Вебинар №11. Теоремы о среднем. Производная сложной функции.

Производная сложной функции

Очень часто функции, с которыми мы работаем, представляют собой функцию от функции, то есть сложную функцию. Для вычисления их производных существует специальное правило, известное, как формулу производной сложной функции.

Определение.
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, и функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y = f(x)$. Тогда сложная функция $h(x) = g\big(f(x)\big)$ дифференцируема в точке x, и её производная равна:

$$\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

На пальцах (интуитивное понимание):
Представьте, что Δx — это маленькое изменение x, которое вызывает изменение Δy в функции $f(x)$, а это, в свою очередь, вызывает изменение Δg в функции $g(y)$. Тогда отношение $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ (скорость изменения всей сложной функции) можно представить как произведение:

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При переходе к пределу $\Delta x \to 0$, это превращается в произведение производных: $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$
Таким образом получается:

$$\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Строгое доказательство:
Пусть $y = f(x)$ и $z = g(y) = g\big(f(x)\big)$. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x, то по определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Мы можем записать это в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$ (то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$). Из этого следует:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Аналогично, так как $g(y)$ дифференцируема в точке y, то:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y)$$

И мы можем записать:

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = g'(y) + \beta(\Delta y)$$

где $\Delta g = g(y+\Delta y) - g(y)$ и $\beta(\Delta y)$ — бесконечно малая функция при $\Delta y \to 0$ (то есть $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \beta(\Delta y) = 0$). Из этого следует:

$$\Delta g = g'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y$$

Теперь подставим выражение для Δy в формулу для Δg:

$$\Delta g = g'(y)(f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta y)(f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x)$$

Разделим обе части на Δx (при $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(y)f'(x) + g'(y)\alpha(\Delta x) + \beta(\Delta y)f'(x) + \beta(\Delta y)\alpha(\Delta x)$$

Теперь возьмем предел обеих частей при $\Delta x \to 0$. Мы знаем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Так как $f(x)$ непрерывна (поскольку дифференцируема), то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \beta(\Delta y) = 0$ (так как β — бесконечно малая при $\Delta y \to 0$). Тогда все слагаемые, содержащие $\alpha(\Delta x)$ или $\beta(\Delta y)$, стремятся к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(y)f'(x) + 0 + 0 + 0 = g'(y)f'(x)$$

Подставляя $y = f(x)$, получаем:

$$\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Что и требовалось доказать.

Примеры производных сложной функции

Давайте применим данную формулу на практике.

$$\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Пример 1. $(\sin x^2)'$
Решение: Внешняя функция: $g(u) = \sin(u)$, где $u = x^2$. Внутренняя функция: $f(x) = x^2$. Производная внешней функции: $g'(u) = \big(\sin(u)\big)' = \cos(u)$. Производная внутренней функции: $f'(x) = (x^2)' = 2x$. Применяем формулу производной сложной функции:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Ответ: $2x \cos x^2$.

Пример 2. $(e^{\cos x})'$
Решение: Внешняя функция: $g(u) = e^u$, где $u = \cos x$. Внутренняя функция: $f(x) = \cos x$. Производная внешней функции: $g'(u) = (e^u)' = e^u$. Производная внутренней функции: $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$. Применяем формулу производной сложной функции:

$$(e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x e^{\cos x}$$

Ответ: $-\sin x e^{\cos x}$.

Применяя формулу производной сложной функции для функций, состоящих из более чем двух слоев, мы просто последовательно применяем правило. То есть:

$$\boxed{\Big(h\big(g\big(f(x)\big)\big)\Big)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \cdot g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Здесь h — внешняя функция, g — центральная, f — внутренняя.

Пример 3. $\left(\sqrt{\sin x^2}\right)'$
Решение: Это функция из трех слоев: Внешняя функция: $k(v) = \sqrt{v} = v^{1/2}$, где $v = \sin x^2$. Центральная функция: $g(u) = \sin(u)$, где $u = x^2$. Внутренняя функция: $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sin x^2}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot (\sin x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}\end{aligned}$$

Ответ: $\dfrac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$.

