Вебинар № 2. Комплексные числа. Формула Эйлера.

Комплексные числа

Комплексные числа — это расширение множества действительных чисел, которое позволяет нам решать уравнения, не имеющие корней в $\mathbb{R}$ (множестве действительных чисел). Каждое комплексное число z записывается в алгебраической форме как $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, определяемая фундаментальным соотношением $i^2 = -1$.

Здесь a называется действительной частью комплексного числа z и обозначается как $\operatorname{Re} z = a$. Число b называется мнимой частью и обозначается как $\operatorname{Im} z = b$.

Если действительная часть a равна 0, то число z является чисто мнимым (например, $2i$ или $-3i$). Если же мнимая часть b равна 0, то z совпадает с обычным действительным числом (например, $z = 5$). Таким образом, множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел.

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ соответствует его комплексное сопряженное число, обозначаемое $\overline{z}$, которое определяется как $\overline{z} = a - bi$. Заметьте, что отличается только знак мнимой части.

Умножение комплексного числа на его сопряженное дает очень важный результат:

$$\begin{gathered} z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) \\ = a^2 - a \cdot bi + a \cdot bi - b^2 i^2 \\ = a^2 - b^2(-1) \\ = a^2 + b^2 \end{gathered}$$

Следовательно, мы получаем полезную формулу: $\boxed{z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2}$.

Этот результат всегда неотрицателен и равен квадрату модуля комплексного числа z, который определяется как $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Модуль комплексного числа имеет четкий геометрический смысл: он отражает расстояние от начала координат до точки (a, b) на комплексной плоскости.

Операции с комплексными числами

Рассмотрим два произвольных комплексных числа: $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

1) Сложение:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Сложение комплексных чисел выполняется поэлементно: отдельно складываются действительные части и отдельно мнимые части. Результатом всегда является новое комплексное число.

2) Вычитание:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Вычитание также производится поэлементно: из действительной части первого числа вычитается действительная часть второго, а из мнимой — мнимая. Структура $a + bi$ сохраняется.

3) Умножение:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 (-1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \end{aligned}$$

Умножение комплексных чисел выполняется по правилу раскрытия скобок, с обязательным учетом свойства мнимой единицы $i^2 = -1$.

4) Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

Для выполнения деления комплексных чисел используется стандартный прием: умножение числителя и знаменателя дроби на комплексное сопряженное к знаменателю (то есть на $a_2 - b_2 i$):

$$\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 i^2)}{a_2^2 - (b_2 i)^2}$$

Учитывая, что $i^2 = -1$ и $(b_2 i)^2 = b_2^2 i^2 = -b_2^2$, знаменатель преобразуется к виду $a_2^2 - (-b_2^2) = a_2^2 + b_2^2$. Числитель упрощается:

$$\begin{aligned} &= \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2 (-1)) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Таким образом, результат деления комплексных чисел в алгебраической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Деление возможно только в том случае, если $z_2 \neq 0$, то есть $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Примеры операций

Давайте рассмотрим несколько примеров, чтобы закрепить понимание операций с комплексными числами.

1) Вычислить: $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$

Сначала вычислим произведение первого слагаемого:

$$\begin{aligned}(1+2i)(2-i) &= 1\cdot 2+1\cdot(-i)+2i\cdot 2+2i\cdot(-i)\\ &= 2-i+4i-2i^2\end{aligned}$$

Подставляя $i^2=-1$, получаем:

$$=2-i+4i-2(-1)=2-i+4i+2=4+3i$$

Теперь вычислим произведение второго слагаемого:

$$\begin{aligned}(1-2i)(2+i) &= 1\cdot 2+1\cdot i+(-2i)\cdot 2+(-2i)\cdot i\\ &= 2+i-4i-2i^2\end{aligned}$$

Снова подставляя $i^2=-1$:

$$=2+i-4i-2(-1)=2+i-4i+2=4-3i$$

Сложим полученные результаты:

$$(4+3i)+(4-3i)=4+4+(3i-3i)=8$$

Итоговый результат: 8.

2) Вычислить: $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$

Решение "в лоб"(поэтапное деление): Для каждого слагаемого выполним деление, умножая числитель и знаменатель на комплексное сопряженное к знаменателю.

Для первого слагаемого:

$$\begin{aligned}&\frac{5}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-10i}{1^2-(2i)^2}=\\ &=\frac{5-10i}{1-4(-1)}=\frac{5-10i}{1+4}=\frac{5-10i}{5}=1-2i\end{aligned}$$

Для второго слагаемого:

$$\begin{aligned}&\frac{5}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{10+5i}{4-i^2}=\\ &=\frac{10+5i}{4-(-1)}=\frac{10+5i}{5}=2+i\end{aligned}$$

Теперь сложим результаты двух делений:

$$(1-2i)+(2+i)=1+2+(-2i+i)=3-i$$

Итоговый результат: $3-i$.

