

Từ phương trình Maxwell: $-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$:

$$B_y(z; t) = B_0 cos(kz) cos(\omega t) \quad \text{với } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Mật độ năng lượng:

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \quad \text{với } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Năng lượng điện trường:

$$\begin{aligned} E_{\text{electric}} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 A \int_0^L E_0^2 \sin^2(kz)\sin^2(\omega t)\,dz \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_0 A E_0^2 \sin^2(\omega t)\int_0^L (1-\cos(2kz))\,dz \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_0 V E_0^2 \sin^2(\omega t) \end{aligned}$$

trong đó V = L.A (A là diện tích), điều kiện biên $\sin(kL) = 0$

Điều kiện biên chính xác tại các bức tường của buồng cộng hưởng là không quan trọng, vì chúng có thể chỉ bổ sung một hạng tử thay đổi theo 1/L khi thực hiện phép tích phân theo z, và hạng tử này có thể bị bỏ qua khi L đủ lớn. Việc không nhạy cảm với các điều kiện biên là quan trọng vì chúng ta không muốn bất kỳ kết quả cơ bản nào phụ thuộc vào sự có mặt của buồng cộng hưởng.

Năng lượng từ trường:

$$\begin{aligned} E_{\text{magnetic}} &= \frac{1}{2}\mu_0 A \int_0^L B_0^2 \cos^2(kz)\cos^2(\omega t)\,dz \\ &= \frac{1}{4}\mu_0 A B_0^2 \cos^2(\omega t)\int_0^L (1+\cos(2kz))\,dz \\ &= \frac{1}{4}\mu_0 V B_0^2 \cos^2(\omega t). \quad (7.15) \end{aligned}$$

⇒ Năng lượng điện từ:

$$E = \frac{V}{4}\left(\epsilon E_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{B_0^2}{\mu_0}\cos^2(\omega t)\right)$$

Từ đây, ta đưa vào 2 tọa độ mới (E, B) ⇒ (q, p)

$$q(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}}E_0\sin(\omega t) \qquad p(t) = \sqrt{\frac{V}{2\mu_0}}B_0\cos(\omega t)$$

và ta có:

$$p = \dot{q} \qquad \dot{p} = -\omega^2 q$$

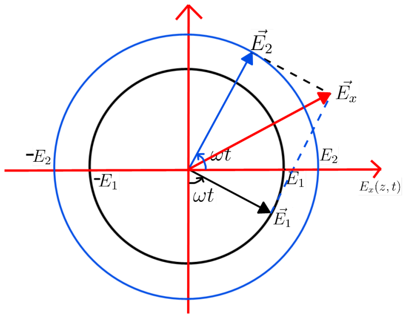
⇒ Tương tự với H.O

2 Biểu đồ pha và trường vuông góc

Xét thêm thành phần pha (phụ thuộc cách chọn gốc thời gian t = 0) :

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0\sin(kz)\sin(\omega t + \phi) \\ &= E_1\sin(\omega t) + E_2\cos(\omega t) \\ &= E_1\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + E_2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

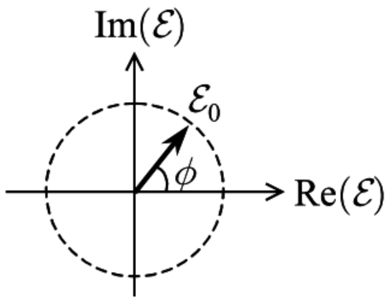
Hình 1:



với $E_1 = E_0 \sin(kz)\cos(\phi)$ và $E_2 = E_0 \sin(kz)\sin(\phi)$ là 2 biên độ của trường điện

E_1 và E_2 được gọi là trường vuông góc do pha lệnh nhau góc $\frac{\pi}{2}$. Ta có thể tích hợp 2 thành phần E_1 và E_2 vào một biểu thức duy nhất bằng cách biểu diễn phức:

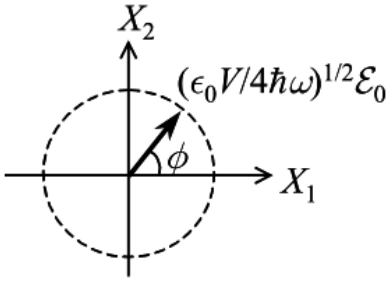
$$\begin{aligned} E(z) &= E_0(z)e^{i\phi} \\ &= E_0\cos(\phi) + iE_0\sin(\phi) \\ &= E_1 + iE_2 \end{aligned}$$



Hình 2: Phasor diagram for a classical wave of amplitude E_0 and phase ϕ

Trong quang học lượng tử, việc làm việc với các đơn vị mà trường không có thứ nguyên là thuận tiện. Do đó, chúng ta vẽ lại biểu đồ pha của trường dưới dạng một vector có độ dài $\sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}}E_0$ và trường vuông góc là X_1 và X_2 được xác định:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}}E_0\sin(\omega t) \qquad X_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}}E_0\cos(\omega t)$$



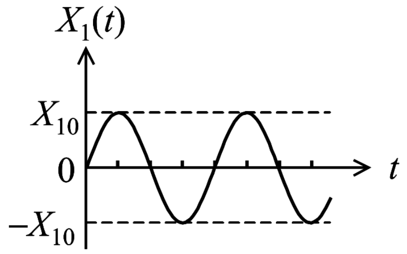
Hình 3: Biểu đồ pha tương đương trong các đơn vị trường vuông góc không có thứ nguyên.

Lúc này trường điện ta có:

$$E_x(z,t) = \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \sin(kz) \left[\cos(\phi)X_1 + \sin(\phi)X_2\right]$$

Tương tự cho từ trường:

$$B_y(z,t) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \cos(kz) \left[\cos(\phi)X_2 - \sin(\phi)X_1\right]$$



Hình 4: Sự phụ thuộc theo thời gian của thành phần trường X_1. Biên độ vuông pha X_{10} được liên hệ với biên độ trường điện E_0 thông qua $\sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}E_0$

Trường vuông góc liên hệ với tọa độ và động lượng tổng quát:

$$X_1(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q(t) \qquad X_2(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}p(t)$$

Thay vì dùng E, B để biểu diễn sóng điện từ, giờ ta dùng trường vuông góc X_1 và X_2

3 Light as a quantum harmonic oscillator

1. Năng lượng được lượng tử hóa theo bội số của $\hbar\omega$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

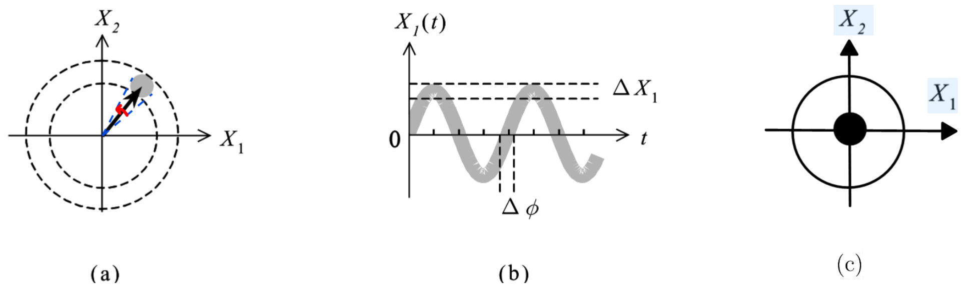
   Nhưng nếu n = 0 : Không có photon nhưng vẫn có năng lượng là $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ (n là số photon chứ không phải số mức trạng thái) $\rightarrow$ Hình ảnh này không có trong cổ điển

2. Nguyên lý bất định

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

   ta có:

$$\begin{aligned} \Delta X_1 \Delta X_2 &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\Delta q \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\Delta p_x \\ &= \frac{1}{2\hbar}\Delta q \Delta p_x \\ &= \frac{1}{2\hbar}\frac{\Delta x}{\sqrt{m}}\sqrt{m}\Delta p_x \\ \Rightarrow \Delta X_1 \Delta X_2 &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Hình 5: (a) Biểu đồ pha cho một trường ánh sáng được lượng tử hóa. (b) Sự phụ thuộc theo thời gian của thành phần X_1 đối với một trường ánh sáng được lượng tử hóa. (c) Bất định với n =0

