Вебинар №12. Формула Тейлора.

Напоминание: Теоремы о среднем

Прежде чем перейти к формуле Тейлора, давайте кратко вспомним основные теоремы о среднем, которые будут полезны в дальнейших рассуждениях.

Теорема Ролля:
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).
3. Значения функции на концах отрезка равны: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что производная функции в этой точке равна нулю:

$$\exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = 0$$

Теорема Лагранжа:
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Теорема Коши:
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируемы на интервале (a, b).
3. Производная $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Пример 1.
Пусть функция f дифференцируема n раз на (a,b) и непрерывна на $[a,b]$ и равна 0 в $n+1$ точке этого отрезка. Доказать, что тогда $\exists \xi \in (a,b) : f^{(n)}(\xi) = 0$.

Доказательство:
Пусть функция $f(x)$ равна нулю в $n+1$ точке отрезка $[a,b]$. Обозначим эти точки как $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$.

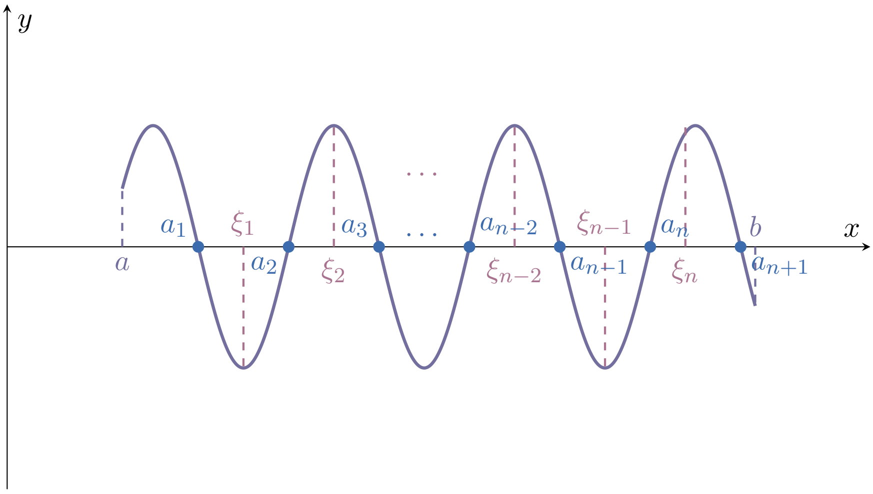

Рис. 1: Геометрическая интерпретация задачи

На каждом из отрезков $[a_i; a_{i+1}]$, где $i = \overline{1, n}$, функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля (непрерывна на отрезке, дифференцируема на интервале, и значения на концах равны нулю). Тогда по теореме Ролля, на каждом из этих отрезков $\exists \xi_i : f'(\xi_i) = 0$. Это означает, что функция $g_1(x) = f'(x)$ равна нулю как минимум в n различных точках $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$ на интервале (a,b).

Теперь применим теорему Ролля к функции $g_1(x) = f'(x)$ на $n-1$ отрезке $[\xi_i; \xi_{i+1}]$. Функция $f'(x)$ дифференцируема (так как $f(x)$ дифференцируема n раз), следовательно, она непрерывна. Для $g_1(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля. Значит, на каждом из таких отрезков $\exists \psi_i : g_1'(\psi_i) = f''(\psi_i) = 0$. Таким образом, функция $g_2(x) = f''(x)$ равна нулю как минимум в $n-1$ различных точках на интервале (a,b).

Продолжая этот процесс n раз, мы последовательно уменьшаем число точек, в которых производные обращаются в нуль.

- Изначально: $f(x) = 0$ в $n+1$ точках.
- После 1-го применения теоремы Ролля: $f'(x) = 0$ в n точках.
- После 2-го применения теоремы Ролля: $f''(x) = 0$ в $n-1$ точке.
- . . .
- После n-го применения теоремы Ролля: $f^{(n)}(x) = 0$ в 1 точке.

В итоге, применяя теорему Ролля n раз, мы приходим к существованию:

$$\exists \xi \in (a,\, b) : f^{(n)}(\xi) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2.
Доказать, что $\dfrac{b-a}{b} < \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b-a}{a}$ при $0 < a \leq b$.

