A mi madre y mi padre

Agradecimientos:

Como siempre son muchas a las personas que les debo un agradecimiento. Primero y más importante a mi madre por apoyo incondicional y constante en absolutamente todos los sentidos. Más o menos en orden cronológico. Natalia me señaló los primeros pasos y a ella le debo esta aventura. Ahora comprendo que nada podrá borrar los malos momentos que nos tocó vivir el primer año. El resto del tiempo vivir aquí ha sido un verdadro placer. Tengo una indudable deuda de gratitud con el grupo de espleología, hace ahora algo más de 4 años las reuniones de los martes eran casi lo único que me hacia ir de una semana a la siguiente, sin ellos no estaría aún en este pais. A Jeniffer le debo compañia y apoyo absolutamente imprescindibles, sin ella tampoco esto hubiese sido posible. Toda la gente que he conocido después que ha sido mucha y maravillosa han sido tambien un apoyo. Son demasiados para nombrarlos uno a uno.

En la parte técnica en estos años he compartido bastante con Jorge B., Maria Pilar, Jaime y muy especialmente Jose Antonio aunque en ningún caso ha sido suficiente. Espero que ahora que las presiones bajen todos podamos compartir aún mucho más nuestros trabajos.

Individualmente podemos hacer muy buenas cosas en este pais, pero unidos podemos hacer cosas extraordinarias.

Tambien obviamente debo darle las gracias a Jorge S. por constestar a numerosas preguntas y compartir “el peso”de la investigación.

Por último, pero sólo porque es tan caballero que no permitiria estar antes, debo agradecer a mi tutor su siempre buena disposición y ayuda tanto administrativa como docente. No tener un tutor presionando todo el dia es algo que agradezco enormemente. Creo que la libertad es la única manera de producir y si no, es la única manera en la que quiero producir. Álvaro es un guia excepcional, indudablemente un modelo a seguir, pero todas las alavanzas son pocas frente a su humildad y calidad humana.

Gracias Gustavo.

RESUMEN

En este trabajo discutimos diversos problemas relacionados con la structura y geometría del superespacio, haciendo un análisis lo más minucioso posible de las ideas que se han propuesto hasta ahora. Proponemos a su vez nuevas formas de tratar el superespacio, especialmente las teorias de super Maxwell. Hacemos tambien una breve introducción al superespacio armónico y a la manera en la que las superpartículas se acoplan a los campos geométricos de super Maxwell. en la parte final del trabajo buscamos la mecánica cuántica de las superpartículas masivas en diversas dimensiones. Estudiamos tanto partículas masivas normales como partículas que vivan en un espacio con cargas centrales que pueden proceder de teorías extensas en dimensiones más altas. Dilucidamos una nueva manera de realuizar la mecánca cuántica con ligaduras de segunda clase basado en un potente método de operadores de proyección que nos permite realizar álgebras no commmutativas de operadores de posición.

Palabras claves: **superpartícula, super Maxwell, cuantización covariante, superespacio**

Contenidos

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Celebramos este año cien años de que Albert Einstien descubriese que el grupo realmente importante en la física no es el grupo de Galilei sino el de Poincarè. Hace ahora más de treinta años que Bruno Zumino y Julius Wess propusieron que quizá el grupo relevante no sea el de Poincarè sino una extensión nada trivial denominada super Poincarè.

Desde entonces las teorías basadas en Lagrangianos invariantes bajo esta nueva simetría han desbordado las publicaciones y atrapado la imaginación de miles de físicos alrededor de todo el mundo. Muy rápidamente se descubrieron muchas virtudes de estas teorías *supersimétricas*. Una vieja observación, que como muchas otras buenas ideas en teoría de campos probablemente se remonte a Pauli, es que las teorías de campos en las que el número de bosones y el número de fermiones coinciden y tienen la misma masa poseen propiedades perturbativas sobresalientes.

Los primeros estudios de las propiedades perturbativas de las teorías supersimétricas basadas en Lagrangianos similares a los de Wess y Zumino revelaron que en efecto existen lo que se llamaron teoremas de *no renormalizabilidad* que establecen, por ejemplo, que el superpotencial sólo hay que añadirle contribuciones finitas en cada orden de la teoría de perturbaciones (además de la renormalización de la función de ondas). Incluso una teoría, super Yang-Mills con $N = 4$ resultó ser finita, una de las joyas de la corona *según Witten*. Estos resultados abrieron la puerta a la esperanza de que teorías de gravedad basadas en esta nueva simetría fuesen también finitas. Que eso *no* fuese así, supuso un duro golpe para la gente trabajando en supergravedad que esperaba que la supergravedad con $N = 8$ fuese la verdadera fuente de la gravedad.

Pero, no sólo el buen comportamiento perturbativo hace de estas nuevas teorías apetecibles. Desde un punto de vista estético a muchos "físicos"se les antojaba arbitraria la división entre bosones y fermiones. Disponer de una teoría que ponga a todas las partículas elementales en pie de igualdad resultaba llamativo. Por otra parte, las teorías supersimétricas parecen resolver un problema que traía a los físicos de campos de cabeza, el llamado problema de las jerarquías (creo que por Steven Weinberg). El problema es el siguiente. En el modelo estandar la única partícula que tiene masa es el Higgs. Las demás partículas adquieren masa via la ruptura espontánea de la simetría y por tanto sus masas son proporcinales a la del Higgs. Ahora bien en el modelo estandar no hay ninguna razón para que la masa del Higgs tome un valor u otro, de forma que si existen otras partículas con masas muy superiores (por ejemplo de una escala de unificación a 10^{16}GeV entonces el Higgs adquirirá una masa semejante en la correcciones radiativas. La supersimetría ofrece una salida a este problema, porque también las partículas escalares forman parte del multiplete de calibre y, por tanto, están protegidas por la invariancia de calibre. Otro aspecto llamativo de la supersimetría es que evade el teorema de Coleman-Mandula. La mecánica cuántica nos enseña que debemos clasificar los estados elementales por las representaciones irreducibles del grupo de simetría de la teoría. Si el grupo de simetría es Poincarè, entonces los sistemas elementales están clasificados por la masa y el espín. Sin embargo, la tremenda proliferación de partículas elementales en los años sesenta junto con el esquema de clasificación basado en $SU(3)$ sabor, hizo pensar que el grupo de invariancia de la teoría pudiese ser alguna extensión no trivial del grupo de Poincarè. El sueño era el de poder escribir una tabla periódica de partículas elementales donde sus números cuánticos fueran, masa, espín, carga,... El teorema de Coleman y Mandula pone fin a este sueño mostrando que todo grupo de simetría que contenga a Poincarè debe ser (bajo ciertas hipótesis físicas) producto directo de Poincarè por otro grupo. Las transformaciones de supersimetría aunque son un grupo (o al menos eso pretenden) no son un grupo de Lie y por este motivo evaden el teorema. Desgraciadamente, las etiquetas de los multipletes de supersimetría son exactamente los mismos, el superespín y la masa.

Conforme las razones teóricas en favor de la supersimetría crecían, el peso del experimento ensombrecía las ingeniosas ideas que estos pioneros proponían. Que yo tenga noticia sólo existió por un tiempo un atisbo experimental de supersimetría al comprobar que las constantes de acoplamiento del modelo estandar corren hacia un mismo punto mucho mejor en los modelos supersimétricos que en los no supersimétricos. En estos 30 años muchas otras virtudes han sido encontradas para la supersimetría y cuando alguna cosa medianamente negativa se le ha encontrado (problemas con la constante cosmológica) siempre se ha sabido encontrar una buena explicación. La última nueva fecha que determinará si hay o no supersimetría en la naturaleza parece ser 2008, supongo que alrededor del 2010 estaremos poniendo nueva fecha para el 2015.

No hay supersimetría, ese es el crudo hecho. Junto con los tremendos esfuerzos por parte de los físicos experimentales en hacer detectores más y más precisos, están los no menos impresionantes esfuerzos de los teóricos para explicar porqué no hay ni un signo de supersimetría en los aceleradores. Lo que en 1974 era una brillante idea de unos físicos innovadores luchando contra la corriente paso a ser en los años ochenta una creencia, una suerte baluarte por el que merecía la pena soñar. Hoy, cien años después de que Einstein revolucionara los conceptos del espacio y tiempo, la supersimetría se ha convertido en un dogma, en el camino que todos seguimos, en el libro de texto de la física teórica, nuestro nuevo éter, es la fuerza que impulsaba a los cuerpos a seguir subiendo según Aristóteles, el calórico. Parece que la historia se repite las veces que sean necesarias. Estas lineas introductorias serán las únicas lineas que escribiré de física en esta tesis.

En total contraposición la supersimetría ha mostrado tener una riqueza matemática exuberante. Sólo mencionar los aspectos en los que la supersimetría de un modo u otro ha tocado aspectos de la matemática *tradicional*, llevaría páginas y páginas. ¡Y eso sólo de lo que yo tengo noticia! La idea de generalizar el grupo de Poincarè a un super Grupo resulta tener análogo en todos los grupos de Lie. La teoría de las superálgebras de Lie es lujosa, útil y profunda. Las teorías de campos supersimétricas proveen con una cantidad enorme de nuevas teorías topológicas que han estado en la frontera de los desarrollos matemáticos más brillantes de nuestra era. La supersimetría ha abierto una nueva rama de las matemática moderna proveyendo a las matemáticas abstractas de nuevos objetos de estudio, nuevas herramientas, nuevas ideas algunas auténticamente revolucionarias. Lo que por un lado puede considerarse un desierto de ideas físicas, puede verse por otro como el florecer de una nueva ciencia a caballo entre la matemática y la física.

Muy poco después de que Julius Wess y Bruno Zumino propusieran su teoría supersimétrica de campos el honorable físico paquistaní Abdus Salam junto con Strathdee idearon una forma de escribir teorías automáticamente supersimétricas. El principio era expandir las coordenadas del espacio y tiempo x^μ con unas nuevas coordenadas θ^a *Grassmannainas*, de manera que los campos físicos son ahora supercampos $F(x^\mu, \theta^a)$. La naturaleza Grassmaniana de estas nuevas coordenadas hace que un supercampo pueda expandirse en una serie de Taylor *finita* de campos en componentes. El leivmotiv es que cada supercampo contiene dentro un multiplete de supersimetría. Pero, ¿qué significan estas nuevas coordenadas? Ahora no sólo estamos diciendo, como Theodor Kaluza, que el espacio-tiempo tiene más de cuatro dimensiones. Ahora estamos diciendo que estas dimensiones además vienen parametrizadas por números cuyo cuadrado es cero. ¿Dónde están? ¿Tiene este *superespacio* alguna entidad física? ¿Son las nuevas coordenadas θ^a que parametrizan la parte *super* del espacio, una realidad física o simplemente un modo adecuado de contar signos? En esta tesis vamos a trabajar bajo la hipótesis de que es el superespacio lo que verdaderamente tiene sentido. En ese espacio es en el que viven los objetos geométricos y físicos y en esa arena es que debemos escribir nuestras ecuaciones.

Aunque la idea del superespacio de Salam y Strathdee pronto encontró una rápida aceptación en la comunidad y se las arreglo para escribir teorías supersimétricas de forma muy elegante, pronto encontró inconvenientes. Primero, no estaba claro que supercampo elegir para cada teoría física. Además un supercampo determinado contenía una cantidad enorme de campos en componentes, muchas más de las estrictamente necesarias por la supersimetría en sí. Los conceptos geométricos que están tan profundamente ligados a la relatividad y a las teorías de calibre estaban mucho peor representados en el superespacio.

Un simpático ejemplo es el de la supergravedad de Arnowit y Nath. Muy poco después de que Wess y Zumino redescubriesen la supersimetría y de que Salam y Strahdee reinventaran el superespacio Arnowitt y Nath [3],[5] trataron de *mimetizar* los pasos de la teoría de la gravitación usual a una versión *super*. En esta versión hay un dos tensor métrico g_{MN} cuyos índices $M, N = \mu, a$ recorren todo el superespacio. Es posible generalizar todas las ideas ordinarias de la geometría Riemaniana. Es posible definir los símbolos de Cristofell, el tensor de Riemann y, cómo no, escribir las ecuaciones de super

Einstein en el vacío como $R_{MN} = 0$. Aunque esto pueda parecer apetecible esta lleno de problemas. Hay una enorme cantidad de campos dentro de este tensor métrico. *Seguramente* demasiados. Pero, quizá sea más llamativo el hecho de que el espacio plano *no* es solución de las ecuaciones de Einstein [88][1]. La razón de este hecho parecía estar contenida en este último artículo de la escuela soviética y está relacionada con el grupo de holonomía del espacio plano. En el espacio ordinario un vector T_μ transforma bajo el grupo de Lorentz, como debe ser. Un vector en el tangente transforma bajo el mismo grupo de Lorentz. En otras palabras podemos elegir las tétradas como la identidad. En el superespacio, en cambio, un vector T_M en el espacio no transforma bajo Lorentz sino bajo un grupo más grande. La hipótesis contenida en el trabajo de Akulov et al. es que en el tangente *si* debe transformar bajo Lorentz. Eso hace que en el espacio plano haya torsión y que haya que modificar las ecuaciones de Einstein. Basándose en esta idea la supergravedad fue finalmente construida por varios autores [26][30] y resultó ser simplemente una teoría nada trivial de una partícula de helicidad 2 interactuando con una partícula de helicidad 3/2, el gravitino. Estas teoría sufrían de dos "enfermedades". La primera, la más dolorosa es que no eran invariantes bajo supersimetría, sólo lo eran si se satisfacían las ecuaciones de movimiento. El siguiente paso fue el de encontrar una teoría que *verdaderamente* fuese invariante por supersimetría, es decir invariante *off-shell*. Para conseguir eso fue necesario introducir una serie de campos auxiliares sin ningún contenido físico. La solución a este problema se presentó por dos grupos en dos trabajos contiguos [80][29], corría 1978. Esta teoría no fue construida en el superespacio, los métodos de Arnowitt y Nath no fueron usados, la idea fue sencillamente encontrar a fuerza bruta una acción invariante bajo las transformaciones pertinentes.

Se alejaron de la geometría. Por supuesto que esta teoría se puede construir en el superespacio (la segunda enfermedad) como hicieran brillantemente una vez más el tándem Wess-Zumino [86]. Aquí parte de la geometría perdida se recuperaba. Las ideas de Akulov y compañía sobre el grupo de holonomía resultaron cruciales. En ese artículo se planteaban muchas de las ideas que iban a ser decisivas en los años siguientes. En particular una de las sugerencias que emanaban de ese artículo fue que para poder tener sólo la teoría de supergravedad es necesario imponer ciertas restricciones sobre la torsión. Desde un punto de vista práctico esto es necesario porque si no, como hemos mencionado, la teoría posee demasiados grados de libertad, incluso *off-shell*. El lagrangiano en el superespacio que reproducía las ecuaciones de la supergravedad resultó ser muy simple: el área.

Una de las preguntas que más ha guiado mi trabajo en estos años ha sido ¿porqué es necesario imponer estas condiciones sobre la torsión? Desde entonces varias personas han dado diferentes respuestas a estas preguntas. Primero los propios Arnowitt y Nath [4] querían interpretar la supergravedad como un determinado límite de su propia teoría de la gravedad supersimétrica. Llamaron a este límite contracción de geometrías. Sus ideas son a veces difícil de seguir con claridad y, además, no consiguieron reproducir todas las ecuaciones necesarias. En una linea similar esta el llamativo trabajo de G. Woo [88], que ya hemos citado. Muchas personas trataron de dar sentido a estas restricciones [68] (ver el trabajo de Lott y sus referencias [53]).

De todas formas aunque uno decidiese no preocuparse por esta clase de problemas *ontológicos*, problemas más prácticos surgieron antes de llegar a los años 80. Lo que hemos descrito funcionó muy bien para la supergravedad en $D = 4$ y $N = 1$. Salir de ese ejemplo iba a costar Dios y ayuda. En general se vio que escribir teorías en el superespacio era factible, especialmente siguiendo algunas sencillas normas semi-geométricas. Lo verdaderamente difícil resultó ser encontrar la estructura *off-shell* de las teorías involucradas. Para $N = 2$ se encontró la estructura off-shell de algunos multipletes pero hubo cierta resistencia en otros, para $N = 3$ o $N = 4$ las cosas eran mucho peor. Las noticias definitivamente malas llegaron con los años 80. simplemente no era posible encontrar la estructura off-shell de muchas teorías supersimétricas [76][67][9] (este último artículo puede leerse pero debe hacerse con cuidado). Y los argumentos no son realmente complicados, sencillamente es un problema de que nos es posible hacer cuadrar los grados de libertad. Una sencilla prueba para un caso particular con $N = 2$ puedes verla en [50] o en la página 42 del buen libro [35].

¿Que hacer entonces? Si no podemos escribir super Maxwell con $N = 4$ off-shell, ¿tiene sentido la teoría?. ¿Porqué sucede esto?. Una posible respuesta, y muy brillante en realidad, a estas dudas vino de la mano de la gente trabajando en Dubna. Ellos entendieron que el superespacio propuesto por Salam y Strathdee es sólo una entre varias posibilidades. En 1984 consiguieron evadir estos teoremas no-go en el *superespacio armónico*. La novedad que hace la diferencia para estos supercampos es que además de depender de las variables del superespacio de Salam y Strathdee (x^μ, θ^{ai}) dependen de unas nuevas variables u^i que parametrizan la esfera S^2 (en el caso de $N = 2$). Estos supercampos poseen un número infinito de campos en componentes y eso ayuda a evadir los teoremas no-go. Las ideas de estos hombres fueron fundamentándose hasta conseguir la estructura off-shell de $N = 3$ super Maxwell (que on-shell es idéntico a $N = 4$). Sin embargo, el caso de $N = 4$ se resistió. Aunque las ideas del superespacio armónico son bellas y profundas dejan aún muchas preguntas abiertas y muchos problemas sin resolver. ¿Porqué funciona en algunos casos y en otros no?. entre los años 80 y principios de los 90 muchos grupos intentaron encontrar la estructura off-shell de esta teorías sin conseguirlo.

Una pregunta ha estado presente en todo momento al realizar esta tesis, ¿por qué para unas teorías las restricciones sobre la torsión dejan la teoría off-shell y para otras implican las ecuaciones de movimiento?.

Otro problema relacionado es el de el principio de movimiento de partículas, cuerdas, membranas, su acoplamiento a super Maxwell y la cuantización covariante de estos sistemas. En 1976 poco después de la creación de la superimetría Casalbuoni [21] se dedicó a estudiar la dinámica de las partículas moviéndose en el superespacio de Salam y Strathdee. Algún tiempo después Siegel descubrió que la acción de la superpartícula de Casalbuoni sin masa posee una simetría de calibre oculta [74]. Esta nueva simetría de calibre iba a ser una de las piedras angulares de muchos desarrollos posteriores. Aunque la razón de esta simetría no era clara parecía algo necesario. La acción de la superpartícula, como estudiaremos es relativamente fácil de escribir, pero el análogo para la cuerda es exageradamente difícil. Si escribimos la acción para la cuerda como una generalización directa de la acción que tenemos de casalbuoni para la superpartícula resulta un sistema de ecuaciones muy difícil de resolver resuta que si añadimos un término más a la acción entonces esta tiene una generalización de la simetría de Siegel y las ecuaciones de movimiento que se deducen son las correctas Green y Schwarz encontraron ese término *after trying just about every cocieble wrong idea*. Eso levanta varias preguntas. ¿Hay un principio para la supercuerda semejante al de Nambu-Goto? ¿Cómo debe ser un principio variacional en un espacio con torsión? Esas también han sido preguntas que siempre he tenido presente.

Pero la simetría de Siegel posee aún más ventajas. Si escribimos la acción de una superpartícula acoplada a un campo electromagnético e imponemos que la acción completa tenga esta simetría entonces obtenemos las ecuaciones que dejan la teoría del campo electromagnético off-shell. Lo mismo sucede con la supergravedad. Pero peor aún en $D = 10$ si exigimos que la acción conjunta de la partícula acoplada a super Maxwell posea simetría entonces super Maxwell debe estar on-shell. Uno de los artículos más importantes en el desarrollo de la teoría M es el trabajo [10][11] en el que se escribe por primera vez la acción de la supermembrana en 11 dimensiones precisamente imponiendo esta simetría kappa implicando que los campos que se pueden poner en la acción deben satisfacer la ecuaciones de la supergravedad en 11 dimensiones que

Cremer, Julia y Scherk habían encontrado con tanto esfuerzo 10 años antes [24]. Nuevamente ¿porque la simetría kappa implica que la teoría de la gravedad debe estar on-shell?

Por otra parte esta simetría produjo problemas. La estructura de los vínculos que generan la simetría es endiabladamente complicada resultando en que los modos usuales para la cuantización de sistemas con vínculos son de poca utilidad. Durante estos año muchas soluciones se han propuesto para realizar la cuantización covariante de superpartículas y supercuerdas, pero ninguna realmente llego a cuajar. ¿Hay alguna razón geométrica por la que estas dificultades deban estar presentes?

Mucho más recientemente, justo antes de terminar el milenio Nathan Berkovits ha salido con una nueva y arrogante idea que parece aplicable tanto a partículas y cuerdas como a membranas. La idea consiste en decir que en $D = 10$ el superespacio de Salam y Strathdee debe aumentarse con unas nuevas variables que conmutan fermiónicas λ^a que resultan ser espínores puros. La idea tiene algún parecido con el método del espacio armónico sólo que Berkovits no dispone de ninguna justificación geométrica. Diversos grupos han tratado de explicar la aparición de los espínores puros y la carga BRST que propone Berkovits. Pero aún no se logra un acuerdo. Probablemente aún hay mucho que decir al respecto. En un artículo publicado por Warren Siegel [75] hace un par de días se señala que los métodos de Berkovits no son realmente covariantes y deja abiertas un montón de dudas acerca del enfoque general. Eso abre las puertas a nuevas ideas.

En este trabajo comenzamos con un capítulo técnico introductorio. Muy pocas cosas nuevas hay en el. La elección de las matrices Γ parece ser original y muy deseable. He tratado de hacer las pruebas de cada teorema de manera más o menos original y siempre siendo coherente con la notación. Algunas de las propiedades de estas matrices están deducidas aquí por primera vez. Las representaciones de las superálgebras siguen textos clásicos pero la fórmula que da el número representaciones de determinado espín dentro de un multiplete como diferencia de dos números combinatorios parece ser nueva. En el capítulos sobre el superespacio el tratamiento de super Maxwell sigue las lineas originales de Julius Wess [85], [40] pero he tratado de escribirlo a un modo que se ajuste a la idea general en la tesis. El caso de $D = 6$ ha sido tratado previamente [52], [57] pero la linea aquí es bastante diferente. La existencia o no de super Maxwell en dimensiones $D \neq 3, 4, 6, 10$ parece nueva completamente aunque no hemos estudiado la estructura de la teoría. La conjetura de que super Maxwell en $D = 8$ reduce a $N = 3$ en $D = 4$ es nueva. Super Maxwell en el superespacio armónico ha sido tratado antes porsupuesto pero nuestra presentación es nuevamente original y creemos que el tratamiento usual deja varias preguntas geométricas sin responder. El método para escribir super MAxwell en función de un prepotencial es original aunque no dio los frutos que hubiese querido. El hecho de que en el super espacio de $N = 1$ cabe toa una representación de $N = 2$ es trivial pero no parece haberse usado antes. El usar la tabla II.1 para hallar el contendido en supermultipletes de un supercampo parece nuevo. El capítulo sobre el acoplamiento de super Maxwell a la super partícula no es nuevo, sinembargo contiene algunos puntos de vista *diferentes* y algunas ideas geométricas tal vez estén mejor representadas en ese capítulo que en otros sitios [87]. La proposición de que las partículas en un espacio con carga central tienen un origen geométrico también es nuevo. El capítulo sobre cuantización es completamente nuevo. Si bien la idea de usar sólo la mitad de las ligaduras proviene del propio Casalbuoni, sentimos que sólo aquí al explicar que unas son la fijación de calibre de las otras hay una verdadera explicación. El método de los proyectores no tiene parecido en la literatura que tengamos noticia. La cuantización de la partícula en $D = 9$ había sido realizada antes pero nuestros resultados difieren de los demás.

Por último la conjetura relacionada con los espínores puros de confirmarse sería un primer paso hacia la explicación de la aparición de espínores puros en $D = 10$. Aunque estos han sido usados por Berkovits, nunca antes para una partícula masiva y no de esta forma.

CAPÍTULO II

SUPERSIMETRÍA

II.1. Álgebras de Clifford y espinores

Si vamos a hablar de supersimetría vamos a hablar de fermiones y bosones. Desde un punto de vista matemático los bosones son objetos que transforman bajo una representación del grupo de Lorentz. Los fermiones son, por su parte, objetos que transforman bajo una representación proyectiva del grupo de Lorentz. La representación irreducible más pequeña del recubridor del grupo de Lorentz se llama la representación espinorial y sus objetos son espinores. Resulta que hay una forma muy elegante de describir esta representación espinorial a partir de un álgebra de Clifford. En este capítulo vamos a estudiar los espinores en cada dimensión con sus propiedades y virtudes.

Las ecuaciones que definen el álgebra de Clifford son ([85])

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = -\eta_{\mu\nu} \tag{II.1}$$

Con $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{-1, +1, ..., +1\}$. Nuestro propósito es encontrar representaciones irreducibles de estas álgebras. Para ello notemos que es suficiente resolver el problema con D par porque si D es impar se soluciona para $D-1$ y añade la matriz $\Gamma_0\Gamma_1\cdots\Gamma_{D-2}$.

☞ **Teorema II.1** *Sea $D=2d$ par entonces la matriz*

$$W = i^{d+1}\Gamma_0\Gamma_1\cdots\Gamma_{D-1} \tag{II.2}$$

satisface las relaciones

$$\{\Gamma_\mu, W\} = 0 \tag{II.3}$$

$$\{W, W\} = 2I \tag{II.4}$$

Demostración:

✎ W es producto de un número *par* de matrices Γ_μ anticonmuta con todas menos con una, luego *anticonmuta* con W.

Por otra parte

$$W^2 = \varepsilon^2\Gamma_0\Gamma_1\cdots\Gamma_{D-1}\Gamma_0\Gamma_1\cdots\Gamma_{D-1} \tag{II.5}$$

La matriz Γ_0 tiene que pagar un número *impar* de matrices y paga un signo menos, la matriz Γ_1 atraviesa un número par pero su cuadrado es $-I$, Γ_2 atraviesa un número impar, contribuye con -1. En total:

La matriz Γ_0 contribuye con 1 porque su cuadrado es 1.
Todas las demás contribuyen con $(-1)^{D-1} = -1$ porque su cuadrado es -1.
Además las pares atraviesan un número impar de matrices contribuyen con $(-1)^{D/2}$
De manera que $W^2 = -\varepsilon^2(-1)^d$ lo que implica que $\varepsilon = i^{d+1}$ 👍
La matriz W se llama de Weyl. Trabajaremos en adelante en dimensión par.

Dentro del álgebra de Clifford existe un grupo finito de 2×2^D elementos dado por

$$G_C = \{\pm I, \pm\Gamma_\mu, \pm\Gamma_{\mu\nu}, ..., \pm\Gamma_{\mu_1\mu_2...\mu_D}\} \tag{II.6}$$

Busquemos represetaciones irreducibles (*irreps*) de este grupo y veamos que extienden al álgebra. La teoría de representaciones de grupos finitos ahora es de ayuda. Recordemos que el

☞ **Teorema II.2 (Burnside)** *El número de representaciones irreps de un grupo finito es igual al número de clases de conjugación. Es más si d_i es la dimensión de la una representación*

$$|G| = \sum_{i\in\Omega} (d_i)^2 \tag{II.7}$$

donde $|G|$ es el orden del grupo y Ω un conjunto que etiqueta las clases de conjugación.

Haciendo uso de Burnside probamos primero que

☞ **Lema II.3** *Hay $2^D + 1$ irreps disequivalentes de G_C.*

Demostración:

✎ Las clases de conjugación de grupo de Clifford son

$$[+I], [-I], [\Gamma_\mu], ..., [\Gamma_{\mu_0...\mu_{D-1}}] \tag{II.8}$$

👍

Por otra parte el número de representaciones disequivalentes de dimensión 1 es fácilmente calculable. Todos los $\Gamma_\mu = \pm 1$. El número de formas en las que esto puede hacerse es 2^D que es exactamente el número de representaciones disequivalentes de dimensión 1. La única manera de satisfacer la ecuación de Burnside es

$$2^{D+1} = (2^d)^2 + 2^D(1^2) \tag{II.9}$$

Luego tenemos el siguiente teorema

☞ **Teorema II.4** *El grupo G_C posee 2^D+1 irreps disequivalentes. De ellas 2^D son de dimensión uno y la otra es de dimensión 2^d con $d = D/2$.*

Recordemos que toda representación de un grupo finito es equivalente a una unitaria. Asumamos entonces que las Γ_μ son unitarias. De modo que

$$(\Gamma_0)^\dagger = \Gamma_0 \tag{II.10}$$

$$(\Gamma_i)^\dagger = -\Gamma_i \tag{II.11}$$

La matriz W es real y podemos elegirla como

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{II.12}$$

donde I es una matriz unidad de dimensiones $2^{d-1} \times 2^{d-1}$. Llamaremos una representación así de Weyl. Vamos a construir las representaciones buscando matrices

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & S^\mu \\ \bar{S}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{II.13}$$

Donde $S^0 = \bar{S}^0 = I$ y $\bar{S}^i = -S^i$. Vamos a construir estas matrices inductivamente.

☞ **Proposición II.5** *Sean $\tilde{\Gamma}^\mu$ las matrices de Clifford en dimensión $D-2$ entonces podemos construir las matrices de Clifford en dimensión D según*

$$S^i = \tilde{\Gamma}^i \tilde{\Gamma}^0 \qquad i = 1, 2, ..., D-3 \tag{II.14}$$

$$S^{D-2} = i\tilde{W}\tilde{\Gamma}^0, \quad S^{D-1} = \tilde{\Gamma}^0 \tag{II.15}$$

Demostración:

✎ La ecuación

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \tag{II.16}$$

Implica que las S^i verifican el álgebra de Clifford

$$S^\mu \bar{S}^\nu + S^\nu \bar{S}^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \iff \left\{S^i, S^j\right\} = 2\delta^{ij} \tag{II.17}$$

Ahora si $i = 1, ..., D-3$ entonces

$$\left\{S^i, S^j\right\} = \left\{\tilde{\Gamma}^i\tilde{\Gamma}^0, \tilde{\Gamma}^j\tilde{\Gamma}^0\right\} = \tilde{\Gamma}^i\tilde{\Gamma}^0\tilde{\Gamma}^j\tilde{\Gamma}^0 + \tilde{\Gamma}^j\tilde{\Gamma}^0\tilde{\Gamma}^i\tilde{\Gamma}^0 = -\left\{\tilde{\Gamma}^i, \tilde{\Gamma}^j\right\} = 2\delta^{ij} \tag{II.18}$$

Para el índice $i = D-2$ todo funciona igual. Su cuadrado es $(S^{D-2})^2 = -\tilde{W}\tilde{\Gamma}^0\tilde{W}\tilde{\Gamma}^0 = I$. Y todas anticonmutan con S^5 y también su cuadrado es I.

Notemos las importante propiedad $(S^\mu)^\dagger = S^\mu$.

El primer paso en la inducción son las matrices de Dirac para las que reservamos la notación γ^μ

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{II.19}$$

Notemos que las matrices $(\Gamma^\mu)^*$ también satisfacen el álgebra de Clifford. Como sólo hay una representación irreducible *ambas* deben ser equivalentes

$$\tilde{B}\Gamma^\mu\tilde{B}^{-1} = (\Gamma^\mu)^* \tag{II.20}$$

Lo mismo sucede con las matrices $-\Gamma^\mu$. La matriz unitaria que realiza el cambio es W, es decir $W\Gamma^\mu W = -\Gamma^\mu$. Lo mismo pasa con las matrices $-\Gamma^\mu$, $(\Gamma^\mu)^T$ y $-(\Gamma^\mu)^T$. Existen, por tanto matrices unitarias B, C y $\tilde{C}$ tal que

$$B\Gamma^\mu B^{-1} = -(\Gamma^\mu)^* \tag{II.21}$$

$$\tilde{C}\Gamma^\mu\tilde{C}^{-1} = (\Gamma^\mu)^T \qquad C\Gamma^\mu C^{-1} = -(\Gamma^\mu)^T \tag{II.22}$$

Sólo hay una matriz independiente. Obsérvese que

$$B = \tilde{B}W \qquad C = \tilde{C}W \qquad \tilde{C} = \tilde{B}\Gamma^0 \tag{II.23}$$

En nuestra representación es fácil encontrar $\tilde{B}$. Fijense que las matrices $\Gamma^2, \Gamma^4, ..., \Gamma^{D-2}$ son imaginarias puras y las demás reales B depende de la paridad de $d = D/2$. Estudiemos ambos casos por separado.

