Đề giải tích

Câu 1.

Dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$ $(n \geq 1)$.

1. Chứng minh dãy (x_n) là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1.
2. Tìm $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

> # Câu 1.
>
> Dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$ $(n \geq 1)$.
>
> 1. **Chứng minh dãy (x_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1.**
>
> - Giả sử $x_n < 1$. Khi đó, $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n} < 1$, nên (x_n) bị chặn trên bởi 1.
> - Xét hiệu $x_{n+1} - x_n$:
>
> $$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n(2 - x_n)}{2 - x_n} = \frac{(x_n - 1)^2}{2 - x_n} \geq 0.$$
>
> - Do đó, (x_n) là dãy đơn điệu tăng.
>
> 2. **Tìm** $\lim_{n\to+\infty} x_n$**.**
>
> - Giả sử $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$. Khi đó:
>
> $$L = \frac{1}{2 - L}.$$
>
> - Giải phương trình này, ta được $L = 1$.
> - Vậy $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Câu 2.

Cho hàm số

$$f : R \to R, f(x) = \begin{cases} x^2 + m & x \geq 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & x < 0 \end{cases}$$

trong đó m là một tham số thực.

1. Xác định m để f liên tục trên R.

2. Với giá trị m vừa tính, hàm số đã cho có khả vi tại $x = 0$ hay không?

Câu 2.

1. **Xác định m để f liên tục trên $\mathbb{R}$.**

Để hàm số f liên tục tại $x = 0$, ta cần có

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

- Với $x \geq 0$, ta có $f(0) = m$.
- Với $x < 0$, ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0$, ta cần

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}.$$

2. **Với giá trị m vừa tính, hàm số đã cho có khả vi tại $x = 0$ hay không?**

Để hàm số khả vi tại $x = 0$, ta kiểm tra

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

- Khi $h \geq 0$, ta có

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0.$$

- Khi $h < 0$, ta có

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0.$$

Vậy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0.$$

Do đó, hàm số khả vi tại $x = 0$.

Kết luận:

1. Giá trị m để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ là $m = \frac{1}{2}$.
2. Với $m = \frac{1}{2}$, hàm số f khả vi tại $x = 0$.

Câu 3.

Biết rằng khai triển Maclaurin của hàm $f(x)$ đến cấp 2 với phần tử Lagrange có dạng:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(c)\frac{x^3}{3!}$$

trong đó c nằm giữa 0 và x. Viết khai triển này cho $f(x) = \cos x$ từ đó suy ra $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $-\pi \leq x \leq \pi$.

Câu 3.

1. **Tính các đạo hàm của $\cos x$:**

- $f(x) = \cos x$, do đó $f(0) = 1$.
- $f'(x) = -\sin x$, do đó $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = -\cos x$, do đó $f''(0) = -1$.
- $f'''(x) = \sin x$, do đó $f'''(c) = \sin c$.

2. **Khai triển Maclaurin đến cấp 2:**
   Thay các giá trị vào công thức khai triển, ta có:

$$f(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} + f'''(c)\frac{x^3}{6}.$$

3. **Áp dụng bất đẳng thức với $-\pi \leq x \leq \pi$:**

- Khi $-\pi \leq x \leq \pi$, ta có $|\sin c| \leq |c| \leq |x|$. Do đó, ta có:

$$|f'''(c)| = |\sin c| \leq |c| \leq |x|.$$

- Vì vậy, phần tử Lagrange $f'''(c)\frac{x^3}{6}$ bị chặn và ta có bất đẳng thức:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Kết luận:

Với $-\pi \leq x \leq \pi$, ta có bất đẳng thức

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Câu 4.

Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$.

Câu 4.

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$:

1. **Định lý hội tụ của tích phân:**
   Để khảo sát sự hội tụ của tích phân, ta xét hành vi của hàm số trong mẫu số khi $x \to +\infty$. Cụ thể, ta cần tìm một hàm đồng biến với $\frac{1}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$ khi x lớn và kiểm tra sự hội tụ của tích phân đối với hàm này.
2. **Hàm mẫu khi $x \to +\infty$:**
   Khi $x \to +\infty$, ta có
   $$4x^3 + 3x + 1 \sim 4x^3.$$
   Do đó, mẫu số $\sqrt{4x^3+3x+1} \sim \sqrt{4x^3} = 2x^{3/2}$ khi x lớn.
3. **Tính giới hạn của hàm số:**
   Khi $x \to +\infty$, ta có:
   $$\frac{1}{\sqrt{4x^3+3x+1}} \sim \frac{1}{2x^{3/2}}.$$
4. **Xét sự hội tụ của tích phân:**
   Để kiểm tra sự hội tụ, ta xét tích phân của hàm $\frac{1}{2x^{3/2}}$ từ 1 đến $+\infty$:
   $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$
   Tính tích phân này:
   $$\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^{+\infty} = 2.$$
   Vì tích phân của $\frac{1}{x^{3/2}}$ hội tụ, nên tích phân ban đầu cũng hội tụ.