Доказательство:
Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(x)$ на отрезке $[a, b]$. Функция $f(x) = \ln(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) (так как $f'(x) = \dfrac{1}{x}$). По теореме Лагранжа, существует $\xi \in (a, b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$. Подставим $f(x) = \ln(x)$:

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{1}{\xi}$$

Поскольку $\xi \in (a, b)$, то есть $a < \xi < b$, отсюда следует, что $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{a}$. Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

Умножим все части неравенства на $(b - a)$. Поскольку $b - a \geq 0$, знаки неравенств сохранятся:

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$

Так как $\ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$, получаем итоговое неравенство:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 3.
Доказать, что $e^x > ex$ при $x > 1$.

Доказательство:
Нам нужно доказать, что $e^x - ex > 0$ при $x > 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(t) = e^t - et$ на отрезке $[1, x]$ для $x > 1$. Функция $f(t)$ непрерывна на $[1, x]$ и дифференцируема на $(1, x)$. Производная функции $f(t)$:

$$f'(t) = e^t - e$$

По теореме Лагранжа, существует $\xi \in (1, x)$ такая, что $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi)$. Подставим значения: $f(1) = e^1 - e \cdot 1 = 0$.

$$\frac{(e^x - ex) - (e^1 - e \cdot 1)}{x - 1} = e^\xi - e$$

Упрощаем:

$$\frac{(e^x - ex) - 0}{x - 1} = e^\xi - e$$

Умножим обе части на $(x - 1)$. Поскольку $x > 1$, то $x - 1 > 0$:

$$e^x - ex = (e^\xi - e)(x - 1)$$

Поскольку $\xi \in (1, x)$, то $\xi > 1$. Отсюда следует, что $e^\xi > e^1 = e$, а значит $e^\xi - e > 0$. Также $x - 1 > 0$. Произведение $(e^\xi - e)(x - 1)$ является положительным. Следовательно:

$$e^x - ex > 0$$

Что и требовалось доказать.

Пример 4.
Доказать, что $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$.

Доказательство:
Рассмотрим функцию $f(t) = \ln(1+t)$ на отрезке $[0, x]$ для $x > 0$. Функция $f(t)$ непрерывна на $[0, x]$ и дифференцируема на $(0, x)$. Производная функции $f(t)$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}$$

По теореме Лагранжа, существует $\xi \in (0, x)$ такая, что $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$. Подставим значения: $f(0) = \ln(1+0) = 0$.

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{1}{1+\xi}$$

Упрощаем:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}$$

Умножим обе части на x. Поскольку $x > 0$, знак неравенства сохраняется при введении его:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}$$

Поскольку $\xi \in (0, x)$, то $0 < \xi < x$. Отсюда $1 < 1 + \xi < 1 + x$. Тогда $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1+\xi} < 1$. Подставим это в выражение для $\ln(1+x)$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \text{ при } x > 0$$

Что и требовалось доказать.

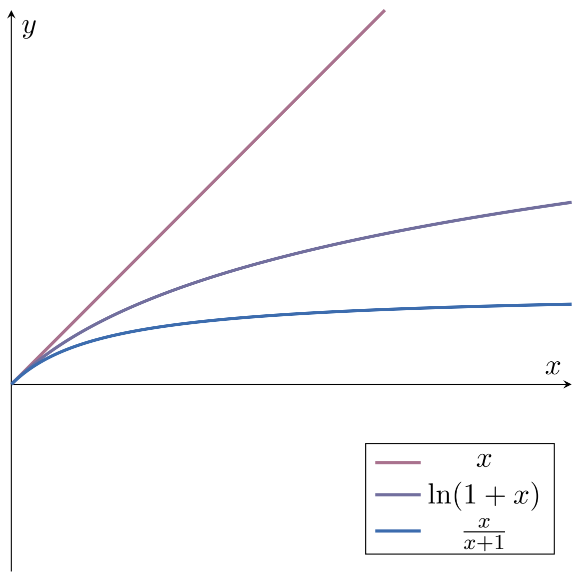

Рис. 2: Геометрическая интерпретация неравенства

Пример 5.
Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[1,2]$ и дифференцируема на $(1,2)$, то $\exists \xi \in (1,2) : f(2)-f(1) = \dfrac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

Доказательство:
Для доказательства воспользуемся теоремой Коши. Рассмотрим функцию $f(x)$ и вспомогательную функцию $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

1. Функции $f(x)$ и $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ непрерывны на $[1,2]$.
2. Функции $f(x)$ и $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ дифференцируемы на $(1,2)$.
3. Производная $g'(x) = \left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$. На интервале $(1,2)$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} \neq 0$.

