Cho ánh xạ: $f: X \to Y$, nghĩa là, với mọi $x \in X$ tồn tại $y \in Y$ duy nhất sao cho $y = f(x)$.

Thí dụ: $X = Y = \mathbb{R}$ và $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 2x$.

- f được gọi là đơn ánh nếu với mọi $x, x' \in X$ mà $x \neq x'$ thì $f(x) \neq f(x')$. Một cách tương đương

f được gọi là đơn ánh nếu với mọi $x, x' \in X$ mà $f(x) = f(x')$ thì $x = x'$.

- f được gọi là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ để $y = f(x)$.
- f được gọi là song ánh từ X lên Y nếu nó vừa là đơn ánh và toàn ánh. Khi đó, tồn tại ánh xạ ngược
$$f^{-1}: Y \to X; \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$
Thí dụ
$$y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}.$$

Cho $A \subset X$. Khi đó
$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$
Cho $B \subset Y$. Khi đó
$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$
Câu 2.1 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:
$$f(x) = \frac{3x}{1 + x^2}.$$
Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f.

Tìm $f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]\right)$.

Giải: Xét phương trình
$$y = \frac{3x}{1 + x^2}.$$
Phương trình này tương đương với phương trình
$$yx^2 - 3x + y = 0.$$
Khi $y = 0$ thì có duy nhất $x = 0$.

Khi $y \neq 0$ ta có phương trình bậc hai với biệt số

$$\Delta = 9 - 4y^2.$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = 9 - 4y^2 \geq 0$ tức là khi $|y| \leq \frac{3}{2}$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$ tức là khi $|y| < \frac{3}{2}$. Do vậy, f không là toàn ánh và cũng không là đơn ánh.

Để tìm $f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right)$ ta giải các bpt $-\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}$ và đi đến:

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}\right\}$$

$$\begin{cases} 1 + x^2 + 4x \geq 0 \\ 1 + x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ x \leq \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x \leq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$= \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$$

Cách 2.

f không đơn ánh vì $f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$

f không toàn ánh vì $f(x) = 3$ vô nghiệm

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}\right\}$$

$$= \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$$

Câu 2.2 (2 điểm): Cho hai ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ và $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ nếu } x \text{ là chẵn} \\ \dfrac{x-1}{2} \text{ nếu } x \text{ là lẻ} \end{cases}.$$

Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f và g.

Giải: Ta có

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$$

nên f đơn ánh.

$f^{-1}(1) = \emptyset$ nên f không toàn ánh.

Với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $g(2k) = k$ nên g toàn ánh. Do $g(2k) = k = g(2k+1)$ vậy g không đơn ánh.

Câu 2.3 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$$

(với kí hiệu $[x]$ để chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x, gọi là phần nguyên của x). Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f. Tìm $f^{-1}(\{0; 1; 2\})$.

Giải: Ta có, với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f(2n) = \left[\frac{2n}{2}\right] = [n] = n$ nên f là toàn ánh. Do $f(2n) = n = f(2n+1)$ nên f không đơn ánh.

$$f^{-1}(\{0; 1; 2\}) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 2$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 0; 1$.

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 \le x < 4$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 2; 3$.

…

Câu 2.4 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = n(n+1)$$

Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f.

Tìm $f^{-1}(2)$.

Giải: Ta có

Với $m, n \in \mathbb{N}$, $f(m) = f(n) \Leftrightarrow m(m+1) = n(n+1)$

$$\Leftrightarrow (m-n)(m+n+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} m = n \\ m+n+1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = n$$

Vậy f là đơn ánh.

Phương trình $f(n) = 1 \Leftrightarrow n^2 + n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{N}$

Tức là $f^{-1}(1) = \emptyset$ nên f không toàn ánh.

$$f(n) = 2 \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -2(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy $f^{-1}(2) = \{1\}$.

Câu 2.5 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (x + y, 2x - y + 1).$$

Chứng tỏ rằng f là một đơn ánh, f có phải là một song ánh không?

Giải: Giả sử với $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mà $f(x, y) = f(x', y')$

khi đó

$$\begin{cases} x + y = x' + y' \\ 2x - y + 1 = 2x' - y' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ 2x - y = 2x' - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

nên f là đơn ánh.

Ta có $f(x, y) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Do $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nên f không toàn ánh.

Vậy f không song ánh.

Câu 2.6 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi:

$f(n) = \frac{n}{2}$ nếu n chẵn và $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ nếu n lẻ.

a) (1 điểm) Chứng minh rằng f là một song ánh.

b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Giả sử $f(m) = f(n)$.

Nếu $f(n) \geq 0$ thì $f(n) = \frac{n}{2}$ và $f(m) = \frac{m}{2}$ $(n, m$ chẵn). Do đó $f(m) = f(n) \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{n}{2} \Leftrightarrow m = n$.

Nếu $f(n) < 0$ thì $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ và $f(m) = -\frac{m+1}{2}$ $(n, m$ lẻ). Do đó $f(m) = f(n) \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2} = -\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow m = n$.

