Nội dung chương trình học phần Toán dành cho Kinh tế và Quản trị:

1. Ma trận
2. Hệ phương trình tuyến tính
3. Định thức
4. Giới hạn và liên tục của hàm một biến
5. Phép tính vi phân và cực trị của hàm một biến
6. Phép tính tích phân của hàm một biến
7. Phương trình vi phân
8. Đạo hàm riêng và cực trị của hàm nhiều biến

Tài liệu tham khảo:

1. *Bài tập Toán Cao Cấp* (dành cho khối ngành Kinh tế và Quản trị), Nhóm tác giả, Trường Đại học Kinh tế TP Hồ Chí Minh, 2023.
2. *Nhập môn Giải tích Toán học* (dành cho Thương mại, Kinh tế, Khoa học Đời sống và Khoa học Xã hội), Nhóm dịch giả, NXB Kinh tế TP Hồ Chí Minh, 2017.

Tiêu chuẩn đánh giá sinh viên:

1. Thi giữa học phần: thi vào buổi học thứ tám tại lớp trong thời gian 60 phút, hình thức **tự luận** gồm 4 câu **(**8 điểm), **được dùng tài liệu tham khảo**.
2. Kiểm tra bài tập trên lớp và bài tập về nhà: kiểm tra hằng tuần (2 điểm). Tổng điểm của hai loại đánh giá trên chiếm **30%** số điểm tổng kết môn học.
3. Thi kết thúc học phần: chiếm **70%** số điểm tổng kết môn học, thi (offline) trong thời gian 75 phút, hình thức **trắc nghiệm + tự luận** gồm 10 câu trắc nghiệm (5 điểm) và 2-3 bài tập tự luận (5 điểm), **không dùng tài liệu tham khảo**.

Điện thoại: 0903382994

E-mail: tuannd@ueh.edu.vn

I. Ma trận

1. Các khái niệm.

• Một ***ma trận*** thực A cấp m×n là một bảng chữ nhật gồm m×n số được viết thành m dòng, mỗi dòng có n phần tử (số) như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là ***phần tử*** của ma trận A ở vị trí dòng i và cột j (với i = 1, 2, …, m và j = 1, 2, .., n). Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay ngắn gọn $A = (a_{ij})$.

Ví dụ 1.1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2×3 có $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, … , $a_{23} = 7$.

• Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi i và j, thì A đc gọi là ***ma trận không*** cấp m×n, ký hiệu $A = 0_{m \times n}$.

Ví dụ 1.2: $0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận không cấp 2×3.

• Nếu m = n, thì A được gọi là ***ma trận vuông*** cấp n.

• Nếu A là ma trận vuông cấp n thì đường thẳng chứa $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** của A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• Xét $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n.

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$ (các ptử ở phía dưới đch chính đều = 0) thì A là ***ma trận tam giác trên***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i < j$ (<u>các ptử ở phía trên đch chính đều = 0</u>) thì A là ***ma trận tam giác dưới***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ (<u>các phần tử ngoài đường chéo chính đều = 0</u>) thì A được gọi là ***ma trận đường chéo***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• Ma trận đường chéo cấp n với tất cả <u>các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1</u> được gọi là ***ma trận đơn vị cấp n***:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 1.3: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 2,

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

• ***Ma trận bằng nhau.*** Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (cùng cấp). Khi đó:

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j}.$$

Ví dụ 1.4: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & a \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} b & c \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Khi đó, A = B ⇔ b = 1, c = − 2 và a = 4.

2. Các phép toán trên ma trận.

2.1 Ma trận chuyển vị.

• Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi đó ***ma trận chuyển vị*** của A, ký hiệu A^T, là ma trận xác định bởi:

$$\mathbf{A^T = (a_{ji})_{n\times m}}$$

(với i = 1, 2, …, m, dòng thứ i của ma trận A là cột thứ i của ma trận A^T và ngược lại).

Ví dụ 1.5: Với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

• *Tính chất:* Cho A và B là các mtr cấp m×n. Khi đó:

1. $(A^T)^T = A$, **2.** $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$.

2.2 Phép nhân một số với ma trận.

• Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số thực α. ***Tích*** của α với A, ký hiệu αA, là ma trận xác định bởi:

$$\mathbf{\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}}.$$

Nếu $\alpha = -1$ thì $(-1)A = -A$ được gọi là ***ma trận đối*** của A.

Ví dụ 1.6: Với $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ thì

$$2A=\begin{pmatrix}8 & 6 & 2\\ 4 & -14 & 10\end{pmatrix},\ -3A=\begin{pmatrix}-12 & -9 & -3\\ -6 & 21 & -15\end{pmatrix}\text{ và }-A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -1\\ -2 & 7 & -5\end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* Cho A là mtr cấp m×n và α, β là các số thực. Khi đó:

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$, **2.** $(\alpha A)^T=\alpha A^T$.

2.3 Phép cộng (trừ) ma trận.

• Cho các ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ và $B=(b_{ij})_{m\times n}$. ***Tổng*** của A và B, ký hiệu A + B, là ma trận xác định bởi:

$$\mathbf{A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}}.$$

Hiệu của A và B:

$$\mathbf{A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}}.$$

Ví dụ 1.7: Với $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & -6 & 8\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$ thì

$$A+B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 4\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ -1 & -12 & 7\end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* Cho A, B, C là các mtr cấp m×n và α, β là các số thực. Khi đó:

1. $A+B=B+A$ (giao hoán),

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (kết hợp),

3. $0_{m\times n}+A=A+0_{m\times n}=A$,

4. $A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$,

5. $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$,

6. 1.A = A,

7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

2.4 Tích ma trận.

• Cho các ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times p}$ (số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B (bằng n)). ***Tích*** của A và B, ký hiệu $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, là ma trận cấp **m×p** xác định bởi:

$$\mathbf{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \forall i, j}$$

(tích vô hướng của dòng i trong ma trận A và cột j trong ma trận B).

Ví dụ 1.8: Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Khi đó:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2+3.(-3)+1.4 & 5.(-4)+3.7+1.(-6) \\ 7.2+6(-3)+8.4 & 7.(-4)+6.7+8.(-6) \\ 3.2+2.(-3)+2.4 & 3.(-4)+2.7+2.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 28 & -34 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tuy nhiên, tích BA không tồn tại (vì số cột của B khác số dòng của A).

• ***Lưu ý:*** **+** Nếu tích AB tồn tại thì chưa chắc tích BA tồn tại.

+ Khi A và B là các ma trận vuông cấp n thì các tích AB và BA tồn tại nhưng nói chung ta có $AB \neq BA$.

+ Có thể xảy ra trường hợp $A \neq 0$ và $B \neq 0$ nhưng $AB = 0$.

Ví dụ 1.9: Với $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2}$ thì $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$.

• *Tính chất:* Cho các ma trận A, A' cấp m×n; B, B' cấp n×p; C cấp p×q và α là số thực. Khi đó:

1. $(AB)C = A(BC)$ (kết hợp),

2. $A.0_{n\times p} = 0_{m\times p},\ 0_{r\times m}A = 0_{r\times n}$,

3. $AI_n = A,\ I_mA = A$,

4. $A(B \pm B') = AB \pm AB'$,

5. $(A \pm A')B = AB \pm A'B$,

6. $(AB)^T = B^TA^T$,

7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

2.5 Lũy thừa ma trận.

• Cho A là ma trận vuông cấp n và k là số tự nhiên. ***Lũy thừa*** bậc k của A, ký hiệu A^k, là ma trận vuông cấp n được xác định bởi:

$$\mathbf{A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^2 = A.A,\ \ldots,\ A^k = A^{k-1}.A}.$$

Ví dụ 1.10: Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ta có:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A,$$

$$A^4 = A^3.A = A.A = I_2,$$

$$A^5 = A^4.A = I_2.A = A, \ldots.$$

Vậy $A^{2n} = I_2$ và $A^{2n+1} = A$ với mọi n = 0, 1, 2, ….

Ta có thể viết kết quả bằng cách khác:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix},\ \forall\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

• *Tính chất:* Cho A là mtr vuông cấp n và k, l là các số tự nhiên. Khi đó:

1. $I_n^k = I_n,\ 0_{n\times n}^k = 0_{n\times n}\ (k \neq 0)$,

2. $A^{k+l} = A^k.A^l$,

3. $A^{kl} = (A^k)^l$.

Bài tập 1.1: Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Tính $A + A^T$, $A - A^T$, $A.A^T$, $A^T.A$, A^2 và A^3.
2. Tìm mtr X sao cho $3X + 2A^T = I_3$.
3. Tìm mtr Y sao cho $2Y^T - 3A^T = I_3$.

1. Ta tính được:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3},$$

$A^4 = A^5 = \ldots = 0_{3\times 3}$.

2. Ta có:

$3X + 2A^T = I_3$

$\Leftrightarrow 3X = I_3 - 2A^T$

$\Leftrightarrow X = (1/3).(I_3 - 2A^T)$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Ta có:

$2Y^T - 3A^T = I_3$

$\Leftrightarrow 2Y^T = 3A^T + I_3$

$\Leftrightarrow Y^T = (1/2).(3A^T + I_3)$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 1.2: Tính các lũy thừa: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, ta tính được:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A,$$

$$A^4 = A^3.A = A.A = I_2,$$

$$A^5 = A^4.A = I_2.A = A, \ldots.$$

Vậy $A^{2n} = I_2$ và $A^{2n+1} = A$ với mọi n = 0, 1, 2, ….

3. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận.

3.1 Định nghĩa các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

• Cho A là ma trận cấp m×n. Có ba ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng*** biến ma trận A thành ma trận A' cấp m×n như sau.

