Вебинар № 1. Необходимые навыки для изучения ВышМата.

Полезные приложения.

Эти инструменты помогут вам в изучении математики и решении задач. Все изображения содержат кликабельные ссылки на соответствующие ресурсы (кликни на картинку).

desmos	Онлайн-калькулятор для построения графиков функций
deepseek	Чат-бот для помощи в решении математических задач
WolframAlpha	Универсальный инструмент для вычислений и анализа
photomath	Приложение для сканирования и решения уравнений
профиматика	Телеграм-бот с материалами по Высшей Математике

Множества.

Натуральные: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$

Целые: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$

Рациональные: $\mathbb{Q} = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то есть: $\left\{\dots, -\dfrac{5}{7}, -\dfrac{1}{2}, 0,\ 1,\ 3,\ \dfrac{17}{2},\ \dots\right\}$

Действительные: $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, например: $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi,\ e,\ \ln(3),\ \log_{10}(3),\ \sin(1),\ \dots$

Натуральные числа — это те, с которых мы начинаем считать: 1, 2, 3 и так далее. Они используются, например, для нумерации объектов.

Целые числа расширяют эту идею, включая нуль и отрицательные числа, что удобно для описания изменений, например, температуры ниже нуля.

Рациональные числа — это дроби, где числитель целый, а знаменатель натуральный. Они встречаются в задачах, связанных с делением, например, при расчете долей.

Действительные числа — это все числа на числовой прямой, включая иррациональные, такие как корень из двух или число π. Эти числа часто появляются в геометрии, физике и других науках, где важна точность.

Каждое множество включает предыдущее: натуральные входят в целые, целые в рациональные, а рациональные в действительные.

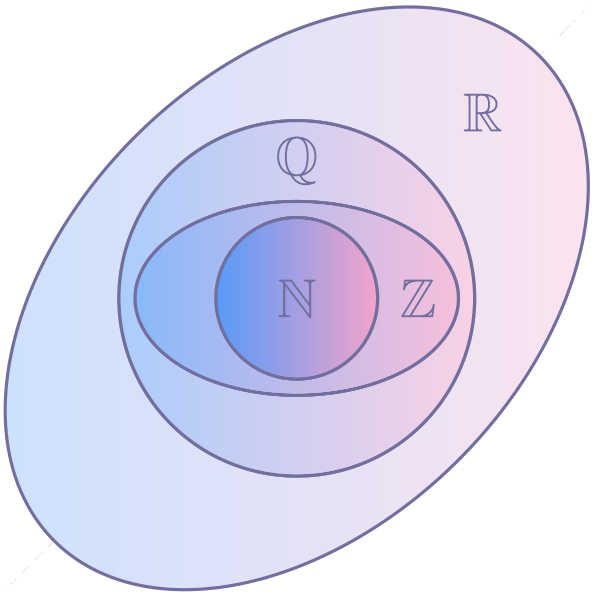

Рис. 1: Иерархия числовых множеств

Множество комплексных чисел.

Комплексные числа — это числа вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, удовлетворяющая равенству $i^2 = -1$.
Число a называется действительной частью ($a = \text{Re } z$), а b — мнимой частью ($b = \text{Im } z$).

Комплексные числа образуют множество $\mathbb{C}$, которое включает все действительные числа (при $b = 0$) и позволяет решать уравнения, не имеющие решений в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

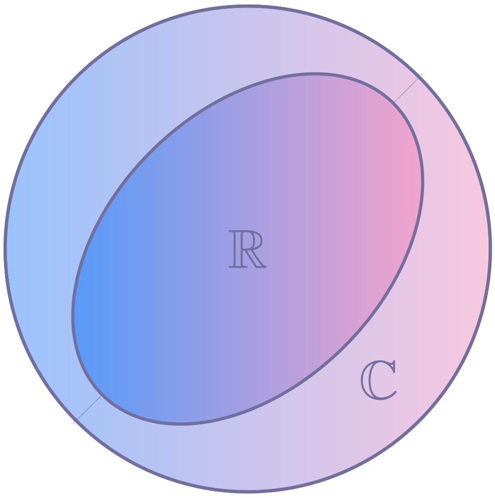

Рис. 2: Комплексные числа

Пример 1:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$D = 36 - 20 = 16 = 4^2 > 0$$
$$x_{1,\ 2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \left[\begin{matrix} -5 \\ -1 \end{matrix}\right. \in \mathbb{R}.$$

При решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ используется дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, как в примере 1, уравнение имеет два различных действительных корня, которые вычисляются по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. В данном случае корни -5 и -1 принадлежат множеству $\mathbb{R}$.