Все условия теоремы Коши выполнены для функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[1,2]$. Тогда существует $\xi \in (1,2)$ такая, что $\dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Подставим значения $g(x)$ и $g'(x)$: $g(2) = -\dfrac{1}{2}$, $g(1) = -1$.

$$\frac{f(2)-f(1)}{-\frac{1}{2}-(-1)} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi^2}}$$

Упрощаем знаменатель левой части: $-\dfrac{1}{2}-(-1) = -\dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{1}{2}$. Упрощаем правую часть: $\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi^2} = \xi^2 f'(\xi)$.

$$\frac{f(2)-f(1)}{\frac{1}{2}} = \xi^2 f'(\xi)$$

Умножим обе части на $\dfrac{1}{2}$:

$$f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$$

Перепишем:

$$f(2)-f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$$

Что и требовалось доказать.

Формула Тейлора

Формула Тейлора — это мощный инструмент для аппроксимации функций многочленами в окрестности некоторой точки. Она позволяет представлять функцию в виде суммы её значений и производных в этой точке.

Зачем нужна формула Тейлора?
Мы уже видели, как использовать эквивалентности для вычисления пределов, но иногда их точности недостаточно. Например:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Используя эквивалентность $1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$, мы получаем $\cos(x)-1\sim-\frac{x^2}{2}$. Подставляем в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Это сработало. Но что, если эквивалентности сокращаются до нуля?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

Если просто использовать эквивалентность $\sin(x)\sim x$ (первого порядка), то:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right] - \text{ не хватает степеней.}$$

Здесь эквивалентности первого порядка оказались недостаточными. Нам нужны более высокие степени для точной аппроксимации.

Было бы удобно научиться аппроксимировать функции многочленами в окрестности какой-нибудь точки x_0. То есть $f(x)\sim a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n=P_n(x)$ при $x\to x_0$. В окрестности $x=0$ (это частный случай, называемый формулой Маклорена):

$$f(x)\sim a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n=P_n(x) \text{ при } x\to 0$$

Идея состоит в том, чтобы подобрать коэффициенты a_k так, чтобы многочлен $P_n(x)$ и его производные до n-го порядка совпадали с функцией $f(x)$ и её производными в точке $x=0$.

Давайте найдем эти коэффициенты a_k для $x=0$:
1. Значение функции в точке $x=0$:

$$f(0)=P_n(0)$$

Из $P_n(0)=a_0+a_1(0)+a_2(0)^2+\cdots+a_n(0)^n=a_0$, получаем:

$$f(0)=a_0\hookrightarrow a_0=\frac{f(0)}{0!}$$

2. Значение первой производной в точке $x=0$:

$$P_n'(x)=a_1+2a_2x^1+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}$$
$$f'(0)=P_n'(0)$$

Из $P_n'(0) = a_1$, получаем:

$$f'(0) = a_1 \hookrightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

3. Значение второй производной в точке $x = 0$:

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$f''(0) = P_n''(0)$$

Из $P_n''(0) = 2 \cdot 1a_2$, получаем:

$$f''(0) = 2 \cdot 1a_2 \hookrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

Продолжая эту закономерность, для n-й производной:

$$f^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(0) = n!a_n \hookrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Итого, многочлен Маклорена (или многочлен Тейлора для $x_0 = 0$) имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{ при } x \to 0$$

Лаконичнее, в виде суммы:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k - \text{ многочлен Маклорена (или Тейлора при } x_0 = 0)$$

Формула Маклорена (с остаточным членом в форме Пеано):
Многочлен Маклорена не является точным равенством, а дает лишь приближение функции в окрестности какой-то точки. Для достижения точного равенства между $f(x)$ и $P_n(x)$ приближения используется остаточный член.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

где $o(x^n)$ - остаточный член в форме Пеано. Читается как "о-малое от x^n". $\alpha(x) = o(x^n)$ — это класс функций, которые являются бесконечно малыми по сравнению с x^n при $x \to 0$. То есть:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x^n} = 0$$

Точность аппроксимации: чем больше n, тем выше точность приближения функции многочленом.