Kết luận:

Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$ hội tụ.

Giải

Câu 1.

Dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$ $(n \geq 1)$.

1. **Chứng minh dãy (x_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1.**

- Giả sử $x_n < 1$. Khi đó, $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n} < 1$, nên (x_n) bị chặn trên bởi 1.
- Xét hiệu $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n(2 - x_n)}{2 - x_n} = \frac{(x_n - 1)^2}{2 - x_n} \geq 0.$$

- Do đó, (x_n) là dãy đơn điệu tăng.

2. **Tìm $\lim_{n\to+\infty} x_n$.**

- Giả sử $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$. Khi đó:

$$L = \frac{1}{2 - L}.$$

- Giải phương trình này, ta được $L = 1$.
- Vậy $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Câu 2.

1. **Xác định m để f liên tục trên $\mathbb{R}$.**

Để hàm số f liên tục tại $x = 0$, ta cần có

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

- Với $x \geq 0$, ta có $f(0) = m$.
- Với $x < 0$, ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0$, ta cần

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}.$$

2. **Với giá trị m vừa tính, hàm số đã cho có khả vi tại $x = 0$ hay không?**

Để hàm số khả vi tại $x = 0$, ta kiểm tra

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

- Khi $h \geq 0$, ta có

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

- Khi $h < 0$, ta có

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Vậy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Do đó, hàm số khả vi tại $x = 0$.

Kết luận:

1. Giá trị m để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ là $m = \frac{1}{2}$.
2. Với $m = \frac{1}{2}$, hàm số f khả vi tại $x = 0$.

Câu 3.

1. **Tính các đạo hàm của** $\cos x$**:**

- $f(x) = \cos x$, do đó $f(0) = 1$.
- $f'(x) = -\sin x$, do đó $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = -\cos x$, do đó $f''(0) = -1$.
- $f'''(x) = \sin x$, do đó $f'''(c) = \sin c$.

2. **Khai triển Maclaurin đến cấp 2:**
   Thay các giá trị vào công thức khai triển, ta có:

$$f(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} + f'''(c)\frac{x^3}{6}.$$

3. **Áp dụng bất đẳng thức với** $-\pi \leq x \leq \pi$**:**

- Khi $-\pi \leq x \leq \pi$, ta có $|\sin c| \leq |c| \leq |x|$. Do đó, ta có:

$$|f'''(c)| = |\sin c| \leq |c| \leq |x|.$$

- Vì vậy, phần tử Lagrange $f'''(c)\frac{x^3}{6}$ bị chặn và ta có bất đẳng thức:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Kết luận:

Với $-\pi \leq x \leq \pi$, ta có bất đẳng thức

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Câu 4.

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$:

1. **Định lý hội tụ của tích phân:**
   Để khảo sát sự hội tụ của tích phân, ta xét hành vi của hàm số trong mẫu số khi $x \to +\infty$. Cụ thể, ta cần tìm một hàm đồng biến với $\frac{1}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$ khi x lớn và kiểm tra sự hội tụ của tích phân đối với hàm này.
2. **Hàm mẫu khi $x \to +\infty$:**
   Khi $x \to +\infty$, ta có

$$4x^3 + 3x + 1 \sim 4x^3.$$

   Do đó, mẫu số $\sqrt{4x^3+3x+1} \sim \sqrt{4x^3} = 2x^{3/2}$ khi x lớn.
3. **Tính giới hạn của hàm số:**
   Khi $x \to +\infty$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{4x^3+3x+1}} \sim \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

4. **Xét sự hội tụ của tích phân:**
   Để kiểm tra sự hội tụ, ta xét tích phân của hàm $\frac{1}{2x^{3/2}}$ từ 1 đến $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

   Tính tích phân này:

$$\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\, dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^{+\infty} = 2.$$

   Vì tích phân của $\frac{1}{x^{3/2}}$ hội tụ, nên tích phân ban đầu cũng hội tụ.

Kết luận:

Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3x+1}}$ hội tụ.