Вебинар №5: Супремум и Инфинум. Теорема Вейерштрасса.

1 Предельный переход в неравенствах

Теорема 1 (Предельный переход в неравенствах). Пусть существуют пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.
Иными словами, если две последовательности, начиная с некоторого момента, связаны неравенством, то такое же неравенство будет выполнено и для их пределов (если они существуют).

1.1 Доказательство

Предположим противное: $a > b$. Тогда $a - b > 0$. По определению предела последовательности:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_2 \implies |y_n - b| < \varepsilon$

Выберем $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тогда:

- $\exists n_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_1 \implies |x_n - a| < \frac{a-b}{2} \implies x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$
- $\exists n_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_2 \implies |y_n - b| < \frac{a-b}{2} \implies y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

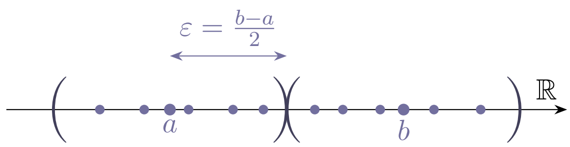

Рис. 1: Геометрическая интерпретация доказательства теоремы 1

Пусть $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Тогда для всех $n \geq n_3$ одновременно выполняются оба условия:

$$x_n > \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad y_n < \frac{a+b}{2}$$

Следовательно, для всех $n \geq n_3$ имеем $y_n < x_n$. Однако, по условию теоремы, $x_n \leq y_n$ для всех $n \geq n_0$. Это приводит к противоречию. Значит, наше предположение $a > b$ неверно, и, следовательно, $a \leq b$.

2 Теорема о двух милиционерах

Теорема 2. Пусть даны три последовательности (x_n), (y_n) и (z_n). Если существуют пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, и существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$, то существует предел $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.
Другими словами, если две последовательности (x_n) и (z_n), имеющие одинаковый предел, "зажимают"между собой третью последовательность (y_n), то и предел этой третьей последовательности также равен a.

2.1 Доказательство

Распишем определение предела для последовательностей (x_n) и (z_n):
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \implies |z_n - a| < \varepsilon$
Преобразуем условия, выраженные через модуль:

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$|z_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

Пусть $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_3 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_3$ выполняются условия теоремы и условия с пределами одновременно:

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon &\implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \\ &\implies |y_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_3 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_3 : |y_n - a| < \varepsilon$, что и является определением предела $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

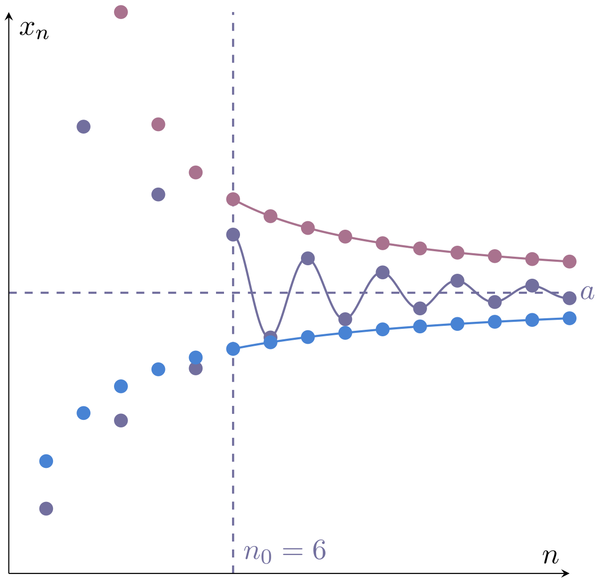

Рис. 2: Геометрическая интерпретация теоремы о двух милиционерах

На Рис. 2 приведем геометрическую иллюстрацию теоремы о двух милиционерах: голубым цветов пометим последовательность x_n, фиолетовым цветом последовательность y_n и розовым цветом последовательность z_n. Как видно из рисунка, начиная с некоторого номера n_0 выполняется неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$, а также $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, из чего становится очевидно, что зажатая между ними последовательность y_n также будет стремиться к a.

