Quantum Optics

TRẦN KHÔI NGUYÊN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 18 tháng 12 năm 2024

Bài tập 1

$$X_1(t) = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q(t)$$
$$X_2(t) = \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} p(t)$$

ta biểu diễn toạ độ chính tắc và động lượng suy rộng dưới dạng x và p_x

$$\begin{cases} X_1(t) &= \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \sqrt{m}x(t) \\ X_2(t) &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{m}}p_x(t) \end{cases} \tag{1}$$

ta có

$$a_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\mp ip + m\omega x\right),$$

và

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a_+ + a_-\right) \\ p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(a_+ - a_-\right) \end{cases} \tag{2}$$

Thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{cases} X_1(t) &= \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \sqrt{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a_+ + a_-\right) \\ X_2(t) &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{m}}i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(a_+ - a_-\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(t) &= \frac{1}{2} \left(a_+ + a_-\right) \\ X_2(t) &= \frac{i}{2} \left(a_+ - a_-\right) \end{cases} \tag{3}$$

Bài tập 2

Ta có

$$\begin{cases} X_1(t) &= \frac{1}{2} \left(a_+ + a_-\right) \\ X_2(t) &= \frac{i}{2} \left(a_+ - a_-\right) \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle \propto \langle n|\, a_+ + a_- \,|n\rangle = 0 \\ \langle X_2 \rangle \propto \langle n|\, a_+ - a_- \,|n\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle X_1^2 \right\rangle \propto \langle n|\, a_+a_+ + a_-a_+ + a_+a_- + a_-a_- \,|n\rangle = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{4} \\ \left\langle X_2^2 \right\rangle \propto \langle n|\, a_+a_+ - a_+a_- - a_-a_+ + a_-a_- \,|n\rangle = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

và

$$\Delta X_1 = \sqrt{\left\langle X_1^2 \right\rangle - \langle X_1 \rangle^2} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}$$
$$\Delta X_2 = \sqrt{\left\langle X_2^2 \right\rangle - \langle X_2 \rangle^2} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}$$

nên ta có

$$\Delta X_1^{\mathrm{VAC}} = \sqrt{\left\langle X_1^2 \right\rangle - \langle X_1 \rangle^2} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}\,\bigg|_{n=0} = \frac{1}{2}$$
$$\Delta X_2^{\mathrm{VAC}} = \sqrt{\left\langle X_2^2 \right\rangle - \langle X_2 \rangle^2} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}\,\bigg|_{n=0} = \frac{1}{2}$$

Bài tập 3

Xét trạng thái cohenrent $|\alpha\rangle$ với $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$. Ta viết lại trạng thái cohenrent dưới dạng $\propto |n\rangle$

$$a_- \,|\alpha\rangle = |\alpha|e^{i\varphi}\,|\alpha\rangle$$

Dẫn tới

$$\begin{aligned} \langle X_1 \rangle &= \langle \alpha|\, X_1 \,|\alpha\rangle \\ &\propto \langle \alpha|\, a_+ \,|\alpha\rangle + \langle \alpha|\, a_- \,|\alpha\rangle \end{aligned}$$

ta có $a_- \,|\alpha\rangle = |\alpha|e^{i\varphi}\,|\alpha\rangle \Leftrightarrow \langle \alpha|\, a_+ = \langle \alpha|\, e^{-i\varphi}|\alpha|$, nên ta có

$$\begin{aligned} \langle X_1 \rangle &\propto e^{-i\varphi}|\alpha|\,\langle \alpha|\alpha\rangle + e^{i\varphi}|\alpha|\,\langle \alpha|\alpha\rangle \\ &\propto 2|\alpha|\cos\varphi \end{aligned}$$

tương tự

$$\begin{aligned}\langle X_2\rangle &\propto e^{-i\varphi}|\alpha|\,\langle\alpha|\alpha\rangle + e^{i\varphi}|\alpha|\,\langle\alpha|\alpha\rangle \\ &\propto 2|\alpha|\sin\varphi\end{aligned}$$

Bài tập 4

Ta viết lại toán tử $X_1^2 + X_2^2$

$$\begin{cases} X_1^2 = \dfrac{1}{4}\left(a_+a_+ + a_-a_+ + a_+a_- + a_-a_-\right) \\ X_2^2 = -\dfrac{1}{4}\left(a_+a_+ - a_-a_+ - a_+a_- + a_-a_-\right) \end{cases}$$

ta có

$$X_1^2 + X_2^2 = \frac{1}{2}\left(a_-a_+ + a_+a_-\right)$$

nên dẫn ra được

$$\begin{aligned}\left(X_1^2 + X_2^2\right)|n\rangle &= \frac{1}{2}\left(a_-a_+ + a_+a_-\right)|n\rangle \\ &= \frac{1}{2}a_-a_+\,|n\rangle + \frac{1}{2}a_+a_-\,|n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{n+1}a_-\,|n+1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{n}a_+\,|n-1\rangle \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\,|n\rangle + \frac{n}{2}\,|n\rangle \\ &= (n+\frac{1}{2})\,|n\rangle\,.\end{aligned}$$

nên ta có được ĐPCM.

Đánh giá số photon dựa trên $\Delta X_1 \Delta X_2$.

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\ &= \frac{i}{4}\left[\left(a_+a_+ + a_-a_+ + a_+a_- + a_-a_-\right) + \left(a_+a_+ - a_-a_+ + a_+a_- - a_-a_-\right)\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[a_-, a_+\right] = \frac{i}{2}\end{aligned}$$

nên ta có

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1/4$$

Bài tập 5

Ta có

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\left\langle a_3^+(t)a_4^+(t+\tau)a_4^-(t+\tau)\right\rangle a_3^-(t)}{\left\langle a_3^+(t+\tau)a_3^-(t+\tau)\right\rangle \left\langle a_4^+(t+\tau)a_4^-(t+\tau)\right\rangle}$$

$$\Rightarrow g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_+a_+a_-a_-\rangle}{\langle a_+a_-\rangle \langle a_+a_-\rangle}$$

Xét tử số

$$\begin{aligned}\langle a_+a_+a_-a_-\rangle &= \langle\alpha|\, a_+a_+a_-a_-\,|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\, a_+(a_-a_+-1)a_-\,|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\, a_+a_-a_+a_-\,|\alpha\rangle - \langle\alpha|\, a_+a_-\,|\alpha\rangle \\ &= |\alpha|^4 - |\alpha|^2\end{aligned}$$

Xét mẫu số

$$\langle a_+a_-\rangle = \langle\alpha|\, a_+a_-\,|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$

nên

$$\begin{aligned}g^{(2)}(0) &= \frac{|\alpha|^4 - |\alpha|^2}{|\alpha|^4} \\ &= 1 - \frac{1}{|\alpha|^2} = 1(\alpha\to\infty)\end{aligned}$$