Пример 2:

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$
$$D = 4 - 8 = -4 = 4 \cdot (-1) = 4i^2 = (2i)^2$$
$$x_{1,\ 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \in \mathbb{C}$$

Если $D < 0$, как в примере 2, корни уравнения комплексные и выражаются в виде $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|D|}i}{2a}$. Здесь $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$, поэтому корни имеют вид $-1 + i$ и $-1 - i$, где действительная часть равна -1, а мнимая — ± 1. Эти корни принадлежат множеству $\mathbb{C}$.

Если $D = 0$, уравнение имеет один действительный корень кратности 2, то есть два совпадающих корня, вычисляемых по той же формуле.

Популярная ошибка:
Следует избегать некорректной записи $i = \sqrt{-1}$, ведь тогда бы имели:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{1} = 1$$

Получили, что $-1 = 1$, что, очевидно, неверно.
Далее мы узнаем, что квадратный корень из отрицательного числа в общем случае не однозначен.
Для комплексного числа z операция извлечения квадратного корня дает два значения:

$$\sqrt{z} = \{z_1, z_2\}$$

Это связано с тем, что квадратный корень в $\mathbb{C}$ — многозначная функция, и для -1 корни будут i и $-i$, так как $(-i)^2 = -1$.

Пример 3:

$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2 = 2 \cdot (-1) = 2i^2$$
$$x = \pm\sqrt{2i^2}, \text{ получили только мнимое число.}$$

В примере 3 уравнение $x^2 + 2 = 0$ имеет корни $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$. Эти корни являются чисто мнимыми, так как их действительная часть равна нулю, а мнимая часть — $\pm\sqrt{2}$.

Такие числа также принадлежат множеству $\mathbb{C}$. Для вычисления корней здесь используется свойство $i^2 = -1$, что позволяет представить $-2 = 2 \cdot (-1) = 2i^2$ и извлечь корень: $\sqrt{-2} = \sqrt{2 \cdot (-1)} = \sqrt{2}i$.

Интересные парадоксы.

Вопрос 1. Что больше: 0,(9) или 1?
Оказывается, эти числа равны, что может показаться неожиданным. Давайте разберем это шаг за шагом. Обозначим $x = 0{,}999\ldots$, где после запятой бесконечно повторяется цифра 9. Умножим это равенство на 10, чтобы получить $10x = 9{,}999\ldots$. Теперь вычтем из второго уравнения первое:

$$x = 0{,}999\ldots \quad | \cdot 10$$
$$10x = 9{,}999\ldots$$
$$9x = 9 \implies x = 1$$

Таким образом, $0{,}999\ldots = 1$. Этот результат демонстрирует, что бесконечная десятичная дробь с повторяющимися девятками эквивалентна целому числу 1.

Вопрос 2. Каких чисел больше: всех чисел из $\mathbb{R}$ или на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

На первый взгляд может показаться, что множество всех действительных чисел бесконечно, а интервал конечной длины должен содержать меньше элементов. Однако в математике мощность множеств определяется через биекцию — взаимно однозначное соответствие.

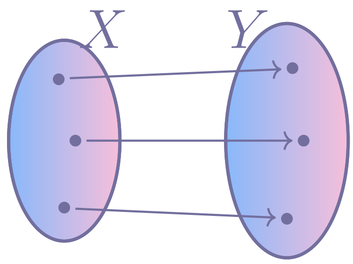

Рис. 3: Биекция множеств

Биекция между интервалом $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и всей числовой прямой $\mathbb{R}$ возможна. Например, можно использовать тангенс: для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ значение $\tan(x) \in \mathbb{R}$. Продемонстрируем это на рисунке ниже.

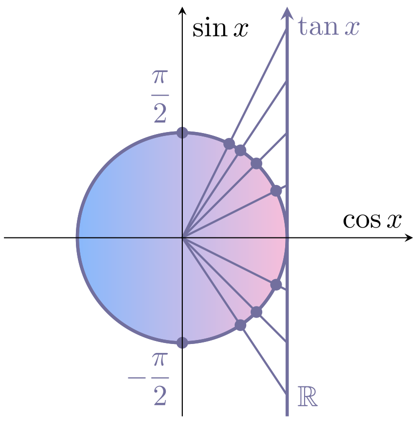

Рис. 4: Биекция $(-\pi/2, \pi/2)$ и $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Это показывает, что мощности этих множеств равны, несмотря на кажущееся различие в их длине. График биекции иллюстрирует, как каждое число из $\mathbb{R}$ соответствует числу в заданном интервале, а график функции на плоскости подтверждает непрерывность этого соответствия.