2.2 Пример

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Распространенной ошибкой является попытка вычисления предела x_n как суммы пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} + \dots + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Однако, это неверно. Предел суммы бесконечно малых последовательностей равен нулю только для *конечного* числа слагаемых. В данном случае, число слагаемых стремится к бесконечности, поэтому сумма бесконечного количества бесконечно малых величин может иметь предел, отличный от нуля.
Воспользуемся теоремой о двух милиционерах. Наша задача - найти две последовательности, между которыми можно зажать последовательность x_n.
Оценим x_n снизу. Чтобы уменьшить дробь, необходимо увеличить знаменатель. Заменим все знаменатели на наибольший, n^2+n:

$$\frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \le x_n.$$

Теперь оценим x_n сверху. Чтобы увеличить дробь, необходимо уменьшить знаменатель. Заменим все знаменатели на наименьший, n^2+1:

$$x_n \le \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}.$$

Так как у нас всего n слагаемых, получаем следующее двойное неравенство:

$$n \cdot \frac{n}{n^2+n} \le x_n \le n \cdot \frac{n}{n^2+1} \equiv \frac{n^2}{n^2+n} \le x_n \le \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Если пределы левой и правой частей совпадают, то по теореме о двух милиционерах, предел x_n также будет равен этому значению.
Найдем предел $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$. Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Аналогично, для $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Таким образом, по теореме о двух милиционерах, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Следовательно, сумма бесконечного числа бесконечно малых величин может сходиться к единице. Можно построить аналогичные примеры, в которых предел будет равен любому другому числу (например, умножая числитель каждой дроби на соответствующую константу).

3 Верхние и нижние грани. Супремум и инфинум.

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$.

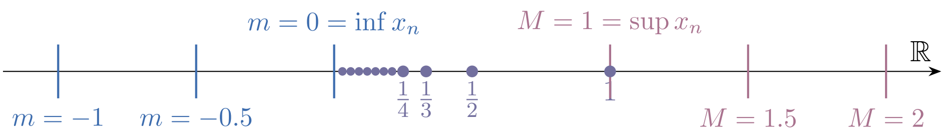

Рис. 3: Верхние и нижние грани последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$

3.1 Верхние и нижние грани

Число M называется верхней гранью последовательности x_n, если для всех n выполнено $x_n \le M$. Очевидно, что у последовательности может быть бесконечно много верхних граней. Например, для данной последовательности подойдут числа 100, 2, $\frac{3}{2}$, 1.
Число m называется нижней гранью последовательности x_n, если для всех n выполнено $x_n \ge m$. Аналогично, для примера выше нижней гранью могут являться числа -1, 0, -100.

3.2 Супремум и инфинум

Супремум $\sup x_n$ - это наименьшая из верхних граней x_n. Инфинум $\inf x_n$ - это наибольшая из нижних граней x_n.
Разберемся на примере $x_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим число 2 - это верхняя грань, так как $\forall n : \frac{1}{n} \le 2$. Число 1.5 аналогично является верхней гранью. Но является ли $\frac{3}{2}$ наименьшей верхней гранью? Конечно нет, ведь можно взять, например, 1.2. Можно ли взять еще меньше? Да, можно взять 1.1 или 1.0001. Давайте рассмотрим 1. Является ли 1 верхней гранью? Да, ведь все числа x_n не превосходят 1. Является ли она наименьшей? Оказывается, что да - ведь если взять любое меньшее число - например, 0.999, то не для любого n выполняется $\frac{1}{n} \le 0.999$. Например, для $n = 1$ это неверно, $x_1 = 1 > 0.999$, поэтому любое число меньшее 1 не будет являться верхней гранью, а так как 1 является, то 1 это еще и наименьшая верхняя грань, то есть супремум. Получается, что в этом примере оказалось, что супремум это просто максимальный элемент последовательности.
Разберемся с инфинумом - это наибольшая из нижних граней. Аналогично можно рассмотреть -1, -0.5, -0.001 и так далее - все это нижние грани, но всегда можно взять число ближе к нулю и оно тоже будет нижней гранью - так как все числа последовательности положительные. Рассмотрим $m = 0$. Во-первых, это нижняя грань - для любого $n : \frac{1}{n} \ge 0$. Во-вторых, если взять любое число большее нуля, например $m = 0.0001$, то можно взять какое-нибудь огромное $n = 100000000$ и окажется, что $\frac{1}{n} < m$, то есть это уже не будет нижней гранью. Получается, что $m = 0$ - это наибольшая нижняя грань, значит это инфинум нашей последовательности. Заметим, что ни для какого n не верно, что $\frac{1}{n} = 0$, получается $\inf x_n \notin \{x_n\}$, но $\sup x_n \in \{x_n\}$. В математике такое называют "супремум достижим"и "инфинум не достижим"последовательностью. Естественно, это верно только для нашей последовательности - можно привести примеры, когда супремум не достижим ($x_n = -\frac{1}{n}$), или оба они достижимы или не достижимы одновременно (это предлагается в качестве домашнего задания).

