ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BÀI TẬP LỚN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

PHÂN TÍCH A=QR BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI HOUSEHOLDER

Giảng viên hướng dẫn: Nguyễn Xuân Mỹ
Sinh viên thực hiện: Trần Minh Nhật – 2014008

Ho Chi Minh City, 2022

Mục lục

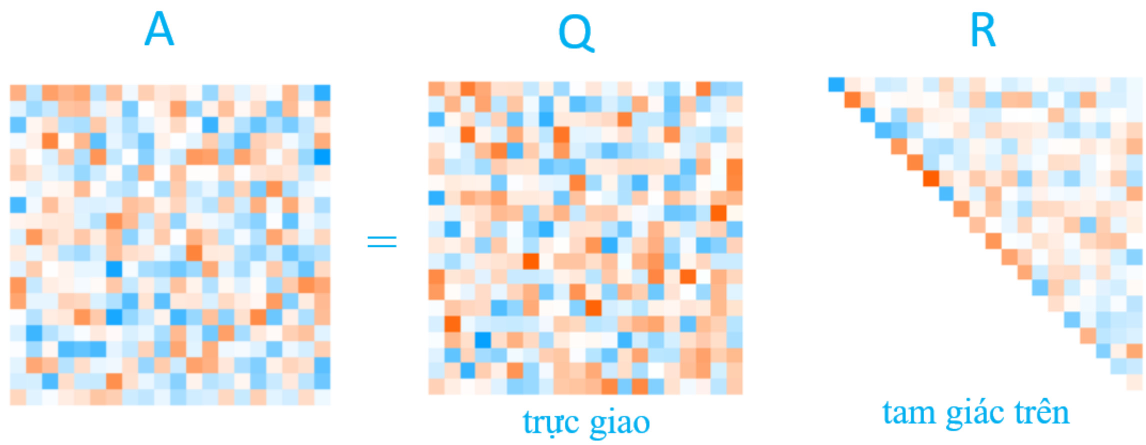
1 CƠ SỞ LÍ THUYẾT PHÂN TÍCH A=QR BẰNG BIẾN ĐỔI HOUSEHOLDER

1.1 GIỚI THIỆU THUẬT TOÁN A=QR

1.1.1 Khái niệm phân rã QR

Trong đại số tuyến tính, phân rã QR, còn được gọi là phân tích nhân tố QR hoặc phân tích nhân tố QU là phân rã ma trận A thành tích $A = QR$ của ma trận trực giao Q và ma trận tam giác trên R. Phân rã QR thường được sử dụng để giải quyết vấn đề bình phương tối thiểu tuyến tính và là cơ sở cho một thuật toán eigenvalue cụ thể, thuật toán QR.

1.1.2 Ý tưởng của thuật toán QR



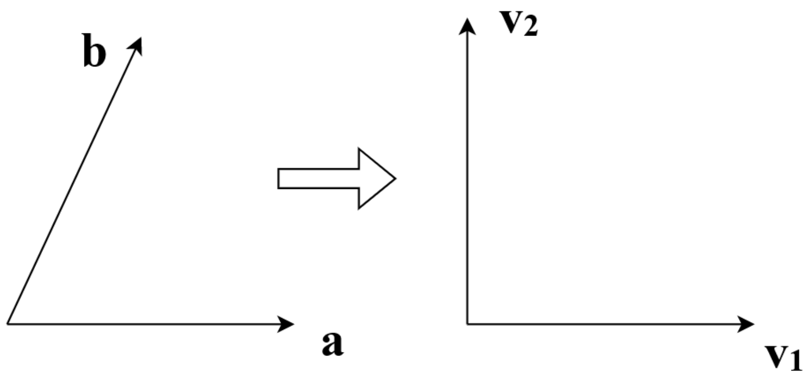
1.1.3 Quy trình Gram-Schmidt

Phân hủy QR có công thức sau:

$$A = QR$$

Trong đó:

- A là ma trận ban đầu muốn phân rã
- Q là ma trận trực giao
- R là ma trận tam giác trên

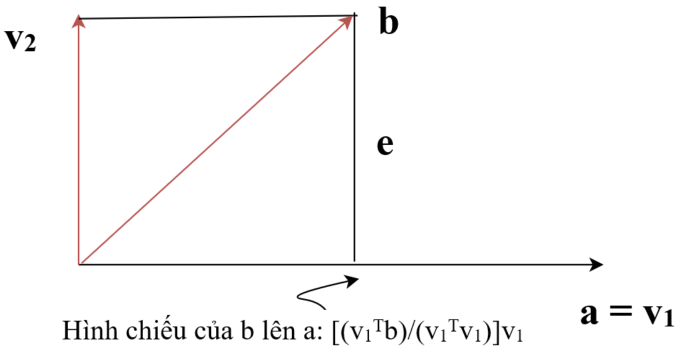


Hình 1: *Trực giao các vector*

Điều kiện:
- Họ các véctơ cột của A là họ độc lập tuyến tính
- Dùng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt ta được họ trực giao và chia mỗi véctơ cho độ dài của nó ta có họ trực chuẩn.
- Ma trận trực giao Q có các cột là véctơ trực chuẩn vừa tìm được.
- Ma trận R (ma trận chuyển cơ sở từ Q sang E) = $Q^T A$