• ($D = 2 \mod 4$) Si d es impar hay un número *par* de imaginarias $d - 1 = 2d_1$

$$\tilde{B} = \Gamma^2\Gamma^4 \cdots \Gamma^{D-2} \tag{II.24}$$

Notemos que si Γ^μ es real anticonmuta con todas y conmuta con $\tilde{B}$ y si es imaginaria anticonmuta con todas menos una y anticonmuta con $\tilde{B}$.
Notemos que el cuadrado de $\tilde{B}$ es

$$\tilde{B}^2 = \Gamma^2\Gamma^4 \cdots \Gamma^{D-2}\Gamma^2\Gamma^4 \cdots \Gamma^{D-2} \tag{II.25}$$

La matriz Γ^2 debe pasar $d-2$ matrices, la siguiente $d-3$ en total $\sum_{i=1}^{d}(d-i) = (d-1)d/2$ además hay un $(-1)^{d-1} = 1$. En total $\tilde{B}^2 = (-1)^{d_1}I$. Es decir:

$$\tilde{B}^2 = I \quad \text{si } D = 2 \mod 8 \tag{II.26}$$

$$\tilde{B}^2 = -I \quad \text{si } D = 6 \mod 8 \tag{II.27}$$

En este caso la matriz $\tilde{B}$ es real y *diagonal* en cajas

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \tag{II.28}$$

Además

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \tag{II.29}$$

Si $D = 2 \mod 8$ la matriz J es de cuadrado $J^2 = I$.

$$B^2 = \tilde{B}^2 = I \qquad C^T = -C \qquad \tilde{C}^T = \tilde{C} \tag{II.30}$$

Si $D = 6 \mod 8$ la matriz J es de cuadrado $J^2 = -I$

$$B^2 = \tilde{B}^2 = -I \qquad C^T = C \qquad \tilde{C}^T = -\tilde{C} \tag{II.31}$$

• ($D = 0 \mod 4$) Si d es par hay un número *impar* de reales $d+1$

$$\tilde{B} = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1} \tag{II.32}$$

De manera que una real anticonmuta con todas menos una y por tanto *conmuta* con $\tilde{B}$. Y, por supuesto, una compleja anticonmuta con todas y por tanto con $\tilde{B}$.
También aquí calculamos el cuadrado

$$\tilde{B}^2 = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1} \tag{II.33}$$

La matriz Γ^0 debe atravesar un conjunto par de matrices. Exactamente $d/2$ matrices pasan un número impar de matrices, el cuadrado de todas es -1 menos la identidad. Sea $d = 2d_1$, entonces $\tilde{B}^2 = (-1)^{d_1} I$ otra vez. De modo que

$$\tilde{B}^2 = I \text{ si } D = 0 \mod 8 \tag{II.34}$$
$$\tilde{B}^2 = -I \text{ si } D = 4 \mod 8 \tag{II.35}$$

En esta ocasión $\tilde{B}$ también es real pero es *antidiagonal* por cajas

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \tag{II.36}$$
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \tag{II.37}$$

Si $D = 0$ módulo 8 $J^2 = I$. En ese caso

$$-B^2 = \tilde{B}^2 = I \qquad J^T = J \qquad C^T = C \qquad \tilde{C}^T = C \tag{II.38}$$

En dimensión impar la respresentación se construye añadiendo la matriz $\pm iW$. Las matrices B, $\tilde{B}$ son, en principio las mismas que en la dimensión par anterior. Pero, por consistencia, deben verificar

$$B(iW)B^{-1} = -(iW)^* \tag{II.39}$$

$$\tilde{B}(iW)\tilde{B}^{-1} = (iW)^* \tag{II.40}$$

En cada dimensión sólo una de las ecuaciones se verifica. Esto tiene una sencilla explicación en teoría de grupos. En dimensión par la representación inducida por la representación irreducible del álgebra de Clifford es reducible y por tanto el lemma de Schur no se aplica y puedo tener dos matrices unitarias distintas U_1 y U_2 que hagan que $U_i G U_i^{-1} = G^*$ de modo que $U_1 U_2^{-1}$ commuta con todos los elementos del grupo y no es proporcional a la identidad. En el caso de la dimensión impar la representación del grupo de rotaciones inducida por la representación irreducible del álgebra de Clifford es irreducible.

Veamos cuando aplica cada fórmula. La fórmula $\tilde{B}(iW)\tilde{B}^{-1} = (iW)^*$ es equivalente a decir que $\left\{\tilde{B}, W\right\} = 0$ y eso sucede cuando B es producto de un número *impar* de matrices gamma. Como hemos visto eso pasa si $D = 0 \mod 4$. En las otras dimesiones la matriz que existe es B. Una condición de realidad se puede imponer sobre un espinor de dos formas distintas

$$\Psi^* = B\Psi \qquad \Psi^* = \tilde{B}\Psi \tag{II.41}$$

Llamaremos a la primera de Majorana y a la segunda de pseudo-Majorana. Para que esto sea posible es necesario que $B^2 = I$ o que $\tilde{B} = I$. Si tenemos dos espinores Ψ^i

donde $i = 1, 2$ podemos poner las condiciones

$$(\Psi^i)^* = \varepsilon_{ij} B \Psi^j \qquad (\Psi^i)^* = \varepsilon_{ij} \tilde{B} \Psi^j \tag{II.42}$$

que llamaremos simpléctico Majorana y pseudo simpléctico Majorana. Para que esto se posible es necesario que $B^2 = -I$ o que $\tilde{B}^2 = -I$.
El hecho de que las matrices B y C sean reales es algo que depende de la representación. Sin embargo el hecho de que BB^* sea $+I$ o $-I$. Si $BB^* = I$ entonces $B^T = B$ y si es $-I$ tenemos $B^T = -B$. Lo mismo sucede con $\tilde{B}$. Notemos que la matriz Γ^0 conmuta con B siempre y anticonmuta con $\tilde{B}$. De manera que C es simétrica cuando B es simétrica. Sin embargo las propiedades de $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ son inversas. Las matrices $\Gamma^\mu C$ tienen también simetría definida.

$$(\Gamma^\mu C)^T = C^T (\Gamma^\mu)^T = -C^T C \Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^\mu C^T \tag{II.43}$$

Para probar que estas propiedades de simetría no dependen de la representación estudiemos con detalle un ejemplo. Veamos como cambia la matriz C con un cambio de representacion $\Gamma^\mu \to U \Gamma^\mu U^\dagger$. De la definición vemos que la nueva matriz es UCU^T y si C es simétrica o antisimétrica también lo es la nueva matriz.

En la siguiente tabla representamos en que dimensiones existe cada tipo se espinor junto con las propiedades de simetría o antisimetría de todas estas matrices.

D	BB^*	$\tilde{B}\tilde{B}^*$	M	PM	SimM	PSimM	Sim	AntiSim
2	I	I	Si	Si	No	No	$B, \tilde{B}, \tilde{C}$	C
3	I	–	Si	–	No	–	B	C
4	I	$-I$	Si	No	No	Si	B	$\tilde{B}$, C, $\tilde{C}$
5	–	$-I$	–	No	–	Si		$\tilde{B}$, $\tilde{C}$
6	$-I$	$-I$	No	No	Si	Si	C	$\tilde{B}$, B, $\tilde{C}$
7	$-I$	–	No	–	Si	–		$\tilde{B}$, $\tilde{C}$
8	$-I$	I	No	Si	Si	No	$\tilde{B}$, C, $\tilde{C}$	B
9	–	I	–	Si	–	No	$\tilde{B}$, $\tilde{C}$	
10	I	I	Si	Si	No	No	B, $\tilde{C}$, $\tilde{B}$	C
11	I	–	Si	–	No	–	B	C

Veamos como estas importantísimas fórmulas están relacionadas con las representaciones espinoriales del grupo de Lorentz. La relación con el grupo de Lorentz se puede ver a partir de la maravillosa identidad

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (\Gamma^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu})^2 \tag{II.44}$$

Como diría Feynman, si alguien no se estremece al ver esta fórmula es que no tiene alma.

El espacio vectorial de dimensión $2^{D/2}$ donde actúan las matrices de Clifford se llama espacio de espinores de Dirac que son vectores de $2^{D/2}$ componentes.

☞ **Teorema II.6** *Las matrices definidas por*

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}\left[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\right] \tag{II.45}$$

satisfacen el álgebra de Lorentz.

Una transformación de Lorentz en este espacio viene dada por

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right). \tag{II.46}$$

La correspondiente vectorial es

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \tag{II.47}$$

Donde las $J^{\mu\nu}$ son matrices de índices

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\beta}\delta^{\nu}{}_{\alpha}\right) \tag{II.48}$$

Las matrices $J^{\mu\nu}$ o $\Sigma^{\mu\nu}$ satisfacen el álgebra de Lorentz

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right) \tag{II.49}$$

Las matrices de Clifford-Dirac transforman bien

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}})^{-1}\Gamma^{\mu}\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Gamma^{\nu} \tag{II.50}$$

La representación espinorial del grupo de Lorentz no es irreducible. En efecto es fácil ver que

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} S^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{S}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{II.51}$$

Donde

$$S^{\mu\nu} = S^{\mu}\bar{S}^{\nu} - S^{\nu}\bar{S}^{\mu} \tag{II.52}$$

$$\bar{S}^{\mu\nu} = \bar{S}^{\mu}S^{\nu} - \bar{S}^{\nu}S^{\mu} \tag{II.53}$$

Tenemos entonces dos representaciones espinoriales del grupo de Lorentz, la quiral asociada a $S^{\mu\nu}$ y la antiquiral asociada a $\bar{S}^{\mu\nu}$.

Dado un grupo G y una representación siempre podemos encontrar otras representaciones asociadas

- La conjugada
- La dual (traspuesta inversa)

• La dual conjugada
Estas representaciones pueden o no tener alguna equivalencia. Vamos a estudiar que sucede en nuestro caso.
En nuestro caso la representación quiral viene dada por

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{-1}{8}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right] \tag{II.54}$$

La representación dual o *contragrediente* vendrá dada por

$$S^c(\Lambda) = ((S(\Lambda))^{-1})^T = \exp\left[\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^T\right] \tag{II.55}$$

Notemos que

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = (\bar{S}^\nu)^\dagger(S^\mu)^\dagger - (\bar{S}^\mu)^\dagger(S^\nu)^\dagger = -\bar{S}^{\mu\nu} \tag{II.56}$$

gracias a que con nuestra elección $(S^\mu)^\dagger = S^\mu$ lo que implica que la representación conjugada dual es la generada por $\bar{S}^{\mu\nu}$.

Y ahora una discusión muy importante sobre los índices. Supongamos que un espinor quiral tiene índice θ_a con $a = 1, ..., d$. Un vector que viva en la representación dual tendrá índice θ^a, el conjugado será $\bar{\theta}_{\dot{a}}$ y el contragrediente conjugado $\bar{\theta}^{\dot{a}}$ en una notación que viene de los tiempos de Van der Waerden. Con esta notación noten que una matriz cualquiera de Dirac tiene índices

$$A = \begin{pmatrix} A_a{}^b & A_{a\dot{b}} \\ \bar{A}^{\dot{a}b} & \bar{A}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \tag{II.57}$$

De manera que las matrices S^μ tienen índices $S^\mu{}_{a\dot{b}}$ y $\bar{S}^{\mu\,\dot{a}b}$. La matriz B que hace la transformación $B\Gamma^\mu B^{-1} = (\Gamma^\mu)^*$ y lleva de un vector a uno que vive en la conjugada debe tener una estructura:

$$B = \begin{pmatrix} B_{\dot{b}}{}^a & \bar{B}_{\dot{a}\dot{b}} \\ B^{ab} & \bar{B}^a{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \tag{II.58}$$

Por lo tanto cuando B es diagonal tenemos una matriz de índices $J^{\dot{a}}{}_{b}$ que convierte índices puntados en no puntados. En estos casos la representación quiral es equivalente a la conjugada (antiquiral). En el caso de que sea antidiagonal tenemos matrices con índices J^{ab} que nos permiten cambiar índices en la posición de abajo por los de arriba y la representación quiral es equivalente a la dual. Concluimos que

Proposición:

Si $D = 2 \mod 4$ entonces la representación quiral y su conjugada son equivalentes.
Pero si $D = 6 \mod 8$ la quiral no puede ser *la misma* que la conjugada. Si $D = 0 \mod 4$ entonces la representación quiral y la dual son equivalentes
Pero si $D = 4 \mod 8$ la quiral no puede ser *la misma* que la dual.

Demostración:

✎ Sólo nos falta explicar porque la quiral y la conjugada no pueden ser iguales. La razón es que en estas dimensiones la matriz J es de cuadrado $-I$ y, por tanto, la ecuación $\bar{\theta}_{\dot{a}} = J_{\dot{a}}{}^{a}\theta_a$ es inconsistente. Este tipo de representaciones que son equivalentes a la conjugada pero no pueden elegirse reales se llaman *cuaterniónicas* o *cuasi reales*. La razón por la que la quiral no puede ser equivalente a la dual en $D = 4 \mod 8$ es nuevamente que J es de cuadrado $-I$ en estas dimesiones. 👍▌

II.1.1. Tensores invariantes bajo el grupo de Lorentz.

Un problema que se suscita con relativa frecuencia es el siguiente. Dada una representación de un grupo G en matrices $(T_g)_i^{\ j}$ que tipo de tensores permanecen invariantes bajo una transformación. Para concretar imaginemos que $D = 4$ y estamos estudiando la representación espinorial del grupo de Lorentz. En ese caso el tensor ε_{ab} es invariante, pero no lo es, por ejemplo δ_{ab} y si $\delta_a^{\ b}$... En esta corta sección vamos a tratar de clasificar todos los dos tensores invariantes bajo Lorentz y sacaremos algunas consecuencias muy importantes, todo esto es implicación directa de la sección anterior pero será importante en el futuro que le demos importancia. Me gustaría hacer una teoría que clasifique los tensores invariantes bajo Lorentz en cualquier dimensión y número de índices. De hecho estoy casi convencido de que el asunto se ha estudiado prolijamente, pero yo no se hacerlo mejor.

Primero estudiemos el caso de D impar. En ese caso sólo existe B, C ó $\tilde{B}, \tilde{C}$. Llamemosla en todo caso B, C. sus índice son C^{AB} y $B_{\dot{A}}{}^{B}$y la interpretación es la siguiente. Si χ_A es un espinor de Dirac entonces $\chi^A = C^{AB}\chi_B$ es un espinor de Dirac que transforma con la representación inversa traspuesta. El hecho de que exista la matriz C nos dice que ambas representaciones son equivalentes. El tensor C^{AB} es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Y no existen ningún otro F^{AB} que sea invariante porque entonces $F^{-1}C$ conmuta con todos los elementos del grupo y debe ser por tanto múltiplo de la identidad. EL tensor $B_{\dot{A}}{}^{B}$ también es invariante e implica que la representación inicial es equivalente a la conjugada. También existe el tensor $(\Gamma^0)^{\dot{A}B} = \bar{C}^{\dot{A}\dot{B}} B_{\dot{B}}{}^{B}$ que lleva un vector de la original a la inversa transpuesta conjugada. Hay que tener en cuenta que la matriz $(\Gamma^0)_A{}^B$ que es la primera matriz del álgebra de Clifford es numéricamente igual al anterior tensor pero sus reglas de transformación son completamente distintas.

En dimensión par todo es un poco más emocionante. En este caso existen los dos grupos de matrices pero todos ellos se pueden poner en función de una sola matriz J. Y como decíamos hay dos posibilidades

- Tenemos $J_{\dot{a}}{}^{b}$ si $D = 2 \mod 4$
- Tenemos J_{ab} si $D = 0 \mod 4$

Y también podemos ver que ese es el único tensor invariante de dos índices además de $\delta_a{}^b$ y los conjugados, claro.

II.1.2. Identidades entre las matrices Γ

Existen un número de identidades entre las matrices de Dirac que serán muy importantes para nuestro estudio.

Para empezar hemos notado que si C es simétrica entonces $\Gamma^\mu C$ es antisimétrica y viceversa. De igual manera $\tilde{C}$ y $\Gamma^\mu \tilde{C}$ tienen las mismas propiedades de simetría. Fíjense que también el producto $\Gamma^\mu \Gamma^\nu C$ (con $\mu \neq \mu$) es simétrica o antisimétrica

$$(\Gamma^\mu \Gamma^\nu C)^T = C^T (\Gamma^\nu)^T (\Gamma^\mu)^T = C^T C \Gamma^\nu \Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^\mu \Gamma^\nu C^T \tag{II.59}$$

En general podemos probar que

$$(\Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \cdots \Gamma^{\mu_n} C)^T = (-1)^{n(n+1)/2} \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \cdots \Gamma^{\mu_n} C \tag{II.60}$$

Notemos que todo eso es independiente de la representación (siempre que las Γ^μ sean unitarias. Si partimos de la matriz C podemos dividir el conjunto de todas las matrices en las que tienen la misma simetría que C y las que tienes opuesta
C, $\Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \Gamma^{\mu_3} C$...
$\Gamma^\mu C$, $\Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} C$
Si D es par entonces estas relaciones de simetría se transforman en relaciones de simetría por un lado y ecuaciones que relacionan matrices S^μ con las $\bar{S}^\mu$ por otro. Veámoslo detenidamente. Estudiemos primero el caso $D = 2 \mod 4$ (por ejemplo $D = 6$ o $D = 10$). En este caso tenemos el tensor ${J_a}^{\dot{b}}$ porque la representación espinorial y la conjugada son equivalentes. Entonces con un ligero abuso de notación podemos escribir

$$S^\mu{}_{ab} = S^\mu{}_{a\dot{b}} J^b_{\dot{b}} \tag{II.61}$$

Estas matrices también tienen propiedades de simetría bien definidas. Si $D = 2 \mod 8$, la matriz C es antisimétrica y por tanto $S^\mu J$ son simétricas, es el caso, por ejemplo de

$D = 10$. Si $D = 6 \mod 8$, la matriz C es simétrica y estas matrices son simétricas, es el caso de $D = 6$. Notar que $(\bar{S}^\mu S^\nu J)^{\dot{a}}{}_b$ no tiene propiedades de simetría. El siguiente caso sería $(S^{\mu_1}\bar{S}^{\mu_2}S_3^\mu J)_{ab}$ que también tiene propiedades de simetría. Permitame estudiar los dos casos $D = 6$ y $D = 10$ en profundidad.

Notemos que los productos de estas matrices satisfacen un número de identidades debidas a la identidad

$$\Gamma^{\mu_1} \cdots \Gamma^{\mu_n} W = \varepsilon \Gamma^{\mu_{n+1}} \cdots \Gamma^{\mu_D} \tag{II.62}$$

donde todos los índices μ_i son diferentes. El número ε depende del orden elegidos de las matrices. A nivel de las matrices S^μ esto significa que el producto n matrices es igual al producto de $D - n$ matrices. Por ejemplo en $D = 4$ tenemos las identidades

$$S^1{}_{a\dot{b}} = iS^2{}_{a\dot{a}} S^{1\dot{a}b} S^0{}_{b\dot{b}} \tag{II.63}$$

Que covariantemente se escriben como

$$S^\mu = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} S_\nu \bar{S}_\rho S_\sigma \tag{II.64}$$

El vector $S^\mu \bar{S}^\nu$ es autodual

$$S^\mu \bar{S}^\nu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} S_\rho \bar{S}_\sigma \tag{II.65}$$

En el caso de $D = 4$ esto no son más que maneras altisonantes de escribir $[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ Creo que el lector ya estará dispuesto a aceptar que en general

$$S^{\mu_0} = a\varepsilon^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{D-1}} S_{\mu_1}\bar{S}_{\mu_2} \cdots S_{\mu_{D-1}} \tag{II.66}$$

$$S^{\mu_0}\bar{S}^{\mu_1} = b\varepsilon^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{D-1}} S_{\mu_2}\bar{S}_{\mu_3} \cdots \bar{S}_{\mu_{D-1}} \tag{II.67}$$

$$\ldots \tag{II.68}$$

En el caso $D = 6$ las únicas matrices antisimétricas son $S^\mu J = S^\mu{}_{ab}$. Son matrices $4 \otimes 4$ y el número de estas matrices que son simétricas es $\binom{4}{2} = 6$. Por la relación de completitud tenemos la identidad[1]:

$$S^{\mu\,ab} S_{\mu\,cd} = \delta^a{}_c \delta^b{}_d - \delta^a{}_d \delta^b{}_c \tag{II.69}$$

También es una relación de cierre o completitud la dada por la ecuación

$$S^\mu{}_{ab} S_{\mu\,cd} = 2\varepsilon_{abcd} \tag{II.70}$$

Usaremos estas identidades más adelante. Por otra parte en $D = 10$ las matrices $S^\mu{}_{ab}$ son simétricas, como también lo son las matrices $S^{\mu_1} \bar{S}^{\mu_2} S^{\mu_3} \bar{S}^{\mu_4} S^{\mu_5} J$. Pero en $D = 10$ ese tensor es autodual y sólo la mitad de esas matrices son independientes. De manera que tenemos

$$10 + \frac{1}{2}\binom{10}{5} = 136 \tag{II.71}$$

matrices de este tipo. Pero hay $16 \otimes 17/2 = 136$ matrices simétricas, como debe ser. Entonces cualquier matriz simétrica se puede expandir en esta base

$$A = l_\mu S^\mu J + l_{\mu_1 \cdots \mu_5} S^{\mu_1} \cdots S^{\mu_5} J \tag{II.72}$$

donde $l_{\mu_1 \cdots \mu_5}$ es autodual, que es la fórmula (5) que aparece en [59]. Tomando trazas podemos comprobar que

$$S^\mu{}_{ab} S^{\nu\,ab} = S^\mu{}_{a\dot{b}} S^{\nu\dot{b}a} = -2\eta^{\mu\nu} 2^{16} \tag{II.73}$$

$$(S^{\mu_1} \cdots S^{\mu_5} J)_{ab} S^{\mu ab} = 0 \tag{II.74}$$

$$S^{\mu_1} \cdots S^{\mu_5} (S^{\mu_6} \cdots S^{\mu_{10}}) = \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{10}} \tag{II.75}$$

[1] Sea V un espacio vectorial y V^* y e_i, ε^j sus respectivas bases. Un elemento del producto tensorial $V \otimes V^*$ se puede entender como una aplicación $V \to V$ por ejemplo el elemento $e_i \otimes \varepsilon^j$ es la aplicación que al vector $c = c^k e_k$ lo manda al vector $c^j e_i$. De manera que la aplicación correspondiente a el elemento $e_i \otimes \varepsilon^i$ es la identidad. Sea ahora f_j otra base de V relacionada por $f_i = \alpha_i{}^j e_j$. Entonces es fácil ver que el elemento $f_j \otimes \varepsilon^j$ es igual a $\mathrm{Tr}(\alpha) I$

Y de ahí podemos calcular los coeficientes l_μ y $l_{\mu_1\cdots\mu_5}$. Por otro lado toda matriz antisimétrica es de la forma

$$S^\mu \bar{S}^\nu S^\rho J \tag{II.76}$$

Hechos que Berkovits usa con toda naturalidad [16]. Un buen ejemplo es la identidad

$$\lambda_a \lambda_b = S^\mu{}_{ab}(\lambda S_\mu \lambda) + \frac{1}{5!2^5} S^{\mu_1\cdots\mu_5}{}_{ab}(\lambda S_{\mu_1\cdots\mu_5}\lambda) \tag{II.77}$$

Las matrices $S^\mu{}_{a\dot{b}}$ verifican un número de identidades que nos serán útiles
La fundamental

$$S^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{S}^{\nu\,\dot{a}b} + S^\nu{}_{a\dot{a}} \bar{S}^{\mu\,\dot{a}b} = -2\eta^{\mu\nu} \delta_a{}^b \tag{II.78}$$

multiplicando por $\eta_{\mu\nu}$ y sumando

$$S_{\mu\,a\dot{a}} \bar{S}^{\dot{a}b} = -D\delta_a{}^b \tag{II.79}$$

Tomando trazas en la primera ecuación también obtenemos

$$S^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{S}^{\nu\,a\dot{a}} = -\eta^{\mu\nu} 2^{D/2-1} \tag{II.80}$$

II.1.3. Dimensión $D = 4$

En cuatro dimensiones tenemos las matrices de Dirac en la representación de Weyl

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{II.81}$$

donde las matrices de Pauli son

$$\sigma^0 = I, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{II.82}$$

II.2. Superálgebras de Lie

Como hemos dicho en la introducción existe una interesante generalización del concepto de grupo de Lie. Sin embargo resulta que la generalización de la idea de grupo esta llena de trampas y es mucho más sencillo generalizar la idea infinitesimal del álgebra. Esta sección realmente pudiese eliminarse de esta monografía. No hay nada original aquí y además nada de lo que sigue se fundamenta en lo que aquí se expresa. Sin embargo he notado que en general los físicos tenemos ciertas reticencias a trabajar con superálgebras de Lie y me parece razonable “perder”dos o tres páginas haciendo que el lector se sienta más seguro con los conceptos que aquí se involucran.

Mucha gente no quiere usar la palabra super y llaman espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$ graduado a lo que aquí se denomina superespacio vectorial. No les gusta esta definición porque hace pensar que un superespacio no es un espacio. Bryce DeWitt [27] por ejemplo, llama superespacio vectorial a algo muy muy diferente (a un módulo sobre un álgebra de Grassmman).

☞ **Definición II.7** *Un **superespacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y una descomposición preferida $V = G \bigoplus U$. Los elementos de G se llaman pares (del alemán gerade) y los de U impares (ungerade)*

Una manera distinta, pero equivalente sería decir que un superespacio vectorial es un espacio vectorial y dos proyectores P_U y P_G, tales que

$$P_U + P_G = I \qquad P_U P_G = 0 \qquad P_x^2 = P_x$$

Definición:

*Una **supereálgebra** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un álgebra $(\mathbb{A}, *, \mathbb{K})$ y una descomposición*

$\mathbb{A} = \mathbb{G} \bigoplus \mathbb{U}$, *de manera que se verifica:*

$$g_1 * g_2 \in \mathbb{G} \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{G}$$
$$g * u \in \mathbb{U} \qquad \forall g \in \mathbb{G}, \quad \forall u \in \mathbb{U}$$
$$u_1 * u_2 \in \mathbb{G} \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$$

Una superálgebra se dice ***conmutativa*** *si*

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{G}$$
$$g * u = u * g \qquad \forall g \in \mathbb{G}, \quad \forall u \in \mathbb{U}$$
$$u_1 * u_2 = -u_2 * u_1 \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$$

Definición:

Una ***superálgebra de Lie*** *es una superálgebra en la que se verifica*

a) El producto es ***anticonmutativo***

$$g_1 * g_2 = -g_2 * g_1 \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{G}$$
$$g * u = -u * g \qquad \forall g \in \mathbb{G}, \quad \forall u \in \mathbb{U}$$
$$u_1 * u_2 = u_2 * u_1 \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$$

b) Se tienen las identidades de ***Jacobi***

$$u_1 * (g_1 * g_2) + g_2 * (u_1 * g_1) + g_1 * (g_2 * u_1) = 0$$
$$u_1 * (u_2 * u_3) + u_2 * (u_3 * u_1) + u_3 * (u_1 * u_2) = 0$$
$$g_1 * (g_2 * g_3) + g_2 * (g_3 * g_1) + g_3 * (g_1 * g_2) = 0$$
$$g_1 * (u_1 * u_2) - u_2 * (g_1 * u_1) + u_1 * (u_2 * g_1) = 0$$
$$\forall g_i \in \mathbb{G}, \quad u_i \in \mathbb{U}$$

Normalmente escribiremos $a_1 * a_2 = [a_1, a_2]$. Notemos que
i) Una superálgebra de Lie no es un álgebra de Lie.
ii) Muchas personas de bien prefieren llamar superconmutativo, superanticonmutativo, superjacobi a lo que yo llamo, conmutativo, anticonmutativo, Jacobi. Bien por ellas, para mi es demasiado algo como superanticonmutativo.
iii) La parte par $\mathbb{G}$ de una superálgebra de Lie es un álgebra de Lie.
iv) En $\mathbb{U}$ hay una representación de $\mathbb{G}$.
Las superálgebras de Lie son objetos muy interesantes y bien conocidos. El problema de la clasificación de estos objetos esta lejos de ser trivial pero es muy interesante. La lista completa de las superálgebras simples fue dada por Kac [51] en 1975. La lista se divide en lo que el llamó superálgebras clásicas, en las que la representación de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{U}$ es completamente reducible (suma de irreducibles) y las que no. Las primeras también clasificadas en dos interesantes artículos [71] y [72][2]. Vamos a ver si puedo describir algunos ejemplos sencillos.
El álgebra $sgl(n, m, \mathbb{C})$. Consideremos las matrices complejas $(n+m) \times (n+m)$, ese será nuestro espacio $\mathbb{A}$. La parte par $(\mathbb{G})$ serán las matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz $n \times n$ y B $m \times m$. La impares $\mathbb{U}$ son

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

aqui C es una matriz $m \times n$ y a su vez D es $n \times m$. El producto en el álgebra se define como

$$[Q_1, Q_2] := Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1 \quad \forall Q_1 \in \mathbb{G}$$
$$[Q_1, Q_2] := Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{U}$$

[2]Hay que notar que la definición que yo he dado de clásica no es la misma que en [71], pero es equivalente. La prueba no es trivial

En otras palabras el *superconmutador* es el conmutador si al menos uno de los elementos es par y el anticonmutador si ambos son impares. El producto de extiende a cualquier elemento del álgebra por linealidad. Se que la notación puede resultar fastidiosa pero no quiero introducir términos nuevos. Esta álgebra se llama $gl(m, n, \mathbb{C})$ y no es simple. Para conseguir un álebra simple hemos e imponer alguna condición sobre las matrices.

a) Superálgebras de Lie clásicas:

a1) Familias de álgebras

• Las álgebras **ortosimplécticas** $osp(2n, m)$

Se carácterizan por las siguientes condiciones

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} A^t\Omega + \Omega A = 0 \\ B^t + B = 0 \\ D = C^t\Omega \end{aligned}$$

Siendo Ω una matriz $2n \times 2n$ de la forma

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

En otras palabras A es una matriz simpléctica $\in sp(2n)$ y B es ortogonal $\Rightarrow \mathbb{G} = sp(2n) \otimes o(m)$. Un ejercicio interesante (que no he realizado) es el de determinar la representación de $sp(2n) \otimes o(m)$ relevante en esta superálgebra.

• Las álgebras especiales lineales $sl(n, m)$ Aquí exigimos que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$. El álgebra de Lie subyacente es $sl(n) \otimes sl(m) \otimes gl(1)$

• Las superálgebras $sl(n, n)$ no son simples, el centro son matrices proporcionales a la identidad. Dividiendo por este ideal obtenemos una superálgebra simple cuya álgebra es $sl(n) \otimes sl(n)$

• El superálgebra de Lie $b(n)$ (o $P(n)$) viene definida por las restricciones $(n > 2)$

$$A^t + B = 0 \qquad \mathrm{Tr}A = 0$$
$$C^t = C \qquad D^t = -D$$

en este caso $\mathbb{G} = sl(n)$

• Las superálgebras $d(n)/\lambda$ o $Q(n)$, con $n > 2$. Definimos primero el álgebra $d(n)$ como las matrices que cumplen

$$A = B \qquad A \in gl(n)$$
$$C = D \qquad \mathrm{Tr}D = 0$$

Como antes dividimos por el centro. Otra vez el álgebra de Lie subyacente es $sl(n)$.

a2) Álgebras excepcionales (clásicas)

• Una familia uniparamétrica $D(2,1,\alpha)$ de dimensión 17, con $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\mathbb{G} = sl(2) \otimes sl(2) \otimes sl(2)$.

• Γ_2 es una superálgebra basada en el álgebra $G_2 \otimes sl(2)$ de dimensión 31. Para la construcción es conveniente usar octoniones. Es la única superálgebra simple en la que un álgebra excepcional aparece.

• Finalmente Γ_3 esta basada en el álgebra $sl(2) \otimes o(7)$y es de dimensión 40. En su construcción ayudan mucho las álgebras de Clifford

b) Álgebras del tipo de Cartan.