(1) Hoán vị dòng i và dòng j của A với nhau:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{d_i \leftrightarrow d_j}} \mathbf{A}'.$$

(2) Thay dòng i của A bằng α lần dòng i của A (α ≠ 0):

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{d_i}} \mathbf{A}'.$$

(3) Thay dòng i của A bằng dòng i cộng α lần dòng j của A ($\alpha \in \mathbb{R}$, $i \neq j$):

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{d_i + \boldsymbol{\alpha} d_j}} \mathbf{A}'.$$

Ví dụ 1.11: $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\5&8&-3\end{pmatrix}$. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\5&8&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1\leftrightarrow d_2}A'=\begin{pmatrix}-4&7&6\\2&-1&3\\5&8&-3\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\5&8&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-2d_2}A'=\begin{pmatrix}2&-1&3\\8&-14&-12\\5&8&-3\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\5&8&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2+2d_1}A'=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&5&12\\5&8&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2d_3-5d_1}\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&5&12\\0&21&-21\end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* **(1)** Nếu $\mathbf{A}\xrightarrow{\mathbf{d_i\leftrightarrow d_j}}\mathbf{A'}$ thì $\mathbf{A'}\xrightarrow{\mathbf{d_i\leftrightarrow d_j}}\mathbf{A}$.

(2) Nếu $\mathbf{A}\xrightarrow{\alpha\mathbf{d_i}}\mathbf{A'}$ thì $\mathbf{A'}\xrightarrow{\frac{1}{\alpha}\mathbf{d_i}}\mathbf{A}$.

(3) Nếu $\mathbf{A}\xrightarrow{\mathbf{d_i}+\alpha\mathbf{d_j}}\mathbf{A'}$ thì $\mathbf{A'}\xrightarrow{\mathbf{d_i}-\alpha\mathbf{d_j}}\mathbf{A}$.

• ***Lưu ý:*** Ta cũng có ba ***phép biến đổi sơ cấp trên cột*** của ma trận và các tính chất tương tự như trên.

3.2 Ma trận bậc thang.

• ***Ma trận bậc thang*** là ma trận có hai tính chất sau:

+ các dòng khác không nằm trên các dòng không (nếu có),

+ trên hai dòng khác không (nếu có) bất kỳ, phần tử khác 0 đầu tiên ở dòng dưới nằm bên phải phần tử khác 0 đầu tiên ở dòng trên.

Ví dụ 1.12: Các ma trận sau đây là các ma trận bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&5&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&2&1&0&7\\0&0&7&-2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Các ma trận sau đây không phải là các ma trận bậc thang:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0&1&0&1&2\\0&2&0&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

3.3 Hạng của ma trận.

• Cho A là ma trận tùy ý.

+ Nếu A là ma trận bậc thang thì **hạng** của A, ký hiệu **r(A)** (hay **R(A)**), là số <u>dòng khác không của</u> A.

+ Nếu A không phải là ma trận bậc thang thì ta biến đổi A thành ma trận bậc thang B. Khi đó, hạng của A là r(A) = r(B).

Ví dụ 1.13: Trong **ví dụ 1.12** trên, ta có: r(A) = 3, r(B) = 2 và r(C) = 1. Hơn nữa:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\begin{pmatrix}2&0&5&-1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=D' \Rightarrow r(D)=r(D')=2.$$

$$E=\begin{pmatrix}0&1&0&1&2\\0&2&0&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2-2d_1}\begin{pmatrix}0&1&0&1&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=E' \Rightarrow r(E)=r(E')=2.$$

• *Tính chất:* Cho A và B là các mtr cấp m×n. Khi đó:

1. $0\le r(A)\le \min\{m, n\}$,

2. $r(A)=0 \Leftrightarrow A=0_{m\times n}$,

3. $r(A^T)=r(A)$,

4. nếu B nhận được từ A qua một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thì r(A) = r(B).

3.4 Thuật toán Gauss để biến đổi ma trận cho trước thành ma trận bậc thang.

Ví dụ 1.14: 1. $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\6&7&33\end{pmatrix}$. **2.** $A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\-1&3&0&7\\3&1&2&9\end{pmatrix}$.

Ta biến đổi:

1. $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&7&6\\6&7&33\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1}\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&5&12\\0&10&24\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-2d_2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&5&12\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Do đó, r(A) = 2.

2. $A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\-1&3&0&7\\3&1&2&9\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+d_1}\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&5&1&12\\0&-5&-1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3+d_2}\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&5&1&12\\0&0&0&6\end{pmatrix}$.

Do đó, r(A) = 3.

Bài tập 1.3: Biến đổi ma trận A sau đây thành ma trận bậc thang rồi suy ra hạng r(A):

1. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&-3\\-1&1&4\end{pmatrix}$,

2. $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&2&3\\-2&2&6&4\\1&-3&1&4\end{pmatrix}$,

3. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-3&2\end{pmatrix}$,

4. $A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\1&3&4&-2\\1&1&2&1\end{pmatrix}$.

1. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&-3\\-1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&-5\\0&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{5d_3+4d_2}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&-5\\0&0&5\end{pmatrix}$.

Do đó, r(A) = 3.

3. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-3d_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&4\\0&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-d_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&4\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Do đó, r(A) = 3.

2. $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&2&3\\-2&2&6&4\\1&-3&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4-d_1]{d_3+2d_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&2&3\\0&-2&4&4\\0&-1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3-2d_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&2&3\\0&0&0&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{2d_4+d_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&2&3\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$

Do đó, r(A) = 3.

4. $A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\1&3&4&-2\\1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4-d_3]{2d_3-d_1}\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\0&5&5&-3\\0&-2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4+d_2]{2d_3-5d_2}\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\0&0&5&-16\\0&0&-1&5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{5d_4+d_3}\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\0&0&5&-16\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$

Do đó, r(A) = 4.

Bài tập 1.4: Tìm hạng của các ma trận sau theo tham số thực m:

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-3&m\end{pmatrix}$, **2.** $A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\1&3&4&-2\\m&1&2&1\end{pmatrix}$.

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-3&m\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-3d_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&4\\0&-5&m+1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-d_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&4\\0&0&m-3\end{pmatrix}.$

Do đó: + với $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ thì r(A) = 2,

+ với $m-3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 3$ thì r(A) = 3.

2. $A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\0&2&1&2\\1&3&4&-2\\m&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}-1&1&3&2\\2&2&1&0\\-2&3&4&1\\1&1&2&m\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4+d_1]{d_2+2d_1,d_3+d_2}\begin{pmatrix}-1&1&3&2\\0&4&7&4\\0&5&5&1\\0&2&5&m+2\end{pmatrix}\xrightarrow[2d_4-d_2]{4d_3-5d_2}\begin{pmatrix}-1&1&3&2\\0&4&7&4\\0&0&-15&-16\\0&0&3&2m\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5d_4+d_3}\begin{pmatrix}-1&1&3&2\\0&4&7&4\\0&0&-15&-16\\0&0&0&10m-16\end{pmatrix}.$$

Do đó: + với $10m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 8/5$ thì $r(A) = 3$,

+ với $10m - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 8/5$ thì $r(A) = 4$.

Bài tập 1.5: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-3&m\end{pmatrix}$. Tìm m sao cho r(A) = 3? r(A) = 2? r(A) = 1?

Từ cách giải **Bài tập 1.4 câu 1** ở trên, ta kết luận:

+ với $m \neq 3$ thì $r(A) = 3$,

+ với $m = 3$ thì $r(A) = 2$,

+ không tồn tại m để $r(A) = 1$.

* **Bài tập** liên quan đến các phép toán trên ma trận và hạng của ma trận trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: **các trang từ 42 đến 52**.

II. Hệ phương trình tuyến tính

1. *Định nghĩa.*

• ***Hệ phương trình*** (hpt) ***tuyến tính*** là một hệ thống gồm m phương trình bậc nhất n ẩn có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (\mathrm{I})$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là các ***hệ số,*** $b_i \in \mathbb{R}$ là các ***hệ số tự do*** và $x_j \in \mathbb{R}$ là các ***ẩn*** cần tìm (với i = 1, 2, …, m và j = 1, 2, …, n).

• Nếu hpt (I) có $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ thì (I) được gọi là ***hpt tuyến tính thuần nhất***.

• Trong hpt (I), ta đặt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

thì hpt (I) tương đương dạng ma trận: **AX = B**. Ta nói

A: ***ma trận hệ số***, X: ***cột các ẩn*** và B: ***cột hệ số tự do***.

Ký hiệu $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$, tức là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

thì $\overline{A}$ được gọi là ***ma trận mở rộng*** (hay ***ma trận bổ sung***) của hpt (I).

• Hpt tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu biết ma trận mở rộng của hệ.

Ví dụ 2.1: Hệ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ là một hpt tuyến tính gồm 2 phương trình 3 ẩn. Ma trận mở rộng của hệ là:

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Ta thấy rằng:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Do đó, hpt đã cho tương đương dạng ma trận: AX = B.

2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

• Ta nói bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là một ***nghiệm*** của hpt (I) nếu thay $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ vào (I) thì tất cả các đẳng thức đều thỏa.

Rõ ràng, hpt tuyến tính thuần nhất luôn có một ***nghiệm tầm thường*** là (0, 0, …, 0).

• Hai hpt tuyến tính (có cùng số ẩn) được gọi là ***tương đương*** với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

• *Định lý:* Cho hai hpt tuyến tính có các ma trận mở rộng lần lượt là $\overline{A} = (A\,|\,B)$ và $\overline{C} = (C\,|\,D)$. Nếu ma trận $\overline{C}$ nhận được từ ma trận $\overline{A}$ bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thì hai hpt đã cho <u>tương đương với nhau</u>.

Giải thích: Xét hai hpt tuyến tính (I) và (II) có ma trận mở rộng lần lượt là $\overline{A}$ và $\overline{C}$. Khi đó, nếu $\overline{A} \to \dots \to \dots \to \overline{C}$ thì (I) ⇔ (II).

• ***Thuật toán Gauss*** để giải hpt tuyến tính AX = B.

+ Viết ma trận mở rộng của hệ: $\overline{A} = (A\,|\,B)$.

+ Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi $\overline{A}$ thành ma trận bậc thang và viết hpt tương ứng với ma trận bậc thang này.

+ Giải hpt tương ứng từ ph.trình dưới lên ph.trình trên để suy ra nghiệm của hpt đã cho.

Ví dụ 2.2: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 \qquad\quad - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 \; + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Ta biến đổi ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3+d_2]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{4d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \end{array}\right).$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad\qquad - x_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -16. \end{cases}$

Vậy, hpt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x_1, x_2, x_3) = (23, 5, -16)$.

($r(\overline{A}) = 3 = r(A)$: hpt có nghiệm duy nhất.)

Ví dụ 2.3: $\begin{cases} x_1 \; - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 \; + x_3 = 0. \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Dòng 3 của ma trận cuối tương ứng phương trình:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2 \text{: điều vô lý.}$$

Vậy, hpt đã cho vô nghiệm.

($r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2$: hpt vô nghiệm.)

Ví dụ 2.4: $\begin{cases} x_1 \; - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 \; + x_3 = 1 \end{cases}.$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ \quad 4x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 5/4 \\ x_2 = t - 3/4 \\ x_3 = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}$ tùy ý).

(x_3: ẩn tự do; x_1, x_2: ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt đã cho có vô số ngh: $(x_1, x_2, x_3) = (-2t + 5/4, t - 3/4, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

($r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là 3 – 2 = 1.)

Ví dụ 2.5: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Ta biến đổi ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 5d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9t \\ x_2 = -7t \\ x_3 = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}$ tùy ý).

Vậy, hpt đã cho có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (9t, -7t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

($r(A) = 2 < 3$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là 3 – 2 = 1.)

• *Định lý:* Xét hpt tuyến tính AX = B gồm m phương trình n ẩn với ma trận mở rộng là $\overline{A} = (A \mid B)$. Khi đó:

1. nếu $\mathbf{r(\overline{A}) \neq r(A)}$ thì **hpt vô nghiệm**,
2. nếu $\mathbf{r(\overline{A}) = r(A) = n}$ thì **hpt có nghiệm duy nhất**,
3. nếu $\mathbf{r(\overline{A}) = r(A) < n}$ thì **hpt có vô số nghiệm** với số ẩn tự do là n – r(A).

(Do đó, **hpt có nghiệm** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{r(\overline{A}) = r(A)}$ và **hpt vô nghiệm** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{r(\overline{A}) \neq r(A)}$.)

• *Lưu ý:* Xét hpt tuyến tính thuần nhất AX = 0 gồm m phtr n ẩn. Khi đó vì $\mathbf{r(\overline{A}) = r(A)}$, hệ luôn có nghiệm (ít nhất một nghiệm X = 0). Hơn nữa:

1. nếu $\mathbf{r(A) = n}$ thì **hpt có nghiệm duy nhất** (là nghiệm tầm thường X = 0),
2. nếu $\mathbf{r(A) < n}$ thì **hpt có vô số nghiệm** với số ẩn tự do là n – r(A).

Bài tập 2.1: Giải các hpt sau bằng phương pháp Gauss:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x - 7y + 4z = -5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 16x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 7z = 0 \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$

Bài tập 2.2: Giải các hpt sau bằng phương pháp Gauss:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

1. $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1, d_4-3d_2]{2d_2-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -12 & 3 & -9 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4-2d_3]{d_3+2d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{3d_4+2d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -7 \end{array}\right).$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ -6x_3 - 9x_4 = 1 \\ 9x_4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = ... \\ x_2 = ... \\ x_3 = ... \\ x_4 = -7/9. \end{cases}$

Vậy, hpt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\ldots, \ldots, \ldots, -7/9)$.

($r(\overline{A}) = 4 = r(A)$: hpt có nghiệm duy nhất.)

2. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 7 \\ 4 & -8 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2,d_4-2d_3]{3d_2-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & -17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3/11,d_4/17]{d_2/7} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4+d_3]{d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ \qquad\qquad -x_3 \qquad\quad = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2m + n \\ x_2 = m \\ x_3 = 1 \\ x_4 = n \end{cases}$ $(m, n \in \mathbb{R}$ tùy ý).

(x_2, x_4: ẩn tự do; x_1, x_3: ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt đã cho có vô số ngh: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2m + n, m, 1, n)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ tùy ý.

($r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 4$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là 4 – 2 = 2.)

3. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2d_3-d_2,d_4-d_2]{3d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+2d_3]{d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{d_4+6d_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right).$$

Dòng 4 của ma trận cuối tương ứng phương trình:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -32$: điều vô lý.

Vậy, hpt đã cho vô nghiệm.

($r(\overline{A}) = 4 \neq r(A) = 3$: hpt vô nghiệm.)

4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 6 & -2 & 4\\ -2 & -4 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3+2d_2,d_4+d_3]{d_2+d_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2\\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_4}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{2d_4-d_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=0\\ \quad -8x_2+4x_3\qquad +2x_5=0\\ \qquad\qquad 4x_3\qquad +2x_5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=m-n/2\\ x_2=0\\ x_3=-n/2\\ x_4=m\\ x_5=n\end{cases}$ $(m,n\in\mathbb{R}$ tùy ý).

(x_4, x_5: ẩn tự do; x_1, x_2, x_3: ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt có VSN: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (m - n/2, 0, - n/2, m, n)$ với $m,n\in\mathbb{R}$ tùy ý.

($r(A)=3<5$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là 5 – 3 = 2.)

Bài tập 2.3: Tìm m để hpt sau vô nghiệm:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=m.\end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 7 & -4 & 11 & m\end{array}\right)\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3\\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5\end{array}\right).$$

Do đó, hpt đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow r(\overline{A})\neq r(A)$

$\Leftrightarrow\ r(\overline{A}) \neq 2$ (vì $r(A) = 2$)

$\Leftrightarrow m - 5 \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 5.$

Bài tập 2.4: Tìm m để hpt sau có nghiệm duy nhất? có nghiệm?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = m. \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 & m \end{array}\right) \xrightarrow[3d_3-d_2,d_4-4d_3]{2d_2-3d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -5 & m-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_3]{d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array}\right).$$

Do đó, hpt đã cho có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow\ r(\overline{A}) = r(A) = 4$. (*)

Ta thấy r(A) = 3 $\Rightarrow$ Điều kiện (*) không thỏa.

Vậy, không tồn tại m để hpt đã cho có nghiệm duy nhất.

Hơn nữa, hpt đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\ r(\overline{A}) = r(A)$

$\Leftrightarrow\ r(\overline{A}) = 3$ (vì r(A) = 3)

$\Leftrightarrow$ m − 3 = 0

$\Leftrightarrow$ m = 3.

Bài tập 2.5: Tìm m để hpt sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} 3x_1 \ -x_2-4x_3-3x_4=0 \\ -5x_1+2x_2+6x_3+9x_4=0 \\ 2x_1 \ -x_2-2x_3-6x_4=0 \\ 4x_1 \ -x_2-6x_3+mx_4=0. \end{cases}$$

Ta có:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -6 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & -5 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & 4 & -6 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-d_1, d_4-d_3]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & m+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_3]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, hpt đã cho có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $r(A) < 4$. (*)

Ta thấy: + với $m = 0$ thì $r(A) = 2 < 4 \Rightarrow$ Điều kiện (*) thỏa,

+ với $m \neq 0$ thì $r(A) = 3 < 4 \Rightarrow$ Điều kiện (*) thỏa.

Vậy, với mọi m, hpt đã cho có vô số nghiệm.

Bài tập 2.6: Tìm a để hpt sau:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax+y+2z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$$

1. có nghiệm, **2.** có duy nhất nghiệm, **3.** có vô số nghiệm.

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - ad_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right).$$

* $1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Khi đó: $\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2 : \text{hpt vô nghiệm.}$$

* $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Khi đó: $\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2 : \text{hpt vô nghiệm.}$$

* $1 - a \neq 0$ và $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq 2$. Khi đó:

$$r(\overline{A}) = 3 = r(A) : \text{hpt có nghiệm duy nhất.}$$

Kết luận: **1.** $a \neq 1$ và $a \neq 2$: hpt có nghiệm,

2. $a \neq 1$ và $a \neq 2$: hpt có nghiệm duy nhất,

3. không tồn tại a để hpt có vô số nghiệm.

Bài tập 2.7: Tìm tất cả các ma trận giao hoán được với các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 2.8: Tìm ma trận vuông cấp hai sao cho bình phương của nó bằng ma trận đơn vị.

Bài tập 2.9: Bằng phương pháp Gauss, giải và biện luận hpt sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m. \end{cases}$$

* **Bài tập** liên quan đến việc giải hệ ph. trình tuyến tính (dùng ph. Pháp Gauss) và các tính chất tập nghiệm của hệ (dùng hạng ma trận) trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: **các trang từ 90 đến 95**.

III. Định thức

1. *Định nghĩa và các tính chất.*

• *Định nghĩa:* Cho A là ma trận vuông cấp n. ***Định thức*** của A, ký hiệu **|A|** (hay **det(A)**), là một số thực được xác định như sau.

+ n = 1: với A = (a) thì **|A| = a**.

+ n = 2: với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì **|A| = ad – bc**.

+ n = 3: với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ thì ta có thể tính |A| bằng quy tắc như sau:

$$(+)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad\qquad (-)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}\,a_{13}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}\,a_{33})}.$$

Các số hạng trong nhóm thứ nhất có dấu + là: tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, tích các ph tử nằm trên đường thẳng song song đường chéo chính với ph tử ở góc đối diện.

Các số hạng trong nhóm thứ hai có dấu − là: tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ, tích các ph tử nằm trên đường thẳng song song đường chéo phụ với ph tử ở góc đối diện.