Để tạo vectơ trực giao, chúng ta có thể sử dụng thông tin sau. Vectơ a là vectơ đầu tiên và chúng ta có thể so khớp nó với v_1. v_2 phải trực giao với vectơ v_1, vì vậy chúng ta nên chiếu vectơ b lên v_2 để b trực giao với a (v_1). Phép chiếu của vectơ b lên a (v_1) được cho bởi:

$$\frac{v_1^T b}{v_1^T v_1} v_1$$



Hình 2: *Phép chiếu vector*

Bây giờ chúng ta cần chiếu b lên v_2 để có được tính trực giao giữa a và b. Đối với điều này, chúng ta có thể sử dụng e, và có thể được tính bằng công thức sau:

$$e = b - \frac{v_1^T b}{v_1^T v_1} v_1$$

Cần lưu ý là e có cùng độ dài và cùng chiều với v_2. Nên chúng ta có thể kết luận:

$$v_2 = b - \frac{v_1^T b}{v_1^T v_1} v_1$$

Về cơ bản đây là cách hoạt động của quá trình Gram-Schmidt. Đối với nhiều hơn hai chiều (giả sử chúng ta có vectơ a, b và c), chúng ta có thể tính toán quá trình theo cách sau :

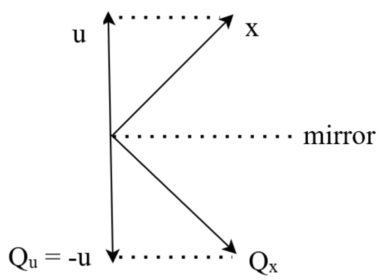
$$v_3 = c - \frac{v_1^T c}{v_1^T v_1} v_1 - \frac{v_2^T c}{v_2^T v_2} v_2$$

Để tính toán ma trận R, ta có thể biến đổi công thức QR:

$$A = QR$$
$$Q^T A = Q^T Q R \text{ (vì Q trực giao nên } Q^T = Q^{-1})$$
$$Q^T A = R, \text{ do đó } R = Q^T A$$

1.1.4 Phản chiếu Householder

Gram-Schmidt có thể không ổn định về mặt số học, có nghĩa là đầu vào thay đổi nhỏ có thể dẫn đến thay đổi tương đối lớn trong đầu ra (nguồn). Cách ổn định hơn là sử dụng phản chiếu của Householder. Householder chiếu vectơ qua một "tấm gương". Chúng ta có vectơ x mà chúng ta muốn phản ánh vectơ Qx. Để phản ánh, chúng ta sẽ sử dụng ma trận trực giao Q
Nội dung phản ánh



Hình 3: *Phản chiếu Householder*

Từ trước, chúng ta biết rằng hình chiếu x lên u là:

$$\frac{u^T x}{u^T u} u$$

Từ biểu đồ phản chiếu của Householder, chúng ta có thể thấy rằng nếu chúng ta lấy x trừ đi hai lần thành phần song song với u, chúng ta sẽ nhận được Qx:

$$Qx = x - 2x_{||}$$

Thành phần song song là hình chiếu x của chúng ta với u, vì vậy chúng ta có thể viết:

$$Qx = x - 2\frac{u^T x}{u^T u} u$$

Vì tính kết hợp của phép nhân ma trận:

$$u(u^T x) = (uu^T)x$$

Có thể viết:

$$Qx = (uu^T)x - 2\frac{uu^T}{u^T u} x$$

trở thành
Có thể viết:

$$Qx = (I - 2\frac{uu^T}{u^T u})x$$

Cuối cùng ta có công thức sau:

$$Q = I - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

1.2 Lí thuyết và thuật toán

1.2.1 Đối với ma trận vuông

Bất kì ma trận vuông thực A có thể phân tách thành: $A = QR$
Trong đó:
- Q là một ma trận trực giao (các cột của nó là các vectơ đơn vị trực giao, có nghĩa là $Q^T Q = QQ^T = 1$)
- R là ma trận tam giác trên (còn gọi là ma trận tam giác vuông)

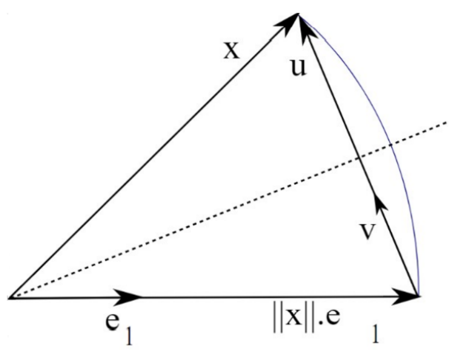
Nếu A là khả nghịch, thì việc phân tích này là duy nhất nếu chúng ta yêu cầu các phần tử đường chéo của R dương. Nếu thay vào đó A là một ma trận vuông phức, thì có một phép phân tách $A = QR$, trong đó Q là một ma trận đơn vị (vì vậy Q*Q = QQ* = 1).
Nếu A có n cột độc lập tuyến tính, thì n cột đầu tiên của Q tạo thành cơ sở trực giao cho không gian cột của A. Tổng quát hơn, các cột k đầu tiên của Q tạo thành cơ sở trực giao cho nhịp của các cột k đầu tiên của A cho bất kì $1 \leq k \leq n$. Thực tế là bất kì cột k nào của A chỉ phụ thuộc vào các cột k đầu tiên của Q chịu trách nhiệm cho dạng tam giác của R.

