

Exercise Set 6.1

Exercise01

a.

$$A = \{2, \{2\}, \sqrt{2}^2\}, B = \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$$

Phân tích:

- $\sqrt{2}^2 = 2$, nên phân tử này không làm cho A khác biệt so với B .
- $\{2\}$ có mặt trong cả hai tập A và B .
- Tuy nhiên, $\{\{2\}\}$ là một tập hợp chứa tập hợp $\{2\}$, có trong B nhưng không có trong A .

Kết luận:

- A không phải là tập con của B vì không chứa $\{\{2\}\}$.
- B không phải là tập con của A vì chứa $\{\{2\}\}$, mà không có trong A .
- Không có tập nào là tập con thực sự của tập kia.

b.

$$A = \{3, \sqrt{5^2 - 4^2} \bmod 7\}, B = \{8 \bmod 5\}$$

Phân tích:

- $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \bmod 7 = 3$.
- $8 \bmod 5 = 3$.
- A và B đều chứa số 3.

Kết luận:

- A không phải là tập con của B vì chứa phân tử mà B không có.
- B là tập con của A vì mọi phân tử của B đều có trong A .
- B là tập con thực sự của A vì A có thêm phân tử không có trong B .

c.

$$A = \{\{1\}, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$$

Phân tích:

- Tập A chứa tập hợp $\{1\}$ như một phần tử, trong khi B chứa số 1 như một phần tử.
- Số 2 có trong cả A và B .

Kết luận:

- A không phải là tập con của B vì chứa $\{1\}$, không phải là phần tử của B .
- B không phải là tập con của A vì có phần tử mà A không có.
- Không có tập nào là tập con thực sự của tập kia.

d.

$$A = \{a, b, c\}, B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Phân tích:

- Các phần tử a, b, c trong A là các phần tử đơn lẻ, trong khi B chứa các tập hợp của các phần tử này.

Kết luận:

- A không phải là tập con của B và ngược lại.
- Không có tập nào là tập con thực sự của tập kia.

e.

$$A = \{\sqrt{16}, \{4\}\}, B = \{4\}$$

Phân tích:

- $\sqrt{16} = 4$, vì vậy số này có mặt trong cả A và B .
- Tuy nhiên, $\{4\}$ là một tập hợp có phần tử 4, có trong A nhưng không giống với phần tử 4 trong B .

Kết luận:

- A không phải là tập con của B vì có thêm tập hợp $\{4\}$.
- B là tập con của A vì mọi phần tử trong B đều có trong A .
- B là tập con thực sự của A vì A có thêm phần tử $\{4\}$ không có trong B .

f.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \in \mathbb{Z}\}$$

Phân tích:

- Giá trị của hàm cosin và sin chỉ nhận giá trị nguyên khi x là các bội số của $\pi/2$.
- Cả hàm cosin và sin đều chỉ nhận các giá trị nguyên là $-1, 0, 1$.

Kết luận:

- A và B chứa cùng một tập hợp các giá trị x mà tại đó cosin và sin có giá trị nguyên.
- $A = B$ vì cả hai đều chứa đúng cùng một tập hợp các giá trị.
- Do đó, không có tập nào là tập con thực sự của tập kia.

Exercise02

$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 2a \text{ cho một số nguyên } a\}$

và

$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2b - 2 \text{ cho một số nguyên } b\}$

Để chứng minh $B \subseteq A$, ta lấy một phần tử bất kỳ n thuộc B . Vì $n = 2b - 2$, ta có thể viết lại n dưới dạng $n = 2(b - 1)$. Lưu ý rằng $b - 1$ cũng là một số nguyên vì b là một số nguyên. Do đó, n có thể được viết dưới dạng số gấp đôi của một số nguyên khác, điều này chứng tỏ n thuộc về A . Vì chúng ta bắt đầu từ một phần tử bất kỳ của B và chứng minh nó thuộc A , ta kết luận rằng mọi phần tử của B đều thuộc A , tức là $B \subseteq A$.

Câu 10

	Operation	Result
a.	$A \cup B$	$\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
b.	$A \cap B$	$\{3, 5, 7\}$
c.	$A \cup C$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
d.	$A \cap C$	$\{\}$ (tập rỗng vì không có phần tử chung)
e.	$A - B$	$\{1, 9\}$
f.	$B - A$	$\{6\}$
g.	$B \cup C$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
h.	$B \cap C$	$\{4, 6, 8\}$

Câu 11:

- a. $A \cup B$: Hợp của A và B sẽ bao gồm tất cả các số thực từ 0 đến dưới 4.
- b. $A \cap B$: Giao của A và B sẽ bao gồm tất cả các số thực từ 0 đến dưới 2.
- c. A^c : Phần bù của A sẽ là tất cả các số thực nhỏ hơn 0 hoặc lớn hơn hoặc bằng 2.
- d. $A \cup C$: Hợp của A và C sẽ bao gồm tất cả các số thực từ 0 đến dưới 9.
- e. $A \cap C$: Giao của A và C là tập rỗng vì không có khoảng chung nào giữa A và C.
- f. B^c : Phần bù của B sẽ là tất cả các số thực nhỏ hơn -1 hoặc lớn hơn hoặc bằng 2.
- g. $A^c \cap B^c$: Giao của phần bù của A và phần bù của B sẽ bao gồm các số thực nhỏ hơn -1 hoặc lớn hơn hoặc bằng 4.
- h. $(A \cup B)^c$: Phần bù của hợp A và B sẽ bao gồm các số thực nhỏ hơn 0 hoặc lớn hơn hoặc bằng 4.