Пример 4. $\Big(\ln\big(\ln(\ln x)\big)\Big)'$

Решение: Здесь три функции ln друг в друге:
Внешняя: $\ln(u)$, где $u = \ln(\ln x)$. Центральная: $\ln(v)$, где $v = \ln x$. Внутренняя: $\ln x$.

$$\Big(\ln\big(\ln(\ln x)\big)\Big)' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot (\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' =$$
$$= \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

Ответ: $\dfrac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

Пример 5. $\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 3x}\right)'$

Решение: Перепишем выражение: $(\operatorname{tg}^4 3x)^{1/3} = \operatorname{tg}^{4/3} 3x$.
Слои: 1. Внешняя: степенная функция $(\dots)^{4/3}$. 2. Центральная: $\operatorname{tg}(\dots)$. 3. Внутренняя: $3x$.

$$\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 3x}\right)' = \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{1/3} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{1/3} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' =$$
$$= \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{1/3} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = 4\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x}\frac{1}{\cos^2(3x)}$$

Ответ: $4\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x}$.

Пример 6. $\left(3^{(\cos 4x)^{12}}\right)'$

Решение: Слои: 1. Внешняя: показательная функция $3^{(\cdots)}$. 2. Центральная: степенная функция $(\dots)^{12}$. 3. Центральная: $\cos(\dots)$. 4. Внутренняя: $4x$.

$$\begin{aligned}\left(3^{(\cos 4x)^{12}}\right)' &= 3^{(\cos 4x)^{12}} \ln 3 \cdot \left((\cos 4x)^{12}\right)' \\ &= 3^{(\cos 4x)^{12}} \ln 3 \cdot 12(\cos 4x)^{11} \cdot (\cos 4x)' \\ &= 3^{(\cos 4x)^{12}} \ln 3 \cdot 12(\cos 4x)^{11} \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)' \\ &= 3^{(\cos 4x)^{12}} \ln 3 \cdot 12(\cos 4x)^{11} \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 \\ &= -48 \ln 3 \sin 4x \cos^{11}(4x) 3^{\cos^{12}(4x)}\end{aligned}$$

Ответ: $-48 \ln 3 \sin 4x \cos^{11}(4x) 3^{\cos^{12}(4x)}$.

Производные от функций вида $[f(x)]^{g(x)}$ (Логарифмическое дифференцирование)

Для функций, у которых и основание, и показатель степени являются переменными (например, x^x), прямое применение правил для степенных или показательных функций невозможно. В таких случаях используется метод **логарифмического дифференцирования**. Идея в том, чтобы представить функцию как $e^{\ln(\dots)}$, а затем найти производную.

Пример 1. $(x^x)'$
Решение: Пусть $y = x^x$. Представим функцию в виде:

$$y = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$$

Теперь используем формулу производной сложной функции $(e^u)' = e^u \cdot u'$, где $u = x \ln x$.

$$y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

Найдем производную от $u = x \ln x$ с помощью правила производной произведения $(fg)' = f'g + fg'$:

$$(x \ln x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Подставим это обратно в выражение для y':

$$y' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

Заменим $e^{x \ln x}$ обратно на x^x:

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$$

Ответ: $x^x(\ln x + 1)$.

Пример 2. $\left((\sin x)^{\cos x}\right)'$
Решение: Пусть $y = (\sin x)^{\cos x}$. Представим функцию в виде:

$$y = e^{\ln \sin x^{\cos x}} = e^{\cos x \ln \sin x}$$

Теперь используем правило цепи $(e^u)' = e^u \cdot u'$, где $u = \cos x \ln \sin x$.

$$y' = (e^{\cos x \ln \sin x})' = e^{\cos x \ln \sin x} \cdot (\cos x \ln \sin x)'$$

Найдем производную от $u = \cos x \ln \sin x$ с помощью правила производной произведения:

$$(\cos x \ln \sin x)' = (\cos x)' \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot (\ln \sin x)'$$

Вычислим отдельные производные: $(\cos x)' = -\sin x$. $(\ln \sin x)'$ — это производная сложной функции: внешняя $\ln(v)$, внутренняя $v = \sin x$. $(\ln \sin x)' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$. Подставим эти производные:

$$(\cos x \ln \sin x)' = -\sin x \ln \sin x + \cos x \cot x$$

Теперь подставим это обратно в выражение для y':

$$y' = e^{\cos x \ln \sin x} \cdot (-\sin x \ln \sin x + \cos x \cot x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x \ln \sin x + \cos x \cot x)$$

Ответ: $(\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x \ln \sin x + \cos x \cot x)$.

