Вебинар №9. Замечательные пределы и Эквивалентности.

Непрерывность функции

Интуитивно, непрерывная функция — это такая функция, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Строгое определение связано с понятием предела.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда говорят, что $f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

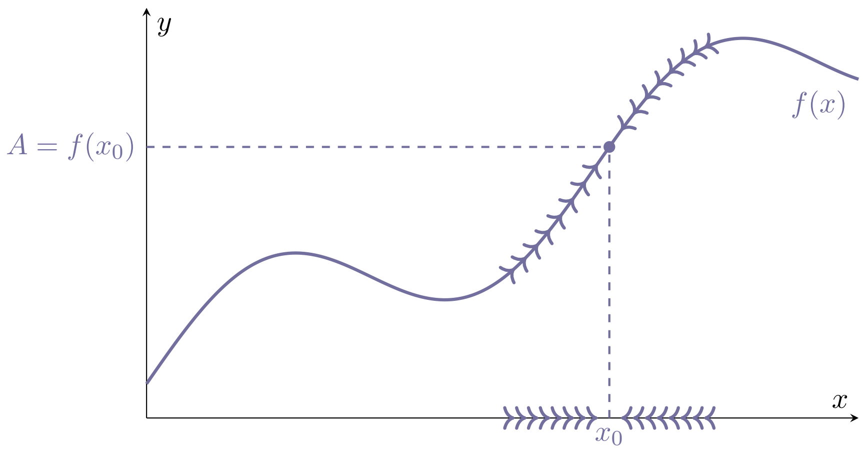

Рис. 1: Функция, непрерывная в точке x_0

Как мы помним, предел не всегда равняется значению функции в точке. Бывает даже такое, что предел в точке существует, а сама функция в данной точке не определена. Поэтому, для определения непрерывности, мы рассматриваем обычную окрестность точки x_0, а не проколотую, как при рассмотрении пределов функций ранее.
Давайте посмотрим, как это определение выглядит, если его расписать по Коши и по Гейне:

Определение непрерывности по Коши: Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \text{ такого, что } |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Обратите внимание, что здесь условие $0 < |x - x_0|$ исчезает, так как в точке $x = x_0$ неравенство $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ выполняется автоматически.

Определение непрерывности по Гейне: Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

$$\forall \text{ последовательности } x_n \to x_0 \hookrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

Здесь также исчезает условие $x_n \neq x_0$, так как значение функции в самой точке x_0 теперь учитывается.

Теорема о пределе сложной функции (непрерывность внешней функции):
Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, и функция $g(y)$ непрерывна в точке b. Тогда предел сложной функции $g(f(x))$ при $x \to x_0$ существует и равен $g(b)$:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(b)$$

Эта теорема позволяет вносить предел внутрь непрерывной функции.

Доказательство (с использованием определения по Гейне):
Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. По определению предела функции по Гейне, это означает, что для любой последовательности $x_n \to x_0$ (причем $x_n \neq x_0$) соответствующая последовательность значений функции $y_n = f(x_n)$ сходится к b:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b \quad (\text{или } \lim_{n \to \infty} y_n = b)$$

Теперь, поскольку функция $g(y)$ непрерывна в точке b, по определению непрерывности по Гейне, для любой последовательности $y_n \to b$ (в том числе и для нашей последовательности $y_n = f(x_n)$) соответствующая последовательность значений $g(y_n)$ будет сходиться к $g(b)$:

$$\lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(b)$$

Подставляя $y_n = f(x_n)$, получаем:

$$\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(b)$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \to x_0$ (с $x_n \neq x_0$), то по определению предела функции по Гейне, это означает:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(b)$$

Что и требовалось доказать.

Эквивалентные функции

Эквивалентные функции — это функции, которые ведут себя одинаково в окрестности некоторой точки (чаще всего нуля). Это понятие очень сильно упрощает вычисление пределов.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ **эквивалентна** функции $g(x)$ при $x \to x_0$, если предел их отношения равен 1. Обозначается как $f(x) \sim g(x)$.