3.3 Строгие определения

Приведем строгие определения супремума и инфинума.
Число M называется супремумом последовательности x_n, если:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$ (верхняя грань)
2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : x_N > M - \varepsilon$ (наименьшая из них)

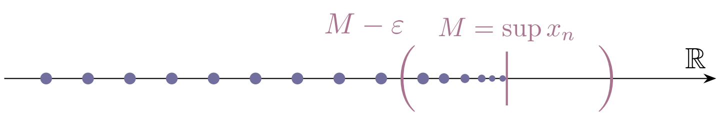

Рис. 4: Супремум последовательности

То есть мы по пункту один выбрали верхнюю грань, а по пункту два у нас всегда найдется элемент последовательности, который будет лежать сколь угодно близко к нашей верхней грани слева от нее, чтобы нельзя было ее уменьшить и получить более маленькую верхнюю грань, как показано на Рис. 4.

Аналогично определяется инфинум.
Число m называется инфинумом последовательности x_n, если:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq m$ (нижняя грань)
2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : x_N < m + \varepsilon$ (наибольшая из них)

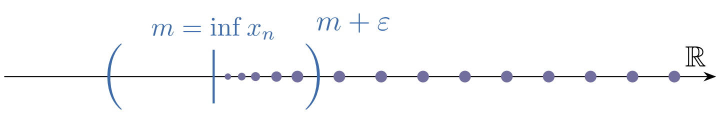

Рис. 5: Инфинум последовательности

То есть мы по пункту один выбрали нижнюю грань, а по пункту два у нас всегда найдется элемент последовательности, который будет лежать сколь угодно близко к нашей нижней грани справа от нее, чтобы нельзя было ее увеличить и получить более большую нижнюю грань, как показано на Рис. 5.

4 Расширенная числовая прямая

Расширенная числовая прямая обозначается как $\overline{\mathbb{R}}$ и определяется следующим образом:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$$

Рассмотрим последовательность $x_n = n$.
Предел данной последовательности равен бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Инфимум последовательности равен 1:

$$\inf x_n = 1$$

Это наибольшая из нижних граней.
Супремум последовательности в $\mathbb{R}$ не существует, однако в расширенной числовой прямой он существует и равен $+\infty$:

$$\sup x_n = +\infty$$

Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$.
Инфимум последовательности равен -1:

$$\inf x_n = -1$$

Супремум последовательности равен 1:

$$\sup x_n = 1$$

Оба значения, инфимум и супремум, достижимы.

5 Монотонные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно строго возрастающей*, если $\forall n : x_{n+1} > x_n$.
Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно строго убывающей*, если $\forall n : x_{n+1} < x_n$.

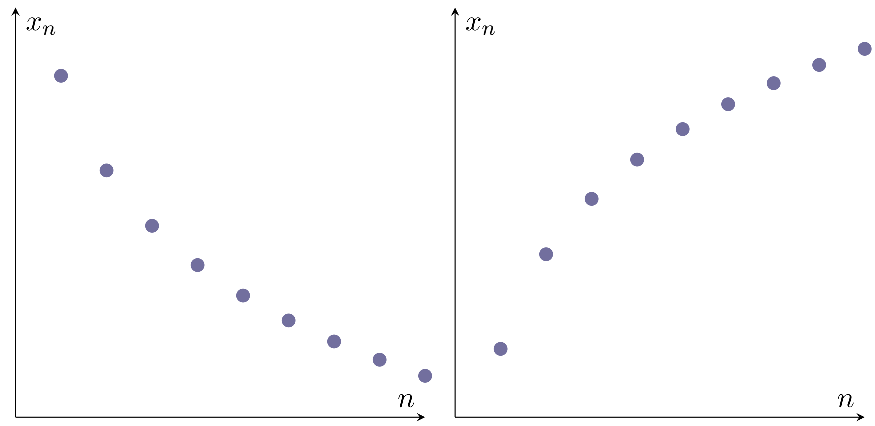

Рис. 6: Убывающая и возрастающая последовательности

Если знаки строгих неравенств заменить на нестрогие, то получим определения *нестрого возрастающей* и *нестрого убывающей* последовательностей.
Пример: Константная последовательность одновременно является нестрого возрастающей и нестрого убывающей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если все ее элементы лежат в некотором конечном отрезке, то есть $\exists C > 0 : \forall n : |x_n| \leq C$.

