

BÀI TẬP PHÂN TÍCH ĐỘ PHỨC TẠP THUẬT TOÁN

Câu 1)

Sử dụng thuật toán Quickselect tìm kiếm phần tử nhỏ thứ K trên mảng có độ dài N . Ta có:

- $T(N) = O(N)$ nếu $\text{pivot} = K$
- $T(N) = T(\text{pivot}) + O(N)$ nếu $\text{pivot} < K$
- $T(N) = T(N - \text{pivot} - 1) + O(N)$ nếu $\text{pivot} > K$

Do kỳ vọng $\text{pivot} = N/2$,

$$\Rightarrow T(N) = T(N/2) + O(N)$$

Áp dụng định lý Master:

$$\Rightarrow T(N) = O(N) \text{ do } c > \log_a b \text{ (} c = 1, a = 1, b = 2 \text{)}$$

Câu 2)

Với cấu trúc dữ liệu vector (list trong python), giả sử hiện tại vector có n phần tử và có kích thước là m , ta cần thêm 1 phần tử vào cuối vector:

- Với $n < m$: tăng n lên 1
- Với $n = m$: tăng kích thước m lên gấp đôi và tăng n lên 1

Ta có thời gian khấu hao là: $AT = C + \Phi(h') - \Phi(h)$, với C là thời gian thực thi thực tế.

Chọn potential function: $\Phi(h) = 2n - m$, giá trị potential = $\Phi(h') - \Phi(h)$.

Chứng minh được mỗi khi thêm 1 phần tử vào thì thời gian khấu hao là 1 hằng số:

- Với $n < m$: ta chỉ cần tăng n lên 1 nên $C = 1$, $\text{potential} = (2(n+1) - m) - (2n - m) = 2$. Do đó: $AT = 1 + 2 = 3$
- Với $n = m$: ta phải tăng kích thước m lên gấp đôi và tăng n lên 1 nên $C = n + 1$, $\text{potential} = (2(n+1) - 2*m) - (2n - m) = 2 - n \Rightarrow AT = (n + 1) + (2 - n) = 3$

Vậy thời gian khấu hao là 3 $\Rightarrow O(1)$.

Câu 3)

Để tính được kỳ vọng số lượng bàn cờ phải tạo, ta cần tính được số lượng bàn cờ được tạo ra và số lượng bàn cờ thỏa mãn yêu cầu. Kỳ vọng là thương của số lượng bàn cờ được tạo ra chia cho số lượng bàn cờ thỏa mãn.

Ý tưởng thuật toán: Đệ quy chỉ số hàng và duyệt chỉ số cột, kiểm tra vị trí đó phải thỏa mãn trong cấu hình hiện tại rồi đệ quy chỉ số hàng tiếp theo cho đến hết bàn cờ.

Kết quả thu được:

- Số lượng bàn cờ được sinh ra: 736
- Số lượng bàn cờ thỏa mãn: 92
- Kỳ vọng: $736 / 92 = 8.0$

Code: (đính kèm theo bài nộp)