TOÁN CAO CẤP B2

Đặng Tuấn Hiệp

Ngày 9 tháng 9 năm 2024

Nội dung chính

- Ma trận và Định thức
  - Các phép toán trên ma trận
- Hệ phương trình tuyến tính
- Chéo hoá ma trận
- Không gian vectơ
- Ánh xạ tuyến tính

Ma trận và Định thức

Khái niệm ma trận

Một *ma trận* cấp $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương) là một bảng gồm các số thực a_{ij} được sắp xếp thành m dòng và n cột dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Ký hiệu:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{hoặc} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Khái niệm ma trận

- Số thực a_{ij} đại diện cho phần tử nằm ở vị trí dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A.
- Ký hiệu $M_{m,n}$ là tập hợp các ma trận cùng cấp $m \times n$, tức là

$$M_{m,n} = \{A = [a_{ij}]_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j\}.$$

- Hai ma trận được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng cấp và mọi số hạng tương ứng đều bằng nhau, tức là nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ thì

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Khái niệm ma trận

Ví dụ

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

là một ma trận cấp 2×3, trong đó

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{12} = 2 \quad , \quad a_{13} = 3,$$

$$a_{21} = 4 \quad , \quad a_{22} = 5 \quad , \quad a_{23} = 6.$$

Ma trận vuông

- *Ma trận vuông* cấp n là ma trận cấp $n \times n$, tức là ma trận có số dòng và số cột cùng bằng với n.
- Trong một ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, người ta gọi các số hạng $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ là các số hạng thuộc đường chéo chính của ma trận.
- Ký hiệu M_n là tập hợp các ma trận vuông cấp n.

Ma trận vuông

Ví dụ

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

là ma trận vuông cấp 3.

Ma trận đơn vị

- *Ma trận đơn vị* cấp n là ma trận vuông cấp n trong đó các số hạng thuộc đường chéo chính đều bằng 1 và các số hạng khác đều bằng 0.
- Ký hiệu I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Ví dụ

Ma trận

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

là ma trận đơn vị cấp 3.

Ma trận tam giác

Ma trận tam giác là ma trận vuông có tất cả các số hạng nằm phía dưới hoặc phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ

Các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là các ma trận tam giác.

Ma trận chéo

Ma trận chéo là ma trận vuông có tất cả các số hạng nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

Ví dụ

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo.

Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các số hạng đều bằng 0. Ký hiệu $\mathbb{O}_{m\times n}$ là ma trận không cấp $m \times n$.

Ví dụ

Ma trận $\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cấp 2×3.

Vectơ dòng và vectơ cột

Vectơ dòng là ma trận chỉ có một dòng.
Vectơ cột là ma trận chỉ có một cột.

Ví dụ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ lần lượt là vectơ dòng và vectơ cột.

Phép cộng ma trận

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ là hai ma trận cùng cấp $m \times n$. Tổng của A và B là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu $A + B$, được xác định bởi

$$A + B = [c_{ij}]_{m\times n},$$

trong đó

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \forall i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Phép nhân vô hướng

Cho k là một số thực bất kỳ và $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là một ma trận cấp $m \times n$. Tích của số k với ma trận A là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu kA, được xác định bởi

$$kA = [c_{ij}]_{m\times n},$$

trong đó

$$c_{ij} = ka_{ij}; \forall i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tích vô hướng của 2 vectơ

Cho

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

và

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

là vectơ dòng và vectơ cột. *Tích vô hướng* của u và v là

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Phép nhân 2 ma trận

Cho 2 ma trận

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \end{bmatrix}_{m\times n}$$

và

$$B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p} = \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ \dots & \vdots & \dots \\ & b_{nj} & \end{bmatrix}_{n\times p}.$$

Phép nhân 2 ma trận

Tích của A và B là

$$A \cdot B = \left[c_{ij}\right]_{m \times p},$$

trong đó c_{ij} là tích vô hướng của vectơ dòng i của A và vectơ cột j của B, tức là

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \end{aligned}$$

Nhận xét: Phép nhân 2 ma trận không có tính giao hoán.

Phép chuyển vị

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là một ma trận cấp $m \times n$.
Chuyển vị của A là

$$A^t = \left[a^t_{ij}\right]_{n\times m},$$

trong đó

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall j = 1, 2, \ldots, m.$$

Một ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là *ma trận đối xứng* nếu

$$A = A^t,$$

tức là

$$a_{ij} = a_{ji}, \forall i \neq j.$$

Ví dụ

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Chuyển vị của A là

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ

Tích của A và A^t là

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ 26 & 50 \end{bmatrix}.$$

Tích của A^t và A là

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 18 \\ 14 & 20 & 26 \\ 18 & 26 & 34 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy rằng $A \cdot A^t$ và $A^t \cdot A$ đều là các ma trận đối xứng.