Vì nó bất định nên cả X_1 và X_2 sẽ có độ bất định riêng của nó, gộp chung với nhau (đang viết trong ngôn ngữ trong hình chữ nhật nhưng ta có thể quy vê hình tròn) diễn tả độ bất định của $\Delta X_1 \Delta X_2$. Bất định trên X_1, X_2 dẫn tới bất định về pha $\Delta\phi$, liên quan tới số hạt (c):

Mở rộng

1. **Cổ điển**

   Xét trường hợp tổng quát của trường điện ở dạng cổ điển:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\varepsilon(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + c.c$$

   Thường ngta chọn $\varepsilon(t)$ có dạng như sau:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^1 e^{-i(\omega t+\phi)}$$

   trong đó ε^1: là đơn mode, có nhiều mode khác nhau nhưng ta đang xét 1 mode.

   Tương tự, ta có trường từ ở dạng cổ điển:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{\epsilon}\times\vec{k}}{\omega}\varepsilon(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + c.c$$

2. **Trường vuông góc - Quadrature component** Đưa vào trường vuông góc Q và P

$$\varepsilon(t) = i\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP)$$
$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\epsilon}\sqrt{2}\varepsilon^1\sqrt{Q^2+P^2}\sin(kr+\phi)$$

3. **Hamiltonian** Từ $H = \int_V u dV = \int_V \frac{1}{2}\left(\epsilon_0|E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|B|^2\right)dV$

$$\rightarrow H = \epsilon_0 V(\varepsilon^1)^2(Q^2+P^2)\left(=\frac{\hbar\omega}{2}(Q^2+P^2)\right)$$

   Ta có $\varepsilon_1 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon V}$

4. **Canonical Quantization**

   Đặt (trong cổ điển):

$$q = \sqrt{\hbar}Q \qquad p\sqrt{\hbar}P$$
$$\rightarrow H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2)$$

Lượng tử hóa lần 1: $\widehat{H}$, $\widehat{q}$, $\widehat{p}$, $[q,p] = i\hbar$

$$\widehat{H} = \frac{\omega}{2}(\widehat{q}^2 + \widehat{p}^2)$$

thay vì làm kiểu này, ta có thể giữ lại Q, P và đưa thêm giao hoán tử $[Q,P] = i$

Lượng tử hóa lần 2: đưa vào toán tử

$$\widehat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{Q} + i\widehat{P}) \qquad \widehat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{Q} - i\widehat{P})$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \widehat{H} &= \frac{\hbar\omega}{2}(Q^2 + P^2) \\ &= \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Trường điện sau khi lượng tử hóa lần 2:

$$\begin{aligned}\widehat{\vec{E}}(\vec{r}) &= i\vec{\epsilon}\varepsilon^1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{Q} + i\widehat{P})e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{Q} - i\widehat{P})e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right] \\ &= i\vec{\epsilon}\varepsilon^1\left(\widehat{a}e^{i\vec{k}\vec{r}} - \widehat{a}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)\end{aligned}$$

Hiện nay toán tử chúng ta đang viết trong bức tranh không phụ thuộc thời gian, thời gian hiện đang nằm trong hàm trạng thái, hàm sóng.