Вопрос 3. Каких чисел больше: натуральных или четных? Рассмотрим соответствие между этими множествами:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{Bmatrix} \begin{matrix} \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Существует биекция, где каждому натуральному числу n ставится в соответствие четное число $2n$. Это показывает, что множества имеют одинаковую мощность, то есть являются равномощными, хотя четные числа кажутся подмножеством натуральных.

Вопрос 4. Каких чисел больше: натуральных или целых? Установим биекцию:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{Bmatrix} \begin{matrix} \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Можно определить соответствие, например, через функцию $f(n) = n/2$ для четных n и $f(n) = -(n-1)/2$ для нечетных n, начиная с 1. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие, доказывающее равномощность множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$.

Для ответа на следующий вопрос, запишем две леммы, которые будут использованы ниже.

Лемма 1. Сумма конечного и счетного множеств - счетна.

Лемма 2. Сумма двух счетных множеств - счетна.

Лемма 3. Любое бесконечное подмножество счетного множества - счетно.

Вопрос 5. Каких чисел больше: натуральных или рациональных?
Оказывается, что они равномощны, то есть можно построить биекцию. Попробуем это сделать: достаточно доказать, что счетно (т.е. эквивалентно $\mathbb{N}$), множество положительных рациональных чисел, обозначаемых $\mathbb{Q}^+$, так как в этом случае множество отрицательных чисел, эквивалентное ему, также счетно, и вместе с единственным числом $\{0\}$ по лемме, приведенной выше, они в сумме образуют счетное множество. Занумеруем $\mathbb{Q}^+$ следующим образом:

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\dots$
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\dots$
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\dots$
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Рис. 5: Биекция $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$

Занумерованы все положительные рациональные числа, причем каждое число встречается много раз $\left(\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots \text{ и т.д.}\right)$. Таким образом, $\mathbb{Q}^+$ бесконечное подмножество счетного множества. Значит, оно счетно, то есть его можно занумеровать, что означает равномощность.

Множество $\mathbb{N}$ и множество $[0;1]$ не равномощны! Биекция между ними невозможна, так как множество $[0;1]$ содержит несчетное число элементов, в то время как $\mathbb{N}$ — счетное.

Отель Гильберта.

Отель Гильберта — это мысленный эксперимент, который помогает понять свойства счетных множеств. Представим отель с бесконечным числом номеров, пронумерованных натуральными числами: 1, 2, 3 и так далее. Предположим, что все номера заняты. Может ли в такой отель приехать новый гость? Оказывается, да. Если перевести каждого гостя из номера n в номер $n+1$, то номер 1 освободится, и новый гость сможет занять его. Таким образом, даже при бесконечном числе гостей появляется место для одного дополнительного.

Теперь предположим, что в отель прибывает бесконечно много новых гостей, например, столько же, сколько номеров. Можно ли их всех разместить? Да, если каждому новому гостю, пронумерованному как m, присвоить номер $2m$. При этом все исходные гости останутся в четных номерах $2n$, а нечетные номера $2m-1$ займут новые гости. Это показывает, что мощность множества гостей увеличивается, но отель все еще справляется за счет биекции.

Эксперимент Гильберта иллюстрирует, что счетные множества, такие как натуральные или рациональные числа, имеют одинаковую мощность, несмотря на кажущуюся разницу. Однако если в отель прибудет множество с мощностью континуума, например, все действительные числа из интервала $[0;1]$, разместить всех гостей невозможно, так как континуум превосходит счетную мощность. Этот парадокс показывает различие между счетными и несчетными бесконечностями.

Прогрессии.

Рассмотрим **арифметическую прогрессию** — последовательность чисел, где каждый следующий член увеличивается на постоянную разность d. Возьмем пример: 1, 3, 5, 7, 9 и так далее. Здесь первый член $a_1 = 1$, а разность d вычисляется как разница между соседними членами, например, $3 - 1 = 2$. Таким образом, $d = 2$.

Общий член такой прогрессии выражается формулой $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$

Подставим значения для проверки: пятый член $a_5 = 1 + (5-1)\cdot 2 = 1 + 8 = 9$, что совпадает с последовательностью, а десятый член $a_{10} = 1 + (10-1)\cdot 2 = 1 + 18 = 19$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$, где a_n — последний член.