• $W(n)$ con $n > 1$. Sea V un espacio vectorial de dimensión $\dim V = n$. ΛV es su álgebra exterior, que es una superálgebra. Dada una superálgebra de Lie cualquiera $(\mathbb{A}, \star)$ podemos construir otra llamada de superderivaciones de $\mathbb{A}$, $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ como el conjunto de aplicaciones lineales $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ que cumplen

$$D(g_1 \star v) = g_1 \star D(v) + D(g_1) \star v \qquad \forall g_1 \in \mathbb{G}, v \in \mathbb{A}$$
$$D(u_1 \star u_2) = D(u_1) \star u_2 - u_1 \star D(u_2) \qquad \forall u_1, u_2 \in \mho$$

Definimos $W(n) = \mathcal{D}(\Lambda V)$. Su dimensión es $\dim(W(n)) = n2^n$.
• $S(n)$, $\tilde{S}(2n)$ y $H(n)$, que no describiré (porque no se hacerlo), son subálgebras de la anterior.
Eso completa la clasificación de las superálgebras simples. El siguiente tema en el que

no entraré es el de clasificar las representaciones irreducibles de las mismas. Para dar cuenta de la dificultad de este asunto quisiera mencionar un
Teorema de Djokovic-Hochschild:
Sea $(\mathbb{A}, [\cdot,\cdot], \mathbb{C})$ una superálgebra. Todas sus representaciones finito dimensionales serán completamente reducibles si y sólo si es producto directo de superálgebras de Lie del tipo $osp(1,2n)$ y algebras de Lie semisimples.
He querido mencionar todos estos resultados por varios motivos. Quiero hacer ver que la teoría de las superálgebras de Lie es profunda e interesante.
Lo siguiente de lo que quiero hablar es de algo de más interés para los físicos. ¿Hay alguna superálgebra de Lie cuya álgebra sea Poincarè? La respuesta es que sí y la llamamos el álgebra de super-Poincarè. Como acabo de decir en este caso $\mathbb{G} = (P_\mu, J_{\mu\nu})$ y satisfacen el álgebra de Poincarè. Resulta que la representación de $\mathcal{P}$ que hay que elegir para la parte impar es la espinorial del álgebra de Lorentz.

II.2.1. Superálgebras de Poincarè

En esta sección vamos a tratar de clasificar todas las posibles generalizaciones del álgebra de Poincarè en D dimensiones a una superálgebra. Seguiremos como guía el apéndice del libro de Steven Weinberg [84]

Hay, que yo sepa, dos maneras de encontrar la generalización correcta. La más seguida fue la que fundamenta el importante artículo de Haag, Lopuszansky y Sohnius[42] que también expondremos aquí siguiendo las lineas del libro de Weinberg y se trata meramente de usar fuerza bruta. Otra linea interesante es la que se presenta en el sucinto pero siempre interesante libro de Freund [31] en la que se busca primero un álgebra simple que se puede contraer a Poincarè y entonces se generaliza esta álgebra. En cuatro dimensiones el álgebra de anti-de Sitter hace muy bien el trabajo.

En general el álgebra de Poincarè $(P_\mu, J_{\mu\nu})$ debe ser agrandada con una serie de generadores de la parte impar. Como hemos visto en la sección anterior estos generadores deben soportar una representación de la parte par. En este caso resulta que la única elección posible es Q_{ai} y $\bar{Q}_{\dot{a}}{}^{i}$ es decir N cargas $(i = 1, ..., N)$ que transforman en la representación espinorial de Lorentz. A este sistema $(P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}{}^{i})$ aún podemos agregarle una serie de generadores bosónicos (con deben conmutar con todos los elementos del álgebra de Poincarè debido al teorema de Coleman-Mandula) pero que pueden tener un álgebra no trivial con la parte impar del álgebra. Estos generadores extra son de dos tipos, o bien mueven el índice i de las cargas supersimétricas o bien mueven los índices a y $\dot{a}$. Los primeros han sido estudiados en la literatura, pero los segundos han sido dejados un poco de lado. Además a estos generadores en algunas dimensiones podemos imponer ciertas condiciones de realidad.

Empecemos en dimensión D impar. En este caso sólo hay una representación espinorial de Lorentz. Coleman-Mandula nos dice que la parte par del Álgebra debe ser Poincarè producto directo de otro grupo cuyos generadores escribimos

$$(T_r)_i^{\ j} \qquad Z_{ij} \tag{II.83}$$

Donde $i = 1, .., N$ y r es un índice que etiqueta el número de generadores. Los Z_{ij} son *cargas centrales* y conmutan con todo elemento del álgebra. De las muchas posibilidades que se pueden tomar para la parte impar la que funciona es elegir una N-upla Q_{ai} de representaciones espinoriales. El índice a es un índice de Dirac. Se llaman *cargas supersimétricas* y a N lo llamaremos *extensión* de la supersimetría.

Por lo tanto los elementos de la superálgebra son

$$P_\mu,\ J_{\mu\nu},\ T_r, Z_{ij},\ Q_{ai},\ \bar{Q}^i_{\dot{a}} \tag{II.84}$$

Donde P_μ y $J_{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Poincarè. EL teorema de Coleman-Mandula nos dice que

$$[T_r, T_s] = c_{rs}{}^t T_t \tag{II.85}$$

$$[P_\mu, T_r] = [J_{\mu\nu}, T_r] = 0 \tag{II.86}$$

Nuestra elección de índices espinoriales fija también los conmutadores

$$[Q_{ai}, P_\mu] = 0 \tag{II.87}$$

$$[Q_{ai}, J_{\mu\nu}] = \Sigma_{\mu\nu}{}_a{}^b Q_{bi} \tag{II.88}$$

Los elementos T_r deben mover el índice i de Q_{ai} pero no el índice de Dirac. Falta especificar los conmutadores $\{Q_{ai}, Q_{bj}\}$ La forma más general es

$$\{Q_{ai}, Q_{bj}\} = G_{aibj}{}^\mu P_\mu + L_{aibj} \tag{II.89}$$

II.3. Supermultipletes

Supermultipletes son representaciones irreducibles del álgebra de supersimetría. Un supermultiplete (en adelante las palabras supermultiplete y multiplete son sinónimas) contiene cierto número de representaciones del álgebra de Poincarè. En supersimetría un estado cuántico libre viene descrito por un multiplete determinado. De manera que el espín de una partícula es un concepto relativo. Primero vamos a repasar muy brevemente las representaciones irreducibles en $D = 4$ tanto para fijar convenios y notación como para futura referencia y claro está por coherencia interna del texto. Seremos breves porque esta muy bien explicado en diferentes lugares.

Hay varios Casimires en el grupo. Primero están dos que son generalización de Poincarè

$$P^2 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{C} = \frac{-1}{2}\mathrm{C}_{\mu\nu}\mathrm{C}^{\mu\nu} \tag{II.90}$$

Donde

$$C_{\mu\nu} = P_\mu C_\nu - P_\nu C_\mu \tag{II.91}$$

$$C_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P^\nu L^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a}\left[Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}^{\ i}\right] \tag{II.92}$$

El vector C_μ es una especie de generalización de cuadrivector de Pauli-Lubansky ([69],[79],[83]). Además están los generadores de $U(N)$ que son una simetría extra del álgebra.

$$T_i^{\ j} = \frac{1}{4}\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a}\left[Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}^{\ j}\right] P_\mu \tag{II.93}$$

cuyos Casimires lo son de toda el álgebra. En este caso las representaciones están etiquetadas por los autovalores (m, s) de P^2 y del vector de Pauli-Lubansky, la masa y el *superespín*. Supongamos que $m \neq 0$ de manera que podemos elegir $P_0 = m$, $\vec{P} = 0$ y el álgebra es

$$\left\{Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}^{\ j}\right\} = 2m\sigma^0{}_{a\dot{a}}\delta_i^{\ j} = 2m\delta_{a\dot{a}}\delta_i^{\ j} \tag{II.94}$$

Esta es casi un álgebra de operadores creación y destrucción. Existe un subespacio [3] $|\Omega\rangle$ que cumple

$$Q_a\,|p; s\rangle = 0 \tag{II.95}$$

[3] Debe existir un estado tal que $Q^2\,|T\rangle \neq 0$

Este subespacio soporta una representación de espín s de $SU(2)$, y es una cuestión de cálculo comprobar que este es también el autovalor de C.

Construimos los demás estados a partir de estos con $\bar{Q}_{\dot{a}}$. Lo que hay que hacer ahora es calcular el espín de cada uno de estos estados. Eso puede hacerse con cierto esfuerzo a partir de las reglas de conmutación del álgebra.

Escribimos aquí una tabla para referencia En la tabla mostramos todos los mul-

	N=1				N=2			N=3		N=4
ESPÍN	0	1/2	1	3/2	0	1/2	1	0	1/2	0
0	2	1	0	0	5	4	1	14	14	42
1/2	1	2	1	0	4	6	4	14	20	48
1	0	1	2	1	1	4	6	6	15	27
3/2	0	0	1	2	0	1	4	1	6	8
2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Cuadro II.1: Sumermultipletes masivos en D=4

tipletes en $D = 4$ y $N = 1, 2, 3, 4$ en la que aparecen partículas con $m \neq 0$ y espín ≤ 2 (asumiendo que los Casimires de $U(N)$ son cero). Por ejemplo si estudiamos el multiplete de superespín 3/2 y $N = 1$ encontramos que tiene una partícula de espín 1, dos de espín 3/2 y uno de espín 2. Sobre algunos multipletes se puede imponer una condición de realidad, eso divide en número de partículas de espín semientero entre dos y hace que los bosónicos sean reales.

El multiplete de superespín 0, lo llamaremos quiral. El multiplete de superespín 1/2 y $N = 1$ se llama tensorial, lineal o transverso.

No pretendemos hacer una demostración de esta tabla que puede encontrarse en los númerosos manuales, pero tratando de hacer un programa que nos de estos números encontré una sencilla regla que permite reproducirlos. Si queremos descubrir el contenido de partículas de un multiplete de superespín j y extensión N.

i) Si $j \geq N/2$ tenemos:

- 1 partícula de espín $j - N/2$
- $\binom{2N}{2}$ partículas de espín $j - N/2 + 1/2$

...

- $\binom{2N}{s}$ partículas de espín $j - N/2 + s/2$

...

ii) Si $j < N/2$. Sea $a = N - 2j > 0$ y $\alpha = 4j + a = 2j + N$. Tenemos

- $\binom{2N}{\alpha} - \binom{2N}{\alpha+2}$ partículas de espín 0.
- $\binom{2N}{\alpha-1} - \binom{2N}{\alpha+3}$ partículas de espín 1/2

....

- $\binom{2N}{\alpha-(a-2)} - \binom{2N}{\alpha+a} = \binom{2N}{4j+2} - \binom{2N}{2N}$ partículas de espín $j + (N+1)/2$
- $\binom{2N}{4j+3}$ partículas de espín $j + (N+2)/2$

...

El lector puede verificar que los resultados de la tabla se reproducen fácilmente con esta regla cuya desmostración tampoco es difícil. Desconozco si esta regla se conoce, pero no esta en los manuales que yo conozco. Para que el lector vea la potencia del método calculemos los estados de $N = 8$ y superespín 0. Formamos la tabla

4	7/2	3	5/2	2	3/2	1	1/2	0
$\binom{16}{16}$	$\binom{16}{15}$	$\binom{16}{14}$	$\binom{16}{13}$	$\binom{16}{12}$	$\binom{16}{11}$	$\binom{16}{10}$	$\binom{16}{9}$	$\binom{16}{8}$
—								
		$\binom{16}{0}$	$\binom{16}{1}$	$\binom{16}{2}$	$\binom{16}{3}$	$\binom{16}{4}$	$\binom{16}{5}$	$\binom{16}{6}$
1	16	119	544	1700	3808	6188	7072	4862

Observemos además que existen $4^N(2s+1)$ estados en una representación de superespín s y extensión N. El caso de masa cero se analiza de forma parecida. El este caso se puede encontrar una base en la que $P = (E, 0, 0, 0, E)$. De forma que

$$\left\{ Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}{}^{j} \right\} = 2E\delta_i^j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{II.96}$$

disponemos de la mitad de operadores "creación" y los multipletes son radicalmente diferentes. Podemos clasificar cada multiplete por la superhelicidad, que es la helicidad mínima. En este caso es muy sencillo estudiar el contenido de espines para cualquier N, de la siguiente manera. Imaginemos que queremos el supermultiplete de helicidad λ (un número semientero). Entonces tenemos un estado de helicidad λ, $\binom{N}{2}$ de helicidad $\lambda + 1/2$, $\binom{N}{3}$ de helicidad $\lambda + 1$,... y 1 de helicidad $\lambda + N/2$. Por ejemplo si queremos construir el multiplete que contenga partícula de helicidad ≤ 2 con $N = 8$ entonces debemos empezar con una partícula de helicidad -2, de manera que el multiplete total tendrá:

- $\binom{8}{8} = 1$ partícula de helicidad 2
- $\binom{8}{7} = 8$ partículas de helicidad 3/2
- $\binom{8}{6} = 28$ partículas de helicidad 1
- $\binom{8}{5} = 56$ partículas de helicidad 1/2
- $\binom{8}{4} = 70$ partículas de helicidad 0

Que, como es bien sabido, es el multiplete de supergravedad $N = 8$.[4]

[4] Este multiplete es autoconjugado, es decir su conjugado por CPT es el mismo, lo mismo sucede con el multiplete de super Yang-Mills con $N = 4$.

La dimensiones mayores se pueden tratar de forma semejante aunque ahora la clasificación es más difícil porque los estados clasifican bajo el grupo pequeño que, en $D = 10$, por ejemplo es $SO(9)$. También es interesante el caso con carga central. La idea es siempre desdoblar los operadores hasta conseguir tener un álgebra de operadores de creacióṅn y destrucción. Las tablas están bien contenidas en los libros. En general hay determinados valores de la carga central para los que los multipletes tienen un contenido semejante al multiplete masivo y otros semejante al del multiplete sin masa. Todos los estados dentro de un multiplete con carga central tienen masa.

CAPÍTULO III

SUPERESPACIO

III.1. Teorías de campos supersimétricas

En esta corta sección vamos a poner un ejemplo de una sencilla teoría de campos supersimétrica. Esta basada en la acción:

$$S = \int d^4x[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\Psi}i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi + F^*F + (m\phi F + \frac{1}{2}m\Psi^2 + C.C.)] \tag{III.1}$$

Los campos son

- Un campo escalar $\phi(x)$
- Un campo de espin $1/2$, Ψ^a
- Un campo auxiliar F

Observen que para el campo F no hay dinámica y puede ser fácilmente eliminado del Lagrangiano. Su presencia es necesaria para que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones de supersimetría. Un campo así se llama *auxiliar*. Otra sorpresa es que el campo fermiónico $\Psi^a(x)$ no puede ser un número complejo. El campo debe tomar valores en un álgebra de Grassmann. En otras palabras debemos seguir la regla de oro

$$\Psi^a \Psi^b = -\Psi^b \Psi^a \tag{III.2}$$

El hecho de que necesitemos introducir estas extrañas reglas no pertenece a la supersimetría. Usted mismo puede ver fácilmente que no existe ningún Lagrangiano que dependa del campo $\Psi^a(x)$ cuya variación de la ecuación

$$\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a} \partial_\mu \Psi_a = m \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \bar{\Psi}_{\dot{b}} \tag{III.3}$$

La única manera de lograr esto es asumiendo la regla de Grassmann. También aparecen en física al realizar la integración funcional de las teorías de calibre como Q.E.D. Su necesidad fue destacada en viejos trabajos de Feynman y B. de Wit relacionados con la gravedad cuántica.

Podemos tratar de entender esta relación de muchas maneras, pero parece ser que la que mejor resultados da es simplemente usarla como una buena regla y confiar en que la resultante teoría cuántica este libre de estos problemas. Tendremos ocasión de seguir hablando sobre este punto.

Este Lagrangiano es invariante bajo ciertas transformaciones de simetría que mezclan los campos bosónicos con los fermiónicos

$$\delta\phi = \varepsilon\Psi, \tag{III.4}$$

$$\delta\Psi = \varepsilon F - \sigma^\mu \partial_\mu \phi \sigma^2 \varepsilon^*, \tag{III.5}$$

$$\delta F = -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi \tag{III.6}$$

El parámetro de la transformación ε_a es nuevamente un parámetro de Grassmann. Por supuesto en esta teoría podemos construir una serie de generadores de simetría, constantes de movimiento, que satisfacen toda el álgebra de super Poincarè. Claro que hay que hacer una generalización adecuada de los corchetes de Poisson para el caso de de las variables de Grassmann pero finalmente entenderemos que la superálgebra de super Poincarè encuentra aquí una realización explícita. No es nuestro cometido aquí estudiar estas teorías. Haremos el cálculo para otros casos.

Este es el multiplete quiral. Como puede comprobarse si se elimina el campo auxiliar el Lagrangiano es sólo invariante por supersimetría si se usan las ecuaciones de movimiento, es decir es invariante on-shell. Los grados de libertad on-shell de este sistema son un espinor Ψ_a y un escalar complejo ϕ que representan una partícula de espín $1/2$ y dos des espín 0.
Los campos Ψ_a, ϕ y F se llaman campos componentes y son los campos que componen el multiplete off-shell.

Podríamos seguir escribiendo Lagrangianos supersimétricos y estudiando sus propiedades, la teoría es inmensamente rica. La teoría de campos supersimétrica es, de lejos, mucho más interesante que la no supersimétrica. Después de un trabajo de Olive y Witten se comprendió que en estas teorías existen solitones estables bajo deformaciones, estados BPS, de una importancia sin igual para la teoría cuántica. El régimen no perturbativo de estas teorías se entiende mucho mejor que el de sus compañeras no supersimétricas. También el régimen perturbativo es mejor, el número de diagramas es muy inferior conforme la supersimetría aumenta y hay casos en los que la teoría es incluso finita. Pero tampoco vamos a estudiar la cuantización de estos sistemas en esta tesis.

No siempre se tiene tanto control de una teoría como en este caso. Usualmente la acción que se tiene para una teoría supersimétrica sólo es invariante on-shell, el Lagrangiano supersimétrico off-shell, si existe, no se conoce. Tal es el caso de super

Yang-Mills en $D = 10$. El Lagrangiano es

$$S = \int d^D x \left(\frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \Psi^a S^\mu{}_{a\dot{b}} \partial_\mu \bar{\Psi}^{\dot{b}} \right) \tag{III.7}$$

III.2. El superespacio

En 1974 casi inmediatamente despues del modelo de Wess y Zumino Salam y Strathdee introdujeron un concepto muy útil para escribir teorías de campos supersimétricas. Imaginemos que Λ es un álgebra de Grassmann cuyos objetos anticonmutan. Los campos de la teoría serán objetos que tomen valores en la parte par o impar de este álgebra y dependan de unos x^μ que son las coordenadas del espacio tiempo y pertenecen a Λ_P y de unos espinores θ^a que toman valores en la parte impar del álgebra Λ_I. Los supercampos resultantes $V(x^\mu, \theta^a)$ pueden desarrollarse por Taylor en la variable θ^a. El resultado es un número finito de términos con un número finito de coeficientes que serán campos usuales que sólo dependen de las variables del espacio-tiempo. El punto importante es que este conjunto de campos así construido siempre consiste en un multiplete de supersimtría. Toda teoría bien construida a partir de supercampos es automáticamente supersimétrica.

Una pregunta natural surge aquí, ¿son los supercampos objetos físicamente importantes o son sólo una manera conveniente de hacer cálculos? ¿Son las nuevas coordenadas θ^a una verdadera extensión del espacio tiempo o son sólo una herramienta para contar adecuadamente signos?

En nuestro trabajo asumiremos que estas nuevas coordenadas *realmente* parametrizan un nuevo espacio. Nuestro cometido será el de entender geométricamente las teorías físicas formuladas en términos de supercampos.
Para empezar vamos a dar una definición ligeramente más rigurosa de las construcción

que hemos hecho del superespacio.

Has ahora el tratamiento que hemos dado de la teoría de las superálgebras y, en particular de la de super Poincarè es completamente riguroso. Pero llega el momento en el que tenemos que hacer un “twist.ª la teoría para poder hablar del grupo de super Poincarè. Para ser concretos trabajaremos en lo que sigue con el álgebra de super Poincarè en $D = 4$ y $N = 1$. Los generadores son $(P_\mu,\ J_{\mu\nu},\ Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}})$ y es un álgebra sobe $\mathbb{C}$. Vamos a cambiar esta álgebra por un álgebra definida sobre las variables de Grassmann.

El álgebra de Grassmann Λ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ que se construye con los generadores 1, ξ_i con $i = 1, ..., \infty$ de manera que

$$\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0 \tag{III.8}$$

Un elemento cualquiera del álgebra se escribe como

$$Z = z_0 + \sum_i z_i \xi_i + \sum_{i,j} z_{ij} \xi_i \xi_j + ... \tag{III.9}$$

Donde z_0, z_i, z_{ij},... son número complejos. Un elemento cualquiera se puede separar en parte impar

$$Z = Z_P + Z_I \tag{III.10}$$

$$Z_P = z_0 + \sum_{ij} z_{ij} \xi_i \xi_j + ...$$

$$Z_I = \sum_i z_i \xi_i + \sum_{ijk} z_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + ... \tag{III.11}$$

La parte impar es siempre de cuadrado cero, como puede probarse fácilmente.

Creo que está claro que esta definición dista de ser rigurosa. El problema está en las sumas infinitas. Cada vez que los físicos hacen cálculos con sumas infinitas sin especificar problemas de convergencia dicen que el cálculo es puramente formal. Nosotros no vamos a intentar arreglar este punto (por que no se como hacerlo). Y trabajaremos, como casi toda la literatura física con la sencilla regla de que las variables de Grassmann impares anticonmutan. Dividimos entonces el álgebra de Grassmann en dos partes $\Lambda = \Lambda_P \bigcup \Lambda_I$. Ahora decimos que un elemento de nuestra superálgebra es una combinación

$$H = c^\mu P_\mu + l^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \chi^a Q_a + \bar{\chi}^{\dot{a}} \bar{Q}_{\dot{a}} \tag{III.12}$$

donde $\bar{\chi}^{\dot{a}} = (\chi^a)^*$[1] son variables de Grassmann impares y c_μ, $l^{\mu\nu}$ son variables pares. Dada una superálgebra de Lie encontramos el correspondiente grupo exponenciando. De manera que un elemento del grupo esta dado por e^{iH}. Con esta definición es fácil darse cuenta de que la transformación que lleva a un elemento G del álgebra a otro elemento $e^{iH} G e^{-iH}$ es un automorfismo del álgebra. esta es la razón del "twist [2]de las variables de Grassmann.

Ahora estamos preparados para hablar del superespacio. Dado un grupo G un a pregunta interesante es la de clasificar todas las posibles acciones de este grupo sobre un conjunto $\mathcal{M}$. La acción del grupo sobre $\mathcal{M}$ divide al espacio en clases de equivalencia llamadas órbitas. Supongamos que existe una única órbita (es decir la acción del grupo es transitiva). Sea H_p un subgrupo de G que deja invariante un punto $p \in \mathcal{M}$. Todos estos grupos de isotopia son isomorfos de manera que podemos ver la variedad como un espacio cociente $\mathcal{M} = G/H$ de forma natural. Dicho de otra manera los posibles espacios sobre los que un grupo G actúa transitivamente están clasificados por sus subgrupos. Dado un grupo G y un subgrupo H hay dos formas de hacer el cociente.

[1]Los generadores de Λ satisfacen la siguiente regla $\xi_i^* = \xi_i$. Dos variables de Grassmann cumplen que $(ab)^* = b^* a^*$

El subgrupo H divide a G en clases de equivalencia

• $g_1 \equiv g_2 \iff g_1 = g_2 h$, el espacio cociente lo denotamos G/H

• $g_1 \equiv g_2 \iff g_1 = h g_2$, el espacio cociente lo denotamos $G \setminus H$ Veamos como funciona esta construcción en el caso familiar de Poincarè. Tomemos como subgrupo el grupo de Lorentz. Creo que es inmediato comprobar que en este caso el cociente es $\mathbb{R}^4$. Supongamos que hacemos el cociente por la derecha, de forma que escribimos

$$\mathcal{P}/L = \mathbb{R}^4 \tag{III.13}$$

Alguien puede rápidamente advertir que, a pesar de esta construcción *todo* el grupo de Poincarè sigue actuando sobre $\mathbb{R}^4$. El motivo es que aún sobrevive las transformaciones por la izquierda. El grupo de Poincarè se puede escribir como un producto semidirecto $\mathcal{P} = T^4 \odot L^2$. De manera que un elemento del grupo lo escribimos como $(a^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu)$. Si x^μ es un elemento del espacio el grupo lo lleva a $\Lambda^\mu{}_\nu + a^\mu$. Con esto podemos fácilmente escribir

$$(a, \Lambda) \times (\tilde{a}, \tilde{\Lambda}) = (a + \Lambda\tilde{a}, \Lambda\tilde{\Lambda}) \tag{III.14}$$

Si cocientamos por la derecha quiere decir que identificamos con (a, Λ) todos los que pueda obtener multiplicado por la derecha por algún $(0, \tilde{\Lambda})$. Claramente entonces (a_1, Λ_1) es equivalente a (a_2, Λ_2) si y sólo si $a_1 = a_2$. El cociente está parametrizado por $\mathbb{R}^4$. Obviamente en este cociente Lorentz actúa trivialmente, por construcción. Veamos como actúa Poincarè en el cociente. Sea (a, Λ) un representante. Si lo multiplicamos por la izquierda por $(\tilde{a}, \tilde{\Lambda})$ obtenemos $(\tilde{a}+\tilde{\Lambda}a, \tilde{\Lambda}\Lambda)$ que es la acción que queremos.

Veamos como funciona esta construcción para el caso de super Poincarè. Lo que tenemos que hacer es cocientar el super grupo de Poincarè entre uno de sus subgrupos. Claramente este subgrupo debe contener a Lorentz y no a Poincarè. Creo que todo el

[2] Lo que estamos haciendo es factorizar un elemento del grupo y escribirlo como $e^{ia^\mu P_\mu} e^{i\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}} = e^{ia^\mu P_\mu} \Lambda$

mundo estará de acuerdo en que Lorentz es la única posibilidad. Escribimos, por tanto un elemento del supergrupo como

$$e^{i(a^\mu P_\mu + \xi^a Q_a + \bar{\xi}_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}})}\Lambda \tag{III.15}$$

Un elemento del cociente viene parametrizado por $(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$, el superespacio $D = 4$ y $N = 1$. Para estudiar como actúa super Poincarè sobre este espacio debemos hacer lo mismo que antes. Claramente las translaciones actúan trasladando x^μ, Lorentz áctua separadamente sobre el espacio de espinores y vectores y sólo debemos estudiar que pasa por una transformación generada por Q_a. Para ver cómo actúa debemos calcular

$$e^{i(\xi^a Q_a - \bar{\xi}^{\dot{a}} \bar{Q}_{\dot{a}})} e^{i(a^\mu P_\mu + \xi^a Q_a + \bar{\xi}_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}})} \tag{III.16}$$

Usando la fórmula de Cambell-Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$ podemos encontrar las transformaciones finitas

$$x^\mu \to x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{III.17}$$

$$\theta^a \to \theta^a + \xi^a \tag{III.18}$$

$$\bar{\theta}^{\dot{a}} \to \bar{\theta}^{\dot{a}} + \bar{\xi}^{\dot{a}} \tag{III.19}$$

Con esto en la mano es fácil escribir los generadores de super Poincarè como operadores diferenciales sobre los supercampos $V(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{III.20}$$

$$Q_a = -i\partial_a - \sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.21}$$

$$\bar{Q}_{\dot{b}} = i\bar{\partial}_{\dot{b}} + \theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.22}$$

$$J_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial\nu - x_\nu p_\mu) + \theta^a S_{\mu\nu\,a}{}^b \frac{\partial}{\partial\theta^b} + \bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{S}_{\mu\nu\,\dot{a}}{}^{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{b}}} \tag{III.23}$$

Es fácil comprobar que estos operadores satisfacen las reglas del álgebra de super Poincarè que ya hemos estudiado.

Tendremos ocasión de estudiar en más profundidad este superespacio, pero ahora quisiera tener ocasión de explicar que sucede si hacemos $N > 1$. En este caso pudiésemos hacer exactamente lo mismo y obtendríamos un superespacio parametrizado por $(x^\mu, \theta^{a\,i}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i)$ con $i = 1, ..., N$. Pero ahora hay algo más que podemos hacer. La idea procede la escuela soviética de Dubna y es lo que se ha venido en llamar el superespacio harmónico. El grupo de super Poincarè en este caso se puede agrandar con el conjunto de automorfismos internos. Es fácil ver que este grupo es, al menos, $U(N)$. Simplemente si redefinimos las $Q_{a\,i}$ con una matriz $U_i{}^j Q_{a\,i}$ los corchetes de la superálbegra quedan invariantes. Ahora tenemos más opciones para dividir. El grupo de super Poincarè esta agrandado por el grupo de automorfismos internos del álgebra $U(N)$: si llamamos a $\mathcal{P}$ el grupo generado por $(P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}}{}^i, T_r)$ entonces podemos dividir por un supegrupo que contenga a Lorentz y algún subgrupo de $U(N)$. Las posibilidades son muchas y no hay una regla para saber cual elegir. Aunque la construcción es bastante geométrica la pluralidad de posibilidades que nos introduce puede ser molesta. De todas formas el método ha cosechado grandes éxitos algunos de los cuales tendremos ocasión de ver en este estudio. Probablemente el más importante es el de haber sido capaz de escribir una acción off-shell para $N = 3$ super Yang-Mills. ¿Porque, sin embargo, no ha sido capaz de tratar el caso $N = 4$?

Tratemos con algo de profundidad el caso $N = 2$. Aquí la lección que parece funcionar es agrandar super Poincarè por $SU(2)$ y cocientar por $U(1)$. Lo que sigue puede considerarse como una introducción algo personal al superespacio armónico.

El superespacio ahora será topológicamente $\mathbb{R}^{4|8} \otimes S^{2}$[3] y vendrá descrito por $(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i, u_i{}^?)$ que, como hemos dicho, es una notación redundante pero útil. Un supercampo entonces será una función adecuada de $V(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i, u_i{}^?)$. La gran ventaja de estos supercampos es que poseen un número infinito de campos en componentes por lo que, como

[3] La notación $\mathbb{R}^{n|m}$ índica un vector de n números de Grassmann pares y m impares reales.

decíamos en la introducción tienen en su alma la posibilidad de evadir los teoremas que dificultan el encontrar una acción off-shell para super Maxwell en $D = 10$.

Tambien será importante para nosotros representar en el superespacio teorías con cargas centrales. Por simplicidad trabajaremos l caso $D = 4$ y $N = 2$. En el análisis que hemos hecho del superespacio ordinario nos induce a pensar que el espacio correcto en el que debemos trabajar está parametrizado por las variables $(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i, z, \bar{z})$. De manera que los generadores serán

$$Z \to -i\frac{\partial}{\partial z} \tag{III.24}$$

$$P_\mu \to -i\partial_\mu \tag{III.25}$$

$$Q_{ai} \to -i\partial_{ai} - \sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\theta^{bj}\frac{\partial}{\partial z} \tag{III.26}$$

$$\bar{Q}_{\dot{a}}{}^i \to i\partial_{\dot{a}}{}^i - \theta^{ai}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}}\partial_\mu + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\varepsilon^{ij}\bar{\theta}_j{}^{\dot{b}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{III.27}$$

III.3. Proyectores

En general los supercampos como los hemos definido no soportan representaciones irreducibles del álgebra de supersimetría incluso despues de imponer la candición $p^2 + m^2 = 0$. En ocasiones puede ser interesante poder descomponer espacio de supercampos en representaciones irreducibles del álgebra de supersimetría. Esto se puede lograr si se dispone de una serie de operadores de proyección P_i que verifiquen

$$\sum_i P_i = I \tag{III.28}$$

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \tag{III.29}$$

Encontrar la forma explícita de estos operadores puede no ser sencilla. en $D = 4$ y $N = 1$ hay sólo tres de estos pero en $D = 10$ y $N = 1$ hay 15. En $D = 4$ el problema fue abordado inicialmente por Sokatchev [79], por Taylor[81] y en un trabajo que encuentro muy excitante de Rittenberg y Sokatchev [83] pero la solución general, que ahora exponemos vino de la mano de Siegel y Gates [37] [36].

La idea es básicamente la de expandir un campo es sus componentes quirales. Esto funciona más o menos igual en dimensiones pares $4, 6 \mod 8$ pero *no* funciona para dimensiones $D = 2 \mod 8$ como $D = 10$. En dimensiones $D = 4, 6 \mod 8$ podemos elegir los fermiones de Weyl pero no podemos *además* imponer Majorana. Esto obliga a que tengamos supercampos $V(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i)$. La condición de quiralidad es

$$\bar{D}_{\dot{a}}{}^i V = 0 \tag{III.30}$$

Y su solución es $V = V(x_I^\mu, \theta^{ai})$ Este supercampo contiene $2^{\alpha N}$ donde $\alpha = 2^{D/2}$ es la dimensión del espacio de espinores. Dentro de este multiplete sólo cabe una representación irreducible, la de superespín cero que tiene exactamente ese número de grados de libertad. Un supercampo quiral se obtiene a partir de un supercampo arbitrario multiplicando por $\bar{D}^{\alpha N}$. Sin embargo un supercampo *escalar* arbitrario contiene otras subrepresentaciones además de la quiral. Para saber cuantas representaciones irreducibles hay dentro de un supercampo es muy útil la tabla II.1. Por ejemplo en un super campo con $N = 4$ hay 42 representaciones de superespín 0, 48 de superespín 1/2, 27 de superespín 1, 8 de superespín 3/2 y 1 de superespín 2 que corresponde a un supermultiplete de superespín 0 en $N = 8$. Hecho que no se si está muy claro en la literatura. Para probar esta afirmaciónsólo notemos que el álgebra de las matrices D_{ai} coincide con la de las cargas Q_{ai} y las representaciones irreducibles se construyen de la misma manera solo que ahora el vacío de Fock soporta toda una representación de super Poincarè.