+ Tổng quát n ≥ 3: với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

thì công thức ***khai triển* |A| *theo dòng i*** là:

$$\mathbf{|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

và công thức ***khai triển* |A| *theo cột j*** là:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Ở đây, A_{ij} là ***phần bù đại số*** của a_{ij} trong |A| xác định bởi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij},$$

với M_{ij} là ***định thức con*** cấp n – 1 có được từ |A| bằng cách <u>bỏ đi dòng i và cột j của |A|</u>.

Ví dụ 3.1: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 4.(-3) = 14.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1.1.3 + (-1).1.1 + 2.(-2).3 - 3.1.1 - (-1).2.3 - 1.(-2).1 = -5.$$

Ví dụ 3.2: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -m \\ 2m & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (-1).5.3 + 2m.(-2).(-m) + 4.1.3 - (-m).5.3 - 4.2m.3 - 1.(-2).(-1)$$
$$= -15 + 4m^2 + 12 + 15m - 24m - 2$$
$$= 4m^2 - 9m - 5.$$

Ví dụ 3.3: 1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ (ktr } \mathbf{|A|} \text{ theo } \mathbf{dòng\ 1}\text{)}$$

$$= 6 + 2 + 1 - 9 - 3.(-6 - 1 - 6) = 39.$$

Cách khác: $|A| = 3.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (kh.triển **|A|** theo **cột 2**)

$= 3.(2 + 6 + 6 - 3) - (-1 - 3 - 2) = 39.$

2. $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 12) = 8$ (ktr **|B|** theo **cột 1**).

Cách khác: $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.(-2 + 6) = 8$

(khai triển **|B|** theo **dòng 3**).

• *Tính chất:* Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó:

1. $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$,
2. nếu A có một dòng (hay cột) bằng không thì |A| = 0,
3. nếu A là mtr tam giác thì |A| bằng tích các phần tử trên đường chéo chính của A,
4. nếu các phần tử trên một dòng (hay cột) của định thức đều có thừa số chung là α thì ta có thể rút α ra ngoài định thức làm nhân tử chung,

   hệ quả: $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n.|\mathbf{A}|$,
5. nếu A có hai dòng (hay cột) tỉ lệ với nhau thì |A| = 0,
6. nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$.

   hệ quả: nếu A là mtr vuông và k là số tự nhiên thì $|\mathbf{A}^k| = |\mathbf{A}|^k$.

Ví dụ 3.4: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Ví dụ 3.5: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (vì dòng 2 bằng 3 lần dòng 1).

Ví dụ 3.6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, |A| = 1.1 – (−1).2 = 3.

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, |B| = (−1).1 – 2.3 = −7.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, |AB| = 5.(−1) – 4.4 = −21 = |A|.|B|.

2. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp.

• *Tính chất:* Cho A và A' là các ma trận vuông cấp n. Khi đó:

1. nếu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ thì $|A'| = -|A|$,

2. nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $|A'| = \alpha|A|$,

3. nếu $A \xrightarrow{d_i + \alpha d_j} A'$ thì $|A'| = |A|$.

Ví dụ 3.7: 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$|A| = -5$, $|A'| = 5 = -|A|$.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ ($d_1 \leftrightarrow d_2$).

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$|A| = -5$, $|A'| = -10 = 2|A|$.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ ($2d_2$).

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 - \frac{1}{2}d_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix}$.

$|A| = -5$, $|A'| = -5 = |A|$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5/2 \end{vmatrix} \ (d_2 - d_1/2).$$

* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2 - d_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$

$|A| = -5$, $|A'| = -10 = 2|A|$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \ (2d_2 - d_1).$$

• *Lưu ý:* + Ta cũng có các tính chất liên quan đến định thức và các <u>phép biến đổi sơ cấp trên cột</u> tương tự như trên.

+ Ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng ***thuộc loại 3*** để biến đổi các phần tử trên một cột của định thức thành số 0 (giữ lại một phần tử khác 0 làm chuẩn). Sau đó, khai triển định thức theo cột này, ta được <u>định thức giảm cấp</u>.

Ví dụ 3.8: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \ (d_2 - 2d_1,\ d_3 - 2d_2,\ d_4 - d_2)$$

$$= 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \ \text{(khai triển định thức theo } \textbf{cột 1}\text{)}$$

$= 3 + 6 + 60 + 24 + 15 - 3 = 105.$

Bài tập 3.1: Tìm m để định thức sau có giá trị bằng 0:

1. $\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{vmatrix}$.

1. $|A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3m + 2 + 4 + 3 - 2m - 4 = -5m + 5.$

Do đó, $|A| = 0 \Leftrightarrow -5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

2. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & m+1 \end{vmatrix}$ $(d_2 - 2d_1,\ d_3 - d_1,\ d_4 + d_3)$

$= 1.(-1)^{1+2}. \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & m+1 \end{vmatrix}$ (khai triển định thức theo **cột 2**)

$= -(-9m - 9 + 9 + 18 + 3m + 3) = 6m - 21.$

Do đó, $|A| = 0 \Leftrightarrow 6m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = 7/2$.

Bài tập 3.2: Tìm m để ma trận sau có định thức khác 0:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$, **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & m & -5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài tập 3.3: Cho A và B là các ma trận vuông cấp 3 thỏa $AB = 2I_3$ và $AB^2 = 4I_3$. Tính $|A|$ và $|B|$.

Ta có: $\begin{cases} AB = 2I_3 \\ AB^2 = 4I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AB| = |2I_3| \\ |AB^2| = |4I_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A||B| = 2^3.1 \\ |A||B||B| = 4^3.1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |A||B| = 8 \\ 8|B| = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |B| = 8 \end{cases}.$

3. *Ứng dụng của định thức.*

3.1 Sự khả nghịch và tìm nghịch đảo của ma trận.

• *Định nghĩa:* Cho A là mtr vuông cấp n. Ta nói A ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho:

$$\mathbf{AB = I_n}.$$

Khi đó, B được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** của A, ký hiệu $B = A^{-1}$.

Ví dụ 3.9: Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Khi đó: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Do đó, A khả nghịch và B là ma trận nghịch đảo của A.

• *Tính chất:* Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó:

1. nếu A có một dòng (hay một cột) bằng không thì A không khả nghịch,

2. nếu A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1} thì các ma trận A^{-1}, A^T, αA (với $\alpha \neq 0$) cũng khả nghịch và:

$$\mathbf{(A^{-1})^{-1} = A,\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,\ (\alpha A)^{-1} = \tfrac{1}{\alpha} A^{-1}},$$

3. nếu A và B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và

$$\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

hệ quả: nếu A khả nghịch và k là số tự nhiên thì $\mathbf{(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k}$.

• *Định lý:* Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n. Khi đó:

$$\mathbf{A\ \text{khả nghịch} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

và **ma trận nghịch đảo của A** xác định bởi:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|}P_A} \text{ với } \mathbf{P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{pmatrix}},$$

trong đó A_{ij} là ***phần bù đại số*** của a_{ij} trong |A| xác định bởi:

$$\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}},$$

với M_{ij} là ***định thức con*** cấp n – 1 có được từ |A| bằng cách bỏ đi dòng i và cột j của |A|. Ma trân P_A được gọi là ***ma trận phụ hợp*** của A.

Ví dụ 3.10: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}$, **3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. $|A| = 4 - 6 = -2 \neq 0$.

Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{|A|}P_A$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}.4 = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2}.(-3) = 3$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}.(-2) = 2$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.1 = 1$.

Vậy, $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{vmatrix} = -30 - 9 - 52 + 60 + 18 + 13 = 0.$

Do đó, A không khả nghịch.

3. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 8 + 4 - 10 - 32 - 6 = 24 \neq 0.$

Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}P_A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 18,\ A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} = -12,\ A_{13} = -6;$$

$$A_{21} = -7,\ A_{22} = 10,\ A_{23} = 1,\ A_{31} = -1,\ A_{32} = -2,\ A_{33} = 7.$$

Vậy, $A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}18 & -7 & -1\\ -12 & 10 & -2\\ -6 & 1 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/4 & -7/24 & -1/24\\ -1/2 & 5/12 & -1/12\\ -1/4 & 1/24 & 7/24\end{pmatrix}$.

• Cho A là ma trận vuông. Khi đó:

A là **suy biến ⇔ A không khả nghịch ⇔ |A| = 0,**

A là **khả nghịch ⇔ A không suy biến ⇔ |A| ≠ 0.**

• *Tính chất:* **1.** Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì $\mathbf{|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}}$.

2. Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\mathbf{A.P_A = P_A.A = |A|.I_n}$.

Ví dụ 3.11: Cho A là mtr vuông cấp 3 có |A| = 2. Tính $|A^{-1}|$, |−3A| và $|P_A|$.

Ta có: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = 1/2$,

$|-3A| = (-3)^3.|A| = -27.2 = -54$.

Từ đẳng thức $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}P_A$, tức là $A^{-1} = \dfrac{1}{2}P_A$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{2}P_A\right| \Leftrightarrow \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.|P_A| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.|P_A| \Leftrightarrow |P_A| = 4.$$

Ví dụ 3.12: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & m\end{pmatrix}$. Tìm m để:

1. A là ma trận suy biến (tức không khả nghịch),
2. A là ma trận khả nghịch (tức không suy biến) và tính $|A^{-1}|$.

Ta tính được: |A| = m + 2 + 9 + 1 + 3 – 6m = − 5m + 15.

1. A là ma trận suy biến $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$\Leftrightarrow -5m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

2. A là ma trận khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$\Leftrightarrow -5m + 15 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3.$$

Khi đó, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-5m+15}$.

Bài tập 3.4: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

1. Tìm m để A suy biến (không khả nghịch).
2. Khi m = − 3, hãy tìm ma trận A^{-1}.

Bài tập 3.5: Tìm m để ma trận sau suy biến:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & m & -5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài tập 3.6: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

1. Tìm m để A khả nghịch (không suy biến).
2. Khi m = 1, hãy tìm ma trận A^{-1}.

Bài tập 3.7: Tìm m để ma trận sau không suy biến:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ m & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài tập 3.8: Cho A là mtr vuông cấp 4 có $|A| = -2$. Tính $|3A^T|$, $|(2A)^{-1}|$ và $|P_{2A}|$.