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

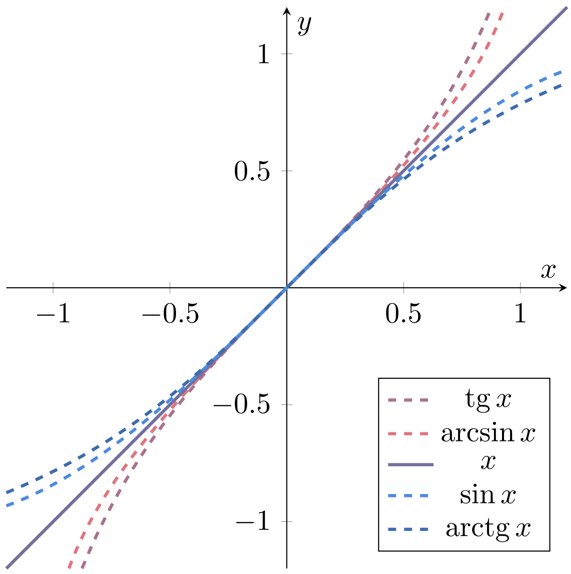

Рис. 2: Примеры функций, эквивалентных $y = x$

Например, при $x \to 0$ выполняются следующие эквивалентности:

$$\sin x \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

Как показано на Рис. 2, при стремлении x к нулю все функции $\sin x, \operatorname{tg} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x$ ведут себя, как линейная функция $y = x$, это и говорит об их эквивалентности в окрестности нуля. Далее мы строго докажем каждую из эквивалентностей, записанных выше

Первый замечательный предел

Первый замечательный предел является одним из наиболее важных в математическом анализе, особенно при работе с тригонометрическими функциями.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Геометрическое доказательство (для $x > 0$ и малых x): Рассмотрим единичный круг с центром в начале координат O. Пусть x — угол в радианах.

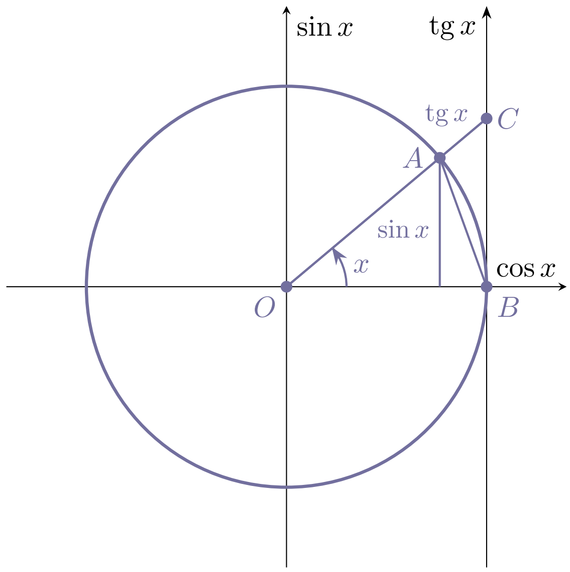

Рис. 3: Геометрический смысл неравенства

Из Рис. 3 видно, что площадь треугольника OAB меньше площади сектора OAB, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника OCB.

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\Delta OCB}$$

Вычислим эти площади:

- $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$
- $S_{\text{сект. } OAB} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{1}{2} x$ (где x — угол в радианах).
- $S_{\Delta OCB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$

Подставляем в неравенство:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

Умножим все части неравенства на 2:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Это неравенство справедливо для малых $x > 0$. Теперь разделим все части неравенства на $\sin x$. Поскольку для малых $x \neq 0$ $\sin x > 0$, знаки неравенств сохранятся:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

Заметим, что $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \dfrac{\sin x / \cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x}$. Значит:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Перевернем все части неравенства. При этом знаки неравенств изменятся на противоположные:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Теперь возьмем предел всех частей неравенства при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$
$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$

По теореме о двух милиционерах, если $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, то:

$$\implies \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Что и требовалось доказать.

Из этого предела сразу следует эквивалентность:

$$\sin x \sim x \text{ при } x \to 0$$

Следствия первого замечательного предела (эквивалентности при $x \to 0$):

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\operatorname{tg} x \sim x$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\arcsin(x) \sim x$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$	$\operatorname{arctg}(x) \sim x$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел связан с числом Эйлера e и играет ключевую роль в дифференциальном исчислении и теории рядов.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{где } n \in \mathbb{N})$$

Эта формулировка для последовательности $n \in \mathbb{N}$. Для функции $x \in \mathbb{R}$ это также справедливо.