Пример 3. $(\sqrt[x]{x})'$
Решение: Функцию $\sqrt[x]{x}$ можно переписать как $x^{1/x}$. Это функция вида $[f(x)]^{g(x)}$, где $f(x) = x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Представим функцию в виде:

$$y = x^{1/x} = e^{\ln(x^{1/x})} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

Теперь используем правило цепи $(e^u)' = e^u \cdot u'$, где $u = \dfrac{1}{x}\ln x$.

$$y' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$$

Найдем производную от $u = \dfrac{1}{x}\ln x$ с помощью правила производной произведения:

$$\left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot (\ln x)'$$

Вычислим отдельные производные: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Подставим эти производные:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)' &= -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2}\end{aligned}$$

Теперь подставим это обратно в выражение для y':

$$y' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

Заменим $e^{\frac{1}{x}\ln x}$ обратно на $x^{1/x}$:

$$(\sqrt[x]{x})' = x^{1/x}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

Ответ: $x^{1/x}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$.

Теоремы о среднем значении

Теоремы о среднем значении — это группа фундаментальных теорем в математическом анализе, которые связывают значения функции и её производной на интервале. Для этих теорем ключевым является понятие непрерывности на отрезке.

Теорема (Первая теорема Вейерштрасса):
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство (методом от противного):
Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, но неограничена на этом отрезке. Если $f(x)$ неограничена, то для любого положительного числа M (как бы велико оно ни было) существует такая точка $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$.
В частности, это верно для последовательности чисел $M_n = n$, где $n \in \mathbb{N}$. То есть, для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что $|f(x_n)| > n$. Мы построили последовательность точек $\{x_n\}$, все члены которой принадлежат у отрезку $[a, b]$. Следовательно, эта последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.
По теореме Больцано-Вейерштрасса, из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — это подпоследовательность из $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Так как все $x_{n_k} \in [a, b]$ и отрезок $[a, b]$ замкнут, то предельная точка x_0 также должна принадлежать этому отрезку: $x_0 \in [a, b]$.
Теперь используем условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она непрерывна и в точке x_0. По определению непрерывности по Гейне, если $x_{n_k} \to x_0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.
Однако, по построению последовательности $\{x_n\}$, мы имели $|f(x_n)| > n$ для всех n. Для подпоследовательности это означает $|f(x_{n_k})| > n_k$. Поскольку $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$.
Мы получили противоречие: с одной стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ (конечное число), а с другой стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$. Конечное число не может быть равно бесконечности. Следовательно, наше исходное предположение о неограниченности функции $f(x)$ было неверным. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке. Доказательство окончено.

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса):
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений (супремума и инфимума).

Доказательство (для наибольшего значения):
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. По Первой теореме Вейерштрасса, $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Это означает, что существуют конечные супремум $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и инфимум $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Нам нужно показать, что существуют точки $x_{max}, x_{min} \in [a{,}b]$ такие, что $f(x_{max}) = M$ и $f(x_{min}) = m$. Покажем это для супремума M.
По определению супремума, для любого $x \in [a,b]$ выполняется $f(x) \leq M$. Также, для любого числа M' меньше, чем M, существует $x \in [a,b]$ такое, что $f(x) > M'$.
Рассмотрим последовательность $M_n = M - \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $M_n < M$ для всех n. Тогда по определению супремума, для каждого n существует такая точка $x_n \in [a,b]$ (соответствующая M_n), что:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Таким образом, мы построили последовательность точек $\{x_n\}$, все члены которой принадлежат у отрезку $[a,b]$. Следовательно, эта последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.
По теореме Больцано-Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — это подпоследовательность из $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_{max}$. Так как все $x_{n_k} \in [a,b]$ и отрезок $[a,b]$ замкнут, то предельная точка x_{max} также должна принадлежать этому отрезку: $x_{max} \in [a,b]$.
Теперь рассмотрим неравенство для подпоследовательности:

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

Возьмем предел всех частей этого неравенства при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(M - \frac{1}{n_k}\right) = M - 0 = M$$
$$\lim_{k\to\infty} M = M$$

По теореме о двух милиционерах, из $\lim\limits_{k\to\infty}\left(M - \dfrac{1}{n_k}\right) = M$ и $\lim\limits_{k\to\infty} M = M$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.
С другой стороны, поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, она непрерывна и в точке x_{max}. По определению непрерывности по Гейне, если $x_{n_k} \to x_{max}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_{max})$.
Сравнивая два результата для $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$, получаем:

$$f(x_{max}) = M$$

Таким образом, функция достигает своего супремума M в точке $x_{max} \in [a,b]$. Аналогично доказывается, что функция достигает своего инфимума m в некоторой точке $x_{min} \in [a,b]$. Доказательство окончено.

