BÀI TẬP HỌC PHẦN : CƠ SỞ TOÁN

PHẦN I.

Câu 1.1 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng tỏ công thức sau là hằng đúng:

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

Giải:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	KL
đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ
đ	đ	s	s	đ	s	s	s	đ
đ	s	đ	đ	s	đ	đ	đ	đ
đ	s	s	đ	s	s	đ	đ	đ
s	đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ
s	đ	s	s	đ	đ	đ	đ	đ
s	s	đ	đ	đ	đ	đ	đ	đ
s	s	s	đ	đ	đ	đ	đ	đ

b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, C, D thỏa mãn $A \cap B = C \cap D$. Chứng minh:

$$\big(A \cup (B \cap C)\big) \cap \big(A \cup (B \cap D)\big) = A.$$

Giải:

$$\big(A \cup (B \cap C)\big) \cap \big(A \cup (B \cap D)\big) = A \cup \big((B \cap C) \cap (B \cap D)\big)$$

$$= A \cup (B \cap C \cap D) = A \cup (B \cap A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A.$$

Câu 1.2 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng tỏ công thức sau là hằng đúng:

$$\big[\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \wedge (p \Rightarrow q)\big] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Leftrightarrow B = C.$$

Giải: $(B = C) \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases}$ hiển nhiên. Ngược lại, ta ch. minh $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Rightarrow B = C$.

Xét $x \in B$.

Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cap B = A \cap C$ nên $x \in C$.

Nếu $x \notin A$ thì $x \in A \cup B = A \cup C$ nên $x \in C$. Suy ra $B \subset C$.

Tương tự, ta chứng minh được $C \subset B$. Tóm lại $B = C$.

Câu 1.3 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng tỏ công thức sau là hằng đúng:

$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)].$$

b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus C \subset B \setminus C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B.$$

Giải: $\Leftarrow$) hiển nhiên

$\Rightarrow$)

Xét $x \in A$.

Nếu $x \in C$ thì $x \in A \cap C \subset B \cap C$ nên $x \in B$.

Nếu $x \notin C$ thì $x \in A \setminus C \subset B \setminus C$ nên $x \in B$.

Vậy $A \subset B$.

Câu 1.4 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng tỏ công thức sau là hằng đúng:

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)].$$

b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C).$$

Giải:

$$x \in (A \cap B) \setminus C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap (B \setminus C).$$

Câu 1.5 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng tỏ công thức sau là hằng đúng:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)].$$

b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Giải: Do $A \setminus B = A \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nên:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = A \cap (\bar{B} \cup C)$$
$$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

$$B \setminus C = B \cap \bar{C}$$

$$\forall x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in \overline{C} \end{cases} \Leftrightarrow x \in B \cap \overline{C}.$$

Câu 1.6 (2 điểm):

a) Cho p, q là hai mệnh đề. Chứng tỏ mệnh đề sau là hằng đúng

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

b) Cho A là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 100 chia hết cho 2, B là tập các số nguyên dương nhỏ hơn ho ặc bằng 100 chia hết cho 3. Tìm số phần tử của tập $A \cap B$.

Giải: a)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
đ	đ	s	s	đ	s	s	đ
đ	s	s	đ	đ	s	s	đ
s	đ	đ	s	đ	s	s	đ
s	s	đ	đ	s	đ	đ	đ

Do $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ nên $x \in A \cap B$ khi và chỉ khi x chia hết cho 2 và chia hết cho 3. Vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên $x \in A \cap B$ khi và chỉ khi x chia hết cho 6. Vậy

$$|A \cap B| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16.$$

Câu 1.7 (2 điểm):

a) Cho p, q là hai mệnh đề. Chứng tỏ mệnh đề sau là hằng đúng

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

b) Ký hiệu $|X|$ để chỉ số phần tử của tập hữu hạn X. Chứng tỏ rằng nếu A, B là hai tập hữu hạn thì

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Giải: a)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
đ	đ	s	s	đ	đ	đ
đ	s	s	đ	s	s	đ
s	đ	đ	s	đ	đ	đ
s	s	đ	đ	đ	đ	đ

b) Ta có

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Mà ba tập $(A \setminus B), (A \cap B), (B \setminus A)$ rời nhau đôi một nên

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Mặt khác ta cũng có

$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ và $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$

Nên

$$\begin{aligned} |A| + |B| &= (|A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|) + |A \cap B| \\ &= |A \cup B| + |A \cap B|. \end{aligned}$$

Do A, B là các tập hữu hạn nên $A \cap B$ cũng là tập hữu hạn. Vậy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Câu 1.8 (2 điểm):

a) Cho p, q là hai mệnh đề. Chứng tỏ mệnh đề sau là hằng đúng

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}.$$

b) Cho A là tập các số nguyên dương nhỏ hơn ho ặc bằng 100 chia hết cho 3, B là tập các số nguyên dương nhỏ hơn ho ặc bằng 100 chia hết cho 5. Tìm số phần tử của tập $A \cup B$.

Giải: $A \cap B$ là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 100 và chia hết cho 15.

