BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

TRẦN KHÔI NGUYÊN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT

Ngày 17 tháng 11 năm 2024

Chứng minh rằng $(\Delta n)^2 = \sum_n (n - \overline{n}) P_\omega(n) = \overline{n} + \overline{n}^2$

Giải:

Đặt $x \equiv \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$, mà từ công thức (5.20) Mark Fox, ta biết $P(\omega)$ có dạng

$$\begin{aligned} P_\omega(n) &= \frac{\exp\bigl(-E_n/k_B T\bigr)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\exp\bigl(-E_n/k_B T\bigr)} \\ &= \frac{\exp\bigl(-n\hbar\omega/k_B T\bigr)}{\sum_{n=0}^{\infty}(\exp\bigl(n\hbar\omega/k_B T\bigr)}, \\ &= \frac{x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta xét chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \tag{2}$$

khi $x < 1$, thì (2) trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \tag{3}$$

dẫn đến ta có thể viết lại $P_\omega(n)$

$$\begin{aligned} P_\omega(n) &= x^n(1 - x) \\ &\equiv \Bigl(1 - \exp\bigl(-\hbar\omega/k_B T\bigr)\Bigr) \exp\bigl(-n\hbar\omega/k_B T\bigr). \end{aligned} \tag{4}$$

Số photon trung bình được cho bởi

$$
\begin{aligned}
\overline{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_\omega(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n (1-x) \\
&= (1-x) x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \text{(Tại vì đạo hàm thì số bậc của } x \text{ là } n-1) \\
&= (1-x) x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
&= (1-x) x \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{1-\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Phương trình (5) dẫn đến được

$$
x = \frac{\overline{n}}{\overline{n}+1},
$$

ta thay vô phương trình $P_\omega(n) = x^n(1-x)$, và được

$$
\begin{aligned}
P_\omega(n) &= \left(1-\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1}\right)\left(\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{\overline{n}+1}\right)\left(\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Độ lệch chuẩn $\mathrm{Var}(n) \equiv \Delta n$

$$
\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\overline{n})^2 P_\omega(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n\overline{n} + \overline{n}^2) x^n (1-x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n (1-x) - \sum_{n=0}^{\infty} 2n\overline{n} x^n (1-x) + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{n}^2 x^n (1-x) \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - 2\overline{n}(1-x)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}_{\frac{x}{(1-x)^2}} + \overline{n}^2(1-x)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\frac{1}{1-x}}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Xét số hạng đầu tiên $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\
\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}\right) \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2-n) x^{n-2}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Nhân 2 vế của (6) cho x^2 ta được

$$\begin{aligned}
x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
&= x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) + x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).(DPCM) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Thay vô (6) ta được

$$\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &= (1-x)\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) + x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\right] - \frac{2\overline{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \overline{n}^2 \\
&= (1-x)\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] - \frac{2\overline{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \overline{n}^2 \\
&= (1-x)\left[\frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}\right] - \frac{2\overline{n}(1-x)x}{(1-x)^2} + \overline{n}^2 \\
&= \left[2\overline{n}^2 + \overline{n}\right] - 2\overline{n}^2 + \overline{n}^2 \\
&= \overline{n} + \overline{n}^2 (DPCM). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $\langle \Delta E^2 \rangle = k_B T^2 \dfrac{\partial \langle E \rangle}{T}$

Chứng minh rằng $D(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$

Giải:

Mỗi trạng thái $\mathbf{k}$ trong mạng có 1 cặp trạng thái 1 hạt.

$$\begin{cases} \text{2 trạng thái chiếm thể tích : } \left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3 \\ \text{? số trạng thái chiếm thể tích : } d\mathbf{k} \end{cases}$$

số trạng thái trong $d\mathbf{k}$ là

$$D(k)dk = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\mathbf{k} = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} k^2,$$

mà

$$D(\omega)D\omega = D(k)dk$$
$$\Rightarrow D(\omega) = \frac{D(k)}{d\omega/dk}.$$

Đặt $\omega = ck$ ta có được

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}(DPCM).$$