1.2.2 Đối với ma trận hình chữ nhật

Nói chung, chúng ta có thể tính đến một ma trận m×n phức tạp A, với $m \geq n$, là tích của ma trận đơn nhất M × m Q và ma trận hình tam giác trên m × n R. Vì các hàng dưới cùng (mn) của ma trận hình tam giác trên m × n bao gồm hoàn toàn các số không, nó thường hữu ích cho phân vùng R hoặc cả R và Q:

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

Trong đó: R_1 là n × m ma trận tam giác trên, 0 là ma trận 0 (m − n) × n, Q_1 là m × n, Q_2 là m × (m − n), Q_1 và Q_2 đều có cột trực giao.



Phản chiếu Householder để phân rã QR: Mục tiêu là tìm một phép biến đổi tuyến tính thay đổi vectơ x thành vectơ cùng độ dài và cùng phương với e_1. Chúng ta có thể sử dụng phép chiếu trực giao (Gram-Schmidt) nhưng điều này sẽ không ổn định về mặt số nếu các vectơ x gần với trực giao. Thay vào đó, phản xạ của Householder phản ánh qua đường đứt khúc (được chọn để chia đôi góc giữa x và e_1). Góc tối đa với phép biến đổi này là 45^o.

1.2.3 Thuật toán phép biến đổi Householder

Giả sử u là vectơ khác không tùy ý, khi đó hình chiếu vuông góc của vectơ v lên không gian con F sinh bởi vectơ u là $pr_u(v) = uu^T v$.
Vectơ v được phân tích thành $v = a + b$, với a là hình chiếu vuông góc của u lên F và b là hình chiếu vuông góc của v lên F.
Ta có:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HN} \Rightarrow y = \overrightarrow{ON} = (I - \frac{uu^T}{u^Tu})v - \frac{uu^T}{u^Tu}v = (I - 2\frac{uu^T}{u^Tu})v$$

Vậy ta có phép đối xứng qua $F^{\perp}$ là $I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}$ (phép biến đổi này được gọi là phép biến đổi Householder)

Cách thực hiện

Giả sử $A_{*1} \neq 0$ là cột thứ nhất của ma trận A.

Ta cần tìm một ma trận trực giao P_1 để $P_1A_{*1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Ma trận P_1 tương ứng với phép biến đổi trực giao nên nó bảo toàn độ dài của vectơ. Vậy độ dài của P_1A_{*1} bằng độ dài của A_{*1}.

Do đó, ta chọn $P_1A_{*1} = ||A_{*1}||e_1$.

Đặt vector $\overrightarrow{OM} = A_{*1}$ và $\overrightarrow{ON} = ||A_{*1}||e_1$. Khi đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

Đặt $u = \overrightarrow{NM} = A_{*1} - ||A_{*1}||e_1$

Dùng vectơ u này tạo ra phép biến đổi Householder $P_1 = I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}$ và phép biến đổi này sẽ khử tất cả các phần tử trong cột thứ nhất cảu ma trận A ngoại trừ hạng tử đầu tiên

2 CHƯƠNG TRÌNH MATLAB

2.1 Chương trình phân tích A=QR

```
function [Q,R] = qr(A)
% Phan tich QR cua ma tran A (mxn) dung
% bien doi Householder
A=input('nhap A:');
[m,n] = size(A);
Q = eye(m); % Bien doi truc giao
R = A; % Ma tran da bien doi
for j = 1:n
% -- Tim H = I-tau*w*wT de dat 0 vao duoi R(j,j)
normx = norm(R(j:end,j));
s = -sign(R(j,j));
u1 = R(j,j) - s*normx;
w = R(j:end,j)/u1;
w(1) = 1;
tau = -s*u1/normx;
% -- R := HR, Q := QH
R(j:end,:) = R(j:end,:)-(tau*w)*(w'*R(j:end,:));
Q(:,j:end) = Q(:,j:end)-(Q(:,j:end)*w)*(tau*w)';
end
disp('Q=');
disp(-Q); % Dat -Q de ket qua giong voi tinh toan vi Q*R=(-Q)*(-R)
disp('R=');
disp(-R);
```

2.2 Chương trình tính R và $Q^T b$

```
function [Q,R] = lec18hqr1(A)
% Compute the QR decomposition of an m-by-n matrix A using
% Householder transformations.
A=input('nhap A:');
[m,n] = size(A);
B=input('Nhap B:');
Q = eye(m); % Orthogonal transform so far
R = A; % Transformed matrix so far
for j = 1:n
% -- Find H = I-tau*w* w   to put zeros below R(j,j)
normx = norm(R(j:end,j));
s = -sign(R(j,j));
u1 = R(j,j) - s*normx;
w = R(j:end,j)/u1;
w(1) = 1;
tau = -s*u1/normx;
% -- R := HR, Q := QH
R(j:end,:) = R(j:end,:)-(tau*w)*(w'*R(j:end,:));
Q(:,j:end) = Q(:,j:end)-(Q(:,j:end)*w)*(tau*w)';
end
R=R
QTb=Q'*B'
```

2.3 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$ Đầu tiên, chúng ta cần dùng phép phản chiếu để biến đổi cột đầu tiên của ma trận A, vector $a_1 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -4 \end{bmatrix}^\intercal$ thành $||a_1||e_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal$
Ta có:

$$u = x - \alpha e_1;\ v = \frac{u}{||u||}$$
$$\text{Với } \alpha = 14 \text{ và } x = a_1 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -4 \end{bmatrix}^\intercal$$

Do đó:

$$u = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}^\intercal = 2\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^\intercal$$
$$\text{và } v = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^\intercal$$
$$Q_1 = I - \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = I - \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Từ đây ta có:

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{bmatrix}$$

Chúng ta gần như đã có một ma trận tam giác, chúng ta chỉ còn cần biến đổi giá trị hàng 3 cột 2 thành giá trị 0.
Lấy ma trận (1, 1) phụ hợp, sau đó áp dụng lại quy trình cho

$$A' = M_{11} = \begin{bmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{bmatrix}$$

Bằng phương pháp tương tự ở trên, ta có được ma trận của phép biến đổi Householder

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo ta tính

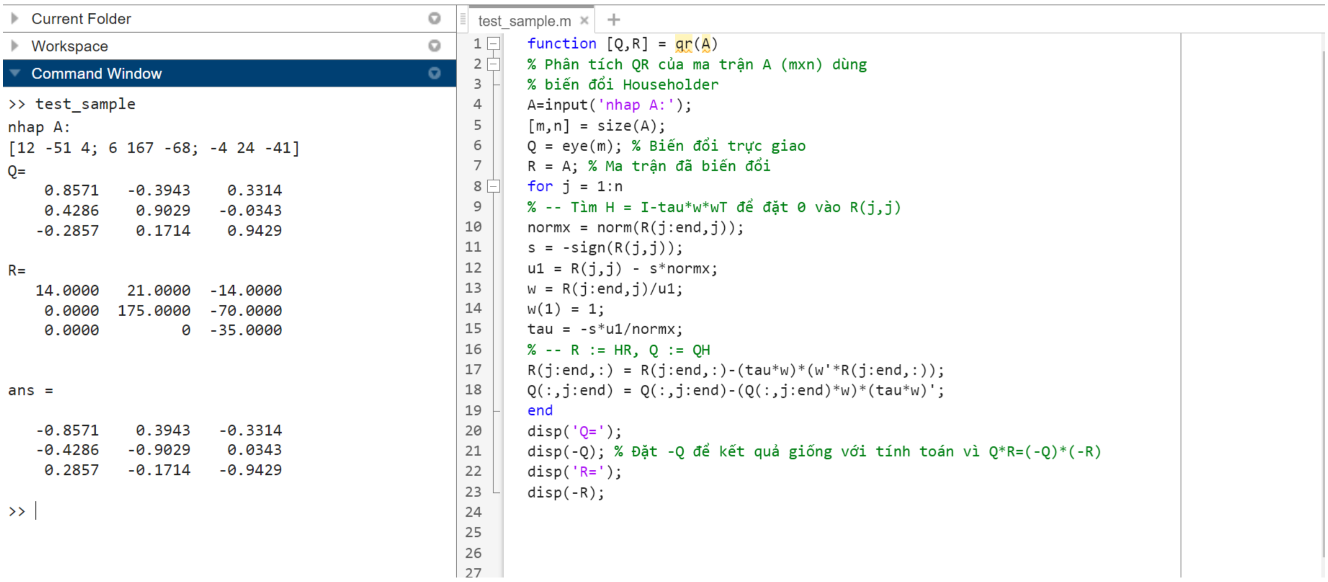
$$Q = Q_1^T Q_2^T \begin{bmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{bmatrix}$$

Hoặc

$$Q = Q_1^T Q_2^T \begin{bmatrix} 0.8571 & -0.3943 & 0.3314 \\ 0.4286 & 0.9029 & -0.0343 \\ -0.2857 & 0.1714 & 0.9429 \end{bmatrix}$$
$$R = Q_2 Q_1 A = Q^T A = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

MATLAB ví dụ 1

Nhận xét: kết quả của chương trình MATLAB giống với tính toán lí thuyết




```
>> test_sample
nhap A:
[12 -51 4; 6 167 -68; -4 24 -41]
Q=
    0.8571   -0.3943    0.3314
    0.4286    0.9029   -0.0343
   -0.2857    0.1714    0.9429

R=
   14.0000   21.0000  -14.0000
    0.0000  175.0000  -70.0000
    0.0000         0  -35.0000


ans =

   -0.8571    0.3943   -0.3314
   -0.4286   -0.9029    0.0343
    0.2857   -0.1714   -0.9429

>> |
```

```
function [Q,R] = qr(A)
% Phân tích QR của ma trận A (mxn) dùng
% biến đổi Householder
A=input('nhap A:');
[m,n] = size(A);
Q = eye(m); % Biến đổi trực giao
R = A; % Ma trận đã biến đổi
for j = 1:n
% -- Tìm H = I-tau*w*wT để đặt 0 vào R(j,j)
normx = norm(R(j:end,j));
s = -sign(R(j,j));
u1 = R(j,j) - s*normx;
w = R(j:end,j)/u1;
w(1) = 1;
tau = -s*u1/normx;
% -- R := HR, Q := QH
R(j:end,:) = R(j:end,:)-(tau*w)*(w'*R(j:end,:));
Q(:,j:end) = Q(:,j:end)-(Q(:,j:end)*w)*(tau*w)';
end
disp('Q=');
disp(-Q); % Đặt -Q để kết quả giống với tính toán vì Q*R=(-Q)*(-R)
disp('R=');
disp(-R);
```

Ví dụ 2

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Đầu tiên, chúng ta cần dùng phép phản chiếu để biến đổi cột đầu tiên của ma trận A, vector $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal$ thành $||a_1||e_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal$
Ta có:

$$u = x - \alpha e_1;\ v = \frac{u}{||u||}$$

$$\text{Với } \alpha = 2 \text{ và } x = a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal$$

Do đó:

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal$$

$$\text{và } v = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal$$

$$Q_1 = I - \frac{2}{2.2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = I - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Từ đây ta có:

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Chúng ta gần như đã có một ma trận tam giác, chúng ta chỉ còn cần biến đổi giá trị hàng 3 cột 2 thành giá trị 0.
Lấy ma trận (1, 1) phụ hợp, sau đó áp dụng lại quy trình cho

$$A' = M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Bằng phương pháp tương tự ở trên, ta có được ma trận của phép biến đổi Householder

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo ta tính

$$Q = Q_1^T Q_2^T \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Hoặc

$$Q = Q_1^T Q_2^T \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$R = Q_2 Q_1 A = Q^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB ví dụ 2

Nhận xét: kết quả của chương trình MATLAB giống với tính toán lí thuyết

Current Folder

Workspace

Command Window

```
>> test_sample
nhap A:
[1 -1 4; 1 4 -2; 1 4 2; 1 -1 0]
Q=
    0.5000   -0.5000    0.5000    0.5000
    0.5000    0.5000   -0.5000    0.5000
    0.5000    0.5000    0.5000   -0.5000
    0.5000   -0.5000   -0.5000   -0.5000

R=
    2.0000    3.0000    2.0000
         0    5.0000   -2.0000
         0    0.0000    4.0000
         0   -0.0000   -0.0000


ans =

   -0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000
   -0.5000   -0.5000    0.5000   -0.5000
   -0.5000   -0.5000   -0.5000    0.5000
   -0.5000    0.5000    0.5000    0.5000

>>
```

test_sample.m

```matlab
function [Q,R] = qr(A)
% Phân tích QR của ma trận A (mxn) dùng
% biến đổi Householder
A=input('nhap A:');
[m,n] = size(A);
Q = eye(m); % Biến đổi trực giao
R = A; % Ma trận đã biến đổi
for j = 1:n
% -- Tìm H = I-tau*w*wT để đặt 0 vào R(j,j)
normx = norm(R(j:end,j));
s = -sign(R(j,j));
u1 = R(j,j) - s*normx;
w = R(j:end,j)/u1;
w(1) = 1;
tau = -s*u1/normx;
% -- R := HR, Q := QH
R(j:end,:) = R(j:end,:)-(tau*w)*(w'*R(j:end,:));
Q(:,j:end) = Q(:,j:end)-(Q(:,j:end)*w)*(tau*w)';
end
disp('Q=');
disp(-Q); % Đặt -Q để kết quả giống với tính toán vì Q*R=(-Q)*(-R)
disp('R=');
disp(-R);
```

3 Các ứng dụng của phép phân tích A = QR

3.1 Giải quyết các bài toán tìm giá trị riêng:

3.1.1 Các bước tìm trị riêng bằng phương pháp QR

- Tìm s từ ma trận A đã cho, ta có ma trận $A - \lambda i$
- Từ ma trận $A_k^{(i)} \Rightarrow$ Ma trận quay P_{k+1}.
- Tính $A_{k+1}^{(i)}$
- Tìm các giá trị riêng của ma trận A đã cho.

3.1.2 Công thức cần lưu ý

- $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$
- $A^{(i+1)} = Q^{(i)}r^{(i)}$
- $A_2^{(1)} = P_2 A^{(1)}$
- $A_3^{(1)} = P_3 A_2^{(1)}$
- $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)} = P_3 P_2 A^{(1)} P_2' P_3'$
- Dạng tổng quát của P_{k+1}:

$$\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & & 0 \\ 0 & c_{k+1} & s_{k+1} & 0 \\ & -s_{k+1} & c_{k+1} & \\ 0 & 0 & & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

Với

$$s_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}}; \; c_{k+1} = \frac{x_k}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}}$$

3.1.3 Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận 3 đường chéo, đối xứng. Tìm trị riêng của A?

Giải

- Tính s_1 bằng cách tìm trị riêng ma trận vuông 2×2 tạo bởi dòng thứ 2,3 và cột thứ 2,3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ma trận này có 2 trị riêng $\mu_1 = 2$ và $\mu_2 = 4$
Chọn trị riêng gần với giá trị $a_3 = A_{33} = 3 \Rightarrow$ Chọn $s_1 = \mu_1 = 2$
- Ta có:

$$A^{(i)} = A - s_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1; b_2 = 1; s_2 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Dạng của P_2::

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = P_2 A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0;\ b_3 = 1;\ s_1 = 0;\ c_3 = 1$$

- Dạng của P_3:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)} = P_3P_2A_1^{(1)}P_2'P_3' =$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- Tương tự như trên ta có:

$$s_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 & 0 \\ 0.37597448 & 1.4736080 & 0.030396964 \\ 0 & 0.030396964 & -0.047559530 \end{bmatrix}$$