Do đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{5}\right] - \left[\frac{100}{15}\right]$$
$$= 33 + 20 - 6 = 47.$$

Câu 1.9 (2 điểm):

a) Cho p, q là hai mệnh đề. Chứng tỏ mệnh đề phủ định của $p \Rightarrow q$ tương đương với $p \wedge \overline{q}$.

($\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ là hằng đúng)

b) Cho A là tập các số nguyên dương nhỏ hơn ho ặc bằng 100 chia hết cho 5, B là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 100 chia hết cho 7. Tìm số phần tử của tập $A \setminus B$.

Giải: a)

p	q	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$
đ	đ	s	đ	s	s	đ
đ	s	đ	s	đ	đ	đ
s	đ	s	đ	s	s	đ
s	s	đ	đ	s	s	đ

b) Ta có $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Do $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ nên

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{5}\right] - \left[\frac{100}{35}\right] = 18.$$

Câu 1.10 (2 điểm):

a) Cho dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |u_n| < \epsilon.$$

Giải:

$$\exists \epsilon > 0: \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m, |u_n| \geq \epsilon.$$

b) Cho A, B là hai tập hợp con của tập X. Chứng tỏ $A \subset B$ khi và chỉ khi $X \setminus B \subset X \setminus A$.

Giải: $\forall x \in X$. Nếu $A \subset B$ thì $x \in A \Rightarrow x \in B$ nghĩa là $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ nên $X \setminus B \subset X \setminus A$.

Nếu $X \setminus B \subset X \setminus A$ thì $x \in X \setminus B \Rightarrow x \in X \setminus A$ nghĩa là $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ suy ra $x \in A \Rightarrow x \in B$ nghĩa là $A \subset B$.

Cách 2:

Ta có $X = A \cup X\backslash A = B \cup X\backslash B$ (hợp rời) nên suy ra điều cần chứng minh.

Câu 1.11 (2 điểm):

a) Cho p là mệnh đề "12 không chia hết cho 2" và q là mệnh đề "12 không chia hết cho 3". Sử dụng các phép toán trên mệnh đề, hãy biểu diễn mệnh đề "12 chia hết cho 6" theo p và q.

Giải:

12 chia hết cho 6 khi và chỉ khi 12 chia hết cho 2 và 12 chia hết cho 3. Do đó mệnh đề "12 chia hết cho 6" chính là $\overline{p} \wedge \overline{q}$

b) Cho A, B, C là ba tập hợp. Chứng tỏ $A \setminus B \subset C$ khi và chỉ khi $A \subset B \cup C$.

Giải:
Nếu $A\backslash B \subset C$ thì

$$A = (A \cap B) \cup (A\backslash B) \subset B \cup C.$$

Ngược lại, nếu $A \subset B \cup C$ thì

$$A\backslash B \subset (B \cup C)\backslash B = C\backslash B \subset C.$$

Câu 1.12 (2 điểm):

a) Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi p_n là mệnh đề "n chia hết cho 2" và q_n là mệnh đề "n chia hết cho 5". Sử dụng các phép toán trên mệnh đề, hãy biểu diễn mệnh đề "n tận cùng bằng 0" theo p_n và q_n.

Giải:a)

n tận cùng bằng 0 khi và chỉ khi n chia hết cho 2 và n chia hết cho 5. Do đó mệnh đề "n tận cùng bằng 0" là: $p_n \wedge q_n$.

b) Cho A, B, C là ba tập hợp. Chứng minh

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Giải: Ta có

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).\end{aligned}$$

Cách 2: Do ta có "hợp rời":

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

Nên

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Câu 1.13 (2 điểm):

a) Cho a, b là hai số thực. Gọi p là mệnh đề "$a \neq 0$" và q là mệnh đề "$b \neq 0$". Sử dụng các phép toán trên mệnh đề, hãy biểu diễn mệnh đề "$ab = 0$" theo p và q.

Giải: $ab = 0$ khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$. Mệnh đề "$ab = 0$" chính là: $\overline{p} \vee \overline{q} \left(= \overline{p \wedge q}\right)$.

b) Cho bốn tập hợp A, B, C, D. Chứng minh rằng

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D).$$

Giải:

Do $A, B \subset A \cup B$ và $C, D \subset C \cup D$ nên

$$(A \times C), (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D).$$

Vậy

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D).$$

Cách 2: Ta có

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \big(A \times (C \cup D)\big) \cup \big(B \times (C \cup D)\big) =$$
$$(A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D) \supset (A \times C) \cup (B \times D).$$

$$A \times C = \{(a, c) | a \in A, c \in C\}$$

Câu 1.14 (2 điểm):

a) Cho hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói $f \leq g$ nếu

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gọi $A(f, g)$ là mệnh đề "$f \leq g$". Hãy phát biểu mệnh đề

$$\overline{A(f, g)} \wedge \overline{A(g, f)}.$$

Giải:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}: (f(x_1) > g(x_1)) \wedge (g(x_2) > f(x_2)).$$

b) Cho bốn tập hợp A, B, C, D. Chứng minh rằng

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

Giải:

$$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ và } y \in (C \cap D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \ \wedge \ (x \in B \wedge y \in D).$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D).$$

Câu 1.15 (2 điểm):

a) Cho dãy số (x_n). Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq n_0, |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Giải:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}: \exists m, n \geq n_0, |x_m - x_n| \geq \varepsilon.$$

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét tập

$$A_n \coloneqq \{n, n+1, n+2, \dots\}.$$

Tìm

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Giải:

Giả sử $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, ta có $x \in A_n, \forall n \geq 1$ nên $x \geq n, \forall n \geq 1$ vô lý. Vậy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Do $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \geq 1$ nên $A_n \subset A_1; \forall n \geq 1$,

$$A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_1$$

Vậy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$.