Доказательство для $x \in \mathbb{R}$: Пусть $x \to \infty$. Для любого такого x мы можем найти целые числа $n = \lfloor x \rfloor$ и $n+1 = \lfloor x \rfloor + 1$, такие что $n \le x < n+1$. Из этого следует, что:

$$\begin{gathered} n \le x < n+1 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \\ 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \end{gathered}$$

Теперь возведем эти выражения в степень x. Поскольку $x > 0$, знаки неравенств сохранятся:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

Теперь используем тот факт, что $n \le x < n+1$ для степеней:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Обозначим $A_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ и $B_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Найдем пределы этих выражений при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1+0} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot(1+0) = e$$

Поскольку обе зажимающие функции стремятся к e, то по теореме о двух милиционерах (для функций, так как $x \to \infty$):

$$\implies \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Что и требовалось доказать.

Часто используется эквивалентная форма второго замечательного предела, если сделать замену переменной $t = \frac{1}{x}$. Тогда при $x \to \infty$, $t \to 0$.

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$$

Это и есть вторая форма второго замечательного предела, которая удобна при $x \to 0$.

Следствия второго замечательного предела (эквивалентности при $x \to 0$):

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ или $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$
   Доказательство:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln((1+x)^{1/x})$$
   Поскольку функция $\ln(y)$ непрерывна, мы можем внести предел под знак логарифма:
   $$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1$$
   Что и требовалось доказать.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ или $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$
   Доказательство: Пусть $y = e^x - 1$. Тогда при $x \to 0$, $y \to e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Из $y = e^x - 1$ выразим x: $e^x = 1 + y$, то есть $x = \ln(1+y)$. Подставим в предел:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$$
   Мы знаем, что $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Тогда обратная дробь также стремится к 1:
   $$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$
   Что и требовалось доказать.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{ax} = 1$ или $(1+x)^a - 1 \sim ax$ при $x \to 0$
   Доказательство: Пусть $y = (1+x)^a - 1$. Тогда при $x \to 0$, $y \to (1+0)^a - 1 = 0$. Мы знаем, что $(1+x)^a = e^{a\ln(1+x)}$. Тогда $y = e^{a\ln(1+x)} - 1$. Используем эквивалентность $e^z - 1 \sim z$ при $z \to 0$. Здесь $z = a\ln(1+x)$. Также используем эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. Тогда при $x \to 0$:
   $$(1+x)^a - 1 \sim a\ln(1+x) \sim ax$$
   Таким образом:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{ax} = 1$$
   Что и требовалось доказать.

Таблица эквивалентностей при $x \to 0$

Эти эквивалентности являются мощным инструментом для упрощения вычисления пределов, особенно когда возникает неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\begin{aligned}
&\sin x \sim x \\
&\operatorname{tg} x \sim x \\
&\arcsin(x) \sim x \\
&\operatorname{arctg}(x) \sim x \\
&\ln(1+x) \sim x \\
&e^x - 1 \sim x \\
&(1+x)^a - 1 \sim ax \\
&1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \\
&\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln(a)} \\
&a^x - 1 \sim x\ln(a)
\end{aligned}$$

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Практика вычисления пределов с использованием эквивалентностей

Давайте применим эквивалентности для упрощения вычисления пределов.
Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{9x} - 1}{\ln(1+3x)}$$

При $x \to 0$ числитель $e^{9x} - 1 \to e^0 - 1 = 0$. При $x \to 0$ знаменатель $\ln(1+3x) \to \ln(1) = 0$. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем эквивалентности при $x \to 0$: $e^z - 1 \sim z$. Здесь $z = 9x$, поэтому $e^{9x} - 1 \sim 9x$. $\ln(1+z) \sim z$. Здесь $z = 3x$, поэтому $\ln(1+3x) \sim 3x$. Подставляем эквивалентности в предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{9x}{3x} = \lim_{x\to 0} 3 = 3$$

Ответ: 3.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

При $x \to 0$ неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем эквивалентность $\sin(z) \sim z$ при $z \to 0$. Здесь $z = 5x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 = 5$$