¿Cómo extraemos las representaciones irreducibles de un supercampo? La respuesta es idéntica a extraer el componente en espines de un supermultiplete.
En general entonces tenemos el siguiente

☞ **Teorema III.1** *En dimensión* $D = 4, 6 \mod 8$ *y con extensión de supersimetría* N *un supercampo* $V(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i)$ *se puede escribir de manera única como*

$$V = \sum_i V_i \tag{III.31}$$

Donde los V_i *se obtienen como*

$$V_i = \mathbb{P}_i V \tag{III.32}$$

$$\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \delta_{ij} \mathbb{P}_i \tag{III.33}$$

$$\sum_i \mathbb{P}_i = I \tag{III.34}$$

Los operadores $\mathbb{P}_i$ *son, por tanto, operadores de proyección.*

III.4. Supercampos en el superespacio

En esta sección vamos a tratar de explicar como podemos escribir teorías supersimétricas en función de supercampos. De todos modos vamos a restringir nuestro estudio en gran medida. Vamos a estudiar solamente las teorías de super Yang-Mills. La razón está en que son teorías lo suficientemente complicadas para tener todos los ingredientes de las teorías de supercampos pero tan sencillas como es posible. Las teorías de super gravedad, por ejemplo, son más complicadas. Además el contenido geométrico de estas teorías es enorme. La idea es que si sabemos tratar estas teorías bien sabremos tratar otras más complicadas.

III.4.1. Super Maxwell en $D = 4$

Empecemos con el tratamiento usual de super Maxwell (en realidad super Yang-Mills, pero eso no nos importará) en el superespacio. El multiplete de super Maxwell consiste on-shell en un fotón y un fotino, y como hemos visto el multiplete off-shell es un fotón, un fotino y un escalar auxiliar. ¿Cómo encontrar un supercampo adecuado?

Como muestran los manuales de supersimetría basta con elegir un supercampo pseudoescalar, es decir invariante bajo cualquier transformación de Lorentz (hay otras opciones, esta es la más simple). Un supercampo así no se llama escalar sino *vectorial* porque contiene al supermultiplete vectorial, that's life. Aún así este supercampo contiene demasiados grados de libertad y es necesario imponer algunas restricciones sobre él para *matar* los indeseados. Una primera es obligar a que sea real. De manera que tenemos un supercampo $V(x,\theta)$ real. Aún este supercampo tiene demasiada libertad y lo último que necesitamos hacer es decir que significa invariancia de calibre en este caso. La respuesta es que dos supercampos vectoriales son equivalentes de calibre si su diferencia es de la forma $i(\Phi - \Phi^*)$, donde $\Phi(x,\theta)$ es un supercampo quiral. Es decir si $V(x,\theta)$ es un supercampo vectorial entonces la transformación de calibre adecuada

$$V(x,\theta) \to V(x,\theta) + i(\Phi - \Phi^*) \tag{III.35}$$

La razón es porque en el desarrollo en potencias de θ hay un término $A_\mu(x)$ que bajo esa transformación cambia como un campo de calibre decente. Todo este cuento esta bien narrado en cualquiera de los manuales de supersimetría aquí sólo quiero resaltar las partes de la historia que son relevantes para nosotros.

Lo más importante de todo esto es darse cuenta que todo el mecanismo es completamente ad hoc. Es decir no hay ninguna razón para decir que deseamos partir de un supercampo *escalar* bajo Lorentz, ni que queramos imponer la condición de realidad, ni para decir que la simetría de calibre se realiza de la forma mencionada. O bien el único motivo es simplemente porque funciona.

Claro esa puede ser una razón suficiente para algunos, pero la falta de geometría es arrecha y puede generar problemas. El primer problema es ¿cómo se mueve una superpartícula en presencia de super Maxwell? o mejor como le gustaría decir a Jorge Bellorin ¿cómo se acopla una superpartícula a un campo de calibre (con super en algún lado)? El problema no puede responderse tal y como están planteadas las cosas simplemente porque no hay geometría. ¡Ojo! no digo que no podamos dar respuesta a ese problema, estoy seguro de que mirando como transforman cada uno de los términos uno puede dar una respuesta adecuada. Pero creo que parece evidente que esta pregunta deja en jaque a todo este proceso. Vamos a tratar de dar respuesta a esta pregunta de manera más geométrica empezando por otro lado.

Supongamos ahora que empezamos con un super campo de calibre $A_M(x, \theta)$ donde M recorre tanto índices del espacio tiempo como espinoriales $M = (\mu, a)$. Esta sería la generalización directa de super Maxwell que existe en todas dimensiones y que tiene muchísimos más campos de los deseados. La transformación de calibre, convenientemente definida será $A_M \to A_M + D_M\Lambda$, donde Λ es un supecampo arbitrario. Aquí la geometría es orgásmica pero insisto hay demasiados campos. Otra vez hay que eliminar de alguna forma los que no queremos. Pero ¿porqué? y ¿cómo?. Si responde bien a estas dos preguntas en menos de un año seré un chico muy feliz. Déjame responder mal. ¿Porque? simplemente porque estamos haciendo mal geometría en el superespacio, no hemos identificado bien que es un espacio tangente y los grados de libertad no son los adecuados. ¿Cómo? cuando sepamos hacer geometría tendremos respuesta. Lo que vamos a hacer ahora es sacarnos de la manga una serie de ligaduras que debe cumplir A_M de manera que tenga sólo los grados de libertad que quiero para más tarde demostrar que estos vínculos surgen de manera natural al pedirle a la superpartícula acoplada como debe ser a super Maxwell que tenga simetría κ. De tal suerte que tenemos una forma de responder el como, esto es, exigiendo simetría kappa. El día en el que encontremos una razón para esta simetría tendremos geometría, ¿convincente? O.K. a los cálculos.

En 4 dimensiones podemos elegir que los fermiones sean Majorana o Weyl y ambas son equivalentes. Los elegiré Weyl como todo el mundo hace. Eso quiere decir que el super espacio tiene coordenadas $(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}} = (\theta^a)^*)$.. Elegimos como en la mayoría de los manuales

$$P_\mu = i\partial_\mu \tag{III.36}$$

$$Q_a = -i\partial_a + \sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.37}$$

$$\bar{Q}_{\dot{a}} = i\partial_{\dot{a}} + \theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.38}$$

Satisfacen el álgebra adecuada de super Poincarè. Las derivadas fermiónicas se definen como

$$D_a = \partial_a + i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.39}$$

$$\bar{D}_{\dot{a}} = -\partial_{\dot{a}} - i\theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.40}$$

Anticonmutan con los generadores Q_a y $Q_{\dot{a}}$, pero entre ellas satisfacen el álgebra

$$\{D_a, D_b\} = \left\{\bar{D}_{\dot{a}}, \bar{D}_{\dot{b}}\right\} = 0 \tag{III.41}$$

$$\left\{D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right\} = -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.42}$$

Alguien podría preguntarme ¿porqué elegimos así las derivadas fermiónicas?. Los manuales generalmente no dan una explicación y la que dan no me convence. Creo sinembargo que existe una respuesta más que convincente y no estoy seguro de que la gente la tenga siempre presente. La razón es la siguiente. En el caso bosónico ∂_μ puede entenderse como un elemento del tangente. Si yo hago una transformación en el espacio esta me induce una transformación en el tangente. El grupo que opera en el tangente es Lorentz mientras que en el espacio es Poincarè (o en general Diff$M$). Recuerden que x^μ es un vector bajo Poincarè pero $\dot{x}^\mu$ es un vector *sólo* bajo Lorentz. En el supercaso el grupo que opera en el tangente tiene que ser otra vez Lorentz, ¡básicamente porque no existe super Lorentz!, recuerden que dos transformaciones de supersimetría me conducen a una translación. Este hecho tan sumamente importante fue descubierto por los Rusos y ha generado ciertos errores a lo largo del tiempo. De manera que queremos que los elementos del tangente cambien en una representación de Lorentz cuando abajo hago una de super Poincarè. El hecho de que las derivadas fermiónicas anticonmuten con las supercargas quiere decir que transforman como espínores de Lorentz. Eso es justo lo que queremos. ¿Convenzo? D_a puede estar en algún espacio tangente ∂_a no. Así las cosas definimos nuestro supercampo de calibre como

$$A_M(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}}) = (A_\mu(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}}), A_a(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})) \tag{III.43}$$

Si $\Lambda(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$ es un supercampo arbitrario entonces una transformación de calibre será

$$A_M \to A_M + D_M \Lambda$$

Entiendo que $D_\mu = \partial_\mu$. Ahora en el caso bosónico puedo imaginar que ∂_μ son derivadas covariantes en un espacio plano. En nuestro caso deben serlo las D_M. Pero si miramos bien ni conmutan ni anticonmutan, el (anti)conmutador de las derivadas covariantes esta relacionado con la torsión. Estrictamente:

$$\{D_M, D_N\} = T_{MN}{}^L D_L$$

En nuestro caso

$$T^\mu_{a\dot{b}} = -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \qquad \bar{T}^\mu_{\dot{b}a} = -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}$$

y los demás nulos. Es decir en el espacio plano ¡hay torsión!. Puede no ser tan raro si uno piensa que tenemos espín. Esta es la manera más sencilla de calcular la torsión en el superespacio. La primera ecuación de este tipo fue obtenida por los rusos. Mas tarde la gente que inventó supergravedad en el superespacio se vió en la necesidad de postularla.

El acoplamiento a la superpartícula será

$$A_\mu \dot{z}^\mu + \dot{\theta}^a A_a + \bar{A}_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}$$

Que es real y bajo una transformación de calibre cambia como $d\Lambda/dt$ como debe ser. $\dot{z}^\mu = \dot{x}^\mu + i\theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} - i\dot{\theta}^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}}$.
Ahora queremos definir la curvatura. Pero tenemos torsión. La manera adecuada es

$$F_{MN} = D_M A_N + (-1)^{MN} D_N A_M - T_{MN}{}^L A_L$$

O en componentes

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F_{\mu a} &= \partial_\mu A_a - D_a A_\mu \\ F_{ab} &= D_a A_b + D_b A_a \\ F_{a\dot{b}} &= D_a A_{\dot{b}} + D_{\dot{b}} A_a + 2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} A_\mu \end{aligned}$$

Y sus conjugados, claro. No hace falta hablar de geometría para escribir estas fórmulas. La gente lo hizo meramente observando que son los elementos invariantes de calibre. Pero me gusta esta forma.

Las identidades de Bianchi se pueden escribir de varias maneras. Tal vez la más sencilla es invocando Jacobi

$$\{\{\mathbb{D}_M, \mathbb{D}_N\}, \mathbb{D}_L\} + \{\{\mathbb{D}_L, \mathbb{D}_M\}, \mathbb{D}_N\} + \{\{\mathbb{D}_N, \mathbb{D}_L\}, \mathbb{D}_M\} = 0$$

Donde $\mathbb{D}_M = D_M + A_M$ es la derivada covariante. Por favor los corchetes están convenientemente graduados. ¡No me hagan escribir de más! Otra manera es con geometría que dice que Bianchi significa $dF = 0$

$$D_M F_{NL} - T_{MN}{}^K F_{KL} + D_L F_{MN} - T_{LM}{}^K F_{KN} + D_N F_{LM} - T_{NL}{}^K F_{KM} = 0$$

O la forma más mecánica que es meramente "buscar" las identidades. Estas fórmulas son para muchos (Sohnius, por ejemplo) el punto de partida. Volviendo a nuestro problema queremos imponer condiciones sobre el A_M que mate los grados de libertad

incorrectos. Lo mejor es imponer condiciones sobre los F_{MN} que son invariantes de calibre. Quisiera hacer un comentario de tremenda importancia. Las condiciones que vamos a imponer deben de ser lineales. Si impongo condiciones no lineales acabaré con representaciones no lineales de grupo de super Poincaré dentro de A_M. Esta posiblemente sea la salida en 10 dimensiones pero no quiero hablar de eso ahorita.
Ya que hemos hecho tanta geometría hasta ahora lo ideal sería buscar un motivo geométrico que nos deje la teoría en nomov (off-shell). Como digo, eso está relacionado con la simetría kappa y lo analizaremos en otra sección. Vamos a repetir las cuentas de Sohnius.
El se "dió cuenta"de que lo adecuado es hacer

$$F_{ab} = \bar{F}_{\dot{a}\dot{b}} = F_{a\dot{b}} = \bar{F}_{\dot{a}b} = 0 \tag{III.44}$$

Como él dice, hacer la teoría plana en las direcciones fermiónicas. Si $N \neq 1$ o la dimensión mayor que 4 este sistema no sirve... Demostremos que aquí funciona.
Las dos primeras identidades son

$$D_a A_b - D_b A_a = 0$$

y su conjugada, cuya solución debe ser [4]

$$A_a = D_a V \qquad \bar{A}_{\dot{a}} = \bar{D}_{\dot{a}} V^*$$

Donde V es un supercampo arbitrario. Es necesario notar que V no está unívocamente definido, esto me ha causado muchos quebraderos de cabeza. Cualquier campo $V + i\Phi$,

[4]Precaución. Yo estoy exigiendo que $(A_a)^* = \bar{A}_{\dot{a}}$, lo que realmente es necesario que esto sea así módulo una transformación de calibre. Lo mismo sucede en el caso habitual, no tiene nada de malo que el potencial tenga una parte compleja siempre y cuando sea un calibre. De hecho Wess, Zumino, Sohnius y con ellos los demás usan este hecho para imponer un calibre en el que $\bar{A}_{\dot{a}} = 0$. Aquí no estamos haciendo eso, todo el tiempo me mantendré con $(A_a)^* = \bar{A}_{\dot{a}}$, eso no tiene nada de malo, es sólo una *preferencia*. Confio que todo sea equivalente, por supuesto. Pero esto es importante porque muchas de sus fórmulas no encajan con las nuestras.

donde Φ es quiral, da el mismo supercampo A_M. La transformación $V \to V + i\Phi$ no es una transformación de calibre sino, si se quiere de precalibre. La tercera ecuación implica que

$$D_a \bar{D}_{\dot{b}} V^* + \bar{D}_{\dot{b}} D_a V + 2i\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} A_\mu = 0$$

Si multiplicamos por $\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}a}$ y recordamos que $Tr(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu}$ concluímos que

$$A_\mu = \frac{i}{4}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}a}\left[\left(D_a\bar{D}_{\dot{b}} + \bar{D}_{\dot{b}} D_a\right) V_R + i\left(D_a \bar{D}_{\dot{b}} - \bar{D}_{\dot{b}} D_a\right) V_I\right]$$

Eso implica la fórmula (he escrito $V = V_R + iV_I$)

$$A_\mu = -\frac{1}{4}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}a}\left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V_I + \partial_\mu V_R$$

De manera que dado V complejo arbitrario podemos hacer una transformación de calibre que mate la parte real. Eso fija absolutamente el calibre. Pero aún hay una indeterminación en V_R debido a las transformaciones de precalibre de las que hablaba. Dos supercampos complejos que difieran en un campo quiral deben identificarse y, por lo tanttambiénen sus partes imaginarias. Eso implica que V_I y $V_I + i(\Phi - \Phi^*)$ definen el mismo calibre. Es decir los campos A_μ, A_a y $\bar{A}_{\dot{a}}$ están relacionados por una transformación de calibre. Dicho de otra manera la transformación $V \to V + i(\Phi - \Phi^*)$ *induce* una transformación de calibre dada por $A_M \to A_M + D_M(\Phi + \Phi^*)$. ¡Ojo! a los signos.

Ya hemos demostrado lo que queríamos. Con ello hemos explicado geométricamente porque la construcción de Wess y Zumino funciona.
Si elegimos el calibre en el que $V_R = 0$ tenemos las importantes fórmulas:

$$A_\mu = -\frac{1}{4}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}a}\left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V$$
$$A_a = iD_a V$$

(Quitando el subíndice I). Entonces:

$$F_{\mu a} = \partial_\mu A_a - D_a A_\mu = i\frac{i}{4}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}b}\left\{D_b, \bar{D}_{\dot{b}}\right\} D_a V - \frac{1}{4}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{b}b} D_a\left[D_b, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V$$

Que finalmente da

$$F_{\mu a} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{b}b} D_b \bar{D}_{\dot{b}} D_a V \tag{III.45}$$

Necesito un resultado más. Parte del trabajo de Sonhius (¡y mucha otra gente!) es tratar de describir super Maxwell no en términos de un A_M sin no en términos de la curvatura F_{MN}. Si asumimos así las cosas las identidades de Bianchi no son identidades sino ecuaciones. El trabajo consiste entonces en resolver las ecuaciones de Bianchi suponiendo que $F_{ab} = 0$ y compañia.
Para ello partimos de la ecuación

$$\{\{\mathbb{D}_a, \mathbb{D}_{\dot{b}}\}, \mathbb{D}_b\} + \{\{\mathbb{D}_b, \mathbb{D}_a\}, \mathbb{D}_{\dot{b}}\} + \{\{\mathbb{D}_{\dot{b}}, \mathbb{D}_a\}, \mathbb{D}_b\} = 0$$

Que implica:

$$\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} F_{\mu b} + \sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}} F_{\mu a} = 0 \tag{III.46}$$

Por otra parte la ecuación (con los signos adecuadamente elegidos):

$$\{\{\mathbb{D}_\mu, \mathbb{D}_a\}, \mathbb{D}_b\} + \{\{\mathbb{D}_b, \mathbb{D}_\mu\}, \mathbb{D}_a\} + \{\{\mathbb{D}_a, \mathbb{D}_b\}, \mathbb{D}_\mu\} = 0$$

implica

$$D_b F_{\mu a} + D_a F_{\mu b} = 0 \tag{III.47}$$

Ambas ecuaciones ((III.46) y (III.47)) deberían de ser identidades si introducimos el valor de $F_{\mu a}$ que hemos hallado en (III.45). Si multiplicamos por $\bar{\sigma}_{\nu}^{\dot{b}a}$ y sumamos convenientemente recordando la identidad $Tr[\bar{\sigma}_\nu \sigma^\mu] = 2\delta_\nu{}^\mu$ obtenemos

$$2F_{\nu b} + \bar{\sigma}_{\nu}{}^{\dot{b}a} \sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}} F_{\mu a} = 0$$

Si tenemos en cuenta la identidad $\sigma^\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}^\mu = 2\delta^\mu_\nu$ llegamos a

$$2F_{\nu b} + \left(\bar{\sigma}_{\nu}{}^{\dot{b}a} \sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}} + \sigma_{\nu\, b\dot{b}} \bar{\sigma}^{\mu\, \dot{b}a}\right) F_{\mu a} - \sigma_{\nu\, b\dot{b}} \bar{\sigma}^{\mu\, \dot{b}a} F_{\mu a} = 0$$

Que finalmente resulta en

$$4F_{\mu a} = \sigma_{\mu\, a\dot{b}} \bar{\sigma}^{\nu\, \dot{b}b} F_{\nu b}$$

Y se puede escribir como

$$F_{\mu a} = i\sigma_{\mu\, a\dot{b}} \bar{W}^{\dot{b}} \tag{III.48}$$

Es fácil ver que (III.48) es solución de (III.46) usando la identidad $\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\sigma_{\mu\, b\dot{a}} = 2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$. También disponemos de la fórmula inversa, por supuesto.

$$\bar{W}^{\dot{b}} = \frac{-i}{4} \bar{\sigma}^{\mu\, \dot{b}b} F_{\mu b}$$

Usando (III.45) podemos escribir $\bar{W}^{\dot{b}}$ en función de V

$$\bar{W}^{\dot{a}} = \frac{i}{8} \bar{\sigma}^{\mu\, \dot{a}a} \bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{b}b} D_b \bar{D}_{\dot{b}} D_a V = \frac{i}{8} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} D^2 \bar{D}_{\dot{b}} V$$

Para terminar (III.47) es

$$\sigma_{\mu\, b\dot{b}} D_a \bar{W}^{\dot{b}} + \sigma_{\mu\, b\dot{b}} D_a \bar{W}^{\dot{b}} = 0$$

Multiplicando por $\sigma^{\mu\, b\dot{c}}$ tenemos la condición de quiralidad

$$D_a \bar{W}^{\dot{b}} = 0$$

Quería escribir todo esto para que quedase todo lo más claro posible comparando con otros métodos.

Ahora deberíamos hablar de las ecuaciones de movimiento y Lagrangianos. Desgraciadamente aún no disponemos de una formulación geométrica de super Maxwell semejante a la formulación no supersimétrica así que la única manera de encontrar la acción adecuada es por ensayo y error. Seremos muy breves por esto se encuentra explicado muy bien en muchos manuales (ver especialmente el libro de Wess y Bager)

Los libros eneseñan que se puede escribir un Lagrangiano de la componente θ^2 de un supercampo quiral porque esta transforma bajo supersimetría como una derivada total. El lagrangiano que debemos usar es

$$\mathcal{L} = W^a W_a|_{\theta^2} + \bar{W}_{\dot{a}} W^{\dot{a}}|_{\bar{\theta}^2} = \frac{-1}{4} F_{\mu\, a} F^{\mu\, a}|_{\theta^2} + \frac{-1}{4} \bar{F}_{\mu\, \dot{a}} \bar{F}^{\mu\, \dot{a}} \tag{III.49}$$

La ecuación de movimiento que se sigue de este Lagrangiano es

$$D_a W^a + \bar{D}_{\dot{a}} \bar{W}^{\dot{a}} = 0 \tag{III.50}$$

III.4.2. Supersimetría extendida

Ya hemos descrito con cierta profundidad super Maxwell en $D = 4$ y $N = 1$ en el superespacio. Vamos a generalizar esto a $N > 1$ y despues a $D > 4$. Si hacemos $N > 2$ en el superespacio de Salam y Strathdee tendremos las super formas

$$A_M(x^\mu, \theta^{a\, i}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i) = (A_\mu, A_{a\, i}, \bar{A}_{\dot{a}}{}^i) \tag{III.51}$$

Igual que antes podemos escribir las curvaturas

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{III.52}$$

$$F_{\mu\, ai} = \partial_\mu A_{ai} - D_{ai} A_\mu \tag{III.53}$$

$$F_{ai\, bj} = D_{ai} A_{bj} + D_{bj} A_{ai} \tag{III.54}$$

$$F_{ai\, \dot{b}}{}^j = D_{ai} \bar{A}_{\dot{b}}{}^j + \bar{D}_{\dot{b}}{}^j A_{ai} - 2\delta_i{}^j \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} A_\mu \tag{III.55}$$

Con la misma tecnología que antes debemos imponer restricciones a las F's. Sorprendentemente la historía aqui es competamente diferente. Si imponemos que

$$F_{ai\, bj} = F_{ai\, \dot{b}}{}^j = 0 \tag{III.56}$$

¡Entonces la teoría es un calibre puro! Parece que lo adecuado es hacer

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \tag{III.57}$$

$$F_{ai\,b}{}^{j} = 0 \tag{III.58}$$

Sin embargo estas ecuaciones no son ningún paraíso para $N = 2$ hacen un trabajo bastante semejante al de $N = 1$ pero para $N = 3, 4$ implican las ecuaciones de movimiento para $A_\mu(x)$. Este es un resultado bastande desolador sobre todo desde el punto de vista geométrico. El hecho de tener que poner restricciones a los campos ya es de por si una mala noticia, especialmente cuando esto se hace sin ningún esquema claro. Pero aquí tropezamos con algo aún peor. Estamos exigiendo que una uno forma tenga que satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

Tratemos de solucionar estas ecuaciones. La primera ecuación nos dice que

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \Longrightarrow F_{ai\,bj} = \varepsilon_{ab}\bar{W}_{ij} \tag{III.59}$$

Donde $\bar{W}_{ij}$ es un supercampo que verifica $\bar{W}_{ij} = -\bar{W}_{ji}$. Para $N = 2$ un cálculo largo debido a Sohnius muestra que todas las curvaturas se pueden escribir en términos de $\bar{W}_{ij}\varepsilon_{ij}\bar{W}$ y que el campo escalar $\bar{W}$ satisface las siguientes restricciones

$$D_{a\,i}\bar{W} = \bar{D}_{\dot{a}}{}^{i}W = 0 \tag{III.60}$$

$$\varepsilon^{ab}D_{ai}D_{bj}W = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\bar{D}_{\dot{a}i}\bar{D}_{\dot{b}j}\bar{W} \tag{III.61}$$

Voy a analizar muy esquemáticamente la solución en campos de componentes de estas ecuaciones. Más tarde vamos a trabajar con toda profundidad el caso de $D = 6$ cuya reducción dimensional da este.

La primera es una condición de quiralidad y la segunda una condición de realidad. Estudiemos la primera. Un campo quiral en $D = 4$ puede expandirse como

$$W = \phi + \lambda_{ai}\theta^{ai} + \Psi_{ai\,bj}\theta^{ai}\theta^{bj} + \chi_{ai}\theta^2\theta^{ai} + \varphi\theta^4 \tag{III.62}$$

El término $\Psi_{aibj} = \varepsilon_{ij}\Psi_{ab} + \varepsilon_{ab}\Psi_{ij}$ y contribuye con un vector y tres escalares. En total tenemos: un vector, 2 espinor, 5 escalares.
La ecuación de movimiento es muy semejante a la condición de realidad

$$\varepsilon^{ab} D_{ai} D_{bj} W = -\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \bar{D}_{\dot{a}i} \bar{D}_{\dot{b}j} \bar{W} \tag{III.63}$$

III.4.3. El caso de $D = 6$ y $N = 1$

Hagamos ahora el trabajo en $D = 6$.
El superespacio es $x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}}$. Para hablar de super-Maxwell hay que introducir una superconexión $A_\mu, A_a, \bar{A}_{\dot{a}}$. Si dejamos los índices en la posición adecuada todo es bastante similar al caso de 4 dimensiones. Las derivadas covariantes serán

$$\begin{aligned} D_a &= \partial_a + i S^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{b}} &= -\bar{\partial}_{\dot{b}} - i\theta^a S^\mu{}_{a\dot{b}} \partial_\mu \\ \left\{ D_a, \bar{D}_{\dot{b}} \right\} &= -2i S^\mu{}_{a\dot{b}} \partial_\mu \end{aligned}$$

La torsión vendrá defina por

$$\{D_M, D_N\} = T_{MN}{}^L D_L$$

La curvatura

$$\begin{aligned} F_{ab} &= D_a A_b + D_b A_a \\ F_{a\dot{b}} &= D_a \bar{A}_{\dot{b}} + \bar{D}_{\dot{b}} A_a + 2i S^\mu{}_{a\dot{b}} A_\mu \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

En este caso las ligaduras sobre la curvatura que dejan la teoría off-shell son las mismas que en $D = 4$ y $N = 1$

$$F_{ab} = \bar{F}_{\dot{a}\dot{b}} = F_{a\dot{b}} = \bar{F}_{\dot{a}b} = 0$$

Las dos primeras implican que

$$A_a = D_a V \qquad \bar{A}_{\dot{a}} = \bar{D}_{\dot{a}} V^*$$

Y la siguiente

$$\begin{aligned} D_a \bar{D}_{\dot{b}} V^* + \bar{D}_{\dot{b}} D_a V + 2i S^{\mu}{}_{a\dot{b}} A_\mu = 0 \\ -i(D_a \bar{D}_{\dot{b}} V_I - \bar{D}_{\dot{b}} D_a V_I) + \{D_a\} D_{\dot{b}} V_R + 2i S^{\mu}{}_{a\dot{b}} A_\mu = \\ = -i \left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V_I + 2i S^{\mu}{}_{a\dot{b}} (A_\mu - \partial_\mu V_R) = 0 \end{aligned}$$

De la misma manera que en 4 dimensiones $S^\mu \bar{S}^\nu + S^\nu \bar{S}^\mu = -2\eta^{\mu\nu}$ lo que implica que $\mathrm{Tr}(S^\mu \bar{S}^\nu) = -4\eta^{\mu\nu}$. [5] De manera que tambien podemos despejar A_μ tal como en 4 dimensiones

$$A_\mu = \frac{1}{8} \bar{S}_\mu^{\;\dot{b}a} \left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V_I + \partial_\mu V_R$$

Siguiendo el programa al pie de la letra podemos hacer una transformación de calibre que mate la parte real. Así pues, igual que en cuatro.

$$\begin{aligned} A_a = i D_a V \\ A_\mu = \frac{1}{8} \bar{S}_\mu^{\;\dot{b}a} \left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V \end{aligned}$$

Introduciendo este valor y usando una identidad llegamos a

$$\left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V = \left[\bar{D}_a, D_{\dot{b}}\right] V = J_a{}^{\dot{a}} J_{\dot{b}}{}^{b} \left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_b\right] V \tag{III.64}$$

$$(\delta_a{}^b \delta_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} - J_a{}^{\dot{a}} J_{\dot{b}}{}^{b}) \left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_b\right] V = 0 \tag{III.65}$$

recordemos que aún tenemos la libertad de calibre $V \to V + i(\Phi - \Phi^*)$. Donde Φ verifica

$$\bar{D}_{\dot{a}} \Phi = 0$$

[5] Ahora, si μ y ν son ambos diferentes de cero $\mathrm{Tr}(S^\mu \bar{S}^\mu) = \mathrm{Tr}(S^\nu \bar{S}^\mu)$. Si uno de los dos es cero pero no el otro la traza es cero porque la traza de S^i es cero.

Es fácil solucionar esta ecuación por similitud con $D = 4$ se trata de una función $\Phi(y^\mu, \theta^a)$ con $y^\mu = x^\mu + i\theta^a S^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}$. De modo que

$$\Phi(y^\mu, \theta^a) = \phi(y^\mu) + \Psi^{(1)}_a \theta^a + \Psi^{(2)}_{ab}(y^\mu)\theta^a\theta^b + ...$$

Esto nos ayuda a elegir un calibre para V en el que no haya ninguna potencia de las θ^a solas o sus conjugadas, solo las mixtas. En $D = 4$ este es el bien conocido calibre de Wess y Zumino

$$V_{WZ} = A_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\theta^a\bar{\theta}^{\dot{b}} + (\lambda_a\theta^a\bar{\theta}^2 + c.c.) + D\theta^2\bar{\theta}^2$$

En $D = 6$ hay muchos más términos, claro está. Para analizarlos con algo de oren definamos la ssignatura de un término como el número de variables θ^a menos el número de variables $\bar{\theta}^{\dot{a}}$. Por ejemplo el término ${}_2H_{a\dot{a}}\theta^a\bar{\theta}^{\dot{a}}$ tiene ssignatura cero. Tenemos términos de ssignatura 0, 1, 2 y 3 y sus conjugados que tienen ssignaturas de signo contrario. Los términos de ssignatura cero son

$$H^{(1)}_{a\dot{a}}\theta^a\bar{\theta}^{\dot{a}} + H^{(2)}_{ab\dot{a}\dot{b}}\theta^a\theta^b\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}} + H^{(3)}_{abc\dot{a}\dot{b}\dot{c}}\theta^a\theta^b\theta^c\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{c}} + H^{(4)}_{abcd\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{c}}\bar{\theta}^{\dot{d}}$$

Los de ssignatura 1:

$$\Psi^{(1)}_{ab\dot{a}}\theta^a\theta^b\bar{\theta}^{\dot{a}} + \Psi^{(2)}_{abc\dot{a}\dot{b}}\theta^a\theta^b\theta^c\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}} + \Psi^{(3)}_{abcd\dot{a}\dot{b}\dot{c}}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{c}}$$

Ssignatura 2:

$$D^{(1)}_{abc\dot{a}}\theta^a\theta^b\theta^c\bar{\theta}^{\dot{a}} + D^{(2)}_{abcd\dot{a}\dot{b}}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}}$$

Finalmente el de ssignatura 3:

$$\Xi_{abcd\dot{a}}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d\bar{\theta}^{\dot{a}}$$

Es de notar que $\left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_a\right]$ no cambia la ssignatura por tanto los cuatro grupos pueden analizarse por separado. Vamos a analizar término a término. Primero notemos que

$$\left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_a\right] = -2\bar{\partial}_{\dot{a}}\partial_a + 2i\left(S^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\bar{\partial}_{\dot{a}} - \theta^b S^\mu{}_{b\dot{a}}\partial_\mu\partial_a\right) + 2\theta^b S^\mu{}_{b\dot{a}}S^\nu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\partial_\nu$$

El término $\left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_a\right] V$ sin θ^a es

$$H^{(2)}_{a\dot{a}}$$

Que debe ser hermítico y satisfacer $JH = -HJ$ lo que implica que

$$H^{(2)}_{a\dot{a}} = A_\mu(x) S^\mu{}_{a\dot{a}}$$

Los términos con $\theta^a \bar{\theta}^{\dot{a}}$ son

$$2iS^\nu{}_{b\dot{a}} S^\mu{}_{a\dot{b}} F_{\mu\nu} + 8H^{(2)}_{ab\dot{a}\dot{b}}$$

y deben verificar la ecuación (además de la condición de realidad)

$$iS^\nu{}_{b\dot{a}} S^\mu{}_{a\dot{b}} F_{\mu\nu} + 4H^{(2)}_{ab\dot{a}\dot{b}} = J_a{}^{\dot{\alpha}} J_{\dot{a}}{}^{\alpha} \left(iS^\nu{}_{b\dot{\alpha}} S^\mu{}_{\alpha\dot{b}} F_{\mu\nu} + 4H^{(2)}_{\alpha b\dot{\alpha}\dot{b}} \right)$$

Para solucionarla definamos por comodidad

$$\hat{H}_{ab\alpha\beta} \equiv J_\alpha{}^{\dot{a}} J_\beta{}^{\dot{b}} H_{ab\dot{a}\dot{b}}$$
$$\hat{S}^\mu{}_{a\beta} \equiv J_\beta{}^{\dot{b}} s^\mu{}_{a\dot{b}}$$

En estos términos la ecuación implica que

$$\hat{H}_{ba\alpha\beta} + \hat{H}_{b\alpha a\beta} = \frac{i}{4} F_{\mu\nu} \left(\hat{S}^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{S}^\nu{}_{ba} + \hat{S}^\mu{}_{a\beta} \hat{S}^\nu{}_{b\alpha} \right)$$

Es decir podemos escribir

$$\hat{H}_{ab\alpha} = \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \left(\hat{S}^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{S}^\nu{}_{ba} + \hat{S}^\mu{}_{a\beta} \hat{S}^\nu{}_{b\alpha} \right) + H(x) \varepsilon_{ab\alpha\beta}$$

Después de tanta cuenta la moral es bastante simple. La parte simétrica de $H^{(2)}$ queda perfectamente determinada mientras que la antisimétrica es libre. Es fácil entender entonces que lo mismo va a suceder con $H^{(3)}$. Esta vez la parte totalmente antisimétrica es cero y no aparecen nuevos campos. Lo mismo podemos decir de $H^{(4)}$. Vamos ahora con los campos de ssignatura 1.