Решение "не в лоб"(сначала сложение дробей): Выделим общий множитель 5 и приведем дроби к общему знаменателю $(1+2i)(2-i)$:

$$\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}=5\left(\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{2-i}\right)$$

Найдем общий знаменатель:

$$(1+2i)(2-i)=1\cdot 2+1\cdot(-i)+2i\cdot 2+2i\cdot(-i)=$$
$$=2-i+4i-2i^2=2+3i+2=4+3i$$

Теперь сложим дроби в скобках:

$$5\left(\frac{2-i}{(1+2i)(2-i)}+\frac{1+2i}{(2-i)(1+2i)}\right)=$$
$$=5\left(\frac{(2-i)+(1+2i)}{4+3i}\right)=5\left(\frac{3+i}{4+3i}\right)$$

Осталось выполнить деление, умножив числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю $4-3i$:

$$5\cdot\frac{3+i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=5\cdot\frac{(3+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=$$
$$=5\cdot\frac{12-9i+4i-3i^2}{16-9i^2}$$

Подставляя $i^2=-1$:

$$=5\cdot\frac{12-5i+3}{16+9}=5\cdot\frac{15-5i}{25}=$$
$$=5\cdot\frac{5(3-i)}{25}=5\cdot\frac{3-i}{5}=3-i$$

Итоговый результат: $3-i$.

3) Вычислить: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

Сначала упростим дробь внутри скобок. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю $1-i$:

$$\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=$$
$$=\frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

Теперь возведем полученное выражение в третью степень:

$$(-i)^3=(-i)\cdot(-i)\cdot(-i)=$$
$$=((-i)\cdot(-i))\cdot(-i)=(i^2)\cdot(-i)=(-1)\cdot(-i)=i$$

Итоговый результат: i.

Геометрическое представление комплексного числа

Комплексными числами можно не только оперировать алгебраически, но и представлять геометрически, что часто дает наглядное понимание их свойств. Каждое комплексное число $z = a + bi$ можно интерпретировать как точку (a, b) на плоскости. Ось x в этом случае соответствует действительной части a (действительная ось), а ось y — мнимой части b (мнимая ось). Эта плоскость называется комплексной плоскостью или плоскостью Аргана.

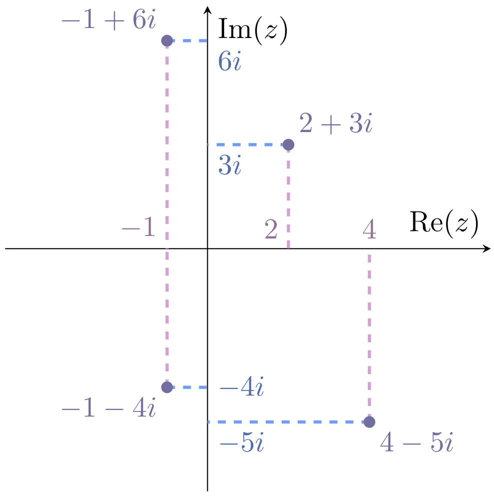

Рис. 1: Геометрическое представление комплексных чисел

Кроме того, модуль $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ задает расстояние от начала координат $(0,0)$ до этой точки (a,b). Другой важной характеристикой является аргумент комплексного числа φ, который представляет собой угол, под которым вектор, соединяющий начало координат с точкой z, отклоняется от положительного направления действительной оси x.

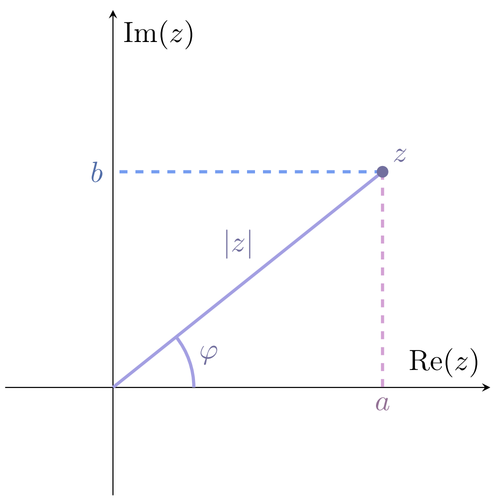

Рис. 2: Модуль и аргумент комплексного числа

Формы записи комплексных чисел

Комплексные числа можно записывать в нескольких эквивалентных формах, каждая из которых удобна для определенных операций.

Алгебраическая форма:

$$z = a + bi$$

Эта форма является базовой и наиболее интуитивно понятной. Она удобна для выполнения основных арифметических операций, таких как сложение, вычитание и умножение.