Nhận thấy $b_3^{(2)} = 0.030396964$ đã đủ nhỏ, ta đi tính các giá trị riêng:

$$\lambda = a_3^{(3)} + s_1 + s_2 = 1.5894151$$

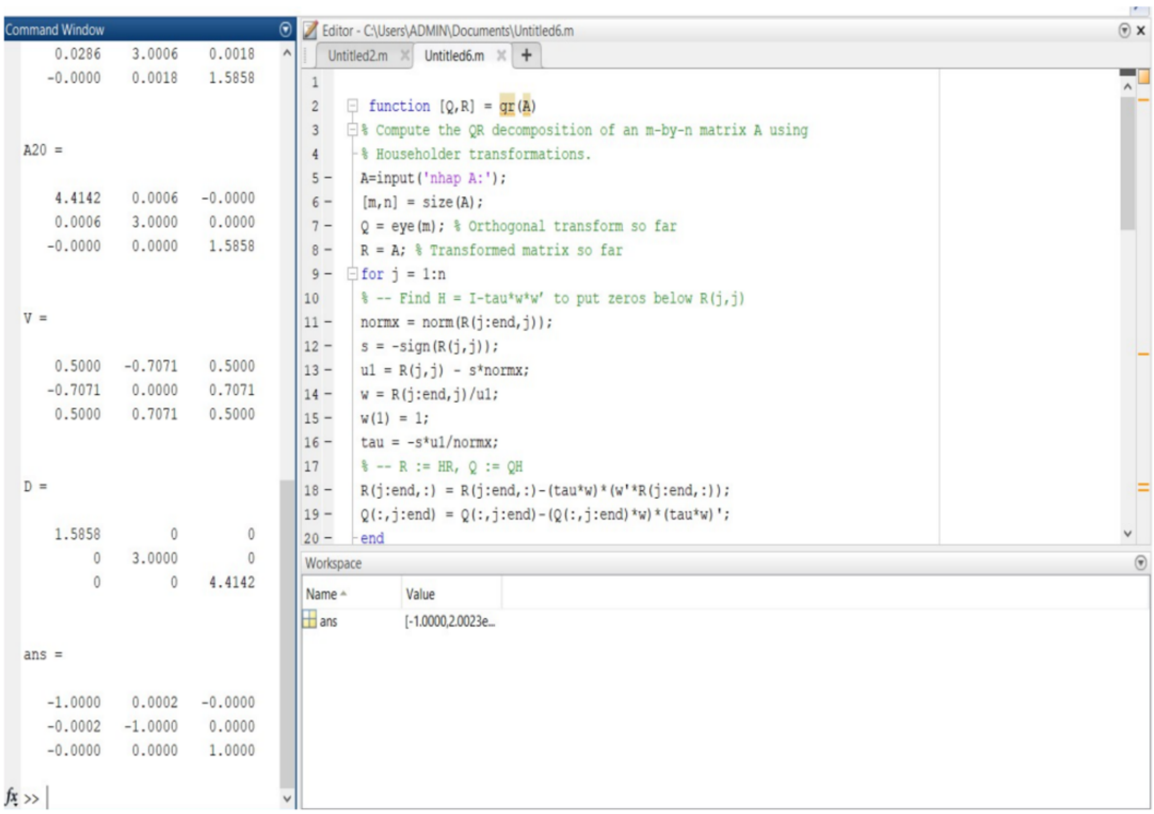
- Bỏ đi hàng 3 cột 3 ma trận $A^{(3)}$, ta được:

$$\begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 \\ 0.37597448 & 1.4736080 \end{bmatrix}$$

+ 2 trị riêng của ma trận trên là: $\mu_1 = 2.7802140$ và $\mu_2 = 1.3654218$
+ 2 trị riêng còn lại của ma trận A là:

$$\lambda_1 = \mu_1 + s_1 + s_2 = 4.4141886$$
$$\lambda_2 = \mu_2 + s_1 + s_2 = 2.9993964$$

Ta dùng phép lặp (n = 20 lần) cho đến khi các giá trị ngoài đường chéo chính hội tụ dần về 0 với chương trình **[Q,R] = qr(A)** được tạo như trên bằng thuật toán sau :
Q, R
=qr(A)
A=Q*R
i=1:n
Q,R
=qr(A_i)
$A_{i+1} = R * Q$
So sánh với ma trận D chứa trị riêng nằm trên đường chéo chính được tạo bởi hàm **[V,D] = eig(A)** trong matlab và kết quả của ví dụ trên ta thấy phép phân tích A=QR có thể sử dụng để tính trị riêng của ma trận với điều kiện lặp đủ số lần



3.2 Ứng dụng trong MIMO

Trong radio, nhiều đầu vào và nhiều đầu ra, hay MIMO, là việc sử dụng nhiều ăng-ten ở cả máy phát và máy thu để cải thiện hiệu suất truyền thông

- MIMO là một trong nhiều dạng công nghệ ăng ten thông minh
- MIMO cung cấp sự gia tăng đáng kể về thông lượng dữ liệu và phạm vi liên kết mà không cần thêm băng thông hoặc công suất truyền
- MIMO là một phần quan trọng của các tiêu chuẩn truyền thông không dây hiện đại như IEEE 802.11n (Wifi) và 4G
- Trong hệ thống MIMO, một máy phát sẽ gửi nhiều luồng bằng nhiều ăng-ten phát. Các luồng truyền đi qua một kênh ma trận bao gồm tất cả các đường dẫn $N_t N_r$ giữa các ăng ten phát N_t ở máy phát và N_r ăng-ten thu ở máy thu.