Экстремумы функции. Теорема Ферма.

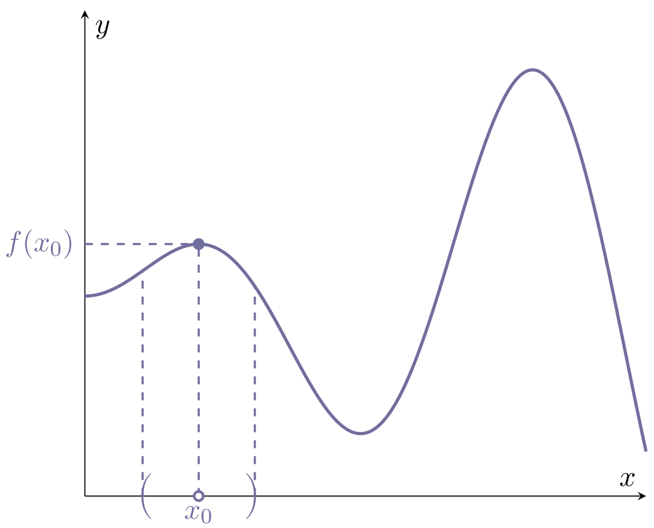
Экстремумы — это локальные максимумы и минимумы функции, которые играют важную роль в исследовании поведения функции.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.
Точка x_0 называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0 значение функции в x меньше, чем значение функции в x_0:

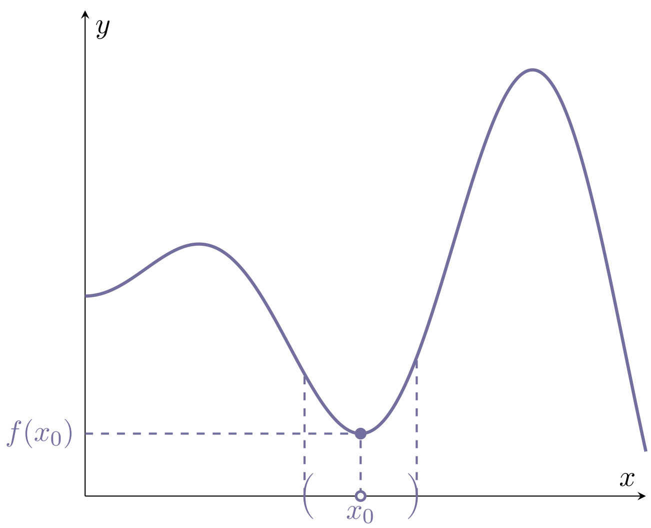
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \hookrightarrow f(x) < f(x_0)$$

Определение.
Точка x_0 называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0 значение функции в x больше, чем значение функции в x_0:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \hookrightarrow f(x) > f(x_0)$$



(a) Геом. смысл локального максимума



(b) Геом. смысл локального минимума

Рис. 1

Точки локального максимума и локального минимума называются **точками экстремума** функции.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума):
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, и x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$. Тогда производная функции в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

Геометрический смысл:
В точке экстремума (максимума или минимума) дифференцируемой функции касательная к графику функции является горизонтальной (её угловой коэффициент равен нулю).