Разложение функций по формуле Тейлора

Давайте найдем разложения для некоторых основных функций в окрестности $x = 0$.

1. Разложение $f(x) = e^x$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^{(k)}|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$$

Найдем значения функции и её производных в точке $x = 0$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	e^x	$e^0 = 1$
1	e^x	$e^0 = 1$
2	e^x	$e^0 = 1$
3	e^x	$e^0 = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	e^x	$e^0 = 1$

$$\Longrightarrow \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$$

Подставляем эти значения в формулу Маклорена:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

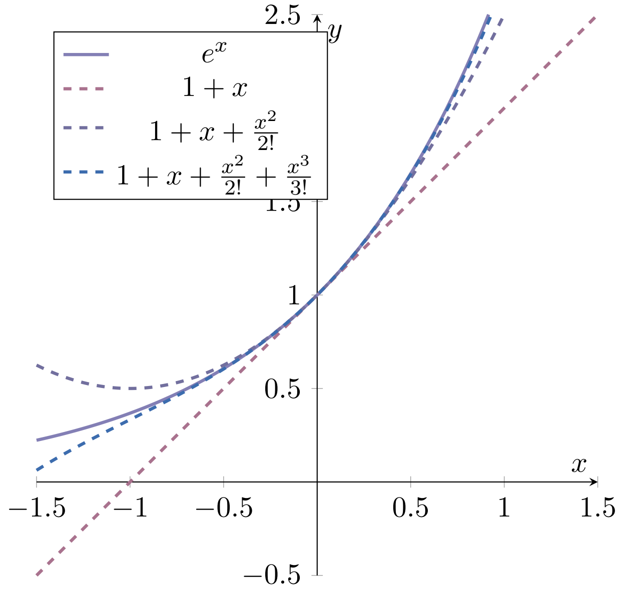

Рис. 3: Формула Тейлора для e^x

Это разложение позволяет аппроксимировать e^x многочленом. Например, для e^1 (при $n = 5$):

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

$$e \approx \frac{120}{120} + \frac{120}{120} + \frac{60}{120} + \frac{20}{120} + \frac{5}{120} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120} = \frac{163}{60} \approx 2.7166\dots$$

2. Разложение $f(x) = \sin x$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^{(k)}|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$$

Найдем значения функции и её производных в точке $x = 0$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
1	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
2	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
3	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
4	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
5	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
6	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
7	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Мы заметили закономерность: значения производных в точке 0 повторяются с периодом 4 $(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$. При этом нечетные производные в 0 равны ± 1, а четные равны 0. Подставляем эти значения в формулу Маклорена:

$$\sin x = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \cdots + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + o(x^n)$$

Это разложение содержит только нечетные степени x. В общем виде:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

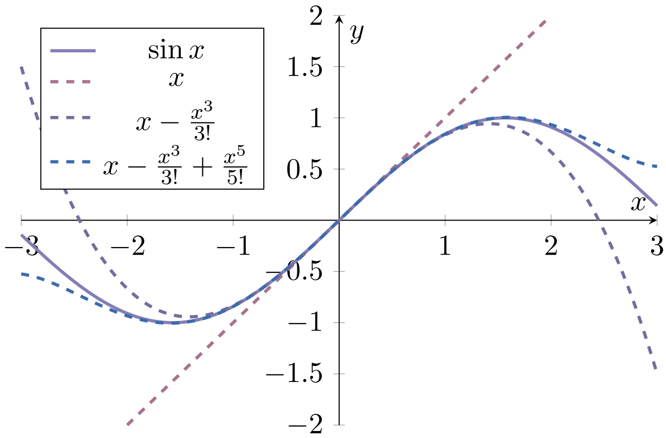

Рис. 4: Формула Тейлора для $\sin x$

3. Разложение $f(x) = \cos x$:
Аналогично найдем разложение для косинуса.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\cos x)^{(k)}|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$$