- Sau đó, máy thu nhận các vectơ tín hiệu đã nhận bởi nhiều ăng-ten thu và giải mã các vectơ tín hiệu nhận được thành thông tin ban đầu

Mô tả toán học

Cho $x = (x_1, ..., x_n)^\intercal$ là một vectơ được truyền qua một kênh nhiễu. Mỗi xi được chọn từ một bảng chữ cái có kích thước hữu hạn X Một hệ thống MIMO chung được mô hình hóa như $r = Hx + \xi$
H là m × n kênh ma trận xếp hạng cột đầy đủ $(m \geq n)$ (bộ thu đã biết)
$\xi = (\xi 1, ..., \xi m)^\intercal$ là vectơ nhiễu Gaussian màu trắng trong đó $E(\xi\xi^*) = \sigma 2I$
$r = (r1, ..., rm)^\intercal$ là vectơ nhận được quan sát.
Nhiệm vụ của chúng ta là phát hiện / ước lượng vectơ $x = (x_1, .., x_n)^\intercal \in X_n$ với quan sát nhiễu r.
Sự phân hủy QR của ma trận kênh H có thể được sử dụng để tạo thành bộ dò hủy ngược.
Đặt $H = QR$, là phương trình phân rã QR của ma trận hệ thống H với m hàng, n cột.
Q = Ma trận trực giao m x n
R = Ma trận tam giác trên n x n
$\Rightarrow r = Hx + \xi \Rightarrow Q * r = Rx + Q * \xi$
Đặt

$$\tilde{r} := Q * r, \tilde{\xi} := Q * \xi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{r1} \\ \widetilde{r2} \\ \vdots \\ \widetilde{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_4 \end{pmatrix}$$

- Phương pháp chính thức:
Giả sử ước tính xn bằng công thức: $xn := Quant(t)$
Với $Quant(t)$ là phần tử X gần nhất với t
- Phân hủy
Công thức

$$xn := Quant(t)$$
$$xk := Quant[\frac{r_k - \Sigma r_{km} x_i}{r_{kk}}],\ k = n-1, n-2, ..., 1$$

Về cơ bản thì đây là thuật toán bình phương cực tiểu
Nhận xét:
- Sự phân rã QR cung cấp một cách thay thế để giải hệ phương trình $Ax = b$ mà không cần nghịch đảo ma trận A. Thực tế là Q là trực giao có nghĩa là $Q^T Q = I$, do đó $Ax = b$ tương đương với $Rx = Q^T$ b, dễ giải hơn vì R là ma trận tam giác
- Việc sử dụng các phép biến đổi Householder vốn dĩ là đơn giản nhất trong số các thuật toán phân rã QR ổn định về số lượng do sử dụng phản xạ làm cơ chế tạo ra các số 0 trong ma trận R. Tuy nhiên, thuật toán phản chiếu Householder nặng về băng thông và không thể song song hóa, vì mọi phản xạ tạo ra phần tử 0 mới sẽ thay đổi toàn bộ ma trận Q và R

3.3 Giải quyết vấn đề bình phương cực tiểu

Bình phương tối thiểu tuyến tính là một kỹ thuật trong ngành tối ưu toán học để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính không có nghiệm chính xác. Điều này thường xảy ra khi số phương trình là (m) lớn hơn số biến (n)
Theo từ ngữ toán học , chúng ta muốn tìm nghiệm của phương trình, với A là một ma trận cỡ m x n (với m > n)
Ta có: $A^T Ax = A^T b \leftrightarrow Rx = Q^T b$
Ví dụ: Tìm hàm bậc hai $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ với tập hợp $D = (2; 7), (-2; 8), (3; 19), (-3; 17)$
Phương pháp:
Giả sử ta có tập hợp các điểm $D = (t_1; b_1), (t_2; b_2), \ldots (t_m; b_m)$. Cần tìm hàm $f = f(t)$ sao cho đồ thị của nó đi qua (hoặc gần nhất) tất cả các điểm của D
Xét trường hợp hàm $f(t) = \alpha + \beta g(t) + \gamma h(t)$
Tìm α, β, γ để $\epsilon(t) = \Sigma\ (\alpha + \beta g(t_i) + \gamma h(t_i) - b_i)^2 = \Sigma \epsilon_i^2$ nhỏ nhất. Phương pháp này gọi là bình phương cực tiểu
Ta tìm cực trị của hàm $\epsilon(t)$ có ba biến α, β, γ. Để cho gọn , ta kí hiệu $g(t_i) = g_i$, $h(t_i) = h_i$
Điểm dừng của hàm $\epsilon(t)$ là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \in(t)}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \in(t)}{\partial \beta} = 0 \\ \dfrac{\partial \in(t)}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\Sigma_{i=1}^m (\alpha + \beta g(t_i) + \gamma h(t_i) - b_i) = 0 \\ 2\Sigma_{i=1}^m (\alpha + \beta g(t_i) + \gamma h(t_i) - b_i)\, g_i = 0 \\ 2\Sigma_{i=1}^m (\alpha + \beta g(t_i) + \gamma h(t_i) - b_i)\, h_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\Sigma_{i=1}^m 1)\alpha + (\Sigma_{i=1}^m g_i)\beta + (\Sigma_{i=1}^m h_i)\gamma = (\Sigma_{i=1}^m b_i) \\ (\Sigma_{i=1}^m g_i)\alpha + (\Sigma_{i=1}^m g_i^2)\beta + (\Sigma_{i=1}^m g_i h_i)\gamma = (\Sigma_{i=1}^m g_i b_i) \\ (\Sigma_{i=1}^m h_i)\alpha + (\Sigma_{i=1}^m g_i h_i)\beta + (\Sigma_{i=1}^m h_i^2)\gamma = (\Sigma_{i=1}^m h_i b_i) \end{cases}$$