Ta có: $|3A^T| = 3^4.|A^T| = 3^4.|A| = 81.(-2) = -162$,

$$|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^4.|A|} = \frac{1}{2^4.(-2)} = -\frac{1}{32}.$$

Cách khác: $|(2A)^{-1}| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{2^4}.\frac{1}{|A|} = -\frac{1}{32}.$

Từ $(2A)^{-1} = \frac{1}{|2A|}P_{2A}$, tức là $(2A)^{-1} = -\frac{1}{32}P_{2A}$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|(2A)^{-1}| = \left|-\frac{1}{32}P_{2A}\right| \Leftrightarrow -\frac{1}{32} = \left(-\frac{1}{32}\right)^4.\left|P_{2A}\right| \Leftrightarrow \left|P_{2A}\right| = -32^3.$$

Bài tập 3.9: Cho A là mtr vuông cấp 3 có $|A| = 3$ và $A^{-1} = (1/|A|).B$. Tính $|B^2|$.

Từ đẳng thức $A^{-1} = (1/|A|).B$, tức là $A^{-1} = (1/3).B$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|A^{-1}| = |(1/3).|B| \Leftrightarrow 1/|A| = (1/3)^3.|B| \Leftrightarrow 1/3 = (1/27).|B| \Leftrightarrow |B| = 9.$$

Do đó, $|B^2| = |B|^2 = 81$.

Bài tập 3.10: Cho A, B và C là các mtr vuông cấp 3 có $|A| = -2$, $|B| = 4$, $|C| = 1$ và $M = 5A^2.B.C^{-1}$. Tính $|M|$.

Ta có: $|M| = |5A^2.B.C^{-1}| = 5^3.|A^2|.|B|.|C^{-1}| = 5^3.|A|^2.|B|.(1/|C|)$

$= 125.(-2)^2.4.(1/1) = 2000.$

Bài tập 3.11: Cho A và B là các mtr vuông cấp 4 có $|A| = 3$, $|B| = 2$ và $(AB)^{-1} = (1/|AB|).C$. Tính các định thức: $|C|$, $|P_A|$, $|P_B|$, $|P_{AB}|$, $|P_{2A}|$ và $|P_{3B}|$.

Bài tập 3.12 Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = A^5 + mA^6$. Tìm m để B không khả đảo (nghịch).

Ta có: $B = A^5 + mA^6 = A^5(I_2 + mA)$.

Do đó: $|B| = |A^5(I_2 + mA)| = |A|^5.|I_2 + mA|$.

Mặt khác: $|A| = -3$ và

$$|I_2 + mA| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1+m & 2m \\ 2m & 1+m \end{vmatrix}$$

$$= (1+m)^2 - 4m^2 = (3m+1)(-m+1).$$

Vì thế, B không khả nghịch $\Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow |A|^5.|I_2 + mA| = 0$

$$\Leftrightarrow (-3)^5.(3m + 1)(-m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1/3 \text{ hoặc } m = 1.$$

Bài tập 3.13: Cho A là mtr vuông cấp 3 thỏa $A^3 - mI_3 = 0$. Với giá trị nào của m thì A không khả đảo (nghịch)?

Ta có: $A^3 - mI_3 = 0 \Leftrightarrow A^3 = mI_3$. (*)

Lấy định thức hai vế của (*), ta được: $|A^3| = |mI_3| \Leftrightarrow |A|^3 = m^3.1 \Leftrightarrow |A| = m$.

Do đó: A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài tập 3.14: Cho mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & m & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Với giá trị nào của m thì mtr A^2A^T suy biến?

Ta có: $|A| = 5m - 6$.

Do đó: A^2A^T suy biến $\Leftrightarrow |A^2A^T| = 0 \Leftrightarrow |A^2|.|A^T| = 0$

$$\Leftrightarrow |A|^2.|A| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6/5.$$

Bài tập 3.15: Cho A và B là các mtrận vuông cùng cấp khả nghịch và $C = (2/3)A^T(4/5)B^{-1}$. Tính C^{-1} theo A và B.

Ta có: $C = (2/3)A^T(4/5)B^{-1} \Leftrightarrow C = (2/3)(4/5)A^TB^{-1}$

$$\Leftrightarrow C = (8/15)A^TB^{-1}.$$

Do đó: $C^{-1} = (15/8)[A^TB^{-1}]^{-1} \Leftrightarrow C^{-1} = (15/8)[B^{-1}]^{-1}.[A^T]^{-1}$

$$\Leftrightarrow C^{-1} = (15/8)B.[A^{-1}]^T.$$

Bài tập 3.16: Cho A và B là các mtr vuông cùng cấp thỏa $A \neq 0$, $B \neq 0$ và $AB = 0$. Chứng tỏ A và B đều không khả nghịch.

Ta chứng minh A không khả nghịch. Thật vậy, giả sử A khả nghịch, tức là tồn tại A^{-1}. Nhân bên trái hai vế của đẳng thức $AB = 0$ với A^{-1}, ta được:

$$A^{-1}.AB = A^{-1}.0 \Leftrightarrow B = 0\text{: mâu thuẫn giả thiết } B \neq 0.$$

Vậy, A không khả nghịch.

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được B không khả nghịch.

*** Phương pháp khác để xét sự khả nghịch và tìm nghịch đảo của ma trận.**

• *Định lý:* Cho A là mtr vuông cấp n. Khi đó:

$$\mathbf{A\ kh\mathring{a}\ ngh\dot{i}ch} \Leftrightarrow \mathbf{r(A) = n}.$$

Hơn nữa, những phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào biến A thành I_n thì cũng chính những phép biến đổi đó (với cùng thứ tự trên) sẽ biến I_n thành A^{-1}. Nghĩa là:

$$\text{nếu } A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$$

$$\text{thì } I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \xrightarrow{\varphi_2} B_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Do đó ta có:

$$\mathbf{(A \,|\, I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 \,|\, B_1) \xrightarrow{\varphi_2} (A_2 \,|\, B_2) \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} (A_k \,|\, B_k) = (I_n \,|\, A^{-1}).}$$

• *Cách tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A cấp n:*

+ Viết ma trận mở rộng: $(A \mid I_n)$.

+ Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp đối với $(A \mid I_n)$ để biến A thành I_n (tức là xây dựng lần lượt các cột chuẩn: $(1, 0, \dots, 0)^T$, $(0, 1, \dots, 0)^T$, …, $(0, 0, \dots, 1)^T$ trong A từ trái sang phải).

+ Nếu A biến được thành I_n thì I_n biến thành ma trận tương ứng bên phải vạch đứng | ở bước cuối cùng là A^{-1}. Nếu A không biến được thành I_n thì A không khả nghịch.

Ví dụ 3.13: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

1. $$\left(A \middle| I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 + d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1 - 2d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

Do đó, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

2. $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_3-3d_2]{d_1+2d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_1+6d_3]{-d_3, d_2+2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 27 & -16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right)$.

Do đó, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

• *Lưu ý:* Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó:

A khả nghịch (không suy biến) ⇔ |A| ≠ 0 ⇔ r(A) = n,

A không khả nghịch (suy biến) ⇔ |A| = 0 ⇔ r(A) < n.

3.2 Phương trình ma trận.

• ***Dạng 1:*** Phương trình **AX = B**.

Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì nghiệm của phương trình là $\mathbf{X = A^{-1}B}$.

Giải thích: $\mathbf{AX = B \Leftrightarrow A^{-1}.AX = A^{-1}.B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B}$.

Ví dụ 3.14: Giải phương trình ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \ (*)$$

Phương trình (*) có dạng AX = B với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

+ Cách 1: Phương pháp ma trận nghịch đảo.

Ta có: |A| = − 1 ≠ 0. Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} P_A$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}.5 = 5$, $A_{12} = (-1)^{1+2}.3 = -3$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}.2 = -2$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.1 = 1$.

Vì thế, $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Vây, nghiệm của phtr (*) là

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

+ Cách 2: Phương pháp hệ phương trình tuyến tính.

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Thay vào phtr (*), ta được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+5z & 3y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z = 1 \ (1) \\ y+2t = -2 \ (2) \\ 3x+5z = -1 \ (3) \\ 3y+5t = 1 \ (4) \end{cases}.$$

Từ (1) và (3) , ta giải được $x = -7$, $z = 4$. Từ (2) và (4) , ta giải được $y = 12$, $t = -7$.

Vây, nghiệm của phtr (*) là $X = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

• ***Dạng 2:*** Phương trình **XA = B**.

Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì nghiệm của phương trình là $\mathbf{X = BA^{-1}}$.

Giải thích: $\mathbf{XA = B \Leftrightarrow XA.A^{-1} = B.A^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}}$.

Bài tập 3.17: Giải các phương trình ma trận:

1. $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Phtr có dạng XA = B với $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

+ Cách 1: Phương pháp ma trận nghịch đảo.

Ta có: $|A| = 5 \neq 0$. Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}P_A$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}.4 = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2}.3 = -3$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}.1 = -1$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.2 = 2$.

Vì thế, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Vây, nghiệm của phtr đã cho là

$$X = B.A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 & 8/5 \\ 14/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

+ Cách 2: Phương pháp hpt tuyến tính.

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Thay vào phtr đã cho, ta được:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y & x+4y \\ 2z+3t & z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+4y=5 \\ 2z+3t=5 \\ z+4t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7/5 \\ y=8/5 \\ z=14/5 \\ t=-1/5 \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phtr đã cho là $X = \begin{pmatrix} -7/5 & 8/5 \\ 14/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

2. Phtr đã cho có dạng AX = B với $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

+ Cách 1: Phương pháp ma trận nghịch đảo $X = A^{-1}.B$.