5. **Hàm sóng - hàm trạng thái**

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-i\omega t}$$

Trung bình của trường điện:

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\vec{E}}\rangle &= \langle\psi(t)|\widehat{\vec{E}}(\vec{r})|\psi(t)\rangle \\ \rightarrow \widehat{\vec{E}}(\vec{r},t) &= i\vec{\epsilon}\varepsilon^1\left[\widehat{a}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - \widehat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]\end{aligned}$$

Giờ ta xét:

$$\widehat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) \qquad \widehat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger)$$

$$\begin{aligned}\langle\widehat{Q}\rangle &= \langle n|\widehat{Q}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger|n\rangle = 0 \\ \langle\widehat{P}\rangle &= \langle n|\widehat{P}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger|n\rangle = 0 \\ \langle\widehat{Q}^2\rangle &= \langle n|\widehat{Q}^2|n\rangle = n + \frac{1}{2} \\ \langle\widehat{P}^2\rangle &= \langle n|\widehat{P}^2|n\rangle = n + \frac{1}{2} \\ \rightarrow \Delta Q &= \Delta P = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \Delta Q\Delta P &= n + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4 Trạng thái Fock

Là trạng thái có số hạt xác định $|n\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\langle n\rangle &= \langle n|\widehat{N}|n\rangle = \langle n|\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a}|n\rangle = n \\
\langle n^2\rangle &= \langle n|\widehat{N}^2|n\rangle = n^2 \\
\Delta n &= \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2} = 0 \rightarrow \text{Fock state có số hạt xác định} \\
\langle\widehat{\vec{E}}\rangle &= \langle n|\widehat{\vec{E}}|n\rangle = 0 \rightarrow \text{Dù trạng thái Fock có photon nhưng trung bình của giá trị vật lý E bằng 0} \\
\langle\widehat{\vec{E}}^2\rangle &= \langle n|\widehat{\vec{E}}^2|n\rangle = (\varepsilon^1)^2(2n+1) \\
\Delta\vec{E} &= \sqrt{\langle\widehat{\vec{E}}^2\rangle - \langle\widehat{\vec{E}}\rangle^2} = \varepsilon^1\sqrt{2n+1} : \text{độ thăng giáng của trường điện}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Trạng thái Fock có số hạt xác định không mô tả được thông tin cho cổ điển

<u>Trạng thái chân không</u>: $|0\rangle$ (n=0) Ta có:

$$
\langle\widehat{N}\rangle_0 = 0 \qquad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \langle\widehat{\vec{E}}\rangle_0 = 0 \qquad \Delta\vec{E} = \varepsilon^1 \qquad \Delta\widehat{Q}\Delta\widehat{P} = \frac{1}{2}
$$

$\Rightarrow$ Trạng thái chân không có số hạt = 0 nhưng nó có năng lượng và có độ thăng giáng. Nó lý giải phát xạ tự phát, trong chân không tuy không có trườn, không có hạt nhưng nó có thăng giáng chân không, nó vẫn có nền (nhiễu), chính cái đó tác động gây ra phát xạ tự phát. Trong trạng thái phát xạ tự phát, trạng thái n có số hạt xác định thì sẽ không rơi xuống, hạt nằm im ở đó, xác định thì không thay đổi nên không có nhảy xuống, nhưng do cái thăng giáng chân không như một nhiễu loạn gây ra sự thay đổi trạng thái. Người ta không thể đo được trực tiếp dao động chân không nhưng gián tiếp ta thấy như thế. Ngoài ra còn giải thích cho dịch chuyển lamb và lực Casimir: ta có 2 tấm trung hòa điện, nhưng đo vẫn có lực,....

5 Trạng thái Coherent $|\alpha\rangle$

Dùng trạng thái coherent để có thể đo đạc được trường điện.

α được xây dựng bởi trường vuông góc X_1 và X_2:

$$
\alpha = X_1 + iX_2 = |\alpha|e^{i\phi}
$$

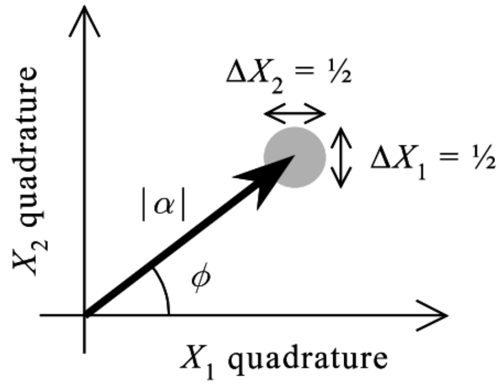
với:

$$
\begin{aligned}
|\alpha| &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}}E_0 \\
X_1 &= |\alpha|\cos(\phi) \\
X_2 &= |\alpha|\sin(\phi)
\end{aligned}
$$

