IV

Phương pháp chứng minh qui nạp.

- Dùng để chứng minh một mệnh đề toán học liên quan đến số tự nhiên, mà gọi là $\wp(n), n \in \mathbb{N}$.
- Chú ý: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}$
- Các bước của một chứng minh qui nạp:

a) Kiểm tra mệnh đề $\wp(n_0)$ là đúng, với $n_0 \in \mathbb{N}$.
b) Phát biểu giả thiết qui nạp: giả sử mệnh đề $\wp(n)$ trong đó $n \geq n_0$ (nào đó) là đúng.
c) Chứng minh, khi đó mệnh đề $\wp(n+1)$ cũng đúng.
d) Kết luận mệnh đề $\wp(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Số phức

- Kí hiệu**:**

$\mathbb{C} = \{z = x + iy | \, x; y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}, x = \operatorname{Re} z$ (phần thực); $y = \operatorname{Im} z$(phần ảo)

- $x + yi$ được gọi là dạng đại số của số phức z
- Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là mô-đun của z. $\varphi = (Ox; OM)$ trong đó M là điểm trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có toạ độ $M(x; y)$. φ được gọi là argument của số phức z.
- Khi đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của z. Chú ý:
$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \sin\varphi = \frac{y}{r}$$
- Kí hiệu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ thì ta có dạng mũ của số phức $z = re^{i\varphi}$.

Cho $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ khi đó $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ khi đó $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ và khi $z_2 \neq 0$ thì
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Chú ý: Nếu $z = x + iy$ thì $\overline{z} = x - iy$ và nếu $z = re^{i\varphi}$ thì $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

Căn bậc n của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Kí hiệu $\omega = \rho e^{i\psi}$ là căn bậc n của $z = re^{i\varphi}$ khi đó $\omega^n = z$. Suy ra
$$re^{i\varphi} = \left(\rho e^{i\psi}\right)^n = \rho^n e^{in\psi}$$
Do đó

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Từ đây suy ra

$$\omega = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}; k \in \mathbb{Z}.$$

Do tính tuần hoàn của các hàm $\cos x$ và $\sin x$ ta có đúng n căn bận n

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}; k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$$

Toạ vị của các ω_k là các đỉnh của một n giác đều, nội tiếp trong một đường tròn có tâm tại 0, bán kính $\sqrt[n]{r}$.

Căn bậc n của 1.

Do $1 = e^{i0}$ nên n căn bậc n của 1 là $\omega_k = e^{k\frac{2\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$.

Từ đây ta suy ra, nếu đặt $\omega = \omega_1 = e^{\frac{2\pi}{n}}$ thì $\omega_k = e^{k\frac{2