Một số tính chất

Các phép toán trên ma trận có các tính chất sau đây: Giả sử A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được. Khi đó, ta có

1. $I \cdot A = A \cdot I = A$, trong đó I là ma trận đơn vị;
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
   $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$;
4. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$, trong đó k là một số thực bất kỳ;
5. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Ma trận bậc thang

Ma trận bậc thang là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- Dòng có tất cả các phần tử bằng 0 (nếu có) luôn nằm phía dưới dòng có phần tử khác 0 (nếu có).
- Đối với hai dòng bất kỳ, nếu tính từ trái qua phải, phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng dưới luôn ở bên phải so với phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng trên.

Ví dụ: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một ma trận bậc thang.

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của một ma trận là một trong ba phép biến đổi sau đây:

- Đổi chỗ hai dòng cho nhau.
- Nhân một dòng với một số khác 0.
- Thêm (bớt) vào một dòng một tổ hợp tuyến tính của các dòng khác.

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Mọi ma trận khác không sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đều đưa được về một ma trận bậc thang, ma trận này được gọi là dạng bậc thang của ma trận ban đầu.
Chú ý rằng dạng bậc thang của một ma trận là không duy nhất và thường có nhiều cách biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa một ma trận về dạng bậc thang.

Hạng của ma trận

Cho $A \in M_{m,n}$ là một ma trận khác không. Số dòng khác không của dạng bậc thang của A không phụ thuộc vào các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, số này được gọi là *hạng* của A, ký hiệu $\text{rank}(A)$. Nếu A là ma trận không, thì ta quy ước $\text{rank}(A) = 0$. Ta luôn có

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n).$$

Định thức của ma trận

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 1, thì định thức của A, ký hiệu $\det(A)$, được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11}.$$

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 2, thì định thức của A được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Định thức của ma trận

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3, thì định thức của A được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Định thức của ma trận

Tổng quát hơn, nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp n, thì định thức của A được xác định bởi *công thức Laplace* sau đây

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \qquad (1)$$

trong đó A_{1j} là tích của $(-1)^{1+j}$ với định thức của ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ A bằng cách xóa đi dòng 1 và cột j với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ

Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Theo công thức Laplace, ta có

$$\det(A) = 2A_{11} + 3A_{13} - A_{14},$$

trong đó

Ví dụ

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 31,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Do đó

$$\det(A) = -2.$$

Các tính chất của định thức

- Định thức của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là, với mọi $A \in M_n$, ta có
$$\det(A^t) = \det(A).$$
- Với mọi $A, B \in M_n$, ta có
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
- Định thức của một ma trận bằng 0 nếu nó có một dòng (hoặc cột) bằng 0.
- Định thức của một ma trận bằng 0 nếu nó có hai dòng (hoặc hai cột) tỉ lệ với nhau.

Công thức Laplace

Công thức Laplace tính định thức có thể được khai triển theo một dòng (hoặc một cột) bất kỳ, tức là nếu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

là một ma trận vuông cấp n, thì định thức của A được xác định bởi các công thức sau đây:

Công thức Laplace

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},\end{aligned}$$

trong đó A_{ij} là tích của $(-1)^{i+j}$ với định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j, được gọi là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij}.

Ma trận nghịch đảo

Ma trận $A \in M_n$ được gọi là *khả nghịch* nếu và chỉ nếu có tồn tại ma trận $B \in M_n$ sao cho

$$AB = BA = I_n, \tag{2}$$

trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n. Khi đó, ma trận B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

Chú ý rằng

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Ma trận nghịch đảo

Từ định nghĩa, nếu $A \in M_n$ là ma trận khả nghịch thì $\det(A) \neq 0$. Ngược lại, nếu $\det(A) \neq 0$ thì ta cũng xây dựng được ma trận nghịch đảo của A như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A^t, \tag{2}$$

trong đó P_A là *ma trận phụ hợp* của A, được tạo thành từ các phần bù đại số của các phần tử của A, tức là

$$P_A = [A_{ij}]_{n \times n}. \tag{3}$$

Ma trận nghịch đảo

Nếu A là một ma trận vuông cấp 2 có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

thì ma trận nghịch đảo của A là

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Theo công thức trên, ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A^t = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Bài tập Chương 1

Bài tập 1

Tính định thức của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 2

Tìm ma trận X sao cho $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 19 & 13 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$.