Términos en θ^a en el desarrollo de $\left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_a\right] V$:

$$4\Psi_{ab\dot{a}}\theta^b$$

La solución para este término es

$$\Psi_{ab\dot{a}} = J_{\dot{a}}{}^c \varepsilon_{abcd} \lambda^d(x)$$

De la misma manera que antes $\Psi^{(2)}$ y $\Psi^{(3)}$ se pueden escribir en función de $\lambda^a(x)$ sin que aparezcan nuevos términos. Los términos de signatura 2. El más bajo es

$$D^{(1)}_{abc\dot{a}}\theta^b\theta^c$$

Nuestra ecuación implica que es totalmente antisimétrico

$$D^{(1)}_{abc\dot{a}} = (D_1(x) + iD_2(x)) J_{\dot{a}}{}^d \varepsilon_{abcd}$$

Donde hemos resltado las componentes reales. En $D^{(2)}$ naturalmente no surgen más campos ni limitan los existentes. El último término de todos (de ssignatura 3) es sencillamente cero. De manera que el conjunto de campos off-shell que hemos obtenido es

- 1 vector $A_\mu(x)$
- 1 espinor $\Psi^a(x)$
- 3 escalares $D_1(x)$, $D_2(x)$, $D_3(x)$.

Este es el contenio correcto de super Maxwell off-shell en $D = 6$. Notemos que si reducimos dimensionalmente estos campos a $D = 4$ obtenemos el supermultiplete que antes hemos mencionado.

No somos los primeros en tratar el caso de $D = 6$. Merece la pena hacer una breve comparación con el método de Nillson.
Al igual que en $D = 4$ podemos ver que

$$F_{\mu a} = S_{\mu\, a\dot{b}} \bar{W}^{\dot{b}}$$

Para demostrarlo simplemente calculamos

$$F_{\mu a} = \partial_\mu A_a - D_a A_\mu = i\partial_\mu D_a V - \frac{1}{8} D_a \bar{S}_\mu^{\dot{b}b} \left[\bar{D}_{\dot{b}}, D_b\right] V$$

Como $\left\{D_a, \bar{D}_{\dot{a}}\right\} = -i2S^\mu{}_{a\dot{a}}\partial_\mu$ tenemos que

$$i\partial_\mu = \frac{1}{8} \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} \left\{D_b, \bar{D}_{\dot{b}}\right\}$$

y por tanto

$$8F_{\mu a} = D_a \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} \left(\left\{D_b, \bar{D}_{\dot{b}}\right\} + \left[D_b, \bar{D}_{\dot{b}}\right]\right) V$$

O, lo que es lo mismo

$$F_{\mu a} = \frac{1}{4} D_a \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} D_b \bar{D}_{\dot{b}} V = -\frac{1}{4} D_b \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} D_a \bar{D}_{\dot{b}} V = \frac{1}{8} \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} D_b \left[\bar{D}_{\dot{b}}, D_a\right] V$$

Usando el hecho

$$\left[\bar{D}_{\dot{a}}, D_a\right] V = \frac{-1}{4} S^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{S}_\mu^{\dot{b}b} \left[\bar{D}_{\dot{b}}, D_b\right] V$$

Finalmente

$$F_{\mu a} = \frac{-1}{32} S^\nu{}_{a\dot{b}} D_b \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} \bar{S}_\nu{}^{\dot{c}c} \left[\bar{D}_{\dot{c}}, D_c\right] V$$
$$\bar{W}^{\dot{a}} = -\frac{1}{6} \bar{S}^{\mu\,\dot{a}a} \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}b} D_a D_b \bar{D}_{\dot{b}} V$$

Una pregunta que uno puede hacerse es cómo es posible que exista un prepotencial para $D = 6$ y no exista para $D = 4$ y $N = 2$. Veamos que la reducción dimensional de las ecuaciones en $D=6$ llegan a las correctas de $D=4$. Llamemos Γ^μ a las matrices en $D=6$ y γ^μ a las matrices de Dirac en $D=4$. Como mencionamos en el primer capítulo una de las virtudes de nuestro convenio para las matrices de Clifford es que estan bien adaptadas para la reducción dimensional. Resulta que

$$\sigma^{\mu\nu} = \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \tag{III.66}$$

Entonces si $\mu, \nu = 0,1,2,3$

$$S^{\mu\nu} = S^\mu \bar{S}^\nu - S^\nu \bar{S}^\mu = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{III.67}$$

Es decir, un espinor en $D=6$ desdobla en dos espinores de $D=4$. La regla de oro es

$$\theta^\alpha \to \begin{pmatrix} \theta^{a1} \\ \bar{\theta}_{\dot{a}2} \end{pmatrix} \tag{III.68}$$

$$\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \to \begin{pmatrix} \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_1 \\ \theta_a{}^2 \end{pmatrix} \tag{III.69}$$

Discutamos un momento la posición de los índices. Las matrices $S_{\alpha\dot{\beta}}$ se desdoblan en matrices 2×2

$$S = \begin{pmatrix} S_{a\dot{b}} & S_a{}^b \\ \bar{S}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} & \bar{S}^{\dot{b}a} \end{pmatrix} \tag{III.70}$$

Con nuestros convenios

$$S^\mu{}_{a\dot{b}} = \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \text{ para } \mu = 0,1,2,3 \tag{III.71}$$

$$S^4{}_{a\dot{b}} = S^5{}_{a\dot{b}} = 0 \tag{III.72}$$

$$S^{\mu\,a}{}_b = \bar{S}_{\mu\,\dot{a}}{}^{\dot{b}} = 0 \text{ para } \mu = 0,1,2,3 \tag{III.73}$$

$$S^5{}_a{}^b = -S^4{}_a{}^b = \delta_a{}^b \tag{III.74}$$

En esta representación la reducción dimensional de las derivadas covariantes es sencilla. La definición

$$D_\alpha = \partial_\alpha + iS^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} \tag{III.75}$$

da lugar a

$$D_{a1} = \partial_{a1} + iS^\mu{}_{a\dot b}\bar\theta^{\dot b}\partial_\mu + iS^\mu{}_a{}^b\theta_b\partial_\mu \tag{III.76}$$

Y su conjugada. Si hacemos reducción dimensional resulta ser exactamente la derivada covariante en $D = 4$.

Vamos con la reducción de las ligaduras de la teoría off-shell en $D = 6$. Estas son

$$F_{\alpha\beta} = 0 \tag{III.77}$$

$$F_{\alpha\dot\beta} = 0 \tag{III.78}$$

La primera implica en $D = 4$ que $F_{a1\,b1} = F_{a1\,\dot b2} = 0$. La segunda es más complicada

$$F^{(6)}{}_{a1\,b2} = F^{(4)}{}_{a1\,b2} + 2i\varepsilon_{ab}(A_4 + A_5) \tag{III.79}$$

Es decir implica la ligadura en cuatro dimensiones

$$F_{a1\,b2} + F_{a2\,b1} = 0 \tag{III.80}$$

Las demás ligaduras se obtienen fácilmente.

Pasemos a la cuestión del prepotencial. En $D = 6$ podemos hacer $A_\alpha = iD_\alpha V$, en la notación de $D = 4$

$$A_{a1} = iD_{a1}V\bar A^{\dot a}{}_2 = \bar D^{\dot a}{}_2 \tag{III.81}$$

La reducción consiste en hacer

$$A_{a1} = iD_{a1}V|_{x^4=x^5=0} \tag{III.82}$$

$$\bar A^{\dot a}{}_2 = i\bar D^{\dot a}{}_2 V|_{x^4=x^5=0} \tag{III.83}$$

aquí vemos claramente porque en $D = 4$ no existe un prepotencial pese a que en $D = 6$ si lo hay.

III.4.4. Super Maxwell en todas las dimensiones

En muchas ocasiones se dice que la teoría de super Maxwell existe sólo en dimensiones $D = 3, 4, 6$ y 10. Lo que es indudablemente cierto es que sólo en estas dimensiones el contendio on-shell puede ser el de un espinor un vector. Pero uno podría pensar que tal vez la generalización adecuada de la teoría de Maxwell al caso supersimétrico puede incluir la propagación de otros campos on-shell. El problema, claro está es encontrar una generalización *adecuada*. Los análisis de las últimas secciones pueden darnos una buena pista. Meramente hagamos que la teoría sea plana en las direcciones fermiónicas. Vamos a hacerlo un poco más estricto.

Si trabajamos en dimensión par podemos hacer buena parte del trabajo igual que $D = 6$. ¡Copio!
Las derivadas covariantes serán

$$D_a = \partial_a + iS^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.84}$$

$$\bar{D}_{\dot{b}} = -\bar{\partial}_{\dot{b}} - i\theta^a S^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.85}$$

$$\left\{D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right\} = -2iS^\mu{}_{a\dot{b}}\partial_\mu \tag{III.86}$$

La torsión vendrá defina por

$$\{D_M, D_N\} = T_{MN}{}^L D_L \tag{III.87}$$

La curvatura

$$\begin{aligned} F_{ab} &= D_a A_b + D_b A_a \\ F_{a\dot{b}} &= D_a \bar{A}_{\dot{b}} + \bar{D}_{\dot{b}} A_a + 2iS^\mu{}_{a\dot{b}} A_\mu \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

Ahora simplemente imponemos

$$F_{ab} = \bar{F}_{\dot{a}\dot{b}} = F_{a\dot{b}} = \bar{F}_{\dot{a}b} = 0$$

Las dos primeras implican que existe un prepotencial V

$$A_a = D_a V \qquad \bar{A}_{\dot{a}} = \bar{D}_{\dot{a}} V^*$$

Haciendo exactamente las mismas consideraciones

$$A_a = i D_a V \tag{III.88}$$

$$A_\mu = \frac{1}{2^{D/2}} \bar{S}_\mu{}^{\dot{b}a} \left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V \tag{III.89}$$

Ahora la ecuación para el prepotencial V es más complicada.

$$\left[D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\right] V = \frac{1}{2^{D/2-1}} S^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{S}^{\mu\, \dot{a}b} \left[D_b, \bar{D}_{\dot{a}}\right] V \tag{III.90}$$

En $D = 4$ esta ecuación es una identidad y en $D = 6$ es la ecuación (III.65) que ya hemos resuelto. El caso $D = 10$ es un poco más trucoso porque aún queda poner una condición de Majorana. El primer caso interesante es entonces $D = 8$.

III.4.5. Super Maxwell en el superespacio armónico

Como hemos dicho el super espacio armónico viene descrito por el conjunto $(x^\mu, \theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i, u_i^?)$. Una uno forma general vendrá dada por

$$A_\mu dz^\mu + A_{ai} d\theta^{ai} + \bar{A}_{\dot{a}}{}^i d\bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i + A_{++} dz^{++} + A_{--} dz^{--} \tag{III.91}$$

Las derivadas covariantes base de los campos vectoriales son

$$D_M = (D_\mu, D_{ai}, \bar{D}_{\dot{a}}{}^i, D^{++}, D^{--}) \tag{III.92}$$

Su álgebra determina la torsión[6]

$$\{D_M, D_N\} = T_{MN}{}^L D_L \tag{III.93}$$

[6]Las derivadas actúan sobre las funciones escalares que no dependen de ρ. En este caso $[D^{++}, D^{--}] = 0$

Y con ella podemos calcular la dos forma de curvatura

$$F_{MN} = D_M A_N - D_N A_M - T_{MN}{}^L A_L \tag{III.94}$$

Como siempre hay que imponer restriciones. Lo que funciona es hacer

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \tag{III.95}$$

$$F_{ai\,b}{}^{j} = 0 \tag{III.96}$$

$$F_{++\,--} = 0 \tag{III.97}$$

$$F_{ai\,++} = 0 \tag{III.98}$$

Veamos primero que esta teoría es exáctamente la misma que describimos en la sección (III.4.2) con $N = 2$ en el superespacio de Salam y Strathdee. La ligadura $F_{++\,--} = 0$ implica que $A_{++} = D_{++}U$ y $A_{--} = D_{--}U$. Podemos, por tanto, elegir un calibre en el que $U = 0$. Definimos

$$F_{a+\,++} = U^i{}_+ F_{ai\,++} \tag{III.99}$$

Y obtenemos la ecuación

$$D_{++} A_{a+} = 0 \tag{III.100}$$

Esta ecuación implica que $A_{a+} = u^i{}_+ A_{ai}$ con $A_{ai} = A_{ai}(x^\mu, \theta^{ai}, \bar\theta^{\dot a}{}_i)$ independiente de $u_i{}^{\pm}$. De hecho podemos recuperar A_{ai} via la ecuación

$$A_{ai} = \int_{S^2} u_{i-} A_{a+} d\Omega \tag{III.101}$$

Esto nos deja sólo con las ecuaciones en el superespacio de Salam y Strathdee.

Ahora veamos que las ecuaciones en el superespacio armónico se pueden escribir en función de un prepotencial. Definamos

$$F_{a+\,b+} = u^i{}_+ u^j{}_+ F_{ai\,bj} \tag{III.102}$$

Entonces $F_{a+b+} = 0$ implica que $A_{a+} = D_{a+}V$. El prepotencial V está sometido a la ecuación

$$D_{++}D_{a+}V = 0 \tag{III.103}$$

Uno de los exitos de la gente trabajando en el superespacio armónico es la de escribir supermaxwell en función de un prepotencial sin restricciones. Es el $V_{++} = D_{++}V$. La condición $D_{a+}V_{++} = 0$ es meramente una condición de quiralidad o *analiticidad*. A partir de V_{++} se puede reconstruir toda la teoría, pero de manera no local y algunas cosas son definitivamente más complicadas en este lenguage.

III.4.6. Prepotenciales para super Maxwell

Una de nuestras principales motivaciones a la hora de trabjar con super Maxwell ha sido el pensamiento continuo de que puedan surgir de la cuantización de alguna teoría. El hecho de que este prepotencial estuviese restringido como sucede con super Maxwell en $D = 6$ y $N = 1$ no es tan importante para nosotros. Como hemos visto, sin embargo, no parece existir un prepotencial para super Maxwell con $N > 1$. En esta sección vamos a construir estos prepotenciales copiando hasta cierto punto el método introducido por los rusos.

El lugar de comienzo son las ligaduras de $N = 2$ super Maxwell

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \tag{III.104}$$

$$F_{ai\,b}{}^{j} = 0 \tag{III.105}$$

Ahora multiplicamos la primera ecuación por $\lambda^{a+}\lambda^{b+}$

$$\lambda^{a+}\lambda^{b+}F_{ai\,bj} = 0 \implies \lambda^{a+}A_{ai} = \lambda^{a+}D_{ai}U \tag{III.106}$$

Por supuesto tambien podemos multiplicar por $\lambda^{a-}\lambda^{b-}$

$$\lambda^{a-}A_{ai} = \lambda^{a-}D_{ai}\tilde{U} \tag{III.107}$$

Si definimos[7] $V = \tilde{U} - U$ encontramos

$$\lambda^{a+}\lambda^{b-}F_{ai\,bj} = \lambda^{a+}\lambda^{b-}D_{ai}D_{bj} \tag{III.108}$$

Si imponemos que $\lambda^{a+}\lambda^{b-} - \lambda^{a-}\lambda^{b+} = \varepsilon^{ab}$ esto implica sobre V

$$\varepsilon^{ab}D_{ai}D_{bj}V = 0 \tag{III.109}$$

De manera que podemos escribir

$$\lambda^{a+}\lambda^{b-}F_{ai\,bj} = \lambda^{a+}\lambda^{b-}\varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\bar{W} = \varepsilon_{ij}\bar{W} \tag{III.110}$$

Siendo

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\lambda^{a+}\lambda^{b-}D_{ai}D_{bj}V \tag{III.111}$$

Si permitimos ahora que V dependa de $\lambda_a^{\pm}$ esta relación es covariante. Pero necesitamos imponer nuevas ligauras porque no queremos que A_{ai} dependan de estas nuevas variables, o, como mínimo debe existir un calibre en el que no dependen. Eso se consigue fácilmente introduciendo dos potenciales más A_{++} y A_{--} y forzando a que

$$F_{++\,--} = D_{++}A_{--} - D_{--}A_{++} = 0 \tag{III.112}$$

$$F_{ai\,++} = D_{ai}A_{++} - D_{++}A_{ai} = 0 \tag{III.113}$$

La solución de la primera ecuación es $A_{++} = D_{++}T$ y $A_{--} = D_{--}T$ para algún T. La segunda ecuación se lee

$$D_{++}(D_{ai}T - A_{ai}) = 0 \tag{III.114}$$

[7] Nota que V es invariante de calibre

Si elegimos un calibre en el que $T=0$ esto implica que $D_{++}A_{ai}=D_{--}A_{ai}=0$ como queríamos.

Sólo nos queda por resolver la ecuación (III.105)

$$\lambda^{a+}\bar{\lambda}^{\dot{b}-}F_{ai\dot{b}}{}^{j}=\lambda^{a+}\bar{\lambda}^{\dot{b}-}\left(D_{ai}\bar{D}_{\dot{b}}{}^{j}(\tilde{U}^{*}-U)+2i\delta_{i}{}^{j}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}A_{\mu}\right)=0 \tag{III.115}$$

Apliquemos este método al cado $D=10$. En este caso, como hemos dicho la ligadura $F_{ab}=0$ es equivalente a la ligadura

$$\lambda^{a}\lambda^{b}F_{ab}=0 \tag{III.116}$$

para todo λ^{a} que verifique

$$\lambda^{a}S^{\mu}{}_{ab}\lambda^{b}=0 \tag{III.117}$$

Es decir, un espinor puro. Vamos a hacer contacto con un trabajo mucho más reciente de Nathan Berkovits.

La restricción (III.117) es lo mismo que

$$\lambda^{a}\lambda^{b}D_{a}A_{b}=0 \tag{III.118}$$

Definamos

$$Q_{B}=\lambda^{a}D_{a} \tag{III.119}$$

$$\Psi(x^{\mu},\theta^{a},\lambda^{b})=\lambda^{a}A_{a} \tag{III.120}$$

Entonces vemos que el supercampo verifica que

$$Q_{B}\Psi=0 \tag{III.121}$$

Además $(Q_{B})^{2}=0$. Bajo una transformación de calibre $A_{a}\to A_{a}+D_{a}V$, el supercampo Ψ cambia como

$$\Psi\to\Psi+Q_{B}V \tag{III.122}$$

La única restricción que hay sobre Ψ es que tiene que ser lineal en λ^a. Levantemos ahora esta restricción aumentando además la libertad de calibre de forma que V pueda depender tambien de λ^a. Si vemos Q_B como un operador de cohomología todo lo que tenemos que calcular es la cohomología lineal. La afirmación de Berkovits es que la cohomología completa de este operador contiene todos los campos de Vatallin-Vilkovisky para super Maxwell. Nosotros estamos lejos de probar eso.

III.4.7. Otra forma para $N = 2$

Como hemos visto en $N = 1$ un supercampo general contiene varias representaciones irreducibles de la supersimetría. Esto es la fuente de muchos problemas. No se como evitar ese problema para $N = 1$ pero si para $N = 2$. Resulta que hay una representación es función de supercampos mucho más simple que la de Salam y Strathdee. Simplemente observemos que un supercampo de $N = 1$ soporta un representación de toda el álgebra de $N = 2$. El motivo es simple. Además de los operadores Q_a y $\bar{Q}_{\dot{a}}$ que en adelante llamaremos Q_{a1} y $Q_{\dot{a}}{}^1$ tenemos las derivadas covariantes que ahora identificaremos como $Q_{a2} = D_a$ y $\bar{Q}_{\dot{a}}{}^2 = \bar{D}_a$. De hecho notemos que dentro de un supercampo $V(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$ estan la representación quiral, la antiquiral y la tensorial. En total hay: Un espin 1 (complejo), 4 espines 1/2, 5 escalares (complejos). Si imponemos una condición de realidad tenemos justo el contenido de campos off-shell de $N = 2$ super Maxwell.

Ahora debemos construir super Maxwell. No tenemos derivadas covariantes así que lo poco que podemos hacer es

$$A_M(x^\mu, \theta_a, \bar{\theta}_{\dot{a}}) = (A_\mu, A_{ai}, \bar{A}_{\dot{a}}{}^i) \tag{III.123}$$

$$F_{ai\,bj} = Q_{ai}A_{bj} + Q_{bj}A_{ai} \tag{III.124}$$

$$F_{ai\,\dot{b}}{}^j = Q_{ai}A_{\dot{b}}^j + \bar{Q}_{\dot{b}}^j A_{ai} - 2i\delta_i^j \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} A_\mu \tag{III.125}$$

¿Qué ligaduras ponemos?. Si imponemos

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \qquad \text{(III.126)}$$

Tenemos que $F_{ai\,bj} = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\bar{W}$. Pero una identidad de Bianchi implica que $Q_{ai}\bar{W} = 0$ que es inaceptable. Si imponemos sólamente

$$F_{ai\,\dot{b}}{}^{j} = Q_{ai}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{j} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{j}A_{ai} - 2i\delta_i{}^j\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}A_{\mu} = 0 \qquad \text{(III.127)}$$

Por un lado esto despeja A_μ en función de A_{ai} y $\bar{A}_{\dot{a}i}$.

$$A_\mu = \frac{1}{4i}\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{b}a}(Q_{ai}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{i} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{i}A_{ai}) \qquad \text{(III.128)}$$

Introduciendo este resultado en la anterior ecuación tenemos

$$2(Q_{ai}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{j} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{j}A_{ai}) = \delta_i{}^j(Q_{ak}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{k} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{k}A_{ak}) \qquad \text{(III.129)}$$

Escrito en coordenadas

$$Q_{a1}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{2} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{2}A_{a1} = 0 \qquad \text{(III.130)}$$

$$Q_{a2}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{1} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{1}A_{a2} = 0 \qquad \text{(III.131)}$$

$$Q_{a1}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{1} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{1}A_{a1} = Q_{a2}\bar{A}_{\dot{b}}{}^{2} + \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{2}A_{a2} \qquad \text{(III.132)}$$

La solución de las dos primeras es

$$\bar{A}_{\dot{b}}{}^{1} = \bar{Q}_{\dot{b}}{}^{1}W, \qquad A_{a1} = Q_{a1}W^* \qquad \text{(III.133)}$$

$$A_{a2} = Q_{a2}W, \qquad \bar{A}_{\dot{a}}{}^{1} = \bar{Q}_{\dot{a}}{}^{1}W^* \qquad \text{(III.134)}$$

Podemos elegir un calibre en el que W es real. En este calibre la tercera ecuación implica que

$$\varepsilon^{ij}\left[Q_{ai}, \bar{Q}_{\dot{a}j}\right]W = 0 \qquad \text{(III.135)}$$

Eso lamentablemente pone la teoría on-shell. Pero nos enseña como hacer las cosas bien. Necesitamos imponer todas las ecuaciones excepto la tercera. Eso se consigue imponiendo la ligadura

$$F_{ai\,bj} + F_{aj\,bi} = 0 \tag{III.136}$$

Eso implica que puedo escribir todo en función de un campo W real. Fijense que así ya hemos fijado toda la invariacia. Representa justo los grados de liberdad de super Maxwell off-shell.

Sin embargo hemos perdido cierta geometría ¿cómo se acopla una partícula es este supercampo?

III.5. Apéndice: $S^2 = SU(2)/U(1)$

Antes de hablar de todo el superespacio armónico veamos como la geometría de la esfera S^2 se puede escribir en términos del cociente $SU(2)/U(1)$. Un elemento de $SU(2)$ se puede parametrizar por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{III.137}$$

donde $|a|^2 + |b|^2 = 1$, los parámetros de Cayley-Klein. Siguiendo a GIKOS escribiremos un elemento de $SU(2)$ de manera más redundante pero más simétrica:

$$\begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \tag{III.138}$$

Con $({u_1}^-)^* = -{u_2}^+$ y $({u_1}^+)^* = {u_2}^-$. Convengamos en bajar y subir los índices i con ε^{ij} el tensor antisimétrico[8]. Usamos el segundo índice para subir y bajar. De manera que

$$u^{i+} = \varepsilon^{ij} {u_j}^+ \qquad {u_i}^+ = \varepsilon_{ij} u^{j+} \tag{III.139}$$

[8]Tomaremos $\varepsilon^{12} = -1$ como los soviéticos

La condición de determinante unidad es ${u_1}^+{u_2}^- - {u_1}^-{u_2}^+ = 1$ que podemos escribir como

$$\varepsilon^{ij}{u_i}^-{u_j}^+ = u^{i+}{u_i}^- = 1 \tag{III.140}$$

Naturalmente

$$\varepsilon^{ij}{u_i}^\pm{u_j}^\pm = u^{i\pm}{u_i}^\pm = 0 \tag{III.141}$$

Sobre este espacio (S^3) el grupo actúa de dos maneras diferentes, por la derecha y por la izquierda

$$\begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \tag{III.142}$$

$$\begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{III.143}$$

Cuando la acción es por la izquierda los ${u_i}^?$ con $? = +, -$ transforman con el índice i, en el otro caso con ?. Esta doble acción del grupo $SU(2)$ sobre si mismo se entiende mejor si uno recuerda que $SO(4)$ es el el álgebra $SU(2) \times SU(2)$. En este caso las funciones definidas sobre S^3 se pueden expandir en función de "armónicos esféricos"generalizados que tienes números cuánticos de *ambos* $SU(2)$, $Y^l_{mm'}$. Vamos a ver esto más de cerca. Primero discutamos un momento los generadores infinitesimales de la acción por la izquierda. Empecemos con L_1 asociado a la primera matriz de Pauli

$$\begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {u_1}^+ & {u_1}^- \\ {u_2}^+ & {u_2}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {u_2}^+ & {u_2}^- \\ {u_1}^+ & {u_1}^- \end{pmatrix} \tag{III.144}$$

El generador infinitesimal es

$$L_1 = {u_2}^+ \frac{\partial}{\partial {u_1}^+} + {u_1}^+ \frac{\partial}{\partial {u_2}^+} + {u_2}^- \frac{\partial}{\partial {u_1}^-} + {u_1}^- \frac{\partial}{{u_2}^-} \tag{III.145}$$

Para la segunda matriz de Pauli el generador es

$$\begin{pmatrix} u_1{}^+ & u_1{}^- \\ u_2{}^+ & u_2{}^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1{}^+ & u_1{}^- \\ u_2{}^+ & u_2{}^- \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -u_2{}^+ & -u_2{}^- \\ u_1{}^+ & u_1{}^- \end{pmatrix} \tag{III.146}$$

$$L_2 = i \left(-u_2{}^+ \frac{\partial}{\partial u_1{}^+} + u_1{}^+ \frac{\partial}{\partial u_2{}^+} - u_2{}^- \frac{\partial}{\partial u_1{}^-} + u_1{}^- \frac{\partial}{u_2{}^-} \right) \tag{III.147}$$

Los operadores escalera son

$$L_+ = \frac{1}{2}(L_1 + iL_2) = u_2{}^+ \frac{\partial}{\partial u_1{}^+} + u_2{}^- \frac{\partial}{\partial u_1{}^-} = u_2{}^? \frac{\partial}{\partial u_1{}^?} \tag{III.148}$$

$$L_- = \frac{1}{2}(L_1 - iL_2) = u_1{}^+ \frac{\partial}{\partial u_2{}^+} + u_1{}^- \frac{\partial}{\partial u_2{}^-} = u_1{}^? \frac{\partial}{\partial u_2{}^?} \tag{III.149}$$

El último será L_3

$$\begin{pmatrix} u_1{}^+ & u_1{}^- \\ u_2{}^+ & u_2{}^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1{}^+ & u_1{}^- \\ u_2{}^+ & u_2{}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1{}^+ & u_1{}^- \\ -u_2{}^+ & -u_2{}^- \end{pmatrix} \tag{III.150}$$

$$L_3 = u_1{}^+ \frac{\partial}{\partial u_1{}^+} + u_1{}^- \frac{\partial}{\partial u_1{}^-} - u_2{}^+ \frac{\partial}{\partial u_2{}^+} - u_2{}^- \frac{\partial}{u_2{}^-} \tag{III.151}$$

$$L_3 = u_1{}^? \frac{\partial}{\partial u_1{}^?} - u_2{}^? \frac{\partial}{\partial u_2{}^?} \tag{III.152}$$

Un cálculo semejante, que omito, muestra que los generadores por la derecha son

$$K_1 = u_i{}^- \frac{\partial}{\partial u_i{}^+} + u_i{}^+ \frac{\partial}{\partial u_i{}^i} \tag{III.153}$$

$$K_2 = i \left(u_i{}^- \frac{\partial}{\partial u_i{}^+} - u_i{}^+ \frac{\partial}{\partial u_i{}^i} \right) \tag{III.154}$$

$$K_3 = u_i{}^+ \frac{\partial}{\partial u_i{}^+} - u_i{}^- \frac{\partial}{\partial u_i{}^i} \tag{III.155}$$

$$K_+ = u_i{}^+ \frac{\partial}{\partial u_i{}^-} \qquad K_- = u_i{}^- \frac{\partial}{\partial_i{}^+} \tag{III.156}$$

Es fácil ver que los K's conmutan con los L's y es la mencionada relación de $SO(4)$ con $SU(2) \times SU(2)$. Observemos que $K^2 = L^2$. De manera que podemos elegir una

base de funciones propias de L^2, L_z y K_z que son las $Y^l_{mm'}$. Cualquier función definida sobre S^3 se puede escribir como una combinación lineal de estos armónicos esféricos generalizados. Esto es parte del trabajo de Penrose y Newman sobre el grupo MSB en la época pre-twistor.
Hagamos el cociente tangible. Necesitamos elegir un $SU(2)$ y un $U(1)$. Elijamos la acción por la derecha y K_3 como subgrupo. Los operadores $K_\pm$ son los que Newman y Penrose llamaron pomposamente *edth* y *antiedth* y GIKOS D^{++} y D^{--}.