Тригонометрическая форма:

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Тригонометрическая форма явно включает модуль $|z|$ и аргумент φ, где $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$. Эта форма особенно удобна для умножения и деления комплексных чисел, поскольку при умножении их модули перемножаются, а аргументы складываются (или вычитаются при делении).

Показательная форма:

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Эта форма использует знаменитую формулу Эйлера, которая связывает тригонометрические функции с экспоненциальной функцией через соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Показательная форма является самой компактной и особенно полезна при возведении комплексных чисел в степень и извлечении корней.

Исследование свойства сложения аргументов и Формула Эйлера

Теперь давайте углубимся в то, как сложение аргументов тригонометрических функций в комплексной форме связано с их умножением, и как это ведет к выводу важнейшей экспоненциальной функции. Начнем с рассмотрения двух комплексных чисел в тригонометрической форме (для простоты возьмем их модули равными единице), представленных функциями: $f(x) = \cos x + i\sin x$ $f(y) = \cos y + i\sin y$

Наша задача — найти выражение для $f(x+y)$ и показать, что оно равно произведению $f(x)\cdot f(y)$.

Разложим $f(x+y)$ с помощью формул сложения аргументов для тригонометрических функций:

$$f(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

Мы знаем, что:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

Подставим эти выражения обратно в формулу для $f(x+y)$:

$$f(x+y) = [\cos x \cos y - \sin x \sin y] + i[\sin x \cos y + \cos x \sin y]$$

Теперь вычислим произведение $f(x) \cdot f(y)$:

$$f(x) \cdot f(y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

Раскроем скобки:

$$= \cos x \cos y + \cos x i \sin y + i \sin x \cos y + i^2 \sin x \sin y =$$
$$= \cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y - \sin x \sin y$$

Сгруппируем действительные и мнимые части:

$$= [\cos x \cos y - \sin x \sin y] + i[\cos x \sin y + \sin x \cos y]$$

Как мы видим, это выражение в точности идентично выражению для $f(x+y)$. Таким образом, мы доказали важное свойство:

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

Это функциональное уравнение характеризует экспоненциальную функцию. Если мы предположим, что $f(x) = e^{cx}$ для некоторой константы c, то:

$$f(x+y) = e^{c(x+y)} = e^{cx+cy} = e^{cx} \cdot e^{cy} = f(x) \cdot f(y)$$

Это полностью согласуется с нашим выводом. Чтобы найти конкретное значение константы c, мы можем продифференцировать обе части равенства $e^{cx} = \cos x + i \sin x$ по x:

$$(e^{cx})' = (\cos x + i \sin x)'$$

Производная левой части:

$$(e^{cx})' = ce^{cx}$$

Производная правой части:

$$(\cos x + i \sin x)' = -\sin x + i \cos x$$

Приравниваем производные:

$$ce^{cx} = -\sin x + i \cos x$$

Теперь подставим $x = 0$ в это равенство:

$$ce^{c \cdot 0} = -\sin(0) + i \cos(0)$$
$$c \cdot 1 = 0 + i \cdot 1$$
$$c = i$$

Итак, мы установили, что $f(x) = e^{ix}$. Это и есть знаменитая Формула Эйлера.

Формула Эйлера:

После всех этих рассуждений мы приходим к одному из самых элегантных и фундаментальных результатов в математике — формуле Эйлера. Она связывает экспоненциальную функцию с мнимым показателем с тригонометрическими функциями:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Эта формула является мостом между алгеброй, геометрией и анализом, и находит широкое применение в различных областях науки и инженерии.

Тождество Эйлера ($x = \pi$)**:**

Особый случай формулы Эйлера при $x = \pi$ приводит к знаменитому тождеству Эйлера, которое часто называют "самой красивой формулой в математикепоскольку оно связывает пять фундаментальных математических констант: e, i, π, 1 и 0.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Выведем его, подставив $x = \pi$ в формулу Эйлера:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1 \implies e^{i\pi} + 1 = 0$$

Формула Муавра:

Формула Муавра — возведение комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, в натуральную степень. Она утверждает:

$$\boxed{(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}}$$

Доказательство этой формулы становится очень простым, если использовать показательную форму комплексных чисел и формулу Эйлера.

Мы знаем, что $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ (по формуле Эйлера). Тогда возведем это выражение в степень n:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n$$

По свойству степеней, $(e^{ix})^n = e^{i(nx)}$.

$$(e^{ix})^n = e^{i(nx)}$$

Теперь, применяя формулу Эйлера к $e^{i(nx)}$ (где аргумент теперь nx):

$$e^{i(nx)} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Таким образом, мы получили искомую формулу:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Что и требовалось доказать. Формула Муавра значительно упрощает вычисления при возведении комплексных чисел в степень, особенно высоких степеней.