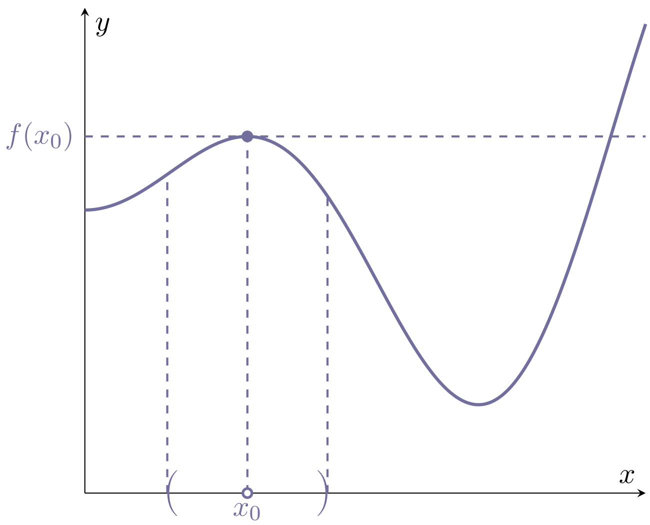


Рис. 2: Геом. смысл теоремы Ферма

Доказательство (для точки максимума):
Пусть x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$. Тогда по определению существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U_\delta}(x_0)$ выполняется $f(x) < f(x_0)$. Это означает, что $f(x) - f(x_0) < 0$.
Поскольку $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, существует $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
Рассмотрим односторонние пределы (односторонние производные):

- Для $\Delta x > 0$ (приближаемся к x_0 справа), $x_0 + \Delta x \in \overset{\circ}{U_\delta}(x_0)$. Тогда числитель $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Знаменатель $\Delta x > 0$. Следовательно, отношение $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$.
  При переходе к пределу, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$.

- Для $\Delta x < 0$ (приближаемся к x_0 слева), $x_0 + \Delta x \in \overset{\circ}{U_\delta}(x_0)$. Тогда числитель $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Знаменатель $\Delta x < 0$. Следовательно, отношение $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$.
  При переходе к пределу, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$.

Поскольку производная $f'(x_0)$ существует, односторонние пределы должны быть равны. Из $f'(x_0) \leq 0$ и $f'(x_0) \geq 0$ следует, что $f'(x_0) = 0$. Аналогично доказывается для точки минимума. Доказательство окончено.

Важное замечание:
Теорема Ферма дает лишь необходимое условие экстремума, но не достаточное. То есть, если $f'(x_0) = 0$, это не всегда означает, что x_0 — точка экстремума (например, $y = x^3$ в $x = 0$). Также экстремум может существовать в точке, где производная не существует (как для $y = |x|$ в $x = 0$).

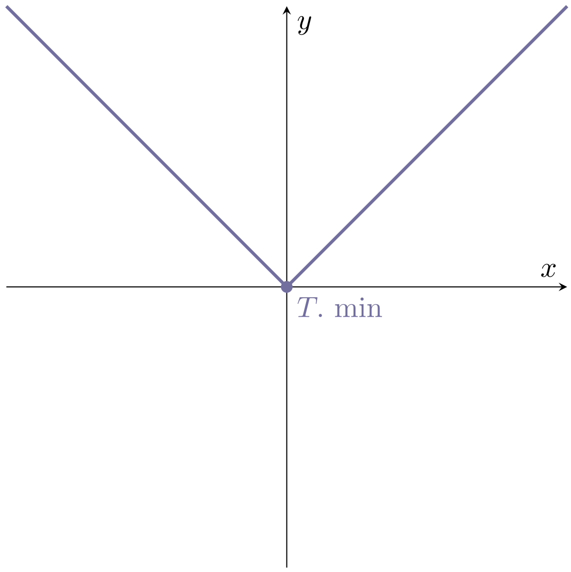


Рис. 3: $y = |x|$

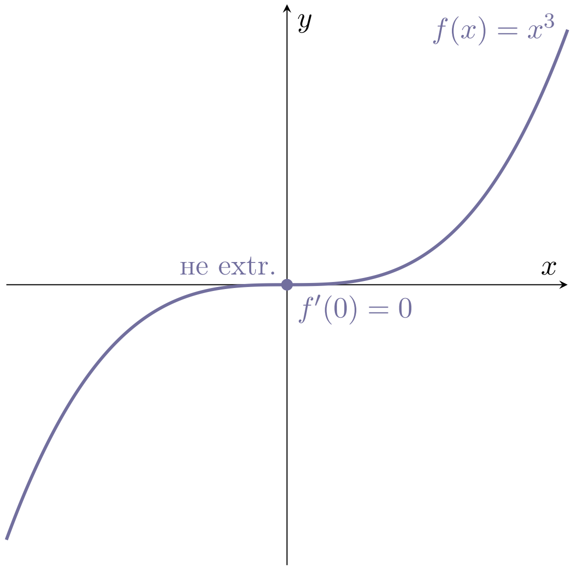


Рис. 4: $y = x^3$

На Рис. 3 и Рис. 4 приведены графики $y = |x|$ и $y = x^3$ соответственно. Как видно, $y = |x|$ имеет минимум в нуле, но производная не равна нулю (на самом деле, производная в нуле не существует у данной функции). Также видно, что производная $y = x^3$ равна нулю в нуле, но функция не имеет экстремума в нуле, так как возрастает на всей числовой прямой (данная точка называется точкой перегиба и подробно рассматривается в курсе по графикам функций).