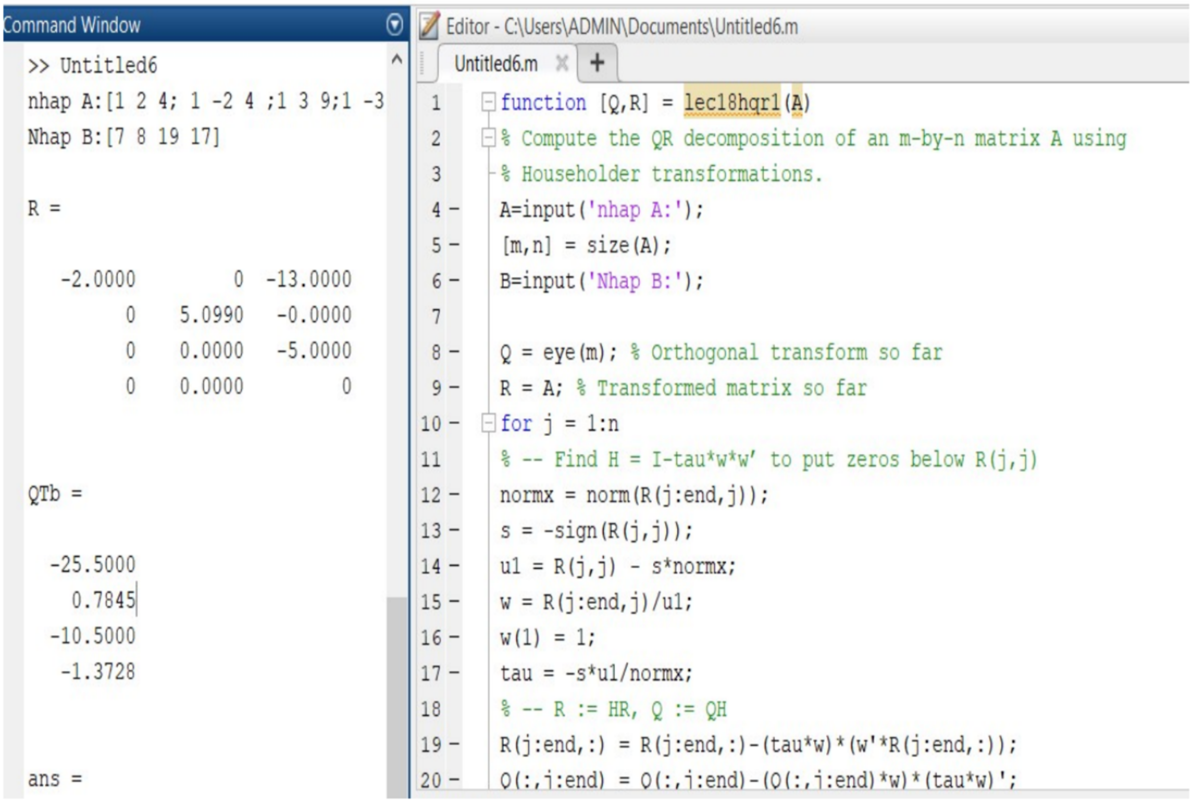
Xét các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & g_1 & h_1 \\ 1 & g_2 & h_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & g_m & h_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình trên được ghi ở dạng ma trận $A^T = A^T b$ Giải hệ phương trình trên ta được α, β, γ , suy ra $f(t)$. Nếu $g(t) = t$, $h(t) = 0$‘, thì ta có đa thức bậc nhất $f(t) = \alpha + \beta t$
$Nu g$(t)=t,h (t)=t^2, thì ta có đa thức bậc hai $f(t) = \alpha + \beta t$+γt^2
Trong trường hợp tổng quát, ta có hàm $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) + ... + \alpha_n g_n(t)$, ta làm tương tự.
Lời giải cho bài toán trên
Ta đặt $g(t) = t$, $h(t) = t^2$

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & g1 & h1 \\ 1 & g2 & h2 \\ 1 & g3 & h3 \\ 1 & g4 & h4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 19 \\ 17 \end{bmatrix}$

Giải hệ phương trình $Rx = Q^T b$ (với R và $Q^T b$ như kết quả của chương trình). Ta được nghiệm $X = \left(\frac{-9}{10}; \frac{2}{13}; \frac{21}{10}\right)^{\intercal}$
Hàm cần tìm là $f(t) = \dfrac{-9}{10} + \dfrac{2}{13}t + \dfrac{21}{10}t^2$


Command Window
>> Untitled6
nhap A:[1 2 4; 1 -2 4 ;1 3 9;1 -3
Nhap B:[7 8 19 17]
R =
-2.0000 0 -13.0000
0 5.0990 -0.0000
0 0.0000 -5.0000
0 0.0000 0
QTb =
-25.5000
0.7845
-10.5000
-1.3728
ans =
Editor - C:\Users\ADMIN\Documents\Untitled6.m
Untitled6.m
function [Q,R] = lec18hqr1(A)
% Compute the QR decomposition of an m-by-n matrix A using
% Householder transformations.
A=input('nhap A:');
[m,n] = size(A);
B=input('Nhap B:');
Q = eye(m); % Orthogonal transform so far
R = A; % Transformed matrix so far
for j = 1:n
% -- Find H = I-tau*w*w' to put zeros below R(j,j)
normx = norm(R(j:end,j));
s = -sign(R(j,j));
u1 = R(j,j) - s*normx;
w = R(j:end,j)/u1;
w(1) = 1;
tau = -s*u1/normx;
% -- R := HR, Q := QH
R(j:end,:) = R(j:end,:)-(tau*w)*(w'*R(j:end,:));
Q(:,j:end) = Q(:,j:end)-(Q(:,j:end)*w)*(tau*w)';

Ví dụ 1