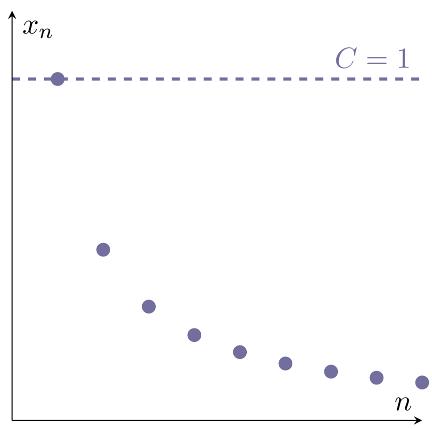

Рис. 7: Ограниченная последовательность

Пример: Ограниченная последовательность, не имеющая предела: $\{(-1)^n\}$.
Как мы видим, если последовательность только ограничена или только монотонна, то она не обязательно сходится. Возникает вопрос: если последовательность одновременно ограничена и монотонна, будет ли она сходящейся?

6 Теорема Вейерштрасса

1. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, то она имеет предел, равный $\sup x_n$.
2. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и монотонно убывает, то она имеет предел, равный $\inf x_n$.

Заметим, что в случае монотонно возрастающей последовательности важна именно ограниченность сверху, так как значение инфимума нам не важно. С другой стороны, поскольку мы рассматриваем монотонную последовательность, её инфимум будет равен первому элементу, поэтому она всегда будет ограничена еще и снизу. Аналогично, монотонно убывающая последовательность всегда ограничена сверху.

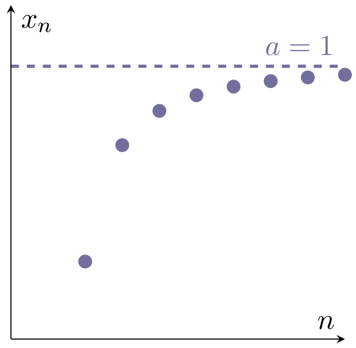

Рис. 8: Монотонная ограниченная последовательность

6.1 Доказательство

Докажем пункт 1.

1. $\{x_n\}$ ограничена сверху $\implies \exists C : \forall n : x_n \leq C$.
2. $\{x_n\}$ монотонно возрастает $\implies \forall n : x_{n+1} \geq x_n$.

Напомним определение $\sup x_n$: это такое число M, что

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : M - \varepsilon < x_N \leq M$

Идея:
Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и число $M - \varepsilon$, где $M = \sup x_n$. По второму свойству супремума, найдется такой элемент x_N, что $M - \varepsilon < x_N \leq M$. Так как последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и $\forall n : x_n \leq M$, то $\forall n \geq N : M - \varepsilon < x_n \leq M$. Это означает, что бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ лежит в ε-окрестности числа M, а за её пределами находится лишь конечное число элементов. Поскольку это верно для сколь угодно малого ε, то предел последовательности $\{x_n\}$ равен M.

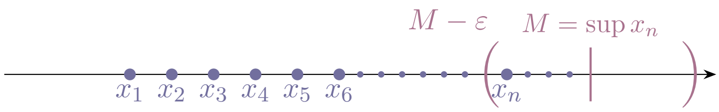

Рис. 9: Геометрическая инетрпретация доказательства теоремы

Таким образом, из определения супремума и определения монотонности следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - M| < \varepsilon$, а это и есть определение предела. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} x_n = M$. Также заметим, что для сходимости последовательности достаточно, чтобы она была монотонной лишь начиная с некоторого номера. Аналогичным образом можно доказать, что предел будет существовать, однако неясно, чему он будет равен.

7 Определение числа e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Заметим, что $x_n > 1^{n+1} = 1$. Вычислим несколько первых членов последовательности:

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 2^2 = 4$$
$$x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3.375$$
$$x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} \approx 3.16$$
$$x_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 = \frac{3125}{1024} \approx 3.05$$

На основании этих значений можно предположить, что последовательность монотонно убывает. Кроме того, последовательность ограничена снизу. Таким образом, по теореме Вейерштрасса, существует предел этой последовательности, равный ее инфимуму.
Важно отметить, что из теорема Вейерштрасса следует стремление именно к **наибольшей нижней грани**, а не любой – многие ошибочно могут сказать, что все числа ограничены снизу, например, единицей - значит это и будет пределом.