Теорема Ролля.
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).
3. Значения функции на концах отрезка равны: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что производная функции в этой точке равна нулю:

$$\exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = 0$$

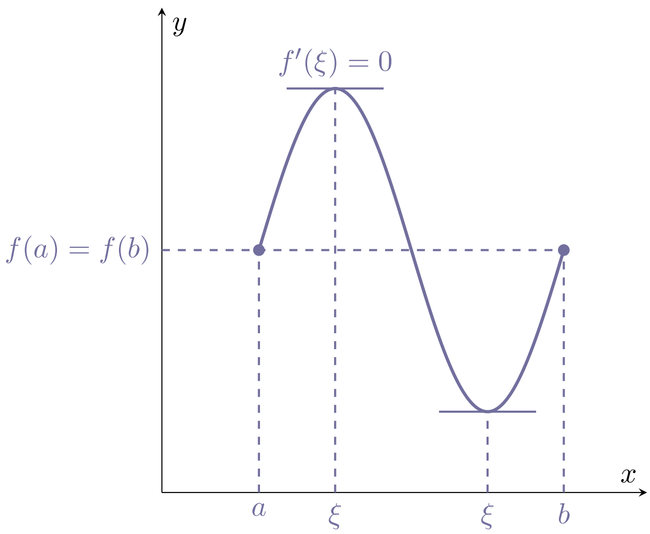


Рис. 5: Геом. смысл теоремы Ролля

Доказательство:
Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по Второй теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своих наибольшего M и наименьшего m значений.
Рассмотрим два случая:

1. **Случай 1: Наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка.** То есть $M = f(a)$ и $m = f(b)$, или наоборот. По условию теоремы, $f(a) = f(b)$. Следовательно, $M = m$. Это означает, что наибольшее и наименьшее значения функции совпадают. Тогда функция $f(x)$ является константой на отрезке $[a, b]$. Если $f(x) = C$ (константа), то её производная $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$. В этом случае любая точка $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет условию $f'(\xi) = 0$.

2. **Случай 2: Наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке интервала** (a, b)**.** Пусть, например, наибольшее значение M достигается в некоторой точке $\xi \in (a, b)$. То есть $f(\xi) = M$. Поскольку ξ является точкой локального максимума (она не является концом отрезка) и функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b), то по Теореме Ферма, производная функции в этой точке равна нулю: $f'(\xi) = 0$. Аналогично, если наименьшее значение m достигается в некоторой точке $\xi \in (a, b)$, то ξ является точкой локального минимума, и по Теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

Таким образом, в любом случае существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой $f'(\xi) = 0$. Доказательство окончено.

Важное замечание:

Если убрать одно из условий в формулировке теоремы Ролля, то в общем случае она не будет выполняться.

Давайте уберем пункт 3 про равенство отрезков на концах. То есть пусть $f(a) \neq f(b)$. Тогда рассмотрим функцию:

$$y = x, \ x \in [1,2]$$

Очевидно, что данная функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале, однако не существует такой точки ξ, что $y' = 0$, так как $y' = x' = 1$.

Теперь давайте уберем пункт 2 про дифференцируемость функции на интервале (a,b). Тогда рассмотрим функцию:

$$y = |x|, \ x \in [-1,1]$$

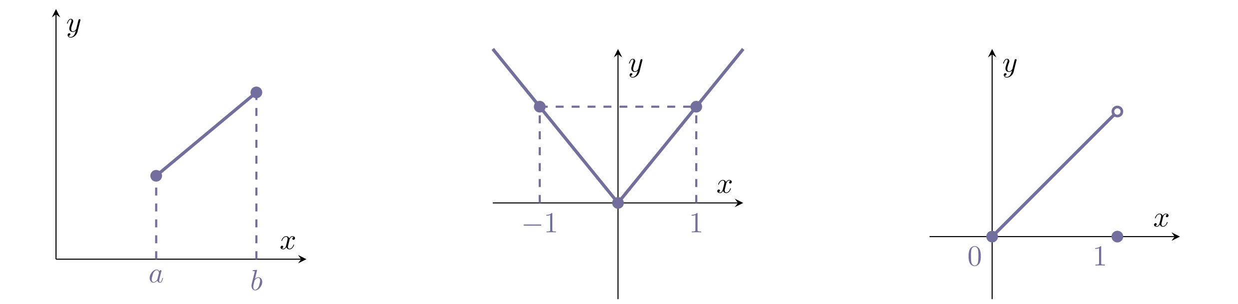
Очевидно, что данная функция непрерывна на отрезке и принимает равные значения на его концах, однако не существует такой точки ξ, что $y' = 0$, так как слева от нуля производная от $y = |x|$ равна -1, справа от нуля равна 1, а в самом нуле функция $y = |x|$ не является дифференцируемой.