Vậy f là đơn ánh.

Với mọi $m \in \mathbb{Z}$,

Nếu $m \in \mathbb{N}$ thì ta có $f(2m) = m$.

Còn $m < 0$, do

$$-\frac{n+1}{2} = m \Leftrightarrow n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$$

nên

$$f(-2m-1) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$$

Vậy f toàn ánh. Tóm lại f là một song ánh.

Do $f(2m) = m$ nếu $m \geq 0$ và $f(-2m-1) = m$ nếu $m < 0$, nên

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & \text{nếu } m \geq 0 \\ -2m-1, & \text{nếu } m < 0 \end{cases}.$$

Câu 2.7 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ xác định bởi:

$$f(m, n) = 2^m . 5^n.$$

Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

Giải: Ta có

$$f(m, n) = f(m', n') \Leftrightarrow 2^m . 5^n = 2^{m'} . 5^{n'}$$

Do cách phân tích một số nguyên thành các thừa số nguyên tố là duy nhất nên $n = n'$ và $m = m'$, tức là $(m, n) = (m', n')$ Vậy f là đơn ánh.

Do số nguyên dương 3 không phân tích dưới dạng $2^m . 5^n$ nên f không toàn ánh. Vậy f cũng không song ánh.

Câu 2.8 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: X \to Y$.

a) (1 điểm) Chứng minh với mọi $A \subset X, B \subset X$ luôn có

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Giải:

a) Do $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ nên $f(A \cap B) \subset f(A)$ và $f(A \cap B) \subset f(B)$. Vậy $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Đặt $X = \{a; b\}$ và $Y = \{1\}$. Ánh xạ $f: X \to Y$ xác định bởi

$$f(a) = f(b) = 1.$$

Lại đặt $A = \{a\}, B = \{b\}$. Như vậy $A \cap B = \emptyset$ nên

$$\emptyset = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = \{1\}.$$

Câu 2.9 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x^2 + 4x - 1.$$

a) (1 điểm) Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?
b) (1 điểm) Xác định $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}); f^{-1}([4; 11])$.

Giải:

a) Do $f(-4) = f(0) = -1$ nên f không đơn ánh.
Do $f(x) = x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5 \geq -5$ nên f không toàn ánh.

b) $\operatorname{Im} f = \{(x+2)^2 - 5 | x \in \mathbb{R}\} = [-5; \infty)$

$$\begin{aligned} f^{-1}([4; 11]) &= \{x \in \mathbb{R} |\ 4 \leq x^2 + 4x - 1 \leq 11\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x - 5 \geq 0 \wedge x^2 + 4x - 12 \leq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{matrix} x \leq -5 \\ x \geq 1 \end{matrix}\right. \wedge -6 \leq x \leq 2\right\} = [-6; -5] \cup [1; 2]. \end{aligned}$$

Câu 2.10 (14/12) (2 điểm**)**: Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 3x + 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

a) (1 điểm) Chứng minh f là một song ánh.
b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Giả sử $f(x) = f(y)$.

Nếu $f(x) = f(y) \leq 1$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y$.

Nếu $f(x) = f(y) > 1$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Leftrightarrow x = y$.

Do vậy, f đơn ánh.

Với $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $y \leq 1$ thì $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$.

Nếu $y > 1$ thì $f\left(\frac{y-1}{3}\right) = 3\frac{y-1}{3} + 1 = y$.

Nên f là toàn ánh.

Vậy f là một song ánh.

b) Theo trên ta có

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1, \text{nếu } y \leq 1 \\ \dfrac{y-1}{3}, \text{nếu } y > 1 \end{cases}.$$

Câu 2.11 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Xác định $f\big((-1;4]\big)$ và $f^{-1}\big([-2;\ 18)\big)$.

Giải:

Lập bảng biến thiên ta có $f\big((-1;4]\big) = [-2;18]$

Ta có

$$x \in f^{-1}\big([-2;18)\big) \Leftrightarrow f(x) \in [-2;18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -2 \\ f(x) < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;4)$$

Vậy $f^{-1}\big([-2;18)\big) = [-1;4)$

Câu 2.12 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

a) (1 điểm) Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không?

b) (1 điểm) Tìm một tập $A \subset \mathbb{R}$ sao cho f là một song ánh từ A vào $\mathbb{R}$.

Giải:

a) Lập bảng biến thiên ta có $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ nên f là một toàn ánh.

Vì $f(-1) = f(2) = 3$ nên f không là đơn ánh.

b) Chọn $A = (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$ ta có f là một song ánh từ A vào $\mathbb{R}$.

Câu 2.13 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ xác định bởi

$$f(m; n) = (m + n; 2m + n)$$

Hỏi f có phải là đơn ánh, toàn ánh không?

Giải:

Giả sử

$$f(m, n) = f(m', n')$$

$$\Rightarrow (m + n; 2m + n) = (m' + n'; 2m' + n')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = m' + n' \\ 2m + n = 2m' + n' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (m', n').$$

Vậy f là một đơn ánh.