Например, для суммы чисел от 1 до 100: $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$, $n = 100$, тогда $S_{100} = \frac{100}{2}(1+100) = 50 \cdot 101 = 5050$. Этот метод удобен для быстрого подсчета сумм в задачах.

Теперь перейдем к **геометрической прогрессии** — последовательности, где каждый следующий член получается умножением предыдущего на постоянный множитель q, называемый знаменателем.

Рассмотрим пример: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ и далее.

Здесь первый член $a_1 = 2$, а знаменатель $q = \frac{1}{2}$, так как каждый член делится на 2.

Общий член геометрической прогрессии выражается как $\boxed{b_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.

Сумма первых n членов вычисляется по формуле $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$ при $q \neq 1$.

Для нашего примера с $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$ найдем сумму первых шести членов:

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{63}{64} \cdot 2 = \frac{63}{16}$$

Также для геометрической прогрессии с $|q| < 1$ существует сумма бесконечной последовательности $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}$. Подставим значения:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Это подтверждает, что бесконечная сумма стремится к 4, что логично, так как члены прогрессии быстро уменьшаются.

Суммы и Ряды.

Сумма — это операция сложения конечного или бесконечного числа слагаемых, объединенных по определенному правилу. В математике суммы обозначаются с помощью знака $\sum$, например, $\sum\limits_{k=1}^{6} k^2$. Здесь верхняя граница равна 6, что указывает на последний индекс суммирования, нижняя граница равна 1, определяющая начальный индекс, элемент суммы — это k^2, а индекс суммирования k принимает значения от 1 до 6. Распишем эту сумму:

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

Рассмотрим другой пример: $\sum\limits_{i=0}^{5} \frac{i+1}{i!}$. Здесь нижняя граница 0, верхняя граница 5, элемент суммы $\frac{i+1}{i!}$, а индекс суммирования i меняется от 0 до 5.
Распишем:

$$\sum_{i=0}^{5} \frac{i+1}{i!} = \frac{0+1}{0!} + \frac{1+1}{1!} + \frac{2+1}{2!} + \frac{3+1}{3!} + \frac{4+1}{4!} + \frac{5+1}{5!} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{24} + \frac{6}{120}$$

Факториал $n!$ — это произведение всех положительных целых чисел от 1 до n, причем $0! = 1$ по определению. Рассчитывается как $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Пример:

$$\begin{aligned}
&0! = 1\\
&1! = 1\\
&2! = 2 \cdot 1 = 2\\
&3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\\
&4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24
\end{aligned}$$

Суммы можно сводить к удобному виду. Например, последовательность $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ представима как $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$, что эквивалентно $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Такой подход упрощает вычисления и анализ.

Основные паттерны суммирования включают следующие:
1) Знакочередование. Используются $(-1)^k$ или $(-1)^{k+1}$ для чередования знаков.

Примеры:

$$1+2+3+\ldots+6=\sum_{k=1}^{6} k$$

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{6}=\sum_{k=1}^{6} \sqrt{k}$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{6}=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1} \sqrt{k}$$

2) Четность: $2k$. Элементы берутся с четными индексами.

Пример:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{720}=\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(2k)!}$$

3) Нечетность: $2k+1$ или $2k-1$. Элементы соответствуют нечетным индексам.

Пример:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Это конечная сумма. Для ряда с бесконечным числом слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ряд отличается от суммы тем, что сумма имеет конечное число слагаемых, а ряд — бесконечное, и его сумма определяется как предел при стремлении числа слагаемых к бесконечности, если он существует.

Бином Ньютона и треугольник Паскаля.
Рассмотрим разложение бинома $(a+b)^n$ для первых степеней:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2a^1b^1+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Эти разложения связаны с треугольником Паскаля, где каждый коэффициент берется из соответствующей строки. Треугольник строится так: первая строка — 1, вторая — 1 1, каждая следующая строка формируется суммой двух чисел из предыдущей строки, добавляя 1 в начале и конце. Получаем:

$$\begin{array}{c}1\\1\quad 1\\1\quad 2\quad 1\\1\quad 3\quad 3\quad 1\\1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\end{array}$$

Важно отметить, что в каждом члене разложения сумма показателей степени a и b равна номеру степени скобки n. Например, в $(a+b)^3$ члены a^3, a^2b, ab^2, b^3 имеют суммы показателей 3. Коэффициенты перед каждым слагаемым берутся из соответствующей строки треугольника Паскаля.