7.1 Доказательство монотонного убывания

Докажем, что $x_{n+1} < x_n$, что эквивалентно $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Поскольку все члены последовательности положительны, можно доказать, что $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$.
Выпишем x_n и x_{n+1}:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \quad x_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

Рассмотрим отношение $\frac{x_n}{x_{n+1}}$:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1}$$
$$= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится неравенство Бернулли.
Рассмотрим выражение $(1+x)^n$, где $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Разложим по биному Ньютона:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = 1 + nx + \dots$$

Поскольку все последующие слагаемые неотрицательны, получаем $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Замечание: Это частный случай неравенства Бернулли. В общем случае, неравенство выполняется для $x \geq -1$ и доказывается по индукции.

Вернемся к доказательству монотонности. Применим неравенство Бернулли:

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\geq\left(1+(n+2)\cdot\frac{1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n}{n+1}$$
$$=\left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$$

Таким образом, $\frac{x_n}{x_{n+1}}\geq 1$, что и требовалось доказать.

7.2 Существование предела

Мы уже показали, что $x_n > 1$ для всех n, то есть последовательность ограничена снизу.
По теореме Вейерштрасса, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, который равен ее инфимуму. Этот предел приблизительно равен 2.71..., и это число по определению называется числом e. То есть,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

На самом деле, число e определяется как:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Покажем, что предел нашей последовательности эквивалентен этому определению. Пусть $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=C$. Тогда:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Поскольку предел произведения равен произведению пределов (если они существуют):

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=C=e$.

7.3 Пример числа е из жизни

Пример из жизни, который обычно используется в ютуб-шортсах про число е:
Предположим, у вас есть вклад в банке в размере одного миллиона рублей. Вам предлагается несколько вариантов начисления процентов:

- $+100\%$ один раз в год.
- $+50\%$ два раза в год.
- $+33{,}3\%$ три раза в год.
- ...
- $+\frac{100}{n}\%$ n раз в год.

Интуитивно может показаться, что все варианты эквивалентны, так как процентная ставка уменьшается во столько же раз, во сколько увеличивается частота выплат. Однако, это не так. Давайте вычислим сумму, которую мы получим через год для каждого из вариантов:

- При начислении 100% один раз в год, наш капитал будет равен:

$$(1+1) = 2 \text{ миллиона}$$

- При начислении 50% два раза в год, мы получим:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ миллионов}$$

- При начислении 33,3% три раза в год:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2.37 \text{ миллионов}$$

Возникает вопрос: что произойдет, если начислять проценты, например, каждый день? В этом случае, каждый день наш капитал будет увеличиваться в $\frac{366}{365}$ раз, а через год он будет равен:

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.71 \text{ миллионов}$$

Получилось еще больше. А что, если получать выплаты каждую секунду? Может быть мы тогда сможем обанкротить банк?
Однако, как мы только что доказали, последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху и её предел равен числу e, поэтому даже если проценты начисляются в каждый момент времени (с соответствующей низкой ставкой), наш капитал к концу года составит ровно $e \approx 2.71828$ миллионов.

8 Иерархия последовательностей

Рассмотрим следующие последовательности, где $k > 0$, $q > 1$:

- $x_n = n^k$ – степенные
- $x_n = q^n$ – показательные
- $x_n = n!$ – факториальные
- $x_n = n^n$ – гиперстепенные

Чем ниже по списку, тем быстрее растет последовательность.
Естественно, давайте это докажем. Начнем с того, что $\forall k > 0, q > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$$

То есть, любая степенная последовательность бесконечно мала по сравнению с любой показательной.
Перед доказательством заметим, что это может показаться неинтуитивным. Например, рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{1{,}01^n}$$

Если подставить $n = 2$, то в числителе будет число с 300 нулями, а в знаменателе что-то около 1,02. Если подставить $n = 3$, то в числителе будет 500-значное число, а в знаменателе что-то около 1,03. Однако, все-таки найдется такой номер, начиная с которого знаменатель будет настолько больше числителя, что в пределе получится 0.