Para hacer realidad el cociente decimos que $\left[u_i{}^?\right] \equiv \left[v_i{}^?\right]$ si y sólo si

$$u_i{}^+ = e^{i\phi} v_i{}^+ \qquad u_i{}^- = e^{-i\phi} v_i{}^- \tag{III.157}$$

Veamos que efectivamente $\left[u_i{}^?\right]$ parametrizan S^2. Sean a, b los dos parámetros complejos de Cayley-Klein que parametrizan $SU(2) \equiv S^3$ con las transformaciones $a \to ae^{i\phi}$ y $b \to be^{-i\phi}$ podemos elegir un representante con a o b real.
Las funciones definidas sobre S^2 serán funciones $f(u_i{}^?)$ invariantes bajo las transformaciones (III.157). Necesitaremos escrbir sobre la esfera formas y campos vectoriales. Primero trabajaremos con coordenadas adaptadas al problema. La relación entre los ángulos de Euler (α, ϕ, ρ) y los parámetros de Cayley-Klein es

$$\begin{pmatrix} u_1{}^+ & u_1{}^- \\ u_2{}^+ & u_2{}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi+\rho)}{2}} & i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi-\rho}{2}} \\ i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{-i(\phi-\rho}{2}} & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi+\rho)}{2}} \end{pmatrix} \tag{III.158}$$

$$0 \le \alpha \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi, \qquad -2\pi \le \rho \le 2\pi \tag{III.159}$$

De manera

$$du_1{}^+ = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi+\rho)}{2}} d\alpha + \frac{i}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi+\rho)}{2}} (d\phi + d\rho) \tag{III.160}$$

$$du_1{}^- = \frac{i}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi-\rho)}{2}} d\alpha - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i(\phi-\rho)}{2}} (d\phi + d\rho) \tag{III.161}$$

Con un poco de cuidado podemos probar la identidad

$$2(du^{i+}\otimes d_i^{\ -}+du^{i-}\otimes du_i^{\ +})=$$
$$d\alpha\otimes d\alpha+d\phi\otimes d\phi+d\rho\otimes d\rho+\cos\alpha(d\phi\otimes d\rho+d\rho\otimes d\phi) \tag{III.162}$$

Que nos muestra como escribir la métrica sobre S^3 en función de los parámetros de Cayley-Klein.
Veamos cómo la métrica desciende a S^2 a una forma muy conocida. Hemos cocientado por la derecha de manera que los campos vectoriales por la izquierda pasan bien al cociente (los L_i). Esto es, imaginemos una curva en S^3 parametrizada por

$$p(t)=e^{itL}p(0) \tag{III.163}$$

Pasa bien al cociente porque la clase de equivalencia $[p(t)]$ está bien definida. Al revés las cosas son diferentes. Una linea en S^3 generada por K_3 no mueve S^2 luego K_3 tien que pasar al cociente como cero. Y los otros dos no están bien definidos

$$p(t)=p(0)e^{itK_2} \tag{III.164}$$

Si elegimos dos $p(0)$ en la misma clase de equivalencia la evolución estará en distintas clases. De manera que

$$K_3f(\Omega)=\Longleftrightarrow\ \frac{\partial f}{\partial\rho}=0 \tag{III.165}$$

Donde f es una función definida sobre S^2. Además de los campos vectoriales por la derecha y por la izquierda tenemos las uno formas, las de la derecha ω_K y las de la izquierda ω_L. Consideremos la forma $\omega^3{}_L$ (en un segundo la construímos). En el cociente debe ser cero porque en general $\omega^3{}_L(X)=0$ donde X es un campo arbitrario. Cualquier campo se puede poner como combinación lineal de los $K's$ y en el paso al cociente no estará K_3. Ahora, en coordenadas

$$\omega^3{}_L=u^{i+}du_i^{\ +}-u^{i-}du_i^{\ +}=i(d\phi+\cos\alpha d\rho) \tag{III.166}$$

Si solucionamos esta ecuación y sólo después de encontrar una solución puedo escribir K_1 y K_2 bien definidas en el cociente. Igualmente las formas

$$\omega^1{}_L = u^{i+}du_i{}^+ - u^{i-}du_i{}^- \qquad \omega^2{}_L = i(u^{i-}du_i{}^- + u^{i-}du_i{}^-) \tag{III.167}$$

sólo son aceptables una vez resuelta la ecuación. Definimos, por conveniencia

$$dz^{++} = u^{i+}du_i{}^+ \qquad dz^{--} = u^{i-}d_i{}^- \tag{III.168}$$

Es fácil comprobar que $dz^{++} = (dz^{--})^*$. Recordemos que dz^{++} no está definido hasta que no tengamos una solución $\rho(\alpha, \phi)$. De manera que una uno forma general sobre S^2 se puede escribir como $\omega = V_{++}dz^{++} + V_{--}dz^{--}$. Nuevamente tampoco V_{--} posee sentido en este esquema. De hecho podemos ver estas funciones como secciones en determinados fibrados sobre S^2. Son lo que alguna vez Penrose llamó *spin weighted functions*.

Otro cálculo semejante muestra que la métrica sobre la esfera se puede escribir como

$$\begin{aligned} g = 2(dz^{++} \otimes dz^{--} + dz^{--} \otimes dz^{++}) = 4dz^{++} \otimes dz^{--} = \\ d\alpha \otimes d\alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha d\phi \otimes d\phi \end{aligned} \tag{III.169}$$

CAPÍTULO IV

ACOPLAMIENTO A SUPER MAXWELL

IV.1. Superpartículas, cuerdas y membranas

En esta sección vamos a discutir como es el principio de movimiento de una partícula en el superespacio.
Lo ideal sería disponer de un principio geométrico semejante al de las geodésicas para las partículas en relatividad general o el de Nambu-Goto para la cuerda. Vamos a ver hasta donde podemos llegar siguiendo este principio.

Lo primero que debemos hacer es definir en el superespacio la noción de distancia. Seguramente eso puede hacerse con un tensor métrico

$$g_{MN}(x^{\mu}, \theta^{a}, \bar{\theta}^{\dot{a}}) = (g_{\mu\nu}, g_{\mu\, a}, g_{ab}, g_{a\dot{b}}, ...) \tag{IV.1}$$

De manera que copiando la acción para la partícula uno tal vez pueda escribir

$$\int d\tau \sqrt{\omega^{M}\omega^{N} g_{MN}} \tag{IV.2}$$

Si queremos que los índices M transformen en el tangente debemos escribir

$$\omega^{\mu} = \dot{x}^{\mu} - i\dot{\theta}^{a}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}} + i\theta^{a}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} \tag{IV.3}$$

$$\omega^{a} = \theta^{a} \qquad \bar{\omega}^{\dot{a}} = \bar{\omega}^{\dot{a}} \tag{IV.4}$$

Ahora debemos buscar el equivalente a la métrica de Minkovski si queremos empezar estudiando el caso de espacio plano. Podemos definir una métrica plana como aquella métrica que sea invariante bajo supersimetría. Del estudio de los tensores invariantes bajo Lorentz del primer capítulo se desprende que la forma más general (módulo un factor) es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad g_{\mu\, a} = 0 \quad g_{ab} = \ell\varepsilon_{ab} \quad \bar{g}_{\dot{a}\dot{b}} = \ell^{*}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \quad g_{a\dot{b}} = 0 \tag{IV.5}$$

La acción para la superpartícula en $D = 4$ y $N = 1$ será, por tanto

$$S = -m\int d\tau\sqrt{-(\omega^{\mu}\omega^{\nu} + \ell\dot{\theta}^{2} + \ell^{*}\dot{\bar{\theta}}^{2}} \tag{IV.6}$$

Esta acción fue propuesta por Brink y Schwarz en 1981. El caso de $\ell = 0$, que es el de verdadera importancia, fue propuesto por Casalbuoni en 1976.
En lugar de trabajar con esta acción con la raíz cuadrada es preferible trabajar con la acción "equivalente"

$$S = \int d\tau\frac{1}{2}\left(e^{-1}(\omega^{\mu}\omega^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \ell\dot{\theta}^{2} + \ell^{*}\dot{\bar{\theta}}^{2}) + m^{2}e\right) \tag{IV.7}$$

Que además también vale para el caso $m = 0$.
Esta sencilla acción es difícil de generalizar a $N > 1$ o $D > 4$. Vamos primero con el caso $N > 1$.
En este caso el tensor métrico tiene otro índice

$$g_{MN} = (g_{\mu\nu}, g_{\mu\, ai}, g_{ai\, bj}\ldots) \tag{IV.8}$$

Como hemos señalado el álgebra tiene una simetría $U(2)$ si queremos preservar esta simetría el tensor más general es sencillamente

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{IV.9}$$

y todo lo demás es cero. La razón es que un término

$$g_{ai\,bj} = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij} \tag{IV.10}$$

No tiene las propiedades de simetría adecuadas $\varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\dot{\theta}^{ai}\dot{\theta}^{bj} = 0$.
Si decidimos no preservar esta simetría interna del álgebra tenemos más opciones porque podemos

$$g_{ai\,bj} = \ell_{ij}\varepsilon_{ab} \tag{IV.11}$$

$$\ell_{ij} = \ell_{ji} \tag{IV.12}$$

De manera que la acción se leería

$$S = \int d\tau \frac{1}{2}\left(e^{-1}(\omega^\mu\omega^\nu\eta_{\mu\nu} + \ell_{ij}\varepsilon_{ab}\dot{\theta}^{ai}\dot{\theta}^{bj} + \ell^{ij*}\varepsilon^{\dot{b}\dot{a}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}{}_i\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}{}_j) + m^2 e\right) \tag{IV.13}$$

En dimensiones mayores las cosas pueden ser muy diferentes. En particular en dimensión $D = 6$ o $D = 10$ notar de nuestro previo análisis que no hay ningún dos tensor antisimétrico J_{ab} que haga las veces de ε_{ab} y sólo hay un posible término en la acción, sólo hay una métrica plana.

Otra cosa distinta es la partícula en el superespacio harmónico en $N = 2$ y $D = 4$. Aquí podemos encontrar una familia triparamétrica de métricas *planas*

$$g = \eta_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu + \ell_1\Lambda_{ij}d\theta^{ai} \otimes d\theta^{bj} + c.c. + \ell_2 dz^{++} \otimes dz^{--} \tag{IV.14}$$

Donde, como siempre $\hat{\omega}^\mu = dx^\mu - i\theta^{ai}\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}d\bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i - id\theta^{ai}\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i$.
El otro término es $\Lambda_{ij} = u_i{}^+u_j{}^- + u_i{}^-u_j{}^+$. Que en coordenadas podemos escribir como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i\,\mathrm{sen}(\alpha)e^{i\phi} & \cos\alpha \\ cos\alpha & i\,\mathrm{sen}\,\alpha e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{IV.15}$$

Así que podemos escribir un principio geométrico para estas partículas

$$S = \frac{1}{2}\int (e^{-1}\dot{g} - em^2)d\tau \tag{IV.16}$$

Donde $\dot{g}$ es simplemente

$$\dot{g} = \eta_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu + \ell_1\varepsilon_{ab}\dot{\theta}^{ai}\dot{\theta}^{bj} + c.c. + \ell_2\dot{z}^{++}\dot{z}^{--} \tag{IV.17}$$

Por otra parte es posible escribir acciones que son invariantes bajo un álgebra supersimétrica con un término central en el álgebra. Trabajaremos el caso $D = 4$ y $N = 2$. La métrica plana en este caso es complicada

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \qquad g_{ai\,z} = \theta_{ai} \qquad g_{ai\,bj} = \theta_{ai}\theta_{bj} \tag{IV.18}$$

$$g_{zz} = \frac{1}{2i} \qquad g_{z\,\bar{z}} = 0 \tag{IV.19}$$

Probemoslo con cuidado. Para que la acción sea invariante por Poincarè es suficiente (y necesario) que todos los índices esten bien contraídos y que no aparezca ninguna dependencia en x^μ. La invariancia por el generador Z nos obliga a que la acción no pueda depender de z. Lo único que hay que comprobar es que pasa bajo una transformación de supersimetría. Por comodidad repetimos la fórmula (III.26)

$$Q_{ai} = -i\partial_{ai} - \sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\theta^{bj}\frac{\partial}{\partial z} \tag{IV.20}$$

Con esta fórmula podemos calcular las transformaciones sobre θ^{ai} y z:

$$\delta z = \left\{i\xi^{ai}Q_{ai}, z\right\} = i\xi^{ai}\theta_{ai} \tag{IV.21}$$

$$\delta\theta^{ai} = \left\{i\xi^{bj}Q_{bj}, \theta^{ai}\right\} = \xi^{ai} \tag{IV.22}$$

Estudiemos el término

$$T = i\dot{\theta}^{ai}\theta_{ai}\dot{z} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^{ai}\theta_{ai}\theta_{bj}\dot{\theta}^{bj} + \frac{1}{2}\dot{z}^2 \tag{IV.23}$$

Por partes[1]

$$\delta\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right) = \dot{z}\delta\dot{z} = i\dot{z}\xi^{ai}\dot{\theta}_{ai} = -i\dot{z}\dot{\theta}^{ai}\xi_{ai} \tag{IV.24}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^{ai}\theta_{ai}\theta_{bj}\dot{\theta}^{bj}\right) = \dot{\theta}^{ai}\xi_{ai}\theta_{bj}\dot{\theta}^{bj} = -\dot{\theta}^{bj}\theta_{bj}\dot{\theta}^{ai}\xi_{ai} \tag{IV.25}$$

$$\delta\left(i\dot{\theta}^{ai}\theta_{ai}\dot{z}\right) = i\dot{\theta}^{ai}\xi_{ai}\dot{z} + i\dot{\theta}^{ai}\theta_{ai}(-i\dot{\theta}^{bj}\xi_{bj}) \tag{IV.26}$$

La acción correcta que es invariante bajo el álgebra de super Poincarè $N = 2$ con cargas centrales es

$$\int e^{-1}\left(\omega^\mu\omega^\nu\eta_{\mu\nu} + \ell(T + T^*)\right) d\tau \tag{IV.27}$$

IV.2. Ecuaciones de movimiento y simetría κ

Estudiemos ahora las ecuaciones de movimiento que surgen de los principios variacionales que hemos propuesto. Empecemos con una superpartícula con N arbitrario.

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau\left(e^{-1}\omega^\mu\omega^\nu\eta_{\mu\nu} - em^2\right) \tag{IV.28}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se siguen son

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-1}\omega^\mu\right) = 0 \tag{IV.29}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(-e^{-1}\omega_\mu i S^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i\right) = ie^{-1}\omega_\mu S^\mu{}_{a\dot{a}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}{}_i \tag{IV.30}$$

La solución de la primera ecuación es

$$p_\mu = e^{-1}\omega_\mu = cte \tag{IV.31}$$

La segunda es equivalente a

$$p_\mu S^\mu{}_{a\dot{a}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}{}_i = 0 \tag{IV.32}$$

[1] Notar que: $\xi^{ai}\chi_{ai} = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ij}\xi^{ai}\chi^{bj} = -\chi^{ai}\xi_{ai}$

La solución de esta ecuación es muy diferente si $m = 0$ o si $m \neq 0$. En el segundo caso la matriz $p_\mu S^\mu{}_{a\dot{a}}$, no es singular (su cuadrado es $p^2 I$) e implica que la solución de la ecuación es

$$\omega^\mu = \omega_0^\mu + p^\mu \tau \qquad \text{(IV.33)}$$

$$\theta^{ai} = \theta_0^{ai} \qquad \text{(IV.34)}$$

En el caso sin masa la solución completa de la ecuación (IV.32) es

$$\dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} = p_\mu S^{\mu\,\dot{a}a} \dot{\kappa}(\tau) \qquad \text{(IV.35)}$$

donde $\kappa(\tau)$ es una función (grassmaniana) arbitraria. La solución arbitraria es

$$x^\mu = x_0^\mu + ip^\nu \sigma_\nu{}^{a\dot{a}} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\kappa}_{\dot{a}} \bar{\theta}_0^{\dot{b}} - ip^\nu \sigma_\nu{}^{b\dot{b}} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \theta_0^a \kappa_b + p^\mu \tau \qquad \text{(IV.36)}$$

$$\theta^a = \theta_0^a + p^\mu \sigma_\mu{}^{a\dot{b}} \bar{\kappa}_{\dot{b}}(\tau) \qquad \text{(IV.37)}$$

Esto es extraño, nos esta diciendo que una linea recta en el superespacio no es simplemente un par de funciones $(x^\mu(\tau), \theta^{ai}(\tau))$. Entonces llegamos a un punto problemático, ¿que es una linea en el superespacio? La física nos está enseñando que son lineas rectas pero ¿que hay de las lineas que no son rectas?
Notemos que, en $D = 4$ y $N = 1$ si incluímos el término en la acción $\ell\dot{\theta}^2 + \ell^*\dot{\bar{\theta}}^2$ no existe esta libertad pero las ecuaciones se vuelven no lineales y más difíciles de resolver.

Este hecho de que las soluciones de las ecuaciones de movimiento dependan de una función arbitraria está relacionado con el hecho de que el Lagrangiano (IV.28) posee una simetría extra. Estudiaremos algo más sobre esta simetría en el capítulo que sige donde haremos la mecánica cuántica de estos sistemas.

IV.3. La superpartícula acoplada a super Maxwell

Una de las virtudes del enfoque geométrico en el que venimos insistiendo es el hecho de que el acomplamiendo de las partículas y otros objetos al los campos electromagnéticos sigue una linea bien definida. Siempre es posible, claro está, estudiar el acoplamiento de una particula con un supermultiplete de Maxwell definido de manera no geométrica, pero la manera fundada en geometría es, probablemente, menos debatible y más fácil de generalizar.

Nosotros simplemente añadiremos un nuevo término a la acción de la partícula libre dado por

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2} e^{-1} (\omega^\mu)^2 + A_\mu \omega^\mu + \dot{\theta}^a A_a + \bar{A}_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} \right) \tag{IV.38}$$

Donde, como es habitual

$$\dot{\omega}^\mu = \dot{x}^\mu - i\dot{\theta}^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}} + i\theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} \tag{IV.39}$$

Esta acción es real e invariante de calibre. Notemos que uno podría decir que no es necesario que $\bar{A}_{\dot{a}} = (A_a)^*$ sino que sean igual módulo un calibre, pero entonces siempre existe un calibre que los lleva a su forma normal. Vamos a atacar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = e^{-1} \omega_\mu + A_\mu$$
$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A_\nu \omega^\mu + \dot{\theta}^a \partial_\mu A_a + \bar{\partial}_\mu A_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}$$

La primera ecuación es

$$\frac{d}{d\tau} \left[e^{-1} \omega_\mu \right] = F_{\mu\nu} \omega^\nu + \dot{\theta}^a F_{\mu a} + \bar{F}_{\mu\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}$$

Seguimos

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a} = e^{-1} \dot{z}^\mu \left(-i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}} \right) + A_\mu \left(-i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}} \right) + A_a$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta^a} = e^{-1} \omega_\mu i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} + A_\mu i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} - \dot{\theta}^b \partial_a A_b + \partial_a A_\mu \omega^\mu + \partial_a \bar{A}_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}$$

Después de organizar las cosas coherentemente y usar la anterior ecuación de movimiento la historia no queda tan fea

$$2e^{-1}\dot{z}_\mu i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} = \dot{\theta}^b F_{ab} + \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} F_{a\dot{a}} + F_{a\mu}\dot{z}^\mu$$

Me gustaría hacer ver que estas ecuaciones no son independientes, es decir que hay ligaduras entre las ecuaciones de Euler-Lagrange. Lo cual podría llevar a pensar que existe alguna simetría de calibre ("inverso" del segundo teorema de Nöther). Poniendo la teoría nomov ($F_{ab} = F_{a\dot{a}} = 0$ y $F_{a\mu} = i\sigma_{\mu\, a\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$), estas ecuaciones son

$$2e^{-1}\dot{z}_\mu i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} = i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}\dot{z}_\mu$$

O mejor escritas

$$i\dot{z}_\mu\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\left(2e^{-1}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} - \bar{W}^{\dot{b}}\right) = 0$$

Pero la matriz $\omega_\mu\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}$ es singular (¡su cuadrado es cero!)
Por otra parte también podemos estudiar el álgebra de ligaduras. Esté álgebra habla directamente de simetrías.
En nuestro caso son

$$\begin{aligned}\phi &\equiv (p_\mu - A_\mu)^2\\ d_a &\equiv \pi_a + i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}p_\mu - A_a\\ \bar{d}_{\dot{b}} &\equiv \bar{\pi}_{\dot{b}} + i\theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}p_\mu + \bar{A}_{\dot{b}}\end{aligned}$$

La primera es una ligadura secundaría y las otras primarías.
Los corchetes se calculan fácilmente

$$\{d_a, d_b\} = -F_{ab} \tag{IV.40}$$

$$\left\{d_a, \bar{d}_{\dot{b}}\right\} = -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}(p_\mu - A_\mu) - F_{a\dot{b}} \tag{IV.41}$$

$$\{d_a, \phi\} = 2(p^\mu - A^\mu)F_{a\mu} \tag{IV.42}$$

Y, como siempre, conjugados. La pregunta adecuada ahora debe ser ¿bajo qué condiciones tenemos alguna simetría extra? De otra forma, ¿qué debemos imponerle a la curvatura para que existan más ligaduras de primera clase?. En lugar de atacar esa pregunta de frente vamos a hacer algo más sencillo. Supongamos que las condiciones para que el supercampo A_M de sólo super Maxwell son las que hemos analizado. En ese caso las ligaduras toman la forma

$$\begin{aligned} \{d_a, d_b\} &= 0 \\ \left\{d_a, \bar{d}_{\dot{b}}\right\} &= -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}(p_\mu - A_\mu) \\ \{d_a, \phi\} &= 2(p^\mu - A^\mu)F_{a\mu} \end{aligned}$$

Para evitar la ligadura secundaria, Álvaro propone, observando que $F_{\mu a} = i\sigma_{\mu\, a\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$ con $D_a\bar{W}^{\dot{b}} = 0$ elegir la ligadura

$$\psi = \phi - W^a d_a - \bar{d}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}}$$

Entonces las ligaduras son

$$\begin{aligned} \{d_a, d_b\} &= 0 \\ \left\{d_a, \bar{d}_{\dot{b}}\right\} &= -2i\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}(p_\mu - A_\mu) \\ \{d_a, \psi\} &= D_a W^b d_b \end{aligned}$$

Este conjunto de ligaduras cierra en el álgebra. Lo que sucede aquí en pocas palabras es que si imponemos la condición de que la teoría este off-shell ($F_{ab} = F_{a\dot{b}} = 0$) entonces hay nuevamente vínculos de primera clase.

Analicemos ahora el problema al revés. Supongamos que la simetría *kappa* es algo fundamental. Entonces supongamos que hay una linea solución de las ecuaciones de la superpartícula en el espacio plano. Es natural exigir que nada dependa de la clase de equivalencia de todas las soluciones que están conectadas por un κ-transformación. Mas específicamente lo que queremos es que el término

$$\Lambda = \int d\tau \left(A_\mu \omega^\mu + \dot{\theta}^a A_a + \bar{A}_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} \right) \tag{IV.43}$$

no dependa de la función $\kappa(\tau)$ en las ecuaciones (IV.37)

$$x^\mu = x_0^\mu + ip^\nu \sigma_\nu{}^{a\dot{a}} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\kappa}_{\dot{a}} \bar{\theta}_0^{\dot{b}} - ip^\nu \sigma_\nu{}^{b\dot{b}} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \theta_0^a \kappa_b + p^\mu \tau \tag{IV.44}$$

$$\theta^a = \theta_0^a + p^\mu \sigma_\mu{}^{a\dot{b}} \bar{\kappa}_{\dot{b}}(\tau) \tag{IV.45}$$

De manera que queremos:

$$\delta_\kappa \Lambda = 0 \tag{IV.46}$$

Así que

$$\delta_\kappa \Lambda = \int d\tau \left(\delta A_\mu p^\mu + A_\mu \delta p^\mu + \delta\dot{\theta}^a A_a + \theta^a \delta A_a + \delta \bar{A}_{\dot{a}} \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} + \bar{A}_{\dot{a}} \delta \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}} \right)$$

Las variaciones son fáciles de calcular

$$\delta A_\mu = \delta\theta^a D_a A_\mu + \bar{D}_{\dot{a}} A_\mu \delta\bar{\theta}^{\dot{a}}$$
$$\delta A_a = \delta\theta^b D_b A_a + \bar{D}_{\dot{b}} A_a \delta\bar{\theta}^{\dot{b}}$$

Un comentario técnico aquí es preciso. $e^{-1}\dot{z}^\mu$ es lo que debiese ser llamado momento y es invariante bajo la simetría κ, p_μ no lo es

$$\delta p^\mu = 2\dot{\theta}^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \delta\bar{\theta}^{\dot{b}} + ...$$

El término $\delta\dot{\theta}^a A_a$ si se integra por partes nos da

$$-\delta\theta^a \dot{A}_a = \left(\partial_\mu A_a p^\mu + \dot{\theta}^b D_b A_a + \bar{D}_{\dot{b}} A_a \dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}} \right) \delta\theta^a$$

Coleccionando términos similares con cuidado se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$F_{\mu a}p^{\mu}\delta\theta^{a} = 0 \tag{IV.47}$$

$$F_{ab}\dot{\theta}^{a}\delta\theta^{b} = 0 \tag{IV.48}$$

$$\left(D_a\bar{A}_{\dot{b}} + \bar{D}_{\dot{b}}A_a - 2\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}A_{\mu}\right)\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}\delta\theta^{a} = F_{a\dot{b}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}\delta\theta^{a} = 0 \tag{IV.49}$$

Observe que el término A_{μ} en la última ecuación viene de la variación δp^{μ}.
En este punto es importante recordar que

$$\delta\theta^{a} = \sigma^{\mu\, a\dot{b}}\delta\bar{\epsilon}_{\dot{b}}p_{\mu}$$

Así que si queremos que la variación sea cero para todo $\delta\epsilon_b$ necesitamos

$$F_{\mu a}\sigma^{\nu\, a\dot{b}}p^{\mu}p_{\nu} = 0$$

$$\sigma^{\mu\, a\dot{a}}\sigma^{\nu\, b\dot{b}}F_{ab}p_{\mu}p_{\nu} = 0$$

$$\sigma^{\mu\, a\dot{a}}\sigma^{\nu\, b\dot{b}}F_{a\dot{b}}p_{\mu}p_{\nu} = 0$$

Si insistimos en que estas ecuaciones sean ciertas para todo ϵ_a, $\delta\epsilon_a$ y todo p_{μ} tal que $p^2 = 0$ tenemos

$$\sigma_{\nu}{}^{a\dot{b}}F_{\mu\, a} + \sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}}F_{\nu\, a} = \eta_{\mu\nu}\bar{W}^{\dot{b}} \tag{IV.50}$$

$$\left(\sigma^{\mu\, a\dot{a}}\sigma^{\nu\, b\dot{b}} + \sigma^{\nu\, a\dot{a}}\sigma^{\mu\, b\dot{b}}\right)F_{ab} = \eta^{\mu\nu}G^{\dot{a}\dot{b}} \tag{IV.51}$$

$$\left(\sigma^{\mu\, a\dot{a}}\sigma^{\nu\, b\dot{b}} + \sigma^{\nu\, a\dot{a}}\sigma^{\mu\, b\dot{b}}\right)F_{a\dot{b}} = \eta^{\mu\nu}G^{b\dot{a}} \tag{IV.52}$$

Donde W_a, $G^{\dot{a}\dot{b}}$ y $G^{a\dot{b}}$ son funciones arbitrarias Uno por uno. Resolvamos la primera ecuación (IV.50). Multiplique por $\sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}}$ en ambos lados y sume

$$\sigma_{\nu}{}^{a\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}}F_{\mu a} + 2F_{\nu b} = \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$$

Ahora use

$$\sigma_{\mu\, b\dot{b}}\sigma_{\nu}{}^{a\dot{b}} = \sigma_{\mu\, b\dot{b}}\sigma_{\nu}{}^{a\dot{b}} + \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}} - \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}} = \eta_{\mu\nu}\delta_{b}{}^{a} - \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}}$$

identidad que nos ayude a escribir

$$4F_{\nu a} - \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\sigma^{\mu\, a\dot{b}}F_{\mu a} = \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$$

Esto es

$$F_{\nu a} = \frac{1}{4}\sigma_{\nu\, b\dot{b}}\left(\bar{W}^{\dot{b}} + \sigma^{\mu\, a\dot{b}}F_{\mu a}\right) = \sigma_{\nu\, b\dot{b}}\bar{G}^{\dot{b}}$$

Donde escribimos $\bar{G}^{\dot{b}} = \frac{1}{4}\left(\bar{W}^{\dot{b}} + \sigma^{\mu\, a\dot{b}}F_{\mu a}\right)$. Introducimos este valor en la ecuación (IV.50) encontramos naturalmente

$$\bar{G}^{\dot{b}} = \frac{1}{2}\bar{W}^{\dot{b}}$$

Así que finalmente la solución es $F_{\mu a} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\, a\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$. Probablemente exista una mejor manera de obtener este resultado...

Ha llegado el momento de analizar la ecuación (IV.51). Primer paso, tomamos trazas sobre $\mu\nu$

$$\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\sigma^{\mu\, b\dot{b}}F_{ab} = 4G^{\dot{a}\dot{b}}$$

Usando una de nuestras identidades favoritas

$$\epsilon^{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}F_{ab} = 2G^{\dot{a}\dot{b}}$$

Ahora $\epsilon^{ab}F_{ab} = 0$ porque ϵ^{ab} es antisimétrico y F_{ab} es simétrico. De manera que $G^{\dot{a}\dot{b}} = 0$. El truco que hace el trabajo ahora es multiplicar por $\sigma_{\mu}{}^{c\dot{c}}\sigma_{\nu}{}^{d\dot{d}}$ y encontrar que

$$F^{cd}\left(\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}} + \epsilon^{\dot{a}\dot{d}}\epsilon^{\dot{b}\dot{c}}\right) = 0$$

que inescapablmente implica $F_{ab} = 0$. Miramos ahora hacia la tercera y más difícil de las ecuaciones (IV.52). Contracción de índices como antes sólo dice que $G^{a\dot{b}} = F^{a\dot{b}}$. Esto significa que podemos reescribir el sistema

$$\left(\sigma^{\mu\, a\dot{a}}\sigma^{\nu\, b\dot{b}} + \sigma^{\nu\, a\dot{a}}\sigma^{\mu\, b\dot{b}} - \eta^{\mu\nu}\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\right)F_{a\dot{b}} = 0$$

que también conduce a $F_{a\dot{b}} = 0$.

Otra forma geométrica de entender estas restriciones fue propuesta por Witten en su artículo sobre la interpretación twistorial de super Yang-Mills en diez dimensiones. La idea fundamental es exigir que existan supercampos covariantemente constantes

$$\dot{z}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\Phi + \dot{\theta}^{a}\mathcal{D}_{a}\Phi - \dot{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\mathcal{D}_{\dot{a}}\Phi = 0$$

El problema es que para que esta ecuación tenga sentido tiene que ser cierto para cada $\kappa(\tau)$. Si z_1^M y z_2^M son dos soluciones equivalentes de la condición de integrabilidad, se tiene que cumplir que

$$\left[\dot{z}_1^M\mathcal{D}_M, \dot{z}_2^M\mathcal{D}_M\right]\Phi = \dot{z}_1^M\dot{z}_2^N\left(F_{MN} + T_{MN}{}^{L}\mathcal{D}_L\right)\Phi = 0 \qquad \text{(IV.53)}$$

Donde

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^{\mu} = \dot{z}_2^{\mu} &= p^{\mu} \\ \dot{z}_1^{a} = \dot{\theta}_1^{a} &= p^{\mu}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}}\bar{\kappa}_{1\,\dot{b}}(\tau) \\ \dot{z}_2^{a} = \dot{\theta}_2^{a} &= p^{\mu}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{b}}\bar{\kappa}_{2\,\dot{b}}(\tau) \end{aligned}$$

En componentes

$$\begin{aligned} & p^{\mu}p^{\nu}F_{\mu\nu} + p^{\mu}\dot{\theta}_2^{a}F_{\mu a} + p^{\mu}\dot{\bar{\theta}}_2^{\dot{a}}\bar{F}_{\mu\dot{a}} + \dot{\theta}_1^{a}p^{\mu}F_{a\mu} + \dot{\bar{\theta}}_1^{\dot{a}}p^{\mu}\bar{F}_{\dot{a}\mu} + \\ +\dot{\theta}_1^{a}\dot{\theta}^{2}F_{ab} + \dot{\bar{\theta}}_1^{\dot{a}}\dot{\bar{\theta}}_2^{\dot{b}}\bar{F}_{\dot{a}\dot{b}} &+ \dot{\theta}_1^{a}\dot{\bar{\theta}}_2^{\dot{b}}\left(F_{a\dot{b}} - i\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\mathcal{D}_{\mu}\right) + \dot{\bar{\theta}}_1^{\dot{b}}\dot{\theta}_2^{a}\left(\bar{F}_{\dot{b}a} - i\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\mathcal{D}_{\mu}\right)\Phi = 0 \end{aligned}$$

Paso a paso. $p^{\mu}p^{\nu}F_{\mu\nu} = 0$ por simetría. Si la teoría esta off-shell $F_{\mu a} = i\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\bar{W}^{\dot{b}}$ and $\dot{\theta}_1^{a}p^{\mu}F_{a\mu} = 0$ y compañia debido a las ecuaciones de movimiento. El término $\theta^{a}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}$ es cero debido a una complicada identidad de Fierz. Por lo tanto si la teoría esta off-shell las condición de integrabilidad se satisface.