Câu 12:

- a.** $A \cup B$: Hợp của A và B sẽ bao gồm tất cả các số thực từ -3 đến dưới 2.
- b.** $A \cap B$: Giao của A và B sẽ bao gồm các số thực lớn hơn -1 và nhỏ hơn 0.
- c.** A^c : Phần bù của A sẽ là các số thực nhỏ hơn -3 hoặc lớn hơn hoặc bằng 0.
- d.** $A \cup C$: Hợp của A và C sẽ bao gồm các số thực từ -3 đến dưới 8.
- e.** $A \cap C$: Giao của A và C là tập rỗng vì không có khoảng chung giữa hai tập hợp này.
- f.** B^c : Phần bù của B sẽ bao gồm các số thực nhỏ hơn hoặc bằng -1 hoặc lớn hơn hoặc bằng 2.
- g.** $A^c \cap B^c$: Giao của phần bù của A và phần bù của B sẽ bao gồm các số thực nhỏ hơn hoặc bằng -3 và lớn hơn hoặc bằng 2.
- h.** $A^c \cup B^c$: Hợp của phần bù của A và phần bù của B sẽ bao gồm tất cả các số thực trừ khoảng từ -1 đến dưới 2.
- i.** $(A \cap B)^c$: Phần bù của giao A và B sẽ bao gồm tất cả các số thực không nằm trong khoảng từ -1 đến dưới 0.

Exercise Set 6.3

1. Phát biểu: $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Phản ví dụ: Giả sử $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$.

- $(A \cap B) \cup C = (\{1\} \cap \{2\}) \cup \{1, 2\} = \emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$.
- $A \cap (B \cup C) = \{1\} \cap (\{2\} \cup \{1, 2\}) = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$.
- $\{1, 2\} \neq \{1\}$, do đó phát biểu là sai.

2. Phát biểu: $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

Phản ví dụ: Giả sử $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{2\}$.

- $(A \cup B)^c = (\{1\} \cup \{2\})^c = \{1, 2\}^c = \{3\}$.
- $A^c \cup B^c = \{1\}^c \cup \{2\}^c = \{2, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$.
- $\{3\} \neq \{1, 2, 3\}$, do đó phát biểu là sai.

3. Phát biểu: Nếu $A \not\subseteq B$ và $B \not\subseteq C$ thì $A \not\subseteq C$.

Phản ví dụ: Giả sử $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$.

- A không là tập con của B vì A có phần tử 1 không thuộc B .
- B không là tập con của C vì B và C giống nhau (trong trường hợp này giả định là sai nhưng ta vẫn sử dụng để xem xét).
- Tuy nhiên, A là tập con của C .
- Do đó phát biểu là sai.

4. Phát biểu: Nếu $B \cap C \subseteq A$ thì $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$.

Phản ví dụ: Giả sử $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, C = \{2\}$.

- $B \cap C = \{2\} \subseteq A$.
- $A - B = \{1, 2\} - \{2\} = \{1\}$.
- $A - C = \{1, 2\} - \{2\} = \{1\}$.
- $(A - B) \cap (A - C) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$.
- Do đó phát biểu là sai.

Exercise Set 1.2

Câu 8:

- a. $B \subseteq A$? Không. B không là tập con của A vì B chứa phần tử 'j', không có trong A .
- b. $C \subseteq A$? Có. C là tập con của A vì mọi phần tử của C đều có trong A .
- b. $C \subseteq C$? Có. Mọi tập hợp đều là tập con của chính nó.
- d. C là tập con thực sự của A ? Có. C là tập con thực sự của A vì C chứa ít phần tử hơn và tất cả các phần tử của C đều có trong A .

Câu 9:

- a. $3 \in \{1, 2, 3\}$? Có. Số 3 là một phần tử của tập hợp này.
- b. $1 \subseteq \{1\}$? Không. 1 không phải là tập con của $\{1\}$ nhưng là một phần tử của nó.
- c. $\{2\} \in \{1, 2\}$? Không. $\{2\}$ là tập con của $\{1, 2\}$ nhưng không phải là phần tử của nó.
- d. $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$? Có. $\{3\}$ là một phần tử của tập hợp này.
- e. $1 \in \{1\}$? Có. Số 1 là một phần tử của tập hợp này.
- f. $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$? Không. $\{2\}$ không là tập con của $\{1, \{2\}, \{3\}\}$ nhưng là một phần tử của nó.
- g. $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$? Có. $\{1\}$ là tập con của $\{1, 2\}$.
- h. $1 \in \{\{1\}, 2\}$? Không. Số 1 không phải là một phần tử của tập hợp này; $\{1\}$ là phần tử.
- i. $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$? Không. $\{1\}$ không phải là tập con của $\{1, \{2\}\}$ nhưng là một phần tử của nó.
- j. $\{1\} \subseteq \{1\}$? Có. $\{1\}$ là tập con của chính nó.