Найдем значения функции и её производных в точке $x = 0$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
1	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
2	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
3	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
4	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
5	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
6	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
7	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Значения производных в точке 0 также повторяются с периодом 4 $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$. При этом четные производные в 0 равны ± 1, а нечетные равны 0. Подставляем эти значения в формулу:

$$\cos x = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \cdots + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + o(x^n)$$

Это разложение содержит только четные степени x. В общем виде:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

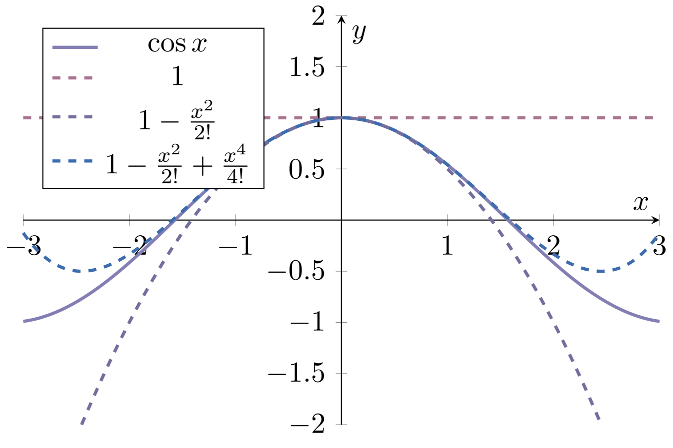

Рис. 5: Формула Тейлора для $\cos x$

4. Формула Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
Используем разложение e^z для комплексного аргумента $z = ix$:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots$$

Вспомним степени мнимой единицы i: $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Заметили закономерность: степени повторяются с периодом 4. Подставим эти значения:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(-1)x^2}{2!} + \frac{(-i)x^3}{3!} + \frac{1 \cdot x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{(-1)x^6}{6!} + \frac{(-i)x^7}{7!} + \dots$$

Сгруппируем действительные и мнимые части:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

Сравнивая это с разложениями для $\cos x$ и $\sin x$, которые мы получили ранее, мы видим, что:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Это и есть знаменитая формула Эйлера, полученная из разложений в ряд Маклорена.

5. Разложение $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$$

Найдем значения функции и её производных в точке $x = 0$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$(1-x)^{-1}$	1
1	$(1-x)^{-2}$	1
2	$2(1-x)^{-3}$	2
3	$3 \cdot 2(1-x)^{-4}$	6
4	$4 \cdot 3 \cdot 2(1-x)^{-5}$	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$k!(1-x)^{-(k+1)}$	$k!$

Мы заметили закономерность: $f^{(k)}(0) = k!$. Подставляем эти значения в формулу Маклорена:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Таким образом, разложение функции $\dfrac{1}{1-x}$ — это геометрическая прогрессия:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

6. Разложение $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$:

Мы можем получить это разложение, подставив $(-x)$ вместо x в разложение для $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots + (-x)^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

7. Разложение $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$:

Аналогично, подставим $(-x^2)$ вместо x в разложение для $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots + (-x^2)^n + o((x^2)^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

8. Разложение $f(x) = \arctan x$:

Мы знаем, что $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. И мы получили разложение для $\dfrac{1}{1+x^2}$:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Поскольку производная равна этому ряду, то саму функцию $\arctan(x)$ можно получить обратной операцией (как бы антипроизводной, или, если говорить строго, с помощью интегрирования) к каждому члену ряда.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

В общем виде:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

9. Разложение $f(x) = \ln(1+x)$:

Мы знаем, что $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$. И мы получили разложение для $\dfrac{1}{1+x}$:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Аналогично предыдущему случаю, "обратной операцией"к каждому члену ряда, и учитывая, что $\ln(1+0) = 0$, получаем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

В общем виде:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$$