8.1 Доказательство

Вернемся к $x_n = \frac{n^k}{q^n}$. Так как все числа положительны, то $\frac{n^k}{q^n} \geq 0$, то есть, последовательность ограничена снизу. Воспользуемся теоремой Вейерштрасса: покажем, что последовательность монотонно убывает, начиная с некоторого номера, и получим, что у нее есть предел. Убывание важно именно с некоторого номера, так как даже на примере выше видно, что последовательность сначала может долго возрастать.
Рассмотрим отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{q^{n+1}}}{\frac{n^k}{q^n}} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{q^n}{q^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{q} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{q}$$

Посмотрим внимательно на полученное выражение. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ стремится к единице (не путать с числом e - k здесь это константа, от n не зависящая), так как $\frac{1}{n} \to 0$. Следовательно, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{1}{q}$. Так как $q > 1$, то $\frac{1}{q} < 1$, то есть начиная с некоторого номера $x_{n+1} < x_n$. Так как мы показали ограниченность снизу нулем, то по теореме Вейерштрасса x_n имеет предел (но мы пока не знаем какой).
Важное замечание: Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$. Первая последовательность имеет вид $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$, а вторая $\{x_2, x_3, \ldots\}$, и предел от этого не меняется.
Вернемся к задаче. $x_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}}$, а еще это можно записать в виде $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{q} \cdot x_n$, то есть мы выразили следующий член последовательности через предыдущий. Возьмем предел от обеих частей:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{q} \cdot x_n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{q} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

Так как у x_n есть предел, то обозначим его за a. И так как $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n$, то получаем $a = \frac{1}{q} \cdot a$. Так как $\frac{1}{q} < 1$, то такое возможно только в случае, когда $a = 0$ (иначе получается, что $a < a$, что невозможно).
Доказательство того, что отношение других последовательностей стремится к нулю будем домашним заданием.

9 Задачи на теорему Вейерштрасса

9.1 Задача №1

Пусть последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}, \quad x_1 = 0.$$

Требуется найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

ё Выпишем первые несколько членов:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0 \\
&x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+0} = \frac{1}{2} \\
&x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 0.79 \\
&x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_3} \approx 0.9
\end{aligned}$$

Предположение - x_n стремится к 1. Доказать это можно с помощью теоремы Вейерштрасса. Вроде можно увидеть, что она возрастает, но это надо доказать, как и то, что ее супремум равен 1, но как это сделать?

Давайте подумаем, чему должен быть равен x_n, чтобы $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}$ был равен 1. Действительно: $1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n} \equiv 2 = \sqrt{1+3x_n} \equiv 4 = 1+3x_n \implies x_n = 1$. Таким образом, чтобы очередной элемент был единицей, нужно, чтобы предыдущий тоже был равен 1, а для этого надо чтобы пред-предыдущий был тоже равен 1 и так далее. Но так как первый член не равен единице, то и второй не будет равен, а поэтому и третий не будет равен, и так далее получается, что никакой член не будет равен единице, поэтому $x_n \leq 1$ (не факт, что 1 будет ее супремумом, может быть окажется, что все $x_n \leq 0.9$, например).

Теперь покажем, что x_n монотонно возрастает, то есть что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}}{x_n} > 1.$$

Так как все числа положительные, то перенесем $\frac{1}{2}$ и x_n в правую часть.

$$\sqrt{1+3x_n} > 2x_n.$$

Возведем обе части в квадрат (все числа положительны, поэтому знак неравенства не поменяется)

$$1 + 3x_n > 4x_n^2.$$

$$4x_n^2 - 3x_n - 1 < 0.$$

Распишем многочлен из левой части как произведение корней

$$4(x_n - 1)(x_n + \frac{1}{4}) < 0.$$

Четверку можно сократить, а еще мы уже показали, что всегда $x_n - 1 \le 0$, поэтому достаточно показать, что $x_n + \frac{1}{4} > 0$ (тогда произведение отрицательного числа на положительное будет отрицательным).

Посмотрим повнимательнее на $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}$. Во-первых, очевидно, что все $x_n \ge 0$. Во-вторых, $x_{n+1} \ge \frac{1}{2}\sqrt{1+3\cdot 0} = \frac{1}{2}$. Тогда $\forall n > 1 : x_n \ge \frac{1}{2}$, значит $x_n + \frac{1}{4} \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$, получается $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, а значит x_n монотонно возрастает. Вспоминаем, что x_n ограничена единицей, а значит можно применить теорему Вейерштрасса и заключить, что $\lim x_n = a$. Вспоминаем факт $\lim x_n = \lim x_{n+1}$ и распишем правую часть:

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{2}\sqrt{1+3x_n} \equiv a = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a}$$

- получаем квадратное уравнение, которое можно решить.

$$2a = \sqrt{1+3a}$$

$$4a^2 = 1 + 3a$$

Корни равны 1 и $-\frac{1}{4}$. Но так как все $x_n \ge 0$, то предел не может быть равен $-\frac{1}{4}$, значит $\lim x_n = 1$.