Теперь давайте уберем пункт 1 про непрерывность функции на отрезке $[a,b]$. Тогда рассмотрим функцию:

$$y = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция дифференцируема на интервале $(0,1)$ и принимает равные значения на его концах, однако не существует такой точки ξ, что $y' = 0$, так как на всем интервале $(0,1)$ производная функции $y' = x' = 1 \neq 0$.

Графики всех функций контрпримеров приведем ниже:



(a) Пусть $f(a) \neq f(b)$ (b) Пусть $f(x)$ не дифф. на $(a;b)$ (c) Пусть $f(x)$ не непр. на $[a;b]$

Теорема Лагранжа.
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Геометрический смысл:
Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля. Она связывает угловой коэффициент секущей, проходящей через концы графика, с угловым коэффициентом касательной в некоторой промежуточной точке.
Теорема Лагранжа утверждает, что найдется такая точка ξ на интервале (a, b), в которой касательная к графику функции $f(x)$ будет параллельна секущей, соединяющей концы графика функции $\big(a, f(a)\big)$ и $\big(b, f(b)\big)$.

Как видно из Рис. 7, угловой коэффициент секущей как раз и будет равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

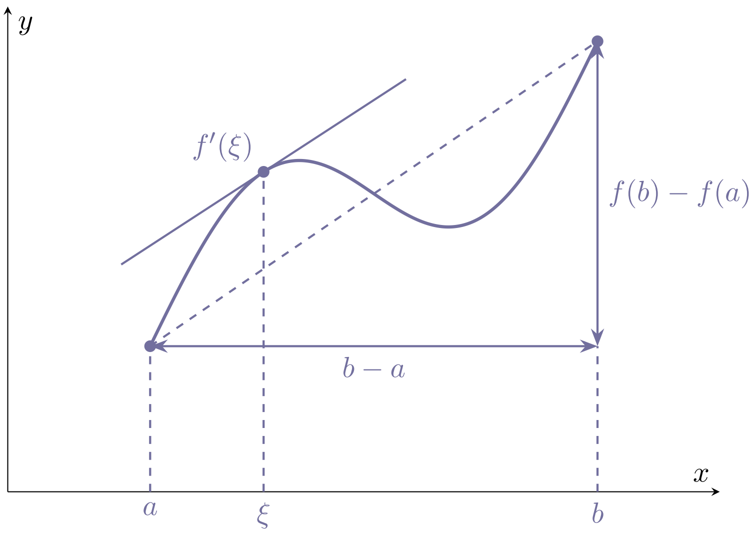


Рис. 7: Геом. смысл теоремы Лагранжа

Доказательство:
Сведем задачу к теореме Ролля. Для этого построим вспомогательную функцию $h(x)$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Рассмотрим функцию:

$$h(x) = f(x) - \lambda x$$

где λ — некоторая константа, которую мы подберем так, чтобы $h(a) = h(b)$.

1. Функция $h(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (как сумма непрерывных функций $f(x)$ и $-\lambda x$).
2. Функция $h(x)$ дифференцируема на (a, b) (как сумма дифференцируемых функций $f(x)$ и $-\lambda x$).

