Вебинар №13. Формула Тейлора. Практика.

Разложение $f(x) = (1+x)^a$**:**

$$f(x) = (1+x)^a$$
$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Найдем значения функции и её производных в точке $x = 0$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$(1+x)^a$	$(1+0)^a = 1$
1	$a(1+x)^{a-1}$	$a(1+0)^{a-1} = a$
2	$a(a-1)(1+x)^{a-2}$	$a(a-1)(1+0)^{a-2} = a(a-1)$
3	$a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$	$a(a-1)(a-2)(1+0)^{a-3} = a(a-1)(a-2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$	$a(a-1)\dots(a-n+1)$

Подставляем эти значения в формулу Маклорена:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Таблица разложений функций по формуле Маклорена (при $x \to 0$)

На прошлом вебинаре мы вывели разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена (формула Тейлора в окрестности $x = 0$). Давайте обобщим их в удобную таблицу:

Функция	Эквивалент	Многочлен Тейлора
$\sin x$	x	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	1	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
e^x	$1+x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	x	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
$\tan x$	x	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots + o(x^{2n+2})$
$\arcsin x$	x	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + o(x^{2n+2})$
$\arctan x$	x	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^a$	$1+ax$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Применение формулы Тейлора для вычисления пределов

Формула Тейлора является мощным инструментом для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $[1^\infty]$, особенно когда простые эквивалентности не работают.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

При $x \to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия используем разложение $\sin x$ до порядка x^3:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Подставляем это разложение в предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \cancel{x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

Разделим числитель на знаменатель:

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

Вспомним определение o-малого: $o(x^n)$ — это функция $\alpha(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^n} = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$.

$$= -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}$$

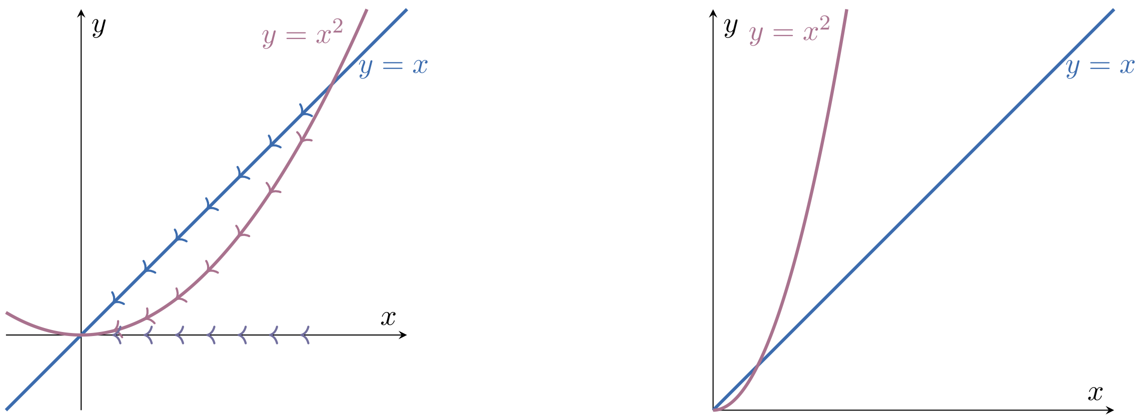
Ответ: $-\frac{1}{6}$.

Определение o-малого:

Функция $\alpha(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{g(x)} = 0$.

Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$ (читается: x^2 бесконечно мала по сравнению с x при $x \to 0$), потому что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$



(a) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$ (b) $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$

Рис. 1: Сравнение функций $y = x$ и $y = x^2$

Или $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$ (читается: x бесконечно мала по сравнению с x^2 при $x \to \infty$), потому что:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Свойства o-малого при $x \to 0$:

- $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min(n,m)})$ Пример: $o(x^2) + o(x^3) = o(x^{\min(2,3)}) = o(x^2)$
- $o(x) + o(x) = o(x)$
- $o(x) - o(x) = o(x)$
- $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$
- $Co(x^n) = o(x^n)$ (где C — константа)
- $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

Пример проверки корректности записи o-малого: $x^{2.5} = o(x^2)$ при $x \to 0$ — это **правильно**, потому что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{2.5}}{x^2} = \lim_{x \to 0} x^{0.5} = 0$$

$x^{2.5} = o(x^3)$ при $x \to 0$ — это **неправильно**, потому что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{2.5}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{0.5}} = \frac{1}{0} = \infty \neq 0$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

При $x \to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем разложение e^x до порядка x^2:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

Подставляем это разложение в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\cancel{1}-\cancel{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

Разделим числитель на знаменатель:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

При $x \to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем разложение e^x до порядка x^3:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Подставляем это разложение в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}$$

Разделим числитель на знаменатель:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$

При $x\to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Используем разложения до порядка x^4: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$.