Câu 1.16 (2 điểm):

a) Cho A, B là hai tập hợp. Gọi $p(A, B)$ là mệnh đề "$A \subset B$". Sử dụng các phép toán trên tập hợp, hãy phát biểu mệnh đề

$$\overline{p(A, B) \wedge p(B, A)}$$

Giải: Ta có $\overline{p(A, B)}: A \setminus B \neq \emptyset$ và $\overline{p(B, A)}: B \setminus A \neq \emptyset$,

$$\overline{p(A, B) \wedge p(B, A)} = \overline{p(A, B)} \vee \overline{p(B, A)}$$

nên

$$\overline{p(A, B) \wedge p(B, A)}: (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset.$$

b) Cho tập $A = [0,1] \times \mathbb{R}$ và $B = \mathbb{R} \times [1,2]$. Xác định $A \cap B$ và biểu diễn chúng trên mặt phẳng tọa độ.

Giải:

Ta có

$$(x,y) \in A = [0;1] \times \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(x,y) \in B = \mathbb{R} \times [1;2] \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in [1;2] \end{cases}$$

$$(x,y) \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y \in [1;2] \end{cases}$$

Nên $A \cap B = [0;1] \times [1;2]$.

Câu 1.17 (2 điểm):

a) Cho hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Gọi p là mệnh đề

$$\exists \epsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), f(x) \leq f(x_0)$$

và q là mệnh đề

$$\exists \epsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), f(x) \geq f(x_0).$$

Hãy phát biểu mệnh đề $\overline{p} \wedge \overline{q}$.

Giải: Ta có

$\overline{p}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), f(x_1) > f(x_0)$

$\overline{q}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), f(x_2) < f(x_0)$

Nên

$\overline{p} \wedge \overline{q}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$

(hàm f không đạt cực trị địa phương tại x_0)

b) Cho hai tập hợp A và B. Chỉ ra hai tập C, D rời nhau sao cho

$$\begin{cases} C \subset A, D \subset B; \\ C \cup D = A \cup B. \end{cases}$$

Giải: Do ta có hợp rời

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

và $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ nên khi cho $C = A, D = (B \setminus A)$ ta có

$$\begin{cases} C \subset A, D \subset B; \\ C \cup D = A \cup B. \end{cases}$$

Câu 1.18 (2 điểm):

a) Một hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là *tuần hoàn* nếu

$$\exists T > 0: \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Khi nào f *không tuần hoàn*.

Giải: f *không tuần hoàn* nếu

$$\forall T > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0 + T) \neq f(x_0)$$

b) Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Đặt

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |f(x) + g(x)| \geq 1 \},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f(x)| \geq \frac{1}{2} \right\},$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |g(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Chứng tỏ $A \subset B \cup C$.

Giải: Ta chứng minh $\overline{B \cup C} \subset \overline{A}$ tức là $\overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{A}$.

Thật vậy,

$$\forall x \in \overline{B} \cap \overline{C} \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{2} \wedge |g(x)| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x \in \overline{A}.$$

Vậy $\overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{A}$.

Câu 1.19 (2 điểm):

a) Mệnh đề sau đúng hay sai? Tìm mệnh đề phủ định của nó.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y > 0.$$

Giải: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = (-x + 1) \in \mathbb{R}: x + y = x - x + 1 = 1 > 0$ nên mệnh đề trên là đúng.

Phủ định của nó là: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0$.

b) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f(x)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Tìm

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Giải: Giả sử $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó $x \in A_n, \forall n \geq 1$ nên $|f(x)| < \frac{1}{n}; \forall n \geq 1$. Do $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên $f(x) = 0$. Ngược lại, nếu $f(x) = 0$ thì $x \in A_n, \forall n \geq 1$ nên

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \ker f.$$

Câu 1.20 (2 điểm):

a) Mệnh đề sau đúng hay sai? Tìm mệnh đề phủ định của nó.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x.$$

Giải: Khi chọn $x < 0$ thì $\forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x$ nên mệnh đề trên là đúng.

Phủ định của nó là: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: y^2 \leq x$.

b) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Tìm

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Giải: Giả sử $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $|f(x)| \geq \frac{1}{n_0}$ suy ra $f(x) \neq 0$. Ngược lại, nếu $f(x) \neq 0$ thì $|f(x)| > 0$. Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $|f(x)| \geq \frac{1}{n_0}$. Vậy $x \in A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Tóm lại

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) \neq 0\}.$$