+ Cách 2: Phương pháp hpt tuyến tính. Đặt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Thay vào phtr ta được:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+2z \\ -x-y+2z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=1 \\ -x-y+2z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=... \\ y=.... \\ z=... \end{cases}$$

Bài tập 3.18: Cho phương trình ma trận $A^TXBC = D$, trong đó A, B, C, D là các mtr vuông cùng cấp và A, B, C khả nghịch. Tìm X theo A, B, C, D.

Xét phtr $A^TXBC = D$. (*)

Nhân bên trái hai vế của (*) với $(A^T)^{-1}$ và nhân bên phải hai vế của (*) với $(BC)^{-1}$, ta được:

$$(A^T)^{-1}.A^TXBC.(BC)^{-1} = (A^T)^{-1}.D.(BC)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow X = (A^{-1})^T.D.C^{-1}.B^{-1}.$$

Bài tập 3.19: Cho các mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm mtr X sao cho AX = B.

*** Bài tập** liên quan đến định thức, sự khả nghich và tìm nghịch đảo của ma trận, và phương trình ma trận trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: **các trang từ 42 đến 52**.

3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer.

• Xét hpt tuyến tính gồm n phương trình n ẩn như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó hpt (I) có dạng AX = B với A: ***ma trận hệ số***, X: ***cột các ẩn*** và B: ***cột hệ số tự do***.

Hpt (I) được gọi là ***hệ Cramer*** nếu ma trận A <u>không suy biến (khả nghịch)</u>, tức là $|A| \neq 0$. Khi đó, hpt (I) có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}B$.

Ngoài phương pháp giải bằng ma trận nghịch đảo như trên, ta còn có ***phương pháp Cramer*** như sau:

$$x_j = \frac{D_j}{|A|}, \forall j = 1, 2, ..., n,$$

trong đó D_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) là <u>định thức của ma trận có được bằng cách thay cột j của ma trận A bằng cột hệ số tự do B</u>.

Ví dụ 3.15: Giải hpt sau bằng phương pháp Cramer: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$.

Ta có: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,

$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2$.

Vậy, hệ phtr đã cho có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = (3, 1, -1).$$

Ví dụ 3.16: Giải và biện luận hpt sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2 \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 + 2m^2 - 10m - 4 - 2m^2 + 4m + 4m + 4 - m + 5$$

$$= m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3),$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 20 + 4 + 4m - 8 - 4m - 4 = -4m + 12 = -4(m-3),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 2m + 2 + 8 - 4m + 2m - 10 = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2m + 4 + 4m - 8 - 2 = 2m - 6 = 2(m - 3).$$

* $|A| \neq 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 3$: hệ phtr có nghiệm duy nhất

$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = (-4/(m-1), 0, 2/(m-1))$.

* $|A| = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 3$. Xét hai trường hợp sau.

\+ $m = 1$: $|A| = 0$, $D_1 = 8 \neq 0$. Khi đó, hệ phtr vô nghiệm.

\+ $m = 3$: $|A| = 0$, $D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Khi đó, hệ phtr vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hpt tương ứng: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\ \ 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6t/5 - 4/5 \\ x_2 = -2t/5 + 2/5 \ (t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}). \\ x_3 = t \end{cases}$

(x_3: ẩn tự do; x_1, x_2: ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt có vô số nghiệm

$(x_1, x_2, x_3) = (-6t/5 - 4/5, -2t/5 + 2/5, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Kết luận: * $m \neq 1$ và $m \neq 3$: hệ phtr có nghiệm duy nhất

$(x_1, x_2, x_3) = (-4/(m-1), 0, 2/(m-1))$.

* $m = 1$: hệ phtr vô nghiệm.

* $m = 3$: hệ phtr có vô số ngh:

$(x_1, x_2, x_3) = (-6t/5 - 4/5, -2t/5 + 2/5, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

• *Lưu ý:* Xét hệ phtr có số phtr bằng số ẩn (= n) với các định thức $|A|$, D_1, D_2, … và D_n. Khi đó:

* $|A| \neq 0$: hệ phtr có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (D_1/|A|, D_2/|A|, \ldots, D_n/|A|)$;

* $|A| = 0$ và tồn tại $D_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$): hệ phtr vô nghiệm;

* $|A| = 0$ và $D_j = 0$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$: hệ phtr vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Lúc này, ta phải dùng thuật toán Gauss để giải hệ.

Bài tập 3.20: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + 5z = 1 \\ x + (m+1)y + (m+2)z = m^2 - m + 1 \end{cases}$.

1. Tìm m để hpt đã cho là hệ Cramer. Khi đó, tìm nghiệm của hệ.
2. Tìm m để hpt đã cho vô nghiệm.

1. Ta có: $|A| = m^2 - m$.
   Do đó: hpt đã cho là hệ Cramer $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 1$.
   Khi đó, hpt có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = \ldots$.
2. Hpt đã cho vô nghiệm $\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.
   Thử lại. + Với m = 0, ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt có VSN. Do đó m = 0 không thỏa yêu cầu đề bài.

+ Với m = 1, ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2$: hpt vô nghiệm. Do đó m = 1 thỏa yêu cầu đề bài.
Vậy m = 1.

Bài tập 3.21: Cho hpt sau: $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + (m-4)y + 7z = 0 \\ -x + (m+2)y + (m-1)z = 0 \end{cases}$.

1. Tìm m để hpt đã cho có nghiệm duy nhất.

2. Với m = 0, giải hpt đã cho.

1. Nếu dùng phpháp hạng ma trận, ta được:

Hpt có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ r(A) = 3.

Đối với bài tập đang giải, phpháp trên khó làm.

Nếu dùng phpháp định thức, ta có:

Hpt có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Phpháp này dễ làm hơn.

Ta tính được $|A| = m(m + 1)$.

Do đó:

Hpt có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow m(m + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq -1$.

2. Với m = 0, ta thấy: |A| = 0. Lúc này, ta không thể dùng phpháp định thức để giải hpt đã cho. Ta dùng phpháp Gauss để giải hệ. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ phtr tương ứng:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Vậy với m = 0, hpt đã cho có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (2t, t, 0)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.22: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + (m+5)y - 2z = 4 \\ x + (m+3)y + (m-1)z = m+3 \end{cases}$.

1. Tìm m để hpt đã cho vô nghiệm.

2. Tìm m để hệ đã cho có vô số nghiệm. Khi đó, tìm tất cả các nghiệm của hệ.

Bài tập 3.23: Giải và biện luận hpt sau:

1. $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2by + z = 4 \\ 2x + 3by + 2z = 7 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}$.

Bài tập 3.24: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$.

Khi đó, hệ đã cho là hệ Cramer khi và chỉ khi:

a. $a \neq 1$;

b. $a \neq 2$;

c. $a = 1$ hoặc $a = 2$;

d. $a \neq 1$ và $a \neq 2$.

Ta có: $|A| = -a^2 + 3a - 2$.

Do đó:

Hpt đã cho là hệ Cramer

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow -a^2 + 3a - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq 2$.

Vây, ta chọn đáp án d.

Bài tập 3.25: Cho hpt: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \\ a^2x + 3ay = 4 \end{cases}$.

Khi đó, hệ đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi:

a. $a = 1$;

b. $a = -4$;

c. $a = 1$ hoặc $a = -4$;

d. $a \neq 1$ và $a \neq -4$.

Từ các phtr thứ nhất và thứ hai của hệ, ta giải được: $(x, y) = (1, 1)$.
Do đó:

Hệ đã cho có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow$ (x, y) = (1, 1) là nghiệm của phtr thứ ba trong hệ

$\Leftrightarrow$ $a^2.1 + 3a.1 = 4$

$\Leftrightarrow$ a = 1 hoặc a = −4.

Vây, ta chọn đáp án c.

Bài tập 3.26: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + 2y + mz = 3 + m \\ 2x + my - 3z = m - 1 \\ 2x - my + 2mz = -2 \end{cases}$.

Biết rằng (x, y, z) = (1, 1, 1) là một nghiệm của hệ. Chọn mệnh đề đúng:

- **a.** m = −4 và hệ đã cho có vô số nghiệm;
- **b.** m = −4 và hệ đã cho có nghiệm duy nhất;
- **c.** m = −2 và hệ đã cho có vô số nghiệm;
- **d.** m = −2 và hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Vì (x, y, z) = (1, 1, 1) là một nghiệm của hệ, ta có:

$$\begin{cases} 1 + 2.1 + m.1 = 3 + m \\ 2.1 + m.1 - 3.1 = m - 1 \\ 2.1 - m.1 + 2m.1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

Cách 1: Dùng hạng ma trận để kết luận tính chất nghiệm. Với m = − 4, ta được:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & -8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ta thấy: $r\left(\overline{A}\right) = r(A)$ = 2 < 3: hpt đã cho có vô số nghiệm. Ta chọn đáp án a.

Cách 2: Dùng định thức để kết luận tính chất nghiệm. Với m = − 4, ta được:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó, hpt đã cho không duy nhất nghiệm (tức là vô nghiệm hoặc vô số nghiệm). Ta chọn đáp án a.

Lưu ý: Nếu trong đề bài, các đáp án a, c và d vẫn giữ nguyên như trước và đáp án b được thay bởi đáp án b*:

b*. m = −4 và hệ đã cho vô nghiệm,

thì ta chọn đáp án nào khi giải bằng **cách 2**?

Sau khi tính |A| = 0, ta kết luận hpt đã cho vô nghiệm hoặc vô số nghiệm nên ta chưa thể chọn được đáp án a hay đáp án b*.

Khi đó, ta lập luận tiếp như sau. Vì hpt đã cho có nghiệm (x, y, z) = (1, 1, 1), ta kết luận hệ không vô nghiệm. Vì thế, hệ có vô số nghiệm. Vậy, ta chọn đáp án a.

Bài tập 3.27: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + mz = 2 \end{cases}$.