$e^{-x^2/2} = 1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$ $e^{-x^2/2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4/4}{2}+o(x^4) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

Подставляем разложения в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{24}-\cancel{1}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-3}{24}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=-\frac{1}{12}+0=-\frac{1}{12}$$

Ответ: $-\frac{1}{12}$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$$

При $x\to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем разложения до порядка x^3: Раскроем до 3 степени:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$e^x\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} +$$
$$+o(x^6) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^6) + o(x^6)$$

Выбираем наименьшую степень $o(x^3)$. Слагаемые со степенями выше 3 мы не включаем.

$$e^x\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Подставляем в пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$

При $x\to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Используем разложения до порядка x^3 для числителя и знаменателя:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+o(x^3)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

Числитель:

$$\begin{aligned}e^x-e^{-x}-2x&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-2x\\&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-2x+o(x^3)\\&=(1-1)+(x+x-2x)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)\\&=0+0+0+\frac{2x^3}{6}+o(x^3)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned}x-\sin x&=x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\\&=x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

Подставляем в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/3}{1/6}=\frac{1}{3}\cdot 6=2$$

Ответ: 2.

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3+x^4}$$

При $x\to 0$ получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем разложения для $\sin x$ и $\cos x$ до порядка, необходимого для $\tan x$ (в данном случае, до x^3). Разложения:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

Разложим $\tan x$:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x(\cos x)^{-1}=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1}$$

Разложим вторую скобку по формуле:

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o(x^3)$$
$$\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)^{-1}=1+(-1)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+o(x^3)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

Тогда наше разложение для тангенса:

$$\tan x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Теперь у нас есть разложения до порядка x^3:

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Подставляем в наш пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)\ |:x^3}{x^3+x^4\ |:x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+x}=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)+1-e^x+\arcsin^2 x}{x-\sin x}$$

При $x\to 0$ получаем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Знаменатель: $x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ (как в Примере 4). Значит, числитель нужно разложить до порядка x^3.
Разложения:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$(\arcsin x)^2=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$$

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\Longrightarrow\ \ln(1+\tan x)=\ln\left(1+\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3}{3}+o(x^3)$$

При вычислении квадрата и куба мы берем степени не выше тройки, поэтому, очевидно, что в первом случае скобка будет равна $x^2+o(x^3)$, так как при дальнейшем умножении x и x^3 степень будет 4, то же самое и с другой скобкой, "фонтанчиком"берем умножение $x\cdot x\cdot x=x^3$. Тогда:

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

Подставляем всё в пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)+\cancel{1}-\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\cancel{x^2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=3$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\tan\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}\right)^{1/(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2)}$$

Разложим корни в ряд при $x\to 0$:

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4),\qquad \sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

Складываем:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2=-\frac{x^4}{4}+o(x^4).$$

Разложим синус:

$$\sin(\sqrt{2}\,x)=\sqrt{2}\,x-\frac{(\sqrt{2}\,x)^3}{6}+\frac{(\sqrt{2}\,x)^5}{120}+o(x^5).$$

Делим на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sin(\sqrt{2}\,x)}{\sqrt{2}}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5).$$

Разложим тангенс:

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

Подставляем:

$$\tan\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\tan\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)^3}{3}+\frac{2\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)^5}{15}+o(x^5)$$

Скобка пятой степени, очевидно, равна $x^5+o(x^5)$, так как остальные попадут в о-малое. Раскроем скобку с кубом, с ней не всё так очевидно:

$$\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)^3=x^3\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{30}}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{30}}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{30}}+o(x^4)\right)=$$

$$x^3\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^3+o(x^5)=x^3\left(1-\cancel{3}\cdot 1^2\frac{x^2}{\cancel{3}}+3\cdot 1\cdot\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{9}}-\frac{\cancel{x^6}}{\cancel{27}}\right)=x^3-x^5+o(x^5)$$

Продолжаем выражать тангенс:

$$\tan\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\left(x-\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{3}}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\right)+\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{3}}-\frac{x^5}{3}+o(x^5)+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)=x-\frac{x^5}{6}+o(x^5)$$

Итого наш пример сводится к:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)^{\dfrac{1}{\frac{-x^4}{4}+o(x^4)}}=\lim_{x\to 0}e^{\dfrac{1}{-x^4+o(x^4)}\ln\left(1-\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\dfrac{\frac{-x^4}{6}+o(x^4)}{\frac{-x^4}{4}+o(x^4)}}=e^{2/3}$$