Ответ: 5.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+8x}-1} \quad \text{(Опечатка в условии, предполагаем } \sqrt{1+\frac{8}{x}} \text{ как } \sqrt{1+8x} \text{ для } x\to 0\text{)}$$

При $x \to 0$ неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем эквивалентности при $x \to 0$: $\sin(z) \sim z$. Здесь $z = 2x$, поэтому $\sin(2x) \sim 2x$. $(1+z)^a - 1 \sim az$. Здесь $z = 8x$ и $a = 1/2$. Поэтому $(1+8x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}(8x) = 4x$. Подставляем эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\ln(10-x)}$$

При $x \to 9$ числитель $\sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$. При $x \to 9$ знаменатель $\ln(10-9) = \ln(1) = 0$. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сделаем замену переменной: пусть $t = x - 9$. Тогда при $x \to 9$, $t \to 0$. Из $t = x - 9$ следует $x = t + 9$. Подставляем в предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+9}-3}{\ln(10-(t+9))} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+9}-3}{\ln(1-t)}$$

Теперь используем эквивалентности при $t \to 0$:

Для числителя: $\sqrt{t+9} - 3 = (9+t)^{1/2} - 3 = 3\left(\left(1+\frac{t}{9}\right)^{1/2} - 1\right)$. Используем эквивалентность $(1+z)^a - 1 \sim az$. Здесь $z = t/9$ и $a = 1/2$. Значит, $3\left(\left(1+\frac{t}{9}\right)^{1/2} - 1\right) \sim 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{9} = \frac{t}{6}$. Для знаменателя: $\ln(1-t) \sim -t$. Подставляем эквивалентности:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t/6}{-t} = \lim_{t\to 0} \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

При $x \to 0$ числитель $\ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0$. При $x \to 0$ знаменатель $1-\sqrt{0^2+1} = 1-\sqrt{1} = 0$. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем эквивалентности при $x \to 0$: Для числителя: $\ln(\cos(2x))$. Заметим, что $\cos(2x) = 1 + (\cos(2x) - 1)$. Используем эквивалентность $\ln(1+z) \sim z$. Здесь $z = \cos(2x) - 1$. Мы знаем, что $1-\cos(z) \sim \frac{z^2}{2}$, значит $\cos(z) - 1 \sim -\frac{z^2}{2}$. Для $z = 2x$, $\cos(2x) - 1 \sim -\frac{(2x)^2}{2} = -\frac{4x^2}{2} = -2x^2$. Значит, $\ln(\cos(2x)) \sim -2x^2$. Для знаменателя: $1-\sqrt{x^2+1} = 1-(1+x^2)^{1/2}$. Используем эквивалентность $(1+z)^a - 1 \sim az$. Здесь $z = x^2$ и $a = 1/2$. Значит, $(1+x^2)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$. Тогда $1-(1+x^2)^{1/2} = -((1+x^2)^{1/2} - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2$. Подставляем эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1/2} = \lim_{x\to 0} 4 = 4$$

Ответ: 4.

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(5x)}{2x^2}$$

При $x \to 0$ числитель $\cos(0) - \cos(0) = 1 - 1 = 0$. При $x \to 0$ знаменатель $2(0)^2 = 0$. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем тригонометрическую формулу разности косинусов: $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

$$\cos(3x)-\cos(5x) = -2\sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-5x}{2}\right)$$
$$= -2\sin(4x)\sin(-x) = -2\sin(4x)(-\sin x) = 2\sin(4x)\sin x$$

Теперь подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(4x)\sin x}{2x^2}$$

Сокращаем 2:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)\sin x}{x^2}$$

Теперь используем эквивалентности при $x \to 0$: $\sin(4x) \sim 4x$ и $\sin x \sim x$.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4 = 4$$

Ответ: 4.