Теперь найдем λ из условия $h(a) = h(b)$:

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$$
$$\lambda b - \lambda a = f(b) - f(a)$$
$$\lambda(b - a) = f(b) - f(a)$$
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теперь, когда $h(a) = h(b)$, по теореме Ролля для функции $h(x)$, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $h'(\xi) = 0$. Найдем производную функции $h(x)$:

$$h'(x) = (f(x) - \lambda x)' = f'(x) - \lambda$$

Подставим $x = \xi$:

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \lambda = 0 \implies f'(\xi) = \lambda$$

Подставляем значение λ:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема Коши.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируемы на интервале (a, b).
3. Производная $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Важное замечание:
Условие $g'(x) \neq 0$ гарантирует, что $g(b) - g(a) \neq 0$ (иначе, по теореме Ролля для $g(x)$, существовало бы $x \in (a,b)$ такое, что $g'(x) = 0$, что противоречит условию). Это нужно, чтобы знаменатель в формуле не обратился в ноль.

Доказательство:
Сведем задачу к теореме Ролля. Для этого построим вспомогательную функцию $h(x)$:

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

где λ — константа, которую мы подберем так, чтобы $h(a) = h(b)$.

1. Функция $h(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (как разность непрерывных функций).
2. Функция $h(x)$ дифференцируема на (a, b) (как разность дифференцируемых функций).

Найдем λ из условия $h(a) = h(b)$:

$$\begin{gathered} f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \\ \lambda g(b) - \lambda g(a) = f(b) - f(a) \\ \lambda(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) \\ \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \end{gathered}$$

Теперь, когда $h(a) = h(b)$, по теореме Ролля для функции $h(x)$, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $h'(\xi) = 0$. Найдем производную функции $h(x)$:

$$h'(x) = (f(x) - \lambda g(x))' = f'(x) - \lambda g'(x)$$

Подставим $x = \xi$:

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \lambda g'(\xi) \implies \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Приравнивая два выражения для λ:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Что и требовалось доказать.

Связь между теоремой Коши и теоремой Лагранжа:
Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Если в теореме Коши мы возьмем функцию $g(x) = x$, то:

1. $g(x) = x$ непрерывна на $[a,b]$.
2. $g(x) = x$ дифференцируема на (a,b) $(g'(x) = 1)$.
3. $g'(x) = 1 \neq 0$ на (a,b).

Все условия выполнены. Подставим $g(x) = x$ в формулу теоремы Коши:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi)$$

Таким образом, из теоремы Коши следует теорема Лагранжа.

Однако, из теоремы Лагранжа не следует теорема Коши. Иногда у студентов возникает желание вывести теорему Коши через теорему Лагранжа следующим образом: если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), то для них выполняется теорема Лагранжа. То есть:

$$\exists \xi \in (a,b): \ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{и} \quad \exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Значит, поделив оба равенства друг на друга получаем:

$$\exists \xi \in (a,b): \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

В чем же ошибка в данной цепочке действий?
Как видно из Рис. 8, точка ξ у двух произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемых на интервале (a,b) не обязательно совпадает. В общем случае данные точки разные. Поэтому, из теоремы Лагранжа мы можем получить лишь следующее утверждение:

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b): \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

Теорема Коши же в свою очередь говорит о том, что обязательно найдется такая точка ξ (не две разные, а одна общая), в которой выполняется утверждение теоремы. Это утверждение является более сильным.

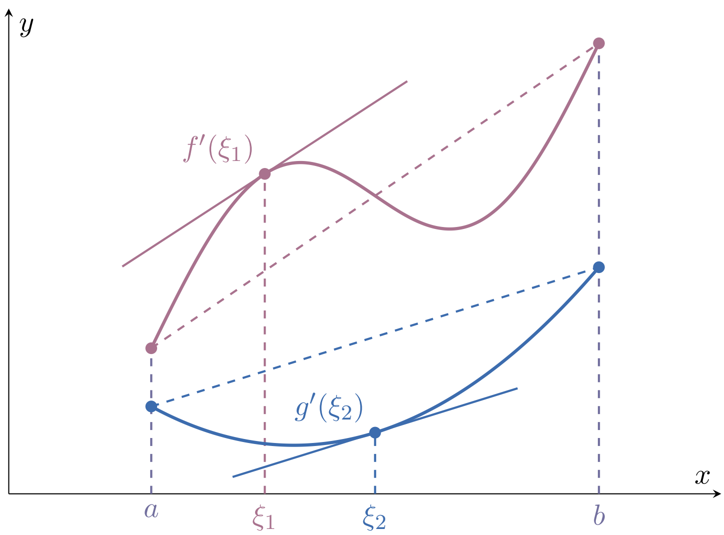


Рис. 8: Теорема Лагранжа $\not\Rightarrow$ Теорема Коши