Giải Bài tập 2

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải Bài tập 2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải Bài tập 2

Ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận X là

$$X = A^{-1}.\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 19 & 13 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

trong đó a_{ij} là các *hệ số* cho trước, b_i là các *hệ số tự do* và x_i là các *ẩn số*.

Dạng ma trận

Hệ phương trình tuyến tính (2) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$A \cdot x = b, \tag{3}$$

trong đó các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số*, *vectơ cột tự do*, *vectơ cột ẩn số*.

Ma trận hệ số mở rộng

Ma trận Ab nhận được bằng cách ghép thêm cột tự do b vào ma trận hệ số A được gọi là *ma trận hệ số mở rộng* của hệ phương trình tuyến tính (2). Dễ thấy rằng $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(Ab)$.

Định lý

Hệ phương trình tuyến tính (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(Ab).$$

Công thức Cramer

Hệ phương trình tuyến tính $A \cdot x = b$ được gọi là *hệ Cramer* nếu ma trận hệ số A là một ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

Định lý (Cramer)

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được cho bởi *công thức Cramer*

$$x = A^{-1} \cdot b,$$

tức là

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

trong đó A_i là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ i bằng vectơ cột tự do b.

Công thức Cramer

Chứng minh

Do $\det(A) \neq 0$ nên A là ma trận khả nghịch. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Theo công thức tính ma trận nghịch đảo, ta có

$$x = \frac{1}{\det(A)} P_A^t b,$$

Công thức Cramer

Chứng minh (tiếp theo)

Do đó, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) \\ &= \frac{\det(A_i)}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối nhận được bằng cách sử dụng công thức Laplace cho định thức của ma trận A_i khai triển theo cột thứ i.

Công thức Cramer

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}.$$

Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức của A, ta được

$$\det(A) = -3 \neq 0.$$

Công thức Cramer

Ta cũng có các ma trận

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức, ta nhận được

$$\det(A_1) = -3, \det(A_2) = 0.$$

Theo Công thức Cramer, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1, x_2 = 0.$$

Công thức Cramer

Bài tập 1

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21 \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}.$$

Công thức Cramer

Bài tập 2

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}.$$

Phương pháp khử Gauss

Bài toán

Giải hệ phương trình tuyến tính (tổng quát)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4}$$

Phương pháp khử Gauss

1. Lập ma trận hệ số mở rộng Ab của hệ (4).
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận Ab về dạng bậc thang. Từ đó tính được hạng của A và Ab.
   - Nếu $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A \mid b)$ thì hệ (4) vô nghiệm.
   - Nếu $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = r$ thì hệ (4) có nghiệm.

Phương pháp khử Gauss

Từ ma trận bậc thang, viết lại hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình đã cho nhưng đơn giản hơn. Giữ lại vế trái r ẩn tương ứng với các hệ số đầu tiên khác không trên mỗi dòng khác không của ma trận bậc thang và gọi chúng là các *ẩn chính*. Các ẩn còn lại gọi là *ẩn tự do* được chuyển sang vế phải. Sau đó xem các ẩn tự do như tham số và gán cho chúng các giá trị tuỳ ý rồi giải hệ phương trình ngược từ dưới lên trên bằng cách thay thế dần các ẩn từ phải sang trái và từ dưới lên trên.

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}.$$

Ví dụ

Ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức, ta có

$$\det(A) = 0.$$

Do đó, chúng ta không thể áp dụng công thức Cramer trong trường hợp này được. Chúng ta sẽ giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss.

Ví dụ

Lập ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận Ab về dạng bậc thang.

Ví dụ

Dang bậc thang của Ab là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(Ab) = 2,$$

tức là hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 26x_3 - 17x_4 = 6 \\ \qquad x_2 - \;\; 7x_3 + \;\; 5x_4 = -1 \end{cases}.$$

Nghiệm của hệ phương trình đã cho được cho bởi công thức

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26a + 17b \\ x_2 = -1 + 7a - 5b \\ x_3 = \qquad a \\ x_4 = \qquad b \end{cases},$$

trong đó a, b là các giá trị tuỳ ý.