Пример 7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2(x)}$$

При $x \to \frac{\pi}{2}$: Числитель: $\sqrt[4]{\sin(\frac{\pi}{2})} - \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{1} - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0$. Знаменатель: $\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0^2 = 0$. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сделаем замену переменной: пусть $t = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда при $x \to \frac{\pi}{2}$, $t \to 0$. Из $t = x - \frac{\pi}{2}$ следует $x = t + \frac{\pi}{2}$. Подставим в предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{\sin(t+\frac{\pi}{2})} - \sqrt[3]{\sin(t+\frac{\pi}{2})}}{\cos^2(t+\frac{\pi}{2})}$$

Используем формулы приведения: $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t)$ и $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t)$. Значит, $\cos^2(t + \frac{\pi}{2}) = (-\sin(t))^2 = \sin^2(t)$. Предел принимает вид:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{\cos(t)} - \sqrt[3]{\cos(t)}}{\sin^2(t)}$$

Теперь используем эквивалентности при $t \to 0$: $\sin(t) \sim t$, поэтому $\sin^2(t) \sim t^2$. Для числителя: $\sqrt[4]{\cos(t)} - \sqrt[3]{\cos(t)}$. Мы знаем, что $\cos(t) \sim 1 - \frac{t^2}{2}$ при $t \to 0$. Пусть $z = \cos(t) - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$. Тогда $\sqrt[4]{\cos(t)} = \cos^{1/4}(t) = (1 + (\cos(t) - 1))^{1/4} \sim 1 + \frac{1}{4}(\cos(t) - 1)$.
Аналогично $\sqrt[3]{\cos(t)} = \cos^{1/3}(t) = (1 + (\cos(t) - 1))^{1/3} \sim 1 + \frac{1}{3}(\cos(t) - 1)$. Значит, числитель:

$$\left(1 + \frac{1}{4}(\cos(t) - 1)\right) - \left(1 + \frac{1}{3}(\cos(t) - 1)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)(\cos(t) - 1) = \left(\frac{3-4}{12}\right)(\cos(t) - 1) = -\frac{1}{12}(\cos(t) - 1)$$

Теперь используем эквивалентность $\cos(t) - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$:

$$-\frac{1}{12}(\cos(t) - 1) \sim -\frac{1}{12}\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^2}{24}$$

Подставляем эквивалентности:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2/24}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$$

При $x \to 0$ основание $1+2x \to 1+0=1$, показатель степени $1/x \to \infty$. Неопределенность $[1^\infty]$. Используем вторую форму второго замечательного предела: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$. Здесь вместо t у нас $2x$. Чтобы получить нужную форму, умножим и разделим показатель степени на 2:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2$$

Поскольку внутренняя часть стремится к e, и возведение в степень 2 является непрерывной функцией:

$$=e^2$$

Ответ: e^2.

Пример 9.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$$

При $x \to +\infty$: Основание $1+\dfrac{1}{2x} \to 1+0=1$. Показатель степени $3x \to +\infty$. Неопределенность $[1^\infty]$. Используем формулу второго замечательного предела: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$. Здесь роль t играет $\dfrac{1}{2x}$. Чтобы привести выражение к форме второго замечательного предела, нам нужно, чтобы в показателе был множитель, обратный к $\dfrac{1}{2x}$, то есть $2x$. Умножим и разделим показатель степени на $2x$:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{3x}{2x}}$$

Внутренняя часть $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}$ стремится к e при $x \to +\infty$ (так как $\dfrac{1}{2x} \to 0$). Теперь вычислим предел нового показателя степени:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Таким образом, весь предел равен:

$$=e^{3/2}=\sqrt{e^3}$$

Ответ: $e^{3/2}$.

Пример 10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x+1}$$

При $x\to\infty$: Основание $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{1+1/x}{1-2/x}\to\dfrac{1+0}{1-0}=1$. Показатель степени $2x+1\to\infty$. Неопределенность $[1^\infty]$. Приведем основание к виду $1+\dfrac{1}{f(x)}$:

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$$

Теперь предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x+1}$$

Для применения второго замечательного предела, нам нужно, чтобы в показателе был множитель, обратный к $\dfrac{3}{x-2}$, то есть $\dfrac{x-2}{3}$. Умножим и разделим показатель степени на $\dfrac{x-2}{3}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}\cdot(2x+1)}$$

Внутренняя часть $\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}$ стремится к e при $x\to\infty$ (так как $\dfrac{3}{x-2}\to 0$). Теперь вычислим предел нового показателя степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3(2x+1)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+3}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+3/x}{1-2/x}=\frac{6+0}{1-0}=6$$

Таким образом, весь предел равен:

$$=e^6$$

Ответ: e^6.