Xét phương trình $f(m, n) = (1; 0)$ khi đó

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Do $(2; -1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nên f không là một toàn ánh.

Câu 2.14 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x; y) = (x - y; x + y).$$

a) (1 điểm) Chứng minh ánh xạ f là một song ánh.

b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Với mọi $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$f(x; y) = (a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a + b}{2} \\ y = \dfrac{b - a}{2} \end{cases}$$

Do đó f là một song ánh và

$$f^{-1}(a;b) = \left(\frac{a+b}{2};\frac{b-a}{2}\right).$$

Câu 2.15 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: X \to Y$

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi tập $A \subset X$ luôn có.

$$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big).$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà $A \neq f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Giải:

a) $\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

b) Thí dụ $f: \{a; b\} \to \{1\}$ với $f(a) = f(b) = 1$.

Đặt $A = \{a\}$ thì

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}\big(f(a)\big) = f^{-1}(1) = \{a; b\} \neq A.$$

Câu 2.16 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: X \to Y$

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi tập $B \subset Y$ luôn có.

$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B.$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

Giải:

a) $\forall y \in f\big(f^{-1}(B)\big) \Rightarrow f^{-1}(y) \in f^{-1}(B) \Rightarrow y \in B$

nên $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

b) Thí dụ $f: \{a\} \to \{1; 2\}; f(a) = 1$. Đặt $B = \{1; 2\}$. Khi đó

$$f\big(f^{-1}(B)\big) = f(\{a\}) = f(a) = \{1\} \subsetneq B.$$

Câu 2.17 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ xác định bởi

$$f(m; n) = (2m + 3n; 3m + 5n)$$

Chứng minh f là một song ánh. Tìm f^{-1}.

Giải:

Ta có $f(m,n) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = a \\ 3m + 5n = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5a - 3b \\ n = -3a + 2b \end{cases}$

Do đó f là một song ánh.

$$f^{-1}(a,b) = (5a - 3b, -3a + 2b)$$

Câu 2.18 (2 điểm): Cho $m \in \mathbb{N}^*$ và cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi: $f(n) = \begin{cases} m - n, nếu\ n \le m \\ m + n, nếu\ n > m. \end{cases}$

a) (1 điểm) Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không?

b) (1 điểm) Tìm một tập $B \subset \mathbb{N}$ sao cho f là song ánh từ $\mathbb{N}$ vào B.

Giải:

a) Ta có $f(n) \le m$ khi $n \le m$ và $f(n) > 2m$ khi $n > m$.

● Do đó $f(n) \notin A = \{m+1; m+2; \dots; 2m\}$
nên f không là toàn ánh.
Nếu $f(n) = f(k) \le m$ thì khi đó

$$\begin{cases} f(n) = m - n \\ f(k) = m - k \end{cases}$$

Nên $f(n) = f(k) \Rightarrow m - n = m - k \Rightarrow n = k$.
Nếu $f(n) = f(k) > m$ thì $f(n) = f(k) \Rightarrow m + n = m + k \Rightarrow n = k$.
Vậy f là một đơn ánh.

b) Xét $B = \mathbb{N} \backslash A$, ta có f là một song ánh từ $\mathbb{N}$ vào B.

Câu 2.19 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{nếu } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2, \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

a) (1 điểm) Chứng minh f là một song ánh.

b) (1 điểm) Xác định ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Lập bảng biến thiên ta có f là một song ánh.

Cách 2: Ta có

$$f(0;1) = (-\infty; 0); f\big([1; +\infty)\big) = ([0; +\infty)$$

Nên f toàn ánh.

Mặt khác, giả sử $f(x) = f(x')$.

Nếu $f(x) = f(x') < 0$ thì $x, x' \in (0;1)$ nên $\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$.

Nếu $f(x) = f(x^{'}) \geq 0$ thì $x, x^{'} \in [1; +\infty)$ nên $(x-1)^2 = (x^{'}-1)^2 \Leftrightarrow x = x^{'}$.

Vậy f là một song ánh.

b) Với mọi $y \in \mathbb{R}$.
Nếu $y < 0$ ta có $\ln e^y = y$ nên $f^{-1}(y) = e^y$
Nếu $y \geq 0$ ta có $(x-1)^2 = y \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$. Vậy $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y}$. Tóm lại

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} e^y, & \text{nếu } y < 0 \\ 1 + \sqrt{y}, & \text{nếu } y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 2.20 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, x \leq 0 \\ 3x+1, x > 0. \end{cases}$$

a) (1 điểm) Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?.

b) (1 điểm) Xác định $f([-1;4])$, $f^{-1}([1;13])$.

Giải:

a) Vì có $f(x) \geq 1, \forall x \in$ □ nên f không là toàn ánh.
Ta có $f(-3) = f(2) = 7$ nên f không là đơn ánh.

b) $f([-1;4]) = [1;13]$ $\quad f^{-1}([1;13]) = [-6;4]$