Bài tập Chương 2

Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8 \\ 4x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 6 \\ 5x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 1 \end{cases}.$$

Sự phân tích LU

Chéo hoá ma trận

Ma trận đồng dạng

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Ta nói rằng A đồng dạng với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu và chỉ nếu có tồn tại một ma trận vuông cấp n khả nghịch P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương trên M_n, tức là

- $A \sim A, \forall A \in M_n$;
- Nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$;
- Nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Ma trận đồng dạng

Nếu $A \sim B$ thì có tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $B = P^{-1}AP$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP)\\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

Giá trị riêng và vectơ riêng

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Một số λ được gọi là một *giá trị riêng* của A nếu và chỉ nếu có tồn tại một vectơ cột $X \neq 0$ sao cho

$$AX = \lambda X.$$

Khi đó X được gọi là *vectơ riêng* của A tương ứng với λ.

Giá trị riêng và vectơ riêng

Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tức là

$$AX = 2X.$$

Do đó, $\lambda = 2$ là một giá trị riêng của A và X là một vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda = 2$.

Giá trị riêng và vectơ riêng

Số λ là một giá trị riêng của ma trận $A \in M_n$ nếu và chỉ nếu có tồn tại vectơ cột $X \neq 0$ sao cho

$$AX = \lambda X.$$

Điều này tương đương với hệ phương trình

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \tag{4}$$

có nghiệm $X \neq 0$, tức là ta phải có

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Đa thức đặc trưng

Cho $A \in M_n$. Đa thức

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận A.
Chú ý rằng nếu A là ma trận vuông cấp n thì đa thức $P_A(\lambda)$ là đa thức bậc n theo biến λ.

Đa thức đặc trưng

Nếu $A \sim B$ thì có tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Thuật toán tìm GTR và VTR

Để tìm giá trị riêng và vectơ riêng của một trận $A \in M_n$, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

- Tính đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ của A.
- Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ để tìm các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
- Với mỗi giá trị riêng λ_i, giải hệ phương trình

$$(A - \lambda_i I_n)X = 0$$

  để tìm các vectơ riêng $X \neq 0$ tương ứng với λ_i.

Ví dụ 1

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 14. \end{aligned}$$

Ví dụ 1

Giá trị riêng của A là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$, tức là

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 7$. Do đó ma trận A có hai giá trị riêng

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{và} \qquad \lambda_2 = 7.$$

Ví dụ 1

Với $\lambda_1 = 2$, xét hệ phương trình

$$(A - 2I_2)X = 0,$$

tức là

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ví dụ 1

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda_1 = 2$ là

$$\begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Ví dụ 1

Với $\lambda_2 = 7$, xét hệ phương trình

$$(A - 7I_2)X = 0,$$

tức là

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ví dụ 1

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda_2 = 7$ là

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Ví dụ 2

Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2(1-\lambda). \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Giá trị riêng của A là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$, tức là

$$(3-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$ (bội 2). Do đó ma trận A có hai giá trị riêng

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{và} \qquad \lambda_2 = 3.$$

Ví dụ 2

Với $\lambda_1 = 2$, xét hệ phương trình

$$(A - I_3)X = 0,$$

tức là

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ví dụ 2

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda_1 = 1$ là

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Ví dụ 2

Với $\lambda_2 = 3$, xét hệ phương trình

$$(A - 3I_3)X = 0,$$

tức là

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ví dụ 2

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda_2 = 3$ là

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0).$$

Chéo hóa ma trận

Cho $A \in M_n$ là một ma trận vuông cấp n. Ta nói A là *chéo hóa được* nếu và chỉ nếu có tồn tại ma trận khả nghịch P và ma trận chéo D sao cho

$$P^{-1}AP = D.$$

Điều này có nghĩa là A là đồng dạng với ma trận chéo D.

Chéo hóa ma trận

Bài toán

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Hãy tìm ma trận khả nghịch P và ma trận chéo D sao cho

$$P^{-1}AP = D.$$

Định lý

Ma trận A vuông cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng tạo thành một ma trận có định thức khác không.

Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng ma trận A có hai vectơ riêng

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận có các cột v_1, v_2 là

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Bài tập

Bài tập 1

Tìm ma trận X sao cho $3X + A = B$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài tập 2

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Viết ma trận chuyển vị A^t và tính các ma trận AA^t, A^tA. So sánh hai ma trận AA^t và A^tA.

Bài tập 3

Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận X sao cho $AX = B$.

Bài tập 4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = 9 \\ -x_1 + 3x_2 & = -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 & = 17 \end{cases}.$$

Bài tập 5

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$A = PDP^{-1}.$$