Phát biểu nào sau đây là sai:

a. Không tồn tại m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất;

b. Tồn tại m để hệ đã cho có vô số nghiệm;

c. Tồn tại m để hệ đã cho có nghiệm;

d. Với mọi m hệ đã cho đều có nghiệm?

Ta có thể dùng phpháp hạng ma trận hoặc phpháp định thức để cách bài này. Sau đây, ta dùng phpháp định thức. Ta tính được: |A| = m + 5. Xét hai trường hợp sau.

+ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -5$: hpt đã cho có nghiệm duy nhất. Do đó, đáp án a là sai.

+ $|A| = 0 \Leftrightarrow m = -5$: ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ta thấy: $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = 2 < 3$: hpt đã cho có vô số nghiệm.

Vậy, các đáp án b, c và d là đúng.

Bài tập 3.28: Cho A và B là các mtr vuông cấp n thỏa $A^2B - AB^2 = I_n$. Chọn kết luận sai:

a. Các mtr A, B và A – B đều khả nghịch;

b. Mtr A – B khả nghịch và $(A – B)^{-1} = BA$;

c. $AB(A – B) = I_n$;

d. $A – B = A^{-1}B^{-1}$.

Bài tập 3.29: Cho A, B và X là các mtr vuông cấp n thỏa mãn AX = B và $X^2 = I_n$ trong đó $X \neq -I_n$. Chọn phát biểu sai:

a. Nếu A khả nghịch thì B khả nghịch;

b. BX = A;

c. A – B là mtr suy biến;

d. det(X) = 1.

Bài tập 3.30: Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là mtr có $a_{ij} = 0$ với mọi i > j và thỏa mãn $A^T + 2A = I_n$. Chọn phát biểu sai:

a. $A = A^T$;

b. $|A| = 3^n$;

c. $A + 2A^T = I_n$;

d. $|A| = 1/3^n$.

*** Tính hạng của ma trận bằng cách dùng định thức.**

Cho A là mtr tùy ý. Nếu <u>A có ít nhất một định thức con cấp k khác 0 và mọi định thức con cấp k + 1 đều bằng 0</u>, thì hạng **r(A) = k**.

Lưu ý: Định thức con cấp k của mtr A là định thức con tạo thành từ k dòng và k cột của mtr A.

Ví dụ 3.17: Tìm hạng của mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -7 \\ 2 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Đầu tiên, ta tính các định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -7 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -7 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 9 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Tiếp theo, ta tính một định thức con cấp 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Do đó, r(A) = 2.

Ví dụ 3.17*: Tìm hạng của mtr $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -7 \\ 2 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Ta tính một định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Do đó, r(A) = 3.

* **Bài tập** liên quan đến việc giải hệ ph. trình tuyến tính và các tính chất tập nghiệm của hệ (dùng ph. pháp định thức) trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: **các trang từ 90 đến 95**.

3.4 Ứng dụng trong phân tích kinh tế: Mô hình Input-Output mở Leontief.

Mô hình này nhằm <u>xác định đầu ra của mỗi ngành trong n ngành sao cho vừa đủ để thỏa mãn toàn bộ nhu cầu (bên trong và bên ngoài) về các loại sản phẩm đó</u>.

Giả sử trong mô hình ta có:

+ mỗi ngành chỉ sản xuất một mặt hàng thuần nhất,

+ mỗi ngành sử dụng một tỉ lệ cố định các nguyên liệu đầu vào từ các ngành khác cho sản xuất đầu ra,

+ mọi lượng đầu vào thay đổi k lần thì lượng đầu ra thay đổi k lần.

Ký hiệu $\mathbf{a_{ij}}$ là ***hệ số đầu vào*** đối với nền kinh tế n ngành, được xếp trong mtr sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó $\mathbf{a_{ij}}$ là ***giá trị đơn vị tiền của lượng nguyên liệu mà ngành i cung cấp cho ngành j để ngành j sản xuất ra một lượng sản phẩm (hàng hóa) có giá trị một đơn vị tiền***.

Do đó **cột j của mtr A** cho biết những yêu cầu đầu vào của ngành j từ n ngành (tức là lượng nguyên liệu mà n ngành cần cung cấp cho ngành j) để ngành j sản xuất ra một lượng sản phẩm trị giá một đơn vị tiền.

Bên cạnh n ngành, mô hình còn có một ngành khác được gọi là ***ngành mở***, cung ứng những đầu vào thiết yếu (ví dụ như lao động, dịch vụ, …) cho n ngành trên. Ngược lại, sản lượng của các ngành được xác định bởi yêu cầu nguyên liệu của các ngành trong nền kinh tế và yêu cầu cuối (yêu cầu dự trữ, xuất khẩu). Lượng yêu cầu cuối này được xem là yếu tố để lập kế hoạch cho toàn bộ ngành kinh tế.

Khi đó, ta có $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij}}$ là tổng <u>giá trị lượng nguyên liệu mà n ngành cung cấp cho ngành j</u> <u>để ngành j sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá một đơn vị tiền</u> (với j = 1, 2, …, n). Để hợp lý về mặt kinh tế, ta giả sử $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \forall j = 1, 2, ..., n$.

Vậy giá trị mà ngành mở đóng góp cho ngành j <u>để ngành j sản xuất lượng hàng hóa trị giá một đơn vị tiền</u> là $\mathbf{a_{0j} = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$.

Gọi ***lượng đầu ra*** (***sản lượng***) của **n** ngành lần lượt là $\mathbf{x_1, x_2}, …, \mathbf{x_n}$ và ***yêu cầu cuối cùng của ngành mở*** đối với ngành thứ **i** là $\mathbf{d_i}$ (**i = 1**, **2**, ..., **n**).

Giả sử ngành thứ **i** sản xuất một lượng đầu ra $\mathbf{x_i}$ (**i = 1**, **2**, …, **n**) vừa đủ để đáp ứng những điều kiện đầu vào của **n** ngành và đáp ứng yêu cầu cuối cùng của ngành mở. Ta có hpt:

$$\mathbf{X = AX + D}, \text{ tức là } \mathbf{(I_n - A)X = D},$$

trong đó

I_n: ma trận đơn vị cấp n,

A: ***ma trận các hệ số đầu vào***,

X: ***vectơ cột của lượng đầu ra*** và

D: ***vectơ cột biểu thị các yêu cầu cuối cùng của ngành mở đối với n ngành***.

Giải hpt trên, ta được nghiệm $\mathbf{X = (I_n - A)^{-1}.D}$ (hoặc ta có thể giải hpt bằng phương pháp Cramer).

Tóm lại, ta cần nắm các ý chính sau:

+ Ý nghĩa của hệ số $\mathbf{a_{ij}}$: Ngành **i** cung cấp cho ngành **j** lượng nguyên liệu trị giá $\mathbf{a_{ij}}$ đvt để ngành **j** sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá **1** đvt.

+ Ý nghĩa của cột **j** trong ma trận **A**: lượng nguyên liệu (tính bằng đvt) mà **n** ngành cần cung cấp cho ngành **j** để ngành **j** sản xuất ra một lượng sản phẩm trị giá **1** đvt.

+ Ý nghĩa của tổng $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_{ij}}$ và của hệ số $\mathbf{a_{0j} = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$.

+ Đẳng thức quan trọng:

$$\mathbf{X = AX + D}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots & \mathbf{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d_1} \\ \mathbf{d_2} \\ \dots \\ \mathbf{d_n} \end{pmatrix}$$

(**A**: ***ma trận các hệ số đầu vào***, **X**: ***vectơ cột của lượng đầu ra của* n *ngành*** và **D**: ***vectơ cột biểu thị các yêu cầu của ngành mở đối với n ngành***).

Ví dụ 3.18: Trong mô hình Input-Output mở, cho biết ma trận hệ số đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3\times3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23} trong mtr A.
2. Tìm mức sản lượng của ba ngành nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng (70, 100, 30).

1. Ta có: $a_{23} = 0,3$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 2 cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,3 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

2. Bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (70, 100, 30)^T$.
Ta có:

$$\begin{aligned} & X = AX + D \\ \Leftrightarrow\ & X - AX = D \\ \Leftrightarrow\ & (I_3 - A)X = D \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix}. \ (1) \end{aligned}$$

Ta có thể giải hệ (1) bằng phương pháp ma trận nghịch đảo $X = (I_3 - A)^{-1}D$ hoặc phương pháp Cramer.

Sau đây, ta giải hệ (1) bằng phương pháp Cramer.

Ta có: $a = |I_3 - A| = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,352 \neq 0$;

$D_1 = \begin{vmatrix} 70 & -0,1 & -0,1 \\ 100 & 0,8 & -0,3 \\ 30 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 52,8$; $D_2 = \begin{vmatrix} 0,7 & 70 & -0,1 \\ -0,1 & 100 & -0,3 \\ -0,2 & 30 & 0,8 \end{vmatrix} = 70,4$;

$D_3 = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & 70 \\ -0,1 & 0,8 & 100 \\ -0,2 & -0,3 & 30 \end{vmatrix} = 52,8$.

Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/a, D_2/a, D_3/a) = (150, 200, 150).$$

Bài tập 3.31: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3\times 3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{12} = 0,2$.
2. Biết sản lượng của ngành 2 là 100, tính tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà các ngành cung cấp cho nó.
3. Tìm ma trận nghịch đảo của $I_3 - A$. Tìm mức sản lượng của ba ngành, nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng (39, 49, 16).
4. Nếu yêu cầu xuất khẩu dự trữ thay đổi đối với các ngành là $\Delta D = (3, -2, 0)^T$, thì hãy tính mức thay đổi sản lượng của các ngành.

1. Ta có: $a_{12} = 0,2$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 1 cung cấp cho ngành 2 lượng nguyên liệu trị giá 0,2 đvt để ngành 2 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

2. Biết $x_2 = 100$. Ta cần tính tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà ba ngành 1, 2 và 3 cung cấp cho ngành 2.