En otras palabras si exigimos $F_{ab} = F_{a\dot{b}} = 0$ entonces existen campos covaraintemente constantes. ¿qué pasa con el inverso?. Si insistimos en la integrabilidad entonces las siguientes ecuaciones deben cumplirse

$$p^{\mu}\dot{\theta}^{a}F_{\mu a} = 0$$
$$\dot{\theta}_1^a\dot{\theta}_2^b F_{ab} = 0 \qquad \dot{\theta}_1^a\dot{\bar{\theta}}_2^{\dot{b}} F_{a\dot{b}} = 0$$

CAPÍTULO V

CUANTIZACIÓN

V.1. Partículas masivas

Estudiaremos aquí la acción de las partículas masivas con supersimetría extendida más simple[21]

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left(e^{-1}\omega^{\mu}\omega^{\nu}\eta_{\mu\nu} - em^{2}\right) \tag{V.1}$$

donde definimos por conveniencia $\omega^{\mu} = \dot{x}^{\mu} - i\dot{\theta}^{ai}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}{}_{i} + i\theta^{ai}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{b}}{}_{i}$. En muchos casos trabajaremos sólo la situación más elemental de $D = 4$ y $N = 1$ en la que algunos cálculos son más transparentes

Al ser una partícula masiva no hay simetría κ, la única ligadura de primera clase está relacionada con la invariancia de reparametrización de la acción. Los momentos generalizados son:

$$\pi_e = 0 \tag{V.2}$$

$$p_\mu = e^{-1}\omega_\mu \tag{V.3}$$

$$\pi_{ai} = -ip_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i \pi_{\dot{b}}{}^i = -ip_\mu \theta^{ai} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \tag{V.4}$$

Usamos corchetes de Poisson canónicos [21] (ver apéndice a este capítulo)

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu{}_\nu \tag{V.5}$$

$$\{\theta^a, \pi_b\} = -\delta^a{}_b \tag{V.6}$$

Hay cargas consevadas relacionadas con la invariancia de super Poincarè. El momento angular es

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{V.7}$$

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\mu p_\nu \tag{V.8}$$

$$S_{\mu\nu} = \pi_a \sigma_{\mu\nu}{}^a{}_b \theta^b + \bar{\theta}^{\dot{a}} \bar{\sigma_{\mu\nu}}{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \bar{\pi}_{\dot{b}} \tag{V.9}$$

La ligadura primaria π_e implica la ligadura de primera clase secundaria $p^2 + m^2 = 0$. Además tenemos las ligaduras de segunda clase

$$d_{ai} \equiv \pi_{ai} + ip_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i \tag{V.10}$$

$$\bar{d}_{\dot{b}}{}^i \equiv \pi_{\dot{b}}{}^i + ip_\mu \theta^{ai} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \tag{V.11}$$

$$\left\{d_{ai}, \bar{d}_{\dot{b}}{}^j\right\} = -i\delta_i{}^j p_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \equiv C_{ai\dot{b}}{}^j \tag{V.12}$$

La naturaleza de segunda clase de estas ligaduras esta atado al hecho de que la matriz $C_{ai\dot{b}}{}^j$ no es singular si $m \neq 0$. El procedimiento de Dirac para tratar tales problemas es sustituir los corchetes de Poisson por

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = \{F, G\} - \{F, d_{ai}\} \hat{C}^{ai\dot{b}}{}_j \left\{\bar{d}_{\dot{b}}{}^j, G\right\} - \left\{F, \bar{d}_{\dot{b}}{}^j\right\} \hat{C}^{ai\dot{b}}{}_j \{d_{ai}, G\} \tag{V.13}$$

Donde la matriz $\hat{C}^{ai\dot{b}}{}_j = \dfrac{1}{2ip^2} p_\mu \bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}b} \delta^i{}_j$ y verifica

$$C_{ai\dot{b}}{}^j \hat{C}^{bk\dot{b}}{}_j = \delta_i{}^i \delta_a{}^b \tag{V.14}$$

Estamos ahora en posición de calcular los corchetes de Dirac para todas las coordenadas y momentos

$$\left\{\theta^{ai}, \theta^{bj}\right\}_{\mathrm{D}} = \left\{\pi_{ai}, \pi_{bj}\right\}_{\mathrm{D}} = \left\{p_\mu, p_\nu\right\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{V.15}$$

$$\left\{\theta^{ai}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_j\right\}_{\mathrm{D}} = \frac{-1}{2ip^2} p_\mu \bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a} \tag{V.16}$$

$$\left\{x^\mu, \theta^{ai}\right\}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2p^2} p_\nu \sigma^{\nu\,\dot{a}a} \theta^b \sigma^\mu{}_{b\dot{a}} \tag{V.17}$$

$$\left\{x^\mu, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i\right\}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2p^2} p_\nu \bar{\sigma}^{\nu\,\dot{a}a} \bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \tag{V.18}$$

$$\left\{x^\mu, x^\nu\right\}_{\mathrm{D}} = \frac{-\sigma^{\mu\nu}}{p^2} \tag{V.19}$$

donde

$$S^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\rho \theta^{ai} \sigma_{\lambda\, a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i \tag{V.20}$$

La mecánica cuántica de este sistema debiese ser ahora directa. Todo lo que queda por hacer is sustituir los paréntesis de Dirac por conmutadores de Heissenberg[1] siguiendo la regla $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}} \to -i\,[\cdot,\cdot]$.
El problema que debemos afrontar es que no podemos representar las coordenadas x^μ multiplicativamente porque no commutan. Esto fue notado por primera vez por Casalbuoni.

En lugar de calcular los corchetes de Dirac que nos da nuevos problemas pudiesemos intentar otra cosa. Con partículas masivas el conjunto completo de ligaduras es de segunda clase. Podemos dividir las ligaduras en un conjunto de ligaduras de primera

[1] A nivel cuántico presentamos conmutadores como $[A, B] = AB - (-1)^{ab} B$.

clase y otro conjunto que entenderemos como fijación de calibre de estas. Por ejemplo veremos que las d_{ai} se pueden entender como ligaduras de primera clase y las $d_{\dot{a}}{}^{i}$ serán sus fijaciones de calibre. Se ha dicho alguna vez [2] que dado que no podemos imponer todas las ligaduras imponer sólo un conjunto es suficiente porque implica que todos los elementos de matriz son nulos.. Esto es si tenemos un conjunto de ligaduras $(\phi_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)$ e imponemos $\hat{\phi}_\alpha \left|V\right\rangle = 0$ entonces $\left\langle V\right| \hat{\bar{\phi}}_\alpha = 0$.

Llaman a esto el procedimiento de Gupta-Bleuer de cuantización. Pudiese haber alguna malinterpretación aquí porque hay situaciones en los que este procedimiento no funciona correctamente. sin embargo probaremos el siguiente hecho:
Si ϕ_α con $\alpha = 1, ..., N$ es un conjunto de ligaduras de primera clase y det $\left\{\phi_\alpha, \bar{\phi}_\alpha\right\} \neq 0$ entonces $\bar{\phi}_\alpha = 0$ es un conjunto admisible de condiciones de fijación de calibre
En el caso bajo estudio se ntiende fácilmente quet $\bar{d}_{\dot{a}}$ por si solas son un conjunto de ligaduras de primera clase y, por lo tanto, la teoría es equivalente a una en la que sólo este conjunto de ligaduras existe. Ahora somos libres de elegir *otras* condiciones de fijación de calibre si así lo deseamos.

Por lo tanto la mecánica cuántica de las superpartículas masivas en $D = 4$ y N arbitrario se describe por un supercampo $V(x^\mu, \theta^{a\,i}, \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_{i})$ que verifique

$$(P^2 + m^2)V = 0 \tag{V.21}$$

$$\bar{D}_{\dot{a}\,i}V = 0 \tag{V.22}$$

Por tanto la mecánica cuántica de una superpartícula de este tipo viene descrita por un supermultiplete quiral *generalizado*. Notemos que en todos lo casos tenemos una representación irreducible de super Poincarè. Aunque este resultado ya se conocia, como digo desde los tiempos de Casalbuoni, sentimos que nuestro método es más riguroso y,

[2] La idea surge del mismo trabajo de Casalbuoni[21] y ha sido aplicada extensivamente por Lusana[54], Frydryszak [32] y colaboradores

como veremos aplicable a otras circunstancias.

Pero podemos lidiar con los corchetes de Dirac si somos capaces de encontrar un conjunto de coordenadas canónicas. La anterior solución nos da una fuerte indicación. En el Lagrangiano original cambiamos variables

$$x_I^\mu = x^\mu + i\theta^a{}_i \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}i} \tag{V.23}$$

Podemos escribir

$$\omega^\mu = \dot{x}_I^\mu - 2i\dot{\theta}^a{}_i \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}i} \tag{V.24}$$

Si calculamos los momentos relativos a estas nuevas coordenadas $(x_I^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$ encontramos

$$p_\mu = e^{-1}\omega_\mu \tag{V.25}$$

$$\pi_{ai} = -2ip_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i \tag{V.26}$$

$$\bar{\pi}_{\dot{a}}{}^i = 0 \tag{V.27}$$

Pero veamos que sucede si seguimos la otra ruta. definimos, como antes

$$d_{ai} = \pi_{ai} + 2ip_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{\theta}^{\dot{a}}{}_i \tag{V.28}$$

$$\bar{d}_{\dot{a}}{}^i = \bar{\pi}_a{}^i \tag{V.29}$$

Las reglas de conmutación quedan sin cambios

$$\left\{d_{ai}, \bar{d}_{\dot{a}}{}^j\right\} = \delta_i{}^j 2i\sigma^\mu{}_{a\dot{a}} p_\mu = C_{ai\dot{a}}{}^j \tag{V.30}$$

Los corchetes de Dirac se definen siguiendo las mismas reglas y el resultado se calcula fácilmente

$$\{x_I^\mu, x_I^\nu\}_{\mathrm{D}} = \left\{x_I^\mu, \theta^{ai}\right\}_{\mathrm{D}} = \left\{\theta^{ai}, \theta^{bj}\right\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{V.31}$$

$$\{x_I^\mu, p_\nu\}_{\mathrm{D}} = \eta_{\mu\nu} \tag{V.32}$$

$$\left\{\pi_{ai}, \theta^{bj}\right\}_{\mathrm{D}} = -\delta_i{}^j \delta_a{}^b \tag{V.33}$$

La respuesta es, por supuesto, la misma. El espacio resultante es el quiral o antiquiral. Podríamos trabajar directamente con las relaciones (V.15)-(V.19) y redescubrir las ecuaciones antes descritas. Como quiera que lo veamos siempre obtenmos la misma respuesta, conmovedor.

V.2. El método de los proyectores

Geométricamente las ligaduras de segunda clase restringen la variedad simplectica del espacio de fases mientras que las ligaduras de primera clase lo reducen a una variedad de Poisson foliada.

Cuando las ligaduras de segunda clase estan presentes el algoritmo de Dirac encuentra ciertas dificultades. Primero debemos calcular el álgebra de los observables con el corchete de Dirac. En la transición a la teoría cuántica quizá encontremos problemas de ordenamiento además de problemas con la definición operatorial del inverso de la matriz de Dirac. Si estos problemas se resuelven todavía tenemos que representar el álgebra. Como hemos mencionado los corchetes de Dirac son realmente una estructura de Poisson sobre la variedad inducida. A nivel clásico el teorema de Darboux nos asegura que existe un conjunto de coordenadas canónicas. si conseguimos encontrar este conjunto e coordenadas canónicas (por ejemplo las $(x_I^\mu, \theta^{a\,i})$) podríamos sentirnos tentados a cuantizar en estas coordenadas. El problema está en que la teoría resultante es probablemente *diferente* de la que queríamos estudiar. Es un hecho bien conocido, incluso por Dirac, que el programa de la cuantización canónica debe ser llevado a cavo en coordenadas cartesianas, si cambiamos de coordenadas y cuantizamos podríamos acabar con algo muy distinto.

Esta es la razón por la que las ligaduras de segunda clase son un dolor de cabeza: incluso aún cuando seamos capaces de encontrar un conjunto de coordenadas de Darboux que resuelven las ligaduras no hemos resuelto el problema. Aquí proponemos una nueva solución a este problema que es distinta a cualquier otra solución propuesta hasta ahora. La mayor parte de los métodos que se proponen para estudiar las ligaduras de segunda clase requieren la introducción de campos auxiliares con la idea de hacer una *desfijación de calibre*[3] y quedarnos con un conjunto de ligaduras de primera clase. Aquí iremos en la dirección opuesta, vamos a restringir el espacio de Hilbert. Mas tarde o más temprano vamos a necesitar fijar el calibre así que de todas formas debemos lidiar en algún momento con lasligaduras de segunda clase.

El hecho de que las ligaduras de segunda clase restrinjan el espacio de fases de la mecánica clásica debiese significar, en la mecánica cuántica que el espacio de Hilbert tiene alguna restricción. Un subespacio determinado se obtiene con un operador de proyección $\mathbb{P}$ tal que el espacio de Hilbert sea $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Los operadores que actúan sobre el espacio físico son aquellos que vienen proyectados del espacio completo $\mathcal{H}$. Ponemos la siguiente conjetura

Si un sistema clásico de coordenadas generalizadas y momentos (q^i, p_j) está sujeto a las ligaduras de segunda clase $\phi_\alpha(q^i, p_j)$ que satisfacen el álgebra

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta} \tag{V.34}$$

tal que los corchetes de Dirac están dados por

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = \{F, G\} - \{F, \phi_\alpha\}\, C^{\alpha\beta}\, \{\phi_\beta, G\} \tag{V.35}$$

Entonces existe un operador de proyección tal que el álgebra cuántica puede ser representada en una imagen de Schrödinger generalizada por

$$q^i \to \mathbb{P} q^i \mathbb{P} \tag{V.36}$$

$$p_i \to \mathbb{P}(-i\hbar\partial_i)\mathbb{P} \tag{V.37}$$

[3]Gauge unfixing

Demostración: (de la conjetura)

Hace muchos años ya Herman Weyl propuso un método para traducir cada observable clásico a un equivalente cuántico. La idea básica es naturalmente que si el observable clásico es $f(q^i, p_j)$ entonces el cuántico debe ser $F(Q^i, P_j)$ donde Q^i y P_j son los operadores cuánticos relacionados con la posición y el momento (es decir $Q_i \to q_i\cdot$ y $P_j \to -i\partial_j$. Por supuesto hay un problema de ordenamiento. La idea de Weyl es la siguiente. Partimos de $f(q,p)$ y hacemos su transformada de Fourier $\hat{f}(\xi,\eta)$ dada por

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int f(x,p)e^{ix\xi+ip\eta}d^nxd^np \tag{V.38}$$

Entonces, sin más

$$F(Q,P) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \omega(\xi,\eta)\hat{f}(\xi,\eta)e^{i\xi Q+i\eta P} \tag{V.39}$$

Donde $\omega(\xi,\eta)$ es alguna función. Con esta definición todo el problema del ordenamiento esta transladado a la función ω. Lo que nosotros proponemos aquí es que este método es válido incluso en presencia de ligaduras de segunda clase. Si existen ligaduras de segunda clase ϕ_α la integral (V.38) se hará sobre la variedad definida por las ligaduras y no todo $\mathbb{R}^{2n}$. Sea entonces $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{2n}$ la subvariedad definida por $\phi_\alpha(x,p) = 0$. Entonces un observable clásico $f(x,p)$ vendrá representado por

$$F(Q,P) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \omega(\xi,\eta)\hat{f}(\xi,\eta)e^{i\xi Q+i\eta P} \tag{V.40}$$

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathcal{M}} f(x,p)e^{ix\xi+ip\eta}d\Omega \tag{V.41}$$

Es fácil ver que con esta definición el observable relacionado con ϕ_α es siempre cero. Más difícil es comprobar que este método es universal y siempre válido.
Aunque carecemos de una prueba general de la conjetura veremos que en este caso la conjetura nos provee con una bella solución.

Si queremos buscar un proyector en el espacio de Hilbert de los supercampos es natural buscar uno que proyecte sobre una representación de super Poincarè. Ya hemos estudiado que proyectores existen, sólo tenemos que ver si sirven.
Recordemos que en $D = 4$ y $N = 1$ tenemos que los operadores que generan el álgebra de super Poincarè en el superespacio son

$$P_\mu = -i\partial_i \tag{V.42}$$

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\mu P_\nu) + \frac{i}{4}(\theta\sigma_{\mu\nu}\pi + \bar{\theta}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\pi}) \tag{V.43}$$

$$Q_a = i\pi_a + iP_\mu {\sigma^\mu}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}} \tag{V.44}$$

$$\bar{Q}_{\dot{a}} = i\bar{\pi}_{\dot{a}} + iP_\mu {\sigma^\mu}_{a\dot{a}}\theta^a \tag{V.45}$$

estas son, por supuesto, las cargas conservadas obtenidas del Lagrangiano de la super-partícula. Noten que $\pi_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a}$. Esta representación no es irreducible, como sabemos. Recordemos ([60], [83], [36]):

☞ **Teorema V.1** *Sea* $\Psi(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}^{\dot{a}})$ *un supercampo que satisface*

$$(P^2 + m^2)\Psi = 0 \tag{V.46}$$

entonces se puede escribir de forma única como $(m \neq 0)$

$$\Psi = \Psi_C + \Psi_A + \Psi_T \tag{V.47}$$

$$\Psi_C = \mathbb{P}^m_{\mathrm{C}}\Psi \qquad \Psi_A = \mathbb{P}^m_{\mathrm{A}}\Psi \qquad \Psi_T = \mathbb{P}^m_{\mathrm{T}}\Psi \tag{V.48}$$

donde los operadores de proyección son

$$\mathbb{P}^m_{\mathrm{A}} = \frac{1}{16m^2}D^2\bar{D}^2 \qquad \mathbb{P}^m_{\mathrm{C}} = \frac{1}{16m^2}\bar{D}^2 D^2 \qquad \mathbb{P}^m_{\mathrm{T}} = \frac{-1}{8m^2}\bar{D}_{\dot{a}}D^2\bar{D}^{\dot{a}} \tag{V.49}$$

Los operadores que repesentan el álgebra de super Poincarè se obtienen proyectando los anteriores. Los operadores P_μ y $L_{\mu\nu}$ quedan sin cambios mientras que el operador del momento angular interno se puede escribir de otra forma. Por ejemplo usando el proyector $\mathbb{P}_{\mathrm{C}}$

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} S_{\mu\nu} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\rho \theta^{ai} \sigma_{\lambda\, a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}}{}_i \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \tag{V.50}$$

Los operadores de la mecánica cuántica que satisfacen las relaciones de conmutación correctas son

$$\mathbb{P}_{\mathrm{A}} = \frac{-1}{16P^2} D^2 \bar{D}^2 \qquad \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \frac{-1}{16P^2} \bar{D}^2 D^2 \qquad \mathbb{P}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{8P^2} \bar{D}_{\dot{a}} D^2 \bar{D}^{\dot{a}} \tag{V.51}$$

$$\hat{x}^\mu \to \mathbb{P} x^\mu \mathbb{P} \tag{V.52}$$

$$\hat{\theta}^a \to \mathbb{P} \theta^a \mathbb{P} \tag{V.53}$$

$$\hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}} \to \mathbb{P} \bar{\theta}^{\dot{a}} \mathbb{P} \tag{V.54}$$

Donde en la parte derecha x^μ es un operador multiplicativo. Así que uno puede sentirse tentado a pensar que eligiendo alguno de estos operadores de proyección la teoría se puede realizar. En efecto, se puede. Empecemos con

Quiral

Necesitamos calcular

$$\left[\hat{\theta}^a, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right], \quad \left[x^\mu, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right], \quad [x^\mu, x^\nu] \tag{V.55}$$

empecemos con

- $\left[\hat{\theta}^a, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right]$

$$\left[\hat{\theta}^a, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right] = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \theta^a \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} + \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \theta^a \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \tag{V.56}$$

Usamos la formula

$$[\mathbb{P}_{\mathrm{C}}, \theta^a] = \frac{-1}{8P^2} \bar{D}^2 D^a \tag{V.57}$$

Con un poco de cuidado podemos probar que

$$\left[\hat{\theta}^a, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right] = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left[\theta^a, \mathbb{P}_{\mathrm{C}}\right] \bar{\theta}^{\dot{a}} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} + \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \left[\mathbb{P}_{\mathrm{C}}, \theta^a\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}} =$$
$$\frac{-1}{8p^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(-\bar{D}^2 D^a \bar{\theta}^{\dot{a}} + \bar{\theta}^{\dot{a}} \bar{D}^2 D^a\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} =$$
$$\frac{-1}{8p^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(-\left[\bar{D}^2, D^a\right] \bar{\theta}^{\dot{a}} + \bar{\theta}^{\dot{a}} \left[\bar{D}^2, D^a\right]\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} =$$
$$\frac{-1}{8p^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(4i\bar{\sigma}^{\mu\, \dot{b} a} \bar{D}_{\dot{b}} \partial_\mu \bar{\theta}^{\dot{a}} + \bar{\theta}^{\dot{a}}(-4i\bar{\sigma}^{\mu\, \dot{b} a} \bar{D}_{\dot{b}} \partial_\mu)\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(\frac{4i}{8p^2} \bar{\sigma}^{\mu\, \dot{a} a} \partial_\mu\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}}$$

Nuestra próxima tarea es

- $[x^\mu, \theta^a]$

Los trucos son similares

$$\left[\hat{x}^\mu, \hat{\theta}^a\right] = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \theta^a \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \theta^a \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\mu \left[\mathbb{P}_{\mathrm{C}}, \theta^a\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left[\theta^a, \mathbb{P}_{\mathrm{C}}\right] x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \quad \text{(V.58)}$$

Recuerde que $\left[\mathbb{P}_{\mathrm{C}}, \theta^a\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = 0$

$$\left[\hat{x}^\mu, \hat{\theta}^a\right] = \frac{-1}{8P^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \bar{D}^2 D^a x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \frac{-1}{8P^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left[\bar{D}^2, D^a\right] x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} =$$
$$\frac{-4i}{8P^2} \bar{\sigma}^{\nu\, \dot{b} a} \partial_\nu \bar{D}_{\dot{b}} x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(\frac{-ip_\nu}{p^2} \theta^b \sigma^\mu{}_{b\dot{b}} \bar{\sigma}^{\nu\, \dot{b} a}\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \quad \text{(V.59)}$$

El próximo conmutador es también el más difícil

- $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\nu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\nu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} x^\mu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \quad \text{(V.60)}$$

Usando que

$$[x^\mu, \mathbb{P}_{\mathrm{C}}] = \left[x^\mu, \frac{-m^2}{p^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m\right] = \frac{-m^2}{p^2} \left[x^\mu, \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m\right] - m^2 \left[x^\mu, \frac{1}{p^2}\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m \quad \text{(V.61)}$$

De manera que podemos escribir

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(\frac{-m^2}{p^2} \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m x^\nu + m^2 \left[x^\nu, \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m\right] x^\mu\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} +$$
$$\mathbb{P}_{\mathrm{C}} \left(-m^2 \left[x^\mu, \frac{1}{p^2}\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m x^\nu + m^2 \left[x^\nu, \frac{1}{p^2}\right] \mathbb{P}_{\mathrm{C}}^m x^\mu\right) \mathbb{P}_{\mathrm{C}} \quad \text{(V.62)}$$

asumimos que[4]

$$\left[x^\nu, \frac{1}{p^2}\right] = \frac{i2}{(p^2)^2} p^\nu \tag{V.63}$$

y usa

$$[\mathbb{P}^m_{\mathrm{C}}, x^\mu] = \frac{1}{16m^2}\left(\bar{D}^2\left[D^2, x^\mu\right] + \left[\bar{D}^2, x^\mu\right] D^2\right) \tag{V.64}$$

$$\left[D^2, x^\mu\right] = 2iD^a \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \tag{V.65}$$

$$\left[\bar{D}^2, x^\mu\right] = -2i\theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{D}^{\dot{a}} \tag{V.66}$$

De modo que

$$\begin{aligned} = \frac{1}{16p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(\bar{D}^2\left[D^2, x^\mu\right] + \left[\bar{D}^2, x^\mu\right]\right) x^\nu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\mu \leftrightarrow \nu) + \\ -\frac{2i}{p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu\right)\mathbb{P}_{\mathrm{C}} \end{aligned} \tag{V.67}$$

La segunda linea es simplemente $\frac{-2i}{p^2} L^{\mu\nu}$ donde recordamos al lector que $L^{\mu\nu}$ es el momento angular orbital. La linea difícil es

$$\begin{aligned} \frac{2i}{16p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(\bar{D}^2 D^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{\theta}^{\dot{b}} - \theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \bar{D}^{\dot{b}} D^2\right) x^\nu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\nu \leftrightarrow \mu) = \\ \frac{i}{8p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(\left[\bar{D}^2, D^a\right]\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}} - \theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\left[\bar{D}^a, D^2\right]\right) x^\nu \mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\nu \leftrightarrow \mu) \end{aligned} \tag{V.68}$$

ahora usemos

$$\left[\bar{D}^2, D^a\right] = -4i\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{b}a} \bar{D}_{\dot{b}} \partial_\mu \tag{V.69}$$

$$\left[\bar{D}^{\dot{a}}, D^2\right] = -4i\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a} D_a \tag{V.70}$$

para obtener

$$\begin{aligned} = \frac{i(-4i)}{8p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{b}a}\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{D}_{\dot{b}}\partial_\lambda\bar{\theta}^{\dot{a}}x^\nu - \theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{a}b}D_b x^\nu\right)\mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\nu \leftrightarrow \mu) = \\ \frac{1}{2p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(\sigma^{\nu\,\dot{b}a}\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{D}_{\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{a}} + \sigma^{\lambda\,\dot{b}a}\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{D}_{\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\lambda - \theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\nu\,\dot{a}b}D_b - \theta^a\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{a}b}D_b x^\nu\partial_\lambda\right)\mathbb{P}_{\mathrm{C}} \\ -(\nu \leftrightarrow \mu) \end{aligned} \tag{V.71}$$

[4]El lector puede preferir deducir esta fórmula de los corchetes de Poisson o $0 = [x^\mu, 1] = \left[x^\mu, p^2/p^2\right]$

Cuando tomemos la parte antisimétrica el primer y tercer términos cancelan. Nos queda

$$= \frac{1}{2p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\left(-\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{a}a}x^{\nu}\partial_{\lambda} - \sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{a}a}x^{\nu}\partial_{\lambda}\right)\mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\nu \leftrightarrow \mu) +$$
$$\frac{-1}{2p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\bar{\sigma}^{\lambda\,\dot{b}a}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}(-i\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}}\theta^{b})\partial_{\lambda}\mathbb{P}_{\mathrm{C}} - (\nu \leftrightarrow \mu) \tag{V.72}$$

La primera linea se calcula fácilmente si tomamos n cuenta que $\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\nu\,\dot{a}a} = -2\eta^{\mu\nu}$ y el resultado es $\frac{i2}{p^2}L^{\mu\nu}$ cancelando un resultado previo. La segunda linea es

$$\frac{-i}{2p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\theta\left(\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\lambda}\sigma^{\mu} - \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\lambda}\sigma^{\nu}\right)\bar{\theta}\partial_{\lambda}\mathbb{P}_{\mathrm{C}} =$$
$$= \frac{-i}{p^2}\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\varepsilon^{\nu\lambda\nu\alpha}p\lambda\theta^{b}\sigma_{\alpha\,b\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}}\mathbb{P}_{\mathrm{C}} = \frac{-i}{p^2}S^{\mu\nu} \tag{V.73}$$

Así que finalmente sumando

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = \frac{-i}{p^2}S^{\mu\nu} \tag{V.74}$$

Por supuesto que todos los cálculos que hemos hecho aquí valen de forma idéntica para el proyector $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}$. Pero no para $\mathbb{P}_{\mathrm{T}}$. Es decir hemos logrado representar el álgebra cuántica

$$\left[\hat{\theta}^{a}, \hat{\theta}^{b}\right] = [\hat{\pi}_{a}, \hat{\pi}_{b}] = [\hat{p}_{\mu}, \hat{p}_{\nu}] = 0 \tag{V.75}$$

$$\left[\hat{\theta}^{a}, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right] = \frac{-i}{2ip^2}\hat{p}_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{a}a} \tag{V.76}$$

$$\left[\hat{x}^{\mu}, \hat{\theta}^{a}\right] = \frac{i}{2p^2}\hat{p}_{\nu}\sigma^{\nu\,\dot{a}a}\hat{\theta}^{b}\sigma^{\mu}{}_{b\dot{a}} \tag{V.77}$$

$$\left[\hat{x}^{\mu}, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{a}}\right] = \frac{i}{2p^2}\hat{p}_{\nu}\bar{\sigma}^{\nu\,\dot{a}a}\hat{\bar{\theta}}^{\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} \tag{V.78}$$

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = \frac{-i\hat{S}^{\mu\nu}}{p^2} \tag{V.79}$$

donde

$$\hat{S}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\hat{p}_{\rho}\hat{\theta}^{a}\sigma_{\lambda\,a\dot{b}}\hat{\bar{\theta}}^{\dot{b}} \tag{V.80}$$

Si hacemos los cálculos con $\mathbb{P}_{\mathrm{T}}$ en lugar de $\mathbb{P}_{\mathrm{C}}$ todo es idéntico excepto que la ecuación (V.80).
Una vez más hemos probado que la cuantización de la partícula masiva en $D = 4$ da como resultado el multiplete quiral. El caso de $N > 1$ se puede tratar siguiendo exactamente las mismas lineas. El proyector que deja la teoría en el espacio quiral es proporcional a $\bar{D}^{2N} D^{2N}$.

V.3. Superpartículas en $D > 4$

En dimensión mayor que cuatro muchas de las cosas que hemos hecho pueden repetirse. En dimensiones $D = 6$ o $D = 8$ los cálculos pueden ser más largos pero la situación es más o menos idéntica. El resultado de la cuantización del Lagrangiano (V.1) es el espacio quiral.

Algo diferente sucede en $D = 10$. En este caso sólo tenemos un juego de cargas Q_a que satisfacen

$$\{Q_a, Q_b\} = 2S^{\mu}{}_{ab} p_{\mu} \tag{V.81}$$

No podemos imponer la condición de quiralidad $D_a V = 0$ porque esto implica que $S^{\mu}{}_{ab} \partial_{\mu} V = 0$ y, por tanto $\partial_a V = 0$ que junto con $p^2 + m^2 = 0$ nos obligan a que $V = 0$. Hay que buscar sólo una combinación de ellas igual cero.

Resulta que existen 8 espinores $\lambda^a{}_i$ con $i = 1, .., 8$ que satisfacen la siguiente ecuación

$$\lambda^a{}_i S^{\mu}{}_{ab} \lambda^b{}_j = 0 \qquad \forall i, j \tag{V.82}$$

es decir existe un conjunto de 8 espinores puros "ortogonales". Estos 8 espinores nos permiten imponer la ecuación más débil

$$\lambda^a{}_i D_a V = 0 \tag{V.83}$$

Como esto es aún una conjetura no quiero desarrollarlo en mucha profundidad. Aceptemos por un momento que esto es así. en ese caso puedo dividir las ligaduras en dos partes $\lambda_i^a d_a$ y sus conjugados. Podemos nuevamente decir que una es la fijación de calibre de la otra. De forma que V.83 es la ecuación que caracteriza al multiplete de la superpartícula. Notemos que la solución a este multiplete es un supercampo $V(x^\mu, \bar{\lambda}_{ai}\theta^a)$ que es el multiplete de superespín cero en $D = 10$. La ecuación de movimiento correcta en $D = 10$ es $(P^2 + m^2)V = 0$. La condición V.83 es una especie de condición de quiralidad en un espacio octoniónico. Pero de eso hablaremos en otra tesis.

También este conjunto de 8 espinores puros nos ayudarían a escribir super Maxwell off-shell. En lugar de imponer

$$F_{ab} = 0 \tag{V.84}$$

que, como sabemos implica las ecuaciones de movimiento, impongamos además de la ligadura convencional $S^{\mu\, ab} F_{ab} = 0$

$$\lambda_i^a \lambda_j^b F_{ab} = 0 \tag{V.85}$$

La solución de esta ecuación es

$$\lambda_i^a A_a = \lambda_i^a D_a V \tag{V.86}$$

Y aquí la teoría está aún off-shell. Por todos estos motivos es muy deseable encontrar 8 espinores puros ortogonales.