Теперь раскроем $(a+b)^5$. Используем 6-ю строку треугольника: 15101051. Получаем: $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Для $(a-b)^3$ знак меняется у членов с нечетной степенью b. Используем 4-ю строку: 1331. Разложение: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Для $(2x+3y)^3$ обозначим $a=2x$, $b=3y$. Снова берем 4-ю строку: 1331. Разложение:

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3 =\\ &= 8x^3+3\cdot 4x^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot 9y^2+27y^3 =\\ &= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3\end{aligned}$$

Формула бинома Ньютона выражает разложение $(a+b)^n$ как $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,}$ где C_n^k — биномиальный коэффициент, определяющий число способов выбрать k элементов из n.

Коэффициент C_n^k, который ещё обозначается как $\binom{n}{k}$, вычисляется по формуле:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

где ! — факториал.

Например, $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = \dfrac{120}{12} = 10.$

Проверим на $(a+b)^2$. Используем формулу с $n = 2$:

$$\sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k$$

Подставим:

$$\begin{gathered} C_2^0 a^2 b^0 = 1 \cdot a^2 = a^2, \\ C_2^1 a^1 b^1 = 2 \cdot ab = 2ab, \\ C_2^2 a^0 b^2 = 1 \cdot b^2 = b^2 \\ \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2 \end{gathered}$$

Итог: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, что подтверждает правильность результата.

Выделение полных квадратов.

Выделение полного квадрата — это метод преобразования квадратичного выражения вида $ax^2 + bx + c$ в форму $a(x+d)^2 +$ число, где $(x+d)$ представляет собой линейную функцию.

Рассмотрим примеры.
Для $x^2 + 2x + 2$ добавим и вычтем 1, чтобы получить:

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1$$

Здесь $(x+1)^2$ — полный квадрат, а 1 — остаток.

Для $x^2 + 6x + 7$ добавим и вычтем $3^2 = 9$:

$$x^2 + 6x + 7 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 7 = (x+3)^2 - 2$$

Для $x^2 + 5x + 3$ используем $2.5^2 = 6.25$:

$$x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2.5 + 2.5^2) - 2.5^2 + 3 = (x+2.5)^2 - 3.25$$

Наконец, для $9x^2 + 3x + 1$ факторизуем 9:

$$9x^2 + 3x + 1 = \left((3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Этот метод полезен для нахождения вершин парабол, упрощения интегралов и решения уравнений. Квадратный член $(x+d)^2$ всегда неотрицателен, а добавляемое число определяет смещение графика вверх или вниз.

Деление уголком.

Деление уголком — это школьный метод деления чисел, при котором остаток записывается под чертой, а частное формируется шаг за шагом. Этот подход адаптируется для деления многочленов, где один многочлен делится на другой, обычно линейный, с вычислением частного и остатка. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+6x+5 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^2\ \ +x & x+5 \\ \cline{1-1}
5x+5 & \\
5x+5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Здесь x^2+6x+5 делится на $x+1$, и частное $x+5$ дает остаток 0.

Пример 2:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^2\ \ +x & x+1 \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
x+1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\implies \frac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1+\frac{1}{x+1}
$$

Пример 3:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3\ \ +5x^2-54x+63 & x+7 \\ \cline{2-2}
2x^3+14x^2\qquad\qquad & 2x^2-9x+9 \\ \cline{1-1}
-9x^2-54x+63 & \\
-9x^2-63x\qquad & \\ \cline{1-1}
9x+63 & \\
9x+63 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Полное деление дает частное $2x^2-9x+9$.

Теорема. Пусть $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$. Если все $a_i \in \mathbb{Z}$, то рациональные корни вида $\frac{p}{q}$ (где p и q взаимно простые) удовлетворяют делению $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.

Пример:

$$1x^3-6x^2+11x-6=0$$
$$a_n=1,\ a_0=-6$$

Если есть корни $\frac{p}{q}$, то $-6 \vdots p$ и $1 \vdots q$. Возможные p: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
Проверим $x=1$:

$$1-6+11-6=0 \implies \text{корень.}$$
$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(?)$$

Делим уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} x^3 \;\; - x^2 \qquad\qquad & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1} -5x^2 - 11x - 6 & \\ -5x^2 \;\; + 5x \quad\;\; & \\ \cline{1-1} 6x - 6 & \\ 6x - 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

поделилось нацело.

Итог:

$$(x-1)(?) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$\implies x = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$$