Примеры

Давайте применим полученные знания к решению практических задач.

Пример 1. Записать число $z = -1 - i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение:
Для начала нам нужно определить модуль $|z|$ и аргумент φ числа $z = -1 - i$.

Модуль $|z|$ вычисляется как расстояние от начала координат до точки $(-1, -1)$ на комплексной плоскости:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Аргумент φ — это угол, под которым вектор, проведенный из начала координат к точке $(-1, -1)$, отклоняется от положительного направления оси x.

Поскольку действительная часть $a = -1$ и мнимая часть $b = -1$ обе отрицательны, число z находится в третьем квадранте комплексной плоскости. Для нахождения аргумента можно использовать $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ и учесть квадрант. В данном случае $\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Однако это лишь базовый угол в первом квадранте. Чтобы найти аргумент для третьего квадранта, к π нужно добавить этот базовый угол:

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Теперь запишем число в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

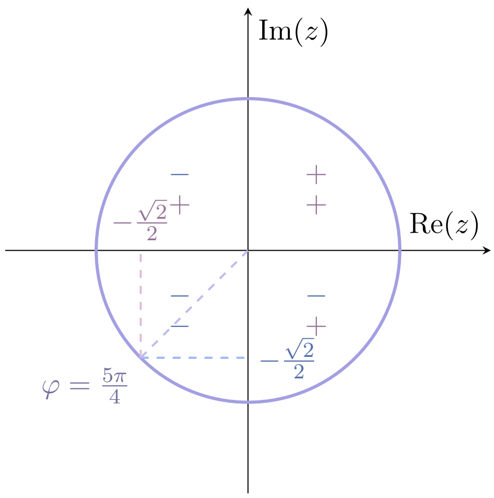

Рис. 3: Определение аргумента комплексного числа в зависимости от квадранта

Показательная форма следует напрямую из тригонометрической формы с использованием формулы Эйлера:

$$z = |z|e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Пример 2. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме число $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

Решение:
Для упрощения данного выражения наиболее удобно использовать тригонометрическую или показательную форму, возводя числитель и знаменатель в нужные степени по формуле Муавра (или используя свойства экспоненты).

Шаг 1: Работа с числителем $(1+i)^9$

Сначала представим число $1+i$ в тригонометрической (или показательной) форме. Модуль: $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Аргумент: Поскольку действительная и мнимая части положительны (1 и 1), число находится в первом квадранте. $\varphi = \arctan\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, $(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Теперь возведем это число в 9-ю степень, используя формулу Муавра:

$$
\begin{aligned}
(1+i)^9 &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^9 \\
&= (\sqrt{2})^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(9\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Вычислим $(\sqrt{2})^9$: $(\sqrt{2})^9 = 2^{9/2} = 2^4\cdot\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$. Вычислим аргумент $9\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{4}$. Для приведения угла в стандартный интервал $[0, 2\pi)$ (или $(-\pi,\pi]$), вычтем 2π:

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Значит, основной аргумент равен $\dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, числитель равен:

$$(1+i)^9 = 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Шаг 2: Работа со знаменателем $(1-i\sqrt{3})^6$

Представим число $1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической (или показательной) форме. Модуль: $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Аргумент: Действительная часть положительна (1), мнимая часть отрицательна ($-\sqrt{3}$), поэтому число находится в четвертом квадранте. $\varphi = \arctan\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Таким образом, $(1-i\sqrt{3}) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Возведем это число в 6-ю степень:

$$
\begin{aligned}
(1-i\sqrt{3})^6 &= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6 \\
&= 2^6\left(\cos\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Вычислим $2^6 = 64$. Вычислим аргумент $6 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\pi$. Поскольку $\cos(-2\pi) = 1$ и $\sin(-2\pi) = 0$, знаменатель равен:

$$(1 - i\sqrt{3})^6 = 64(1 + 0i) = 64$$

Шаг 3: Деление

Теперь разделим числитель на знаменатель:

$$z = \frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6} = \frac{16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{64}$$

Упростим коэффициент:

$$z = \frac{16\sqrt{2}}{64}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Это и есть **тригонометрическая форма** числа z.

Шаг 4: Алгебраическая и показательная формы

Для получения **алгебраической формы** $a + bi$, вычислим значения косинуса и синуса для угла $\frac{\pi}{4}$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Подставим эти значения:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{2}{8} + i\frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{4} + i\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Итак, **алгебраическая форма**: $z = \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}$.

Наконец, **показательная форма** следует из тригонометрической формы с использованием формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$z = |z|e^{i\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$$