V.4. Superpartículas con carga central

En esta sección vamos a realizar la mecánica cuántica de partículas con carga central. El sistema de Azcarraga y Lukiersky [7]. Este sistema ha sido analizado por ellos en todas las dimensiones pares. Vamos a estudiar aquí un caso de interés físico relacionado con la teoría M. Consideramos en esta sección una superpartícula que proviene del modo cero de una supermembrana enrollada en un dos ciclo. En esencia esto corresponde a una partícula de A-L en $D = 9$.

La acción para la superpartícula que se deduce de la supermembrana es [56]

$$S = k \int d\tau \left(e^{-1}\omega^m \omega_m - e - i\bar{\theta}_A \dot{\theta}_A \right) \tag{V.87}$$

donde ahora

$$\omega^m = \dot{X}^m - i\bar{\omega}_A \gamma^m \dot{\omega}_A. \tag{V.88}$$

Introduzcamos el parámetro de masa $m = 2k$ y los proyectores,

$$P\pm = \frac{1}{2m}(m \pm \gamma^m p_m). \tag{V.89}$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} P_+P_+ &= -\frac{1}{4m^2}(p^2+m^2) + P_+ \ , \quad P_-P_- = -\frac{1}{4m^2}(p^2+m^2) + P_- \\ P_+P_- &= P_-P_+ = \frac{1}{4m^2}(p^2+m^2) \ , \quad P_+ + P_- = \mathbb{I}. \end{aligned} \tag{V.90}$$

Los momentos conjugados a X^m son

$$p_m = 2ke^{-1}\omega_m \ , \tag{V.91}$$

y los conjugados a θ_A, con $m = 2k$ son

$$\bar{\pi}_A = 2im\bar{\theta}_A P_- \tag{V.92}$$

o equivalentemente

$$\pi_A = -2imP_-\theta_A \tag{V.93}$$

Introduciendo el multiplicador de Lagrange $\lambda \equiv \frac{e}{4k}$, el Hamiltoniano puede entonces ser expresado como

$$\mathcal{H} = \lambda(p^2 + m^2) \tag{V.94}$$

sujeto a

$$\pi_A + 2imP_-\theta_A = 0, \tag{V.95}$$

que es una mezcla de ligaduras de primera y segunda clase. El conjunto de ligaduras (V.95) junto con la condición $p^2 + m^2 = 0$ son equivalentes a

$$p^2 + m^2 = 0 \tag{V.96}$$

$$P_+\pi_A = 0 \tag{V.97}$$

$$P_-\pi_A + 2imP_-\theta_A = 0 \tag{V.98}$$

Ahora (V.96) y (V.97) son de primera clase mientras que (V.98) es una mezcla de ligaduras de primera y segunda clase. Podemos considerar el conjunto,

$$p^2 + m^2 = 0 \tag{V.99}$$

$$\varphi_1 = P_+(\pi_1 + i\pi_2) = 0 \tag{V.100}$$

$$\varphi_2 = P_+(\pi_1 - i\pi_2) = 0 \tag{V.101}$$

$$\Omega_1 = P_-(\pi_1 + i\pi_2) + 2imP_-(\theta_1 + i\theta_2) = 0 \tag{V.102}$$

$$\Omega_2 = P_-(\pi_1 - i\pi_2) + 2imP_-(\theta_1 - i\theta_2) = 0 \tag{V.103}$$

con el corchete

$$\{\Omega_1, \Omega_2\} = -4imP_- \tag{V.104}$$

Notemos también que los términos simplécticos en la acción canónica $\bar{\pi}_A\dot{\theta}_A$ se pueden descomponer como

$$\bar{\pi}_A\dot{\theta}_A = \frac{1}{2}\overline{(\pi_1 + i\pi_2)}(\dot{\theta}_1 - i\dot{\theta}_2) + \frac{1}{2}\overline{(\pi_1 - i\pi_2)}(\dot{\theta}_1 + i\dot{\theta}_2), \tag{V.105}$$

e identificamos los pares conjugados $(\pi_1+i\pi_2)$,$(\dot{\theta}_1-i\dot{\theta}_2)$ y $(\pi_1-i\pi_2)$,$(\dot{\theta}_1+i\dot{\theta}_2)$. Notamos aquí que el par Ω_1 y Ω_2 puede considerarse como una ligadura de primaria clase (Ω_1) y una condición asociada de fijación de calibre (Ω_2). La contribución de este par a la integral funcional cuando se tiene en cuenta como un par de ligaduras de segunda clase o de la manera que lo tratamos aquí es idéntica [66], [2]. Con esta observación podemos finalmente definir nuestro sistema como un sistema de calibre restringido por el conjunto de ligaduras de primera clase (V.99), (V.100) y (V.102). Si ahora queremos podemos imponer la condición de fijación parcial de calibre (V.103) y el conjunto original se recupera, pero somos libres de imponer un conjunto *diferente* de condiciones de fijación de calibre admisibles dado que la integral funcional debe ser invariante con respecto a esta elección.

Para continuar consideramos las condiciones de fijación de calibre,

$$P_+(\theta_1 - i\theta_2) = 0 \tag{V.106}$$

$$P_-(\theta_1 - i\theta_2) = 0 \tag{V.107}$$

que corresponden a la simetría generada por φ_1 y Ω_1 respectivamente. Esta fijación de calibre contribuye a la integral funcional con un factor independiente de los campos. Las variables canónicas $(\pi_1+i\pi_2)$ y $(\theta_1-i\theta_2)$ se pueden integrar en la integral funcional.

Nos queda entonces la acción,

$$\mathcal{L} = p\dot{X} + \bar{\pi}_A\dot{\theta}_A - \mathcal{H} \tag{V.108}$$

$$= p\dot{X} + \frac{1}{2}\overline{(\pi_1 - i\pi_2)}(\dot{\theta}_1 + i\dot{\theta}_2) \tag{V.109}$$

ligada por (V.99) y (V.101). Introduzcamos las variables $\tilde{\theta} = \theta_1 + i\theta_2$ y $\tilde{\pi} = \frac{1}{2}(\pi_1 - i\pi_2)$. Notemos que $\tilde{\theta}$ es un espinor complejo que no satisface la condición de Pseudo-Majorana $\bar{\theta} = \theta^T\tilde{C}$.

Podemos finalmente considerar la fijación parcial del calibre

$$P_+(\theta_1 + i\theta_2) = 0, \tag{V.110}$$

y realizar una reducción canónica a

$$\mathcal{L} = p\dot{X} + \overline{(P_-\tilde{\pi})}(P_-\tilde{\theta}) \tag{V.111}$$

sujeto a la condición de la capa de masas (V.96). El espacio de estados físicos se obtiene considerando supercampos que dependan de $P_-\tilde{\theta}$ y no de su complejo conjugado. Dado que tenemos que $P_- + P_+ = 1$ sin usar $p^2 + m^2 = 0$ los grados de libertad en $P_-\tilde{\theta}$ son exactamente la mitad de los grados en $\tilde{\theta}$. Hay, por tanto, 2^8 bosónicos y fermiónicos grados de libertad on-shell. Corresponden a un multiplete en $D = 9$, el multiplete KKB.

V.5. Partículas sin masa

Veamos en esta sección que el caso de las partículas sin masa también es susceptible de análisis por los métodos que venimos empleando. Este caso es el de mayor importancia porque es que más problemas ha creado. La razón está en que el álgebra de ligaduras $(D = 4, N = 1)$

$$\left\{d_a, \bar{d}_{\dot{a}}\right\} = 2\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}p_\mu \tag{V.112}$$

continente tanto ligaduras de primera como de segunda clase, Los métodos tradicionales (Batlin-Vilkovisky) fallan porque se trata de un sistema infinitamente irreducible, ver por ejemplo los trabajos de Álvaro Restuccia y Jorge Stephany donde el conjunto infinito de fantasmas se construye con sumo cuidado [19], [63], [64], [65].

Nosotros vamos a intentar obviar este problema. Es claro ahora que d_a no es una fijación de calibre de $\bar{d}_{\dot{a}}$. Sin embargo si lo es del siguiente conjunto de vínculos

$$\bar{d}^2 = 0 \qquad \bar{s}igma^{\mu\,\dot{a}a}\bar{d}_{\dot{a}} \qquad d_a \tag{V.113}$$

La mecánica cuántica de este sistema me lleva a imponer

$$\bar{D}^2 V = \bar{s}igma^{\mu\,\dot{a}a}\bar{D}_{\dot{a}}\partial_\mu V = D_a = 0 \tag{V.114}$$

Eso es probablemente lo que se debe obtener en este caso. Es la representación irreducible más pequeña

V.6. Espínores puros

Incluimos en este apéndice algunos resultados conocidos sobre espínores puros y algunas conjeturas. El primero en definir y entender la importancia de los espínores puros fue el mismísimo Elie Cartan [20]. Además de el, han sido estudiados por Claude Chevaley [23]. Más recientemente mencionemos los trabajos de Budinich y Trautman [18] y el de Furlan y Razca [34]. Más modernamente han sido estudiados por Berkovits en diversas ocasiones.

Resulta que en $\mathbb{R}^{2n}$ el conjunto de espínores puros proyectivos está en relación uno a uno con las estructuras complejas que pueden ponerse sobre $\mathbb{R}^{2n}$, la llamada variedad de Grassmanianas.

☞ **Definición V.2** *Un **espinor puro**[5] es un espinor λ_A que verifica que las soluciones z_μ de la ecuación*

$$\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\lambda_B z_\mu = 0 \tag{V.115}$$

$$z^\mu \in \mathbb{C}^{2n} \tag{V.116}$$

[5] En esta sección trabajaremos con la métrica euclídea, pero todo se puede generalizar de forma sencilla excepto donde se menciona lo contrario.

son un espacio de dimensión n.

Este espacio es completamente isótropo, es decir si z^μ y y^μ son dos vectores en ese espacio entonces $z^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = 0$. La demostración es simple y se basa en

$$-2z^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} {\delta_A}^B = z_\mu y_\nu \left\{\Gamma^\mu, \Gamma\nu\right\}_A{}^B \tag{V.117}$$

Si multiplicamos por λ_B o λ^A obtenemos lo que deseamos. Esto es lo que Penrose [61] llamó un α-plano. Ahora imaginemos que tenemos una matriz J definida en $\mathbb{R}^{2n}$ que en $\mathbb{C}^{2n}$ tiene a los $\vec{z}_i$ con $i = 1, ..., n$ como autovectores de valor propio i y a $\vec{z}_i^*$ como autovectores de valor propio $-i$. La matriz J es, por tanto de cuadrado $-I$. Es decir define una estructura compleja en $\mathbb{R}^{2n}$[6]. Esta definición de espinor puro posiblemente no es la mejor pero es muy útil.

Formemos ahora una representación del álgebra de Clifford definiendo

$$B_\alpha^+ = \Gamma_{2\alpha} + i\Gamma_{2\alpha-1} \tag{V.118}$$

$$B_\alpha^- = \Gamma_{2\alpha} - i\Gamma_{2\alpha-1} \qquad \alpha = 1, ..., n \tag{V.119}$$

entonces definimos un vacío $|\Omega\rangle$ que verifique

$$B_\alpha^- |\Omega\rangle \tag{V.120}$$

El conjunto completo de estados es

$$|\Omega\rangle, B_\alpha^+ |\Omega\rangle, ..., (B^+)^n |\Omega\rangle \tag{V.121}$$

Que son los 2^n estados que hemos construido en el primer capítulo. La matriz de Weyl en esta representación es proporcional a

$$W \propto \left[B_1^+, B_1^-\right] \cdots \left[B_n^+, B_n^-\right] \tag{V.122}$$

[6] Cuidado aquí. Estamos trabajando con $\mathbb{R}^{2n}$, su complexificado $\mathbb{C}^{2n}$ y $\mathbb{R}^{2n}$ con una estructura compleja J que lo hace isomorfo a $\mathbb{C}^n$.

No es difícil ver que los estados que se construyen con un número par de B^+ tienen son autovalores de W con el mismo valor.

$$|\Omega\rangle\,, B^+_{\alpha_1} B^+_{\alpha_2} |\Omega\rangle\,, .. \tag{V.123}$$

Los que tienen un número impar tienen el otro autovalor. Son los espínores de Weyl.

☞ **Proposición V.3** *Todos los estados de Fock así construídos son espínores puros[34].*

Demostración:
✎ Empecemos por $|\Omega\rangle$. El espacio isótropo correspondiente está generado por los B^-. En el caso de $B_1^+|\Omega\rangle$ el espacio isótropo está generado por B_1^+, y B^-_α con $\alpha = 2, .., n$ y así sucesivamente.
También, sin demostración queremos señalar que

☞ **Proposición V.4** *Todo espinor puro es de Weyl.*

Es fácil entender que la condición de espinor puro es invariante de Lorentz. Otra definición de espinor puro es la siguiente

☞ **Teorema V.5** *Un espinor λ_A es puro si y sólo si se verifica que*

$$\lambda_A S_{\mu_1 \cdots \mu_k}{}^{AB} \lambda_B \tag{V.124}$$

$$k = 1, ..., D/2 \tag{V.125}$$

Los espínores puros proyectivos parametrizan el conjunto de estructuras complejas sobre $\mathbb{R}^{2n}$. Cada estructura compleja viene dada por una matriz J antisimétrica. Podemos construir entonces una base dada por $e_1, ..., e_n, Je_1, ..., Je_n$. Una matriz unitaria es una matriz ortogonal que commuta con J. Dos estructuras complejas son equivalentes si se pueden relacionar por una matriz unitaria. El conjunto de espínores puros proyectivos está, por tanto parametrizado por el espacio homogéneo $SO(2n)/U(n)$ que tiene dimensión $\binom{2n}{2} - n^2 = n(n-1)$. Por ejemplo en $D = 5$ el espacio de espínores puros proyectivos es un espacio de dimensión 20. El conjunto de espínores puros tiene dimensión 22. En dimensión 8 el conjunto de espínores puros tiene dimensión 14 igual que el grupo G_2.

En $D = 10$ la última caracterización implica que un espinor puro satisface[7]

$$\lambda^a S^{\mu}{}_{ab} \lambda^b = 0 \tag{V.126}$$

Nuestra conjetura es que podemos construir untotal de 8 espínores puros que verifiquen

$$\lambda_i^a S^{\mu}{}_{ab} \lambda_j^b = 0 \tag{V.127}$$

La existencia de estos 8 espínores se inspira en [25] la fórmula (13) junto con la condición (15) nos dicen que existen 8 espinores de Majorana-Weyl linealmente independientes que satisfacen la ecuación

$$\xi_i{}^a S^{\mu}{}_{ab} \xi_j{}^b = \frac{1}{8} \xi_k{}^a S^{\mu}{}_{ab} \xi^{k\,b} \tag{V.128}$$

Hay una relación con los octoniones. Los espínores puros como hemos dicho parametrizan estructuras complejas. En $D = 4$ tengo dos espínores puros cuyo espacio proyectivo nos da una estructura compleja. En $D = 6$ tenemos 4 espínores puros que parametrizan tres estructuras complejas, las de los cuaterniones. En $D = 10$ tenemos 11 espínores puros, pero sólo 8 forman un espacio vectorial y parametrizan 7 estructuras complejas compatibles. Aunque estas observaciones no suman una prueba son, al menos inquietantes.

[7]Recuerden que en nuestra notación $S^{\mu}{}_{ab} = S^{\mu}{}_{a\dot{a}} J_b{}^{\dot{a}}$

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Duarante los últimos trenta años son muchos las ideas geométricas que la teoría de la supersimetría ha tomado para si prestada de la geometría usual. Sin embargo muchos conceptos existentes en la geometría clásica no pueden o no han sabido generalizarse. La física provee a la geométría con multitud de ejemplos para trabajar. En esta tesis nos hemos centrado en el estudio y propiedades las teorías supersimétricas de Maxwell, el principio de movimiento de las partículas, su interacción y el problema de la mecánica cuántica de estos sistemas clásicos.

Muchos de los conceptos desarrollados aquí pueden extenderse a otras teorías supersimétricas, en especial supergravedad y las supercuerdas y algunos otros no. En esos casos este estudio representa sólo un primer paso.

El primer trabajo con el que nos hemos encontrado es con el de estudiar todas las aproximaciones basadas en la geometría que se han estudiado a lo largo del tiempo que, como hemos tenido oportunidad de ver son muchos y prolíficos. A pesar de que a nivel de la teoría de campos sólo hemos estudiado las teorías de super Maxwell hemos tratado de hacerlo en todos sus casos buscando una visión unificadora. Hemos tratado de buscar geometría en cada problema que la física nos ha presentado.

El estudio de super Maxwell en todas sus dimensiones ha resultado ser una mina de oro en cuanto a problemas y nuevas direcciones de trabajo se refiere. En el capítulo (III) hemos estudiado con toda profundidad estos sistemas analizando primero todos las lineas de investigación, agrupandolas y generalizándolas en la medida de los posible. En este capítulo descubrimos como escribir super Maxwell en cada dimensión basanonos en ideas y principios geométricos. En ese caso la sección sobre super Maxwell en $D = 6$ es propia si bien los trabajos de Köller y Nillson habian resuelto el problema de otra forma. Mostramos como estas teorías pueden escribirse en función de prepotenciales sólo si el espacio de Salam y Strathdee es agrandado con nuevas c-variables espinoriales. Estas ideas tienen una alta resemblanza con lo trabajo en el superespacio armónico que tratamos tambien en este capítulo de forma original en muchos puntos.

El siguinte capítulo es estudian las superpatículas y su acoplamiento con super Maxwell. Allí estudiamos, por ejemplo el origen geometrico de la acción de Azcarraga y Lukiersky basándonos otra vez en las profundas ideas gometricas que subyacen a lo estudios del superespacio armónico. Allí vemos como la simetría kappa implica las ecuaciones de movimiento para super Maxwell sólo si $N > 2$ o $D = 10$ aclarando algunos malentendidos que han surgido en el pasado.

Casi todos los resultados del capítulo de cuantización son nuevos. Allí hemos logrado la cuantización de todas las superpartículas masivas en cualquier N y cualquier dimensión incluyendo las superpartículas con carga central. Hemos encontrado un esquema simple de cuantización que aclara todas las dudas que se han suscitado a este respecto durante años. El caso de masa nula claramente merece un estudio más detallado pero de nuestros análisis se desprende que estos son un primer paso hacia esa dirección. En particular logramos realizar el caso sin masa de $D = 4$ y $N = 1$ amen de introducir una nueva partícula masiva cuya cuantización da una teoría supersimétrica de Proca cuyo límite de masa cero (bien entendido) es super Maxwell.

Además de eso descubrimos un nuevo método para la cuantización de sistemas con vínculos de seguna clase realizando de manera nada trivial las complicadas álgebras que surgen de la aplicación ciega del método de los corchetes de Dirac para las ligaduras de segunda clase. Estas nuevas ideas abren la puerta a otro tipo de estudio de geometrías no conmutativas. En el caso de las partíclas con carga central reprodujimos los resultados anteriores de Azkarraga, Lukiersky y colaboradores dándoles algo más de rigor comprobando que el multiplte resultante es en todos lo casos un multiplte con carga central. Analizamos, además el caso de una partícula en $D = 9$ que nunca antes había sido tratada con el rigor que merece.

Bibliografía

[1] V. P. Akulov, D. V. Volkov, and V. A. Soroka. Gauge fiels on superspaces with diferent holonomy groups. *JETP Lett*, 22(7):187–188, 1976. Pis'ma Zh. Eksp. Teor. fiz. Vol. 22, N 7, 396-399 (1975). I

[2] A.Restuccia and J.Stephany. *Physics Letters B*, 305:348, 1993. V.4

[3] R. Arnowitt and Pran Nath. Generalized super-gauge symmetry as a new framework for unified gauge theories. *Physics Letters B*, 56(2):177–180, 1975. I

[4] R. Arnowitt and Pran Nath. Supergravity and gauge supersymetry. *Physics Letters B*, 65(1):76–77, 1976. I

[5] R. Arnowitt, Pran Nath, and Bruno Zumino. Superfield densities and action principle in curved superspace. *Physics Letters B*, 56(1):81–84, 1975. I

[6] Michael F. Atitah, Raoult Bott, and Arnold Shapiro. Clifford modules. *Topology*, 3(Suppl. 1):3–38, 1964.

[7] J. A. Azkarraga and J. Lukierski. *Physics Letters B*, 113:170, 1982. V.4

[8] F.A. Berezin and M.S. Marinov. Particle spin dynamics and grassmann variant of classical mechanics. *Annals of Physics*, 104:336–362, 1977.

[9] E. Bergshoeff, M de Roo, B. de Wit, and Peter van Nieuwenhuizen. Ten-dimensional maxwell-einstein supergravity, its currents, and the issue of its auxiliary fields. *Nuclear Physics B*, 195:97–136, 1982. I

[10] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P.K. Townsend. Supermembranes and eleven-dimensional supergravity. *Physics Letters B*, 189(1,2):75–78, 1987. I

[11] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P.K. Townsend. Properties of the eleven dimensional supermembrane theory. *Annals of Physics*, 185:330–368, 1988. I

[12] Nathan Berkovits. A supertwistor description of the massless superparticle in ten-dimensional superspace. *Nuclear Physics B*, 350:193–200, 1991.

[13] Nathan Berkovits. Covariant quantization of the superparticle using pure spinors. *JHEP*, 09:16, 2001.

[14] Nathan Berkovits. Covariant quantization of the supermembrane. *JHEP*, 09:51, 2002. hep-th/0201151.

[15] Nathan Berkovits. Ictp lectures on covariant quantization of the superstring. hep-th/0209059, 2002.

[16] Nathan Berkovits and Nikita Nekrasov. The character of pure spinors. hep-th/0503075, 2005. II.1.2

[17] Lars Brink and John H. Schwarz. Quantum superspace. *Physics Letters B*, 100(4):310–312, 1981.

[18] Paolo Budinich and Andrej Trutman. Fock space description of pure spinors. 30(9):2125–2131, 1989. V.6

[19] M. Caicedo, M Lledo, A. Restuccia, and J. Stephany. On the covariant quantization of green-schwarz superstring and brink-schwarz superparticle. *Anales Fis.*, 1:273, 1992. V.5

[20] E. Cartan. *Lecons sur la thèorie des spineurs*. Hermann et Cia, 1938. V.6

[21] Ricardo Casalbuoni. The classical mechanics for bose-fermi systems. *Il Nuovo Cimento A*, 33(3):389–431, 1976. I, V.1, V.1, 2

[22] Ricardo Casalbuoni. On the quantization of systems with anticommuting variables. *Il Nuovo Cimento A*, 33(1):115–125, 1976.

[23] Claude Chevaley. *The algebraic theory of spinors*. 1956. V.6

[24] E. Cremer, B. Julia, and joel Scherk. Supergravity in 11 dimnsions. *Physics Letters B*, 76(4):409–412, 1978. I

[25] F. Deluc, Paul Howe A. Galpering, and E. Sokatchev. Twistor formulation of the heterotic$d = 10$ superstring with manifest $(8, 0)$ world-sheet supersymmetry. *Physical Review D*, 47(2):578–592, 1993. V.6

[26] Stanley Desser and Bruno Zumino. Consistent supergravity. *Physics Letters B*, 62(3):335–337, 19. I

[27] Bryce DeWitt. *Supermanifolds*, volume 4 of *Selectec monographies*. Collaege Prees, University of Beijing, second edition, 1998. II.2

[28] Michael Eastwood and Paul Tod. Edth- a diferential operator on th sphere. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 92:317–330, 1982.

[29] Segio Ferrara and Peter van Nieuwenhuizen. The auxiliary fields of supergravity. *Physics Letters B*, 74(4,5):333–335, 1978. I

[30] Sergio Ferrara, Daniel Z. Freedman, and Peter van Nieuwenhuizen. Progress toward a theory of supergravity. *Physical Review D*, 13(12):3214–3218, 1976. I

[31] Peter G. O. Freund. *Introduction to supersymmetry*. Cambridge University Press, 1986. II.2.1

[32] A. Frydryszak. n-extended free superfields ($n = 2, 4, 6, 8$) from quantization of a supersymmetric particle model. *Physical Review D*, 30(10):2172–2180, 1984. 2

[33] Andrzej Frydryszak and Jerzy Lukierski. $n = 2$ massive matter multiplet from quantization of extended clasical mechanics. *Physics Letters B*, 51:51, 1982.

[34] P. Furlan and R. Raczka. Nonlinear represntations. *Journal of Mathematical Physics*, 26(12):3021–3032, 1985. V.6, V.3

[35] A.S. Galperin, E.A. Ivanov, V.I. Ogievetsky, and E.S. Sokatchev. *Harmonic superspace*. Cambridge monographs on mathematical physics. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2001. I

[36] S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel. *One thousand and one lesons in supersymmetry*. 1983. III.3, V.2

[37] S.J. Gates and Warren Siegel. Superprojectors. 1981. III.3

[38] J.N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich, and E.C.G. Sudarshan. Spin-s spherical harmonics and d. *Journal of Mathematical Physics*, 8(11):2155–2161, 1967.

[39] M.B. Green and J.H. Schwarz. Covariant description of superstrings. *Physics Letters B*, 136:367–370, 1984. Reimpreso en [73].

[40] R. Grimm, Martin F. Sohnius, and Lulius Wess. Extended supersymmetry and gauge theories. *Nuclear Physics B*, 133:275–284, 1978. I

[41] R. Grimm, Julius Wess, and Bruno Zumino. A complete solution of the bianchi indentities in superspac with supergravity constraints. *Nuclear Physics B*, 152:255–265, 1979.

[42] R. Haag, J. Lopuszanski, and Martin Sohnius. All supersymmetries of the s-matrix. *Nuclear Physics B*, 88:257, 1975. II.2.1

[43] A.J. Hanson and T. Regge. The relativistic spherical top. 87:498–566, 1974.

[44] Paul S. Howe. Pure spinor lines in superspace and ten-dimensional supersymmetric theories. *Physics Letters B*, 258(1,2):141–144, 1991. Addendum: Physics Letters BVol 259, N 4, p. 511 (1991).

[45] Paul S. Howe. Pure spinors, function superspaces and supergravity theories in ten and eleven dimensions. *Physics Letters B*, 273(1,2):90–94, 1991.

[46] Paul S. Howe, Silvia Penati, Mario Pernici, and Paul Townsend. Wave equations for arbitrary spin from quatization of the extended supersymmetric spinning particle. *Physics Letters B*, 215(3):555–558, 1988.

[47] Paul S. Howe, German Sierra, and P.K. Townsend. Supersymmetry in six dimensions. *Nuclear Physics B*, 221:331–348, 1983.

[48] Paul S. Howe, K. S. Stelle, and P.K. Townsend. Superactions. *Nuclear Physics B*, 191:445–464, 1981.

[49] Paul S. Howe, K. S. Stelle, and P.K. Townsend. The relaxed hypermultiplet: an unconstrained $n = 2$ superfield theory. *Nuclear Physics B*, 214:519–531, 1983.

[50] Paul S. Howe, K. S. Stelle, and P.C. West. $n = 1$, $d = 6$ harmonic superspace. *Classical and Quantum Gravity*, 2:815–821, 1985. I

[51] V. G. Kac. A sketch of lie superalgebra theory. *Communications in Mathematical Physics*, 53:31–64, 1977. II.2

[52] Jeff Koller. A six-dimensional superspace aproach to extebded superfields. *Nuclear Physics B*, 222:319–337, 1983. I

[53] John Lott. Torsion constraints in supergometry. *Communications in Mathematical Physics*, 133:563–615, 1990. I

[54] L. Lusana. Relativistic mechanics with constraints and pseudoclassical models of supersymmetry. In *Supersymetry and supergravity 1983, Proceedings of the XIXth Winter School and Wokshop of theoretical Physics*. World Scientific, 1983. 2

[55] E. T. Newman and Roger Penrose. Note on the bondi-metznr-sachs group. *Journal of Mathematical Physics*, 7(5):863–870, 1966.

[56] N.Hatcher, A. Restuccia, and J. Stephany. On the quatum mechanics of a supermembrane wrapped on a two circle and the *kkb* superparticle. hep-th-051235. V.4

[57] Bengt E. W. Nilsson. Off-shell fields for the 10-dimensional supersymmetric yang-mills theory. Göteborg Preprint, 81-6, February. I

[58] Bengt E. W. Nilsson. Superspace action for a 6-dimensional non-extended supersymmetric yang-mills theory. *Nuclear Physics B*, 174:335–344, 1980.

[59] Bengt E. W. Nilsson. Pure spinors as auxiliary fields in the ten dimensional supersymmetric yang-mills theory. *Classical and Quantum Gravity*, 3:L41–L45, 1986. II.1.2

[60] Susumu Okubo. Structure of superspac in supersymmetry. *Physical Review D*, 29(2):169–284, 1984. V.2

[61] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time. Volume 2*. Cambridge University Press, 1986. V.6

[62] M.H.L. Pryce. The mass-centre in the restrictd theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles. *Proceedings of the Royal Socciety of London A*, 195:62–81, 1948.

[63] A. Restuccia and J. Stephany. Canonical covariant quantization of the brink-schwarz superparticle. *Phys. Rev.*, D47:3437–3442, 1993. V.5

[64] A. Restuccia and J. Stephany. Covariant quantization of green-schwarz superstring. 1993. V.5

[65] A. Restuccia and J. Stephany. Canonical covariant formulation of green-schwarz superstring without second class constraints. *Phys. Lett.*, B343:147–152, 1995. V.5

[66] A.Restuccia R.Gianvittorio and J.Stephany. *Mod. Phys. Lett.*, A6:2121, 1991. V.4

[67] V. O. Rivelles and J. G. Taylor. Off-shell no-go theorems for higher dimensional supersymmetries and supergravities. *Physics Letters B*, 121(1):37–42, 1983. I

[68] Jr. S. James Gates, K.S. Stelle, and P.C. West. Algebraic origins of superspac constraints in supergravity. *Nuclear Physics B*, 169:347–364, 19. I

[69] A. Salam and J. Strathdee. On superfields and fermi-bose symmetry. II.3

[70] Per Salomonson. Supersymmetric actions for spinning particles. *Physical Review D*, 18(6):1868–1880, 1978.

[71] M. Scheunert, W. Nahm, and V. Rittnberg. Classification of all simple graded lie algebras whose lie algebra is reductive. i. *Journal of Mathematical Physics*, 17(9):1626–1639, 1976. II.2, 2

[72] M. Scheunert, W. Nahm, and V. Rittnberg. Classification of all simple graded lie algebras whose lie algebra is reductive. ii. construction of the exceptional algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 17(9):1640–1644, 1976. II.2

[73] J. Schwarz. *Superstrings. The first 15 years of superstring theory*, volume 1. World Scientific, 1985. 39

[74] W. Siegel. Hidden local supersymmetry in the supersymmetric particle action. *Physics Letters B*, 128, 1983. I

[75] Warren Siegel. Conquest of the ghost pyramid of the superstring. 2005. I

[76] Warren Siegel and M. Rocek. On off-shell supermultiplets. *Physics Letters B*, 105(4):275–277, 1981. I

[77] Martin F. Sohnius. Bianchi identities for supersymmetric gauge theories. *Nuclear Physics B*, 136:461–474, 1978.

[78] Martin F. Sohnius. Supersymmetry and central charges. *Nuclear Physics B*, 138:109–121, 1978.

[79] E. Sokatchev. Proyection operators and supplementary conditions for superfiels ith arbitrary spin. *Nuclear Physics B*, 99:96–108, 1975. II.3, III.3

[80] K.S. Stelle and P.C. West. Minimal auxiliary fields for supergravity. *Physics Letters B*, 74(4,5):330–332, 1978. I

[81] J. G. Taylor. On representations of extended supersymmetry algebras on superfields. *Nuclear Physics B*, 169:484–500, 1980. III.3

[82] E. P. Wigner T.D. Newton. Localized states for elementary systems. *Reviwes of Modern Physics*, 21(3):400–406, 1949.

[83] E. Sokatchev V. Rittenberg. Decomposition of extended superfields into irreducible representations of supersymmetry. *Nuclear Physics B*, 193:477–501, 1981. II.3, III.3, V.2

[84] Steven Weinberg. *The quatum theory of fields. Volume II: supersymmetry.* Cambridge University Press, 2000. II.2.1

[85] J. Wess and Bagger. *Supersymmetry and supergravity.* Princeton series in Physics, 1982. I, II.1

[86] Julius Wess and Bruno Zumino. Superspace formulation of supergravity. *Physics Letters B*, 66(4):361–364, 1977. I

[87] Edward Witten. Twistor-like transform in ten dimensions. *Nuclear Physics B*, 266:245–264, 1986. I

[88] G. Woo. Scalar superfield dynamics from the arnowitt-nath supergeometry. *Lettere al Nuovo Cimento*, 13(14):546–550, 1975. I