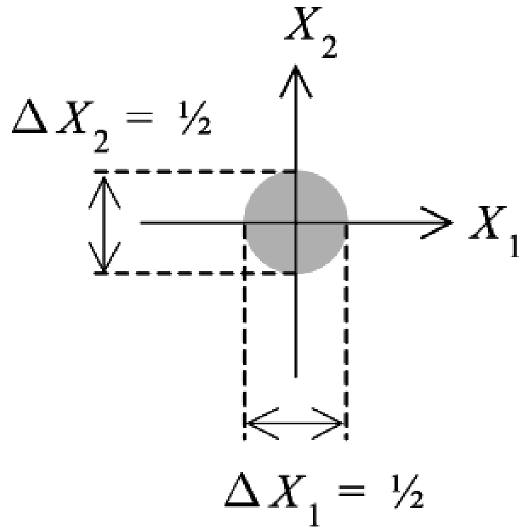
Ta có

$$
\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}
$$

$\rightarrow$ đạt bất định tối thiểu



Hình 6: Biểu đồ pha cho trạng thái kết hợp $|\alpha\rangle$. Độ dài của vector pha (phasor) bằng $|\alpha|$, và góc so với trục X_1 là pha quang học ϕ. Độ bất định lượng tử được biểu diễn bằng một đường tròn có đường kính 1/2 tại đầu mút của vector pha.



Hình 7: Trường hợp $|\alpha| = 0$: trường điện bằng 0

Lúc này, trung bình trường điện:

$$E_{classical} = \hbar\omega|\alpha|^2$$
$$E_{quantum} = \left(\overline{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$\rightarrow$ có thể dùng được cho cổ điển

Mối liên hệ giữa trang thái coherent với trạng thái fock:

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

ngoài ra ta có:

$$\Delta n = \sqrt{\langle\alpha|\widehat{N}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\widehat{N}|\alpha\rangle^2} = \sqrt{\overline{n}}$$

Trạng thái coherent: đúng như chờ đợi

6 Shot noise; bất định về số hạt và số pha

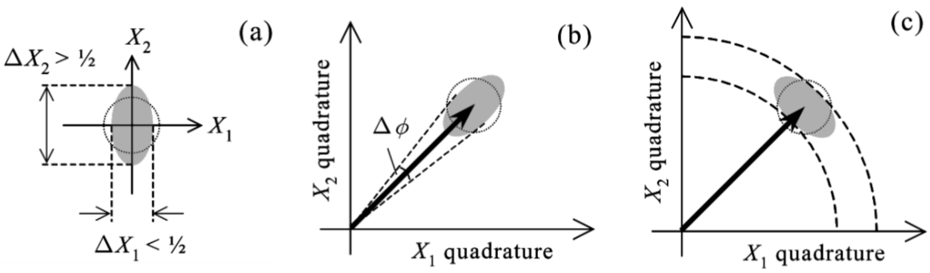
Bất định về pha đi chung với số hạt:

$$\Delta n \Delta \phi \geq \frac{1}{2}$$

trong chương 5, coherent cho ta cái ngưỡng (short noise) là đường thẳng ngang, dưới là sub, trên là super

7 Squeezed states

Bàn tới trạng thái bị bóp nén. Về nguyên tắc bóp đều là hình tròn. Một cái nén theo pha, một cái nén theo biên độ, tuy nhiên diện tích sau khi nén vẫn bảo toàn. Bất định vẫn xảy ra và vẫn tối thiểu để diện tích không đổi.



Hình 8: Các trạng thái nén vuông pha
(a) Trạng thái chân không nén. (b) Ánh sáng nén pha. (c) Ánh sáng nén biên độ.
Đường tròn nét đứt trong mỗi biểu đồ biểu thị độ bất định vuông pha của các trạng thái chân không hoặc trạng thái kết hợp với $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$.