Пример 11.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$$

При $x\to\infty$: Основание $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1/x+1}\to\frac{1}{0+1}=1$. Показатель степени $x\to\infty$. Неопределенность $[1^{\infty}]$. Приведем основание к виду $1+\frac{1}{f(x)}$:

$$\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}=1+\frac{-1}{1+x}$$

Теперь предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{x}$$

Для применения второго замечательного предела, нам нужно, чтобы в показателе был множитель, обратный к $\frac{-1}{1+x}$, то есть $-(1+x)$. Умножим и разделим показатель степени на $-(1+x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{-(1+x)}\right)^{\frac{x}{-(1+x)}}$$

Внутренняя часть $\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{-(1+x)}$ стремится к e при $x\to\infty$. Теперь вычислим предел нового показателя степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1/x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

Таким образом, весь предел равен:

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Ответ: $\frac{1}{e}$.

Пример 12.

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2(\sqrt{x}))^{1/2x}$$

При $x \to 0$: Основание $1+\operatorname{tg}^2(\sqrt{x}) \to 1+\operatorname{tg}^2(0) = 1+0 = 1$. Показатель степени $1/2x \to \infty$. Неопределенность $[1^\infty]$. Используем вторую форму второго замечательного предела: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$. Здесь роль t играет $\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})$. Нам нужен показатель, обратный $\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})$. Умножим и разделим показатель степени на $\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})}}\right)^{\frac{\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})}{2x}}$$

Внутренняя часть $\left(1+\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})}}$ стремится к e при $x \to 0$. Теперь вычислим предел нового показателя степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2(\sqrt{x})}{2x}$$

Используем эквивалентность $\operatorname{tg}(z) \sim z$ при $z \to 0$. Здесь $z = \sqrt{x}$. Значит, $\operatorname{tg}(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, а $\operatorname{tg}^2(\sqrt{x}) \sim (\sqrt{x})^2 = x$. Подставляем эквивалентность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, весь предел равен:

$$= e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Ответ: $\sqrt{e}$.

Пример 13.

$$\lim_{x\to 2}(3e^{x-2}-2)^{\frac{x}{x-2}}$$

При $x \to 2$: Основание $3e^{2-2}-2 = 3e^0-2 = 3(1)-2 = 1$. Показатель степени $\dfrac{x}{x-2}$. При $x\to 2$, знаменатель $x-2\to 0$. Значит, $\dfrac{x}{x-2} \to \dfrac{2}{0} = \infty$. Неопределенность $[1^\infty]$. Сделаем замену переменной: пусть $t = x-2$. Тогда при $x\to 2$, $t\to 0$. Из $t = x-2$ следует $x = t+2$. Подставляем в предел:

$$\lim_{t\to 0}(3e^t-2)^{\frac{t+2}{t}}$$

Приведем основание к виду $1+$малая величина: $3e^t-2 = 1+(3e^t-3) = 1+3(e^t-1)$. Теперь предел:

$$\lim_{t\to 0}(1+3(e^t-1))^{\frac{t+2}{t}}$$

Для применения второго замечательного предела, нам нужно, чтобы в показателе был множитель, обратный к $3(e^t-1)$. Умножим и разделим показатель степени на $3(e^t-1)$:

$$\lim_{t\to 0}\left((1+3(e^t-1))^{\frac{1}{3(e^t-1)}}\right)^{3(e^t-1)\cdot\frac{t+2}{t}}$$

Внутренняя часть $\left(1+3(e^t-1)\right)^{\frac{1}{3(e^t-1)}}$ стремится к e при $t\to 0$. Теперь вычислим предел нового показателя степени:

$$\lim_{t\to 0} 3(e^t-1)\cdot\frac{t+2}{t}$$

Используем эквивалентность $e^t-1\sim t$ при $t\to 0$.

$$\lim_{t\to 0} 3t\cdot\frac{t+2}{t} = \lim_{t\to 0} 3(t+2)$$

Применяем предел:

$$= 3(0+2) = 3\cdot 2 = 6$$

Таким образом, весь предел равен:

$$= e^6$$

Ответ: e^6.