Ta dùng quy tắc tam suất để giải câu này. Ta có sơ đồ:

$$a_{12} = 0{,}2 \dashrightarrow 1$$
$$? \dashrightarrow x_2 = 100.$$

Do đó, sản lượng nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 = 0{,}2.100 = 20 \text{ (đvt)}.$$

Tương tự, sản lượng nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{22}x_2 = 0{,}1.100 = 10 \text{ (đvt)}.$$

Sản lượng nguyên liệu mà ngành 3 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{32}x_2 = 0{,}3.100 = 30 \text{ (đvt)}.$$

Vậy, tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + a_{32}x_2 = (a_{12} + a_{22} + a_{32})x_2 = 60 \text{ (đvt)}.$$

3. Đặt $B = I_3 - A$. Ta cần tìm $B^{-1} = (I_3 - A)^{-1}$.
Ta có: $B^{-1} = (1/|B|).P_B$.

$$|B| = |I_3 - A| = \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}488;$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}69;\ B_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}26;\ B_{13} = 0{,}27;$$

$B_{21} = 0{,}25$; $B_{22} = 0{,}66$; $B_{23} = 0{,}31$; $B_{31} = 0{,}29$; $B_{32} = 0{,}18$; $B_{33} = 0{,}75$.

Do đó:

$$B^{-1} = \frac{1}{0{,}488}\begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}25 & 0{,}29 \\ 0{,}26 & 0{,}66 & 0{,}18 \\ 0{,}27 & 0{,}31 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Ta có bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (39, 49, 16)^T$.
Ta dùng đẳng thức:

$$\begin{aligned} & X = AX + D \\ \Leftrightarrow\ & X - AX = D \\ \Leftrightarrow\ & (I_3 - A)X = D \\ \Leftrightarrow\ & X = (I_3 - A)^{-1}.D \\ \Leftrightarrow\ & X = \frac{1}{0{,}488}\begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}25 & 0{,}29 \\ 0{,}26 & 0{,}66 & 0{,}18 \\ 0{,}27 & 0{,}31 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39 \\ 49 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Bài toán: Biết rằng $\Delta D = (3, -2, 0)^T$, hãy tìm ΔX. Ta có:

$$\Delta X = (I_3 - A)^{-1}.\Delta D$$

$$\Leftrightarrow \Delta X = \frac{1}{0,488}\begin{pmatrix} 0,69 & 0,25 & 0,29 \\ 0,26 & 0,66 & 0,18 \\ 0,27 & 0,31 & 0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}.$$

Bài tập 3.32: Trong mô hình Input-Output mở Leontief gồm ba ngành, cho biết mtr đầu vào là **A =** $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. Giả sử sản lượng của ngành 1 và ngành 2 đều là 100 và nhu cầu ngành mở đối với ngành 1 là 30. Xác định nhu cầu ngành mở đối với ngành 3.

Đề bài cho biết $x_1 = x_2 = 100$ và $d_1 = 30$, hãy tìm d_3.

Ta sử dụng đẳng thức:

$$X = AX + D$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + d_1 \\ x_2 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 + d_2 \\ x_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + d_3 \end{cases}.$$

Từ các phtr thứ nhất và thứ ba, ta có hệ:

$$\begin{cases} 100 = 0,1.100 + 0,2.100 + 0,2x_3 + 30 \\ x_3 = 0,2.100 + 0,1.100 + 0,1x_3 + d_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 200 \\ d_3 = 150 \end{cases}.$$

Bài tập 3.33: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3\times3}.$$

Yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành kinh tế lần lượt là 118, 52 và 96.

1. Tính và nói ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{02}.
2. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành đáp ứng được yêu cầu của ngành mở đã cho trên.

3. Khi ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 2 và yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành không thay đổi, hãy tính giá trị sản lượng của ba ngành.

1. Ta có: $a_{02} = 1 – (0,3 + 0,2 + 0,3) = 0,2$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành mở cung cấp cho ngành 2 lượng nguyên liệu trị giá 0,2 đvt để ngành 2 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

2. Bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (118, 52, 96)^T$.
Ta sử dụng đẳng thức: X = AX + D.
Để giải tìm X, ta có thể dùng cách giải tương tự cách giải trong **Ví dụ 3.18** hoặc trong **Bài tập 3.31 câu 3**.

3. Ta biết: $a_{21} = 0,4$ (hệ số đầu vào cũ). Gọi a_{21}^* là hệ số đầu vào mới.
Ta có: $a_{21}^* = 75\%.a_{21} = 0,75.0,4 = 0,3$.
Ta cần giải bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (118, 52, 96)^T$ nhưng với ma trận hệ số đầu vào mới A* xác định bởi:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Ta sử dụng đẳng thức: X = A*.X + D.

Bài tập 3.34: Xét mô hình Input-Output mở gồm ba ngành kinh tế với mtr hệ số đầu vào $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$. Giả sử sản lượng của ba ngành lần lượt là 120, 100 và 150. Tìm tổng giá trị nguyên liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế.

Ta có: $x_1 = 120$, $x_2 = 100$ và $x_3 = 150$.

Cách 1: dùng các cột của mtr A.

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 1 là:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + a_{31}x_1 = (0,1 + 0,4 + 0,3).120 = 96 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + a_{32}x_2 = (0,2 + 0,1 + 0,2).100 = 50 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 3 là:

$$a_{13}x_3 + a_{23}x_3 + a_{33}x_3 = (0,3 + 0,2 + 0,1).150 = 90 \text{ (đvt)}.$$

Vây, tổng giá trị ng. liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế ba ngành là:

$$96 + 50 + 90 = 236 \text{ (đvt)}.$$

Cách 2: dùng các dòng của mtr A.

Giá trị nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0{,}1.120 + 0{,}2.100 + 0{,}3.150 = 77 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0{,}4.120 + 0{,}1.100 + 0{,}2.150 = 88 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ngành 3 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0{,}3.120 + 0{,}2.100 + 0{,}1.150 = 71 \text{ (đvt)}.$$

Vây, tổng giá trị ng. liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế ba ngành là:

$$77 + 88 + 71 = 236 \text{ (đvt)}.$$

Bài tập 3.35: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & m & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3\times 3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23}. Từ đó tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi giá trị đầu ra của ngành 3 là 200 (đơn vị tiền).
2. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{03}. Từ đó suy ra ngành mở phải đóng góp bao nhiêu cho ngành 3 khi giá trị sản lượng của ngành 3 là 1000 (đơn vị tiền).
3. Hãy tìm giá trị của m biết rằng ngành mở phải đóng góp 150 (đơn vị tiền) khi giá trị sản lượng của ngành 2 là 500 (đơn vị tiền).
4. Với m = 0,4 hãy tìm giá trị sản lượng của ba ngành nếu biết yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành lần lượt là 66, 124, 100.

1. Ta có: $a_{23} = 0{,}1$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 2 cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,1 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

Ta cần tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 200$. Ta có sơ đồ:

$$a_{23} = 0{,}1 \text{ -----> } 1$$
$$? \text{ -----> } x_3 = 200.$$

Do đó, số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 200$ là:

$$a_{23}x_3 = 0{,}1.200 = 20 \text{ (đvt)}.$$

2. Ta có: $a_{03} = 1 – (0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3) = 0{,}4$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành mở cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,4 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

Ta cần tính số tiền mà ngành mở phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 1000$. Ta có sơ đồ:

$$a_{03} = 0{,}4 \text{ -----> } 1$$

$$? \text{ -----> } x_3 = 1000.$$

Do đó, số tiền mà ngành mở phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 1000$ là:

$$a_{03}x_3 = 0,4.1000 = 400 \text{ (đvt)}.$$

3. Ta có sơ đồ:

$$a_{02} \text{ -----> } 1$$
$$150 \text{ -----> } x_2 = 500,$$

trong đó $a_{02} = 1 – (0,1 + m + 0,2) = 0,7 – m$.

Do đó, ta được: $a_{02} = 150/500 \Leftrightarrow 0,7 – m = 0,3 \Leftrightarrow m = 0,4$.

4. Bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (66, 124, 100)^T$.

Bài tập 3.36: Trong mô hình Input-Output mở, cho biết mtr đầu vào $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là giá trị sản lượng đầu ra của ngành 1 và 2; d_1 và d_2 lần lượt là yêu cầu của ngành mở đối với ngành 1 và 2. Khi đó, nếu $(x_1, x_2) = (200, 300)$ thì

a. $(d_1, d_2) = (70, 80)$;

b. $(d_1, d_2) = (120, 10)$;

c. $(d_1, d_2) = (10, 120)$;

d. $(d_1, d_2) = (80, 70)$.

Đề bài cho biết $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, hãy tìm d_1 và d_2.

Ta sử dụng đẳng thức:

$$X = AX + D$$
$$\Leftrightarrow D = X – AX$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Vây, ta chọn đáp án a.

Bài tập 3.37: Xét mô hình Input-Output mở gồm ba ngành với mtr hệ số đầu vào là $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. Giả sử sản lượng của ba ngành lần lượt là 80, 100 và 60. Chọn câu đúng:

a. Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 đã sử dụng để cung cấp cho ba ngành là 40;

b. Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là 10;

c. Giá trị sản lượng mà ba ngành cung cấp cho ngành mở lần lượt là 40, 50 và 28;

d. Các phát biểu trên đều đúng.

Ta có: $x_1 = 80$, $x_2 = 100$ và $x_3 = 60$.

a. Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 đã sử dụng để cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,1.80 + 0,2.100 + 0,2.60 = 40.$$

b. Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là:

$$a_{23}x_3 = 0,1.60 = 6.$$

c. Giá trị sản lượng mà ba ngành cung cấp cho ngành mở là?

Ta sử dụng đẳng thức:

$$X = AX + D$$

$$\Leftrightarrow D = X - AX$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Vây, các đáp án a và c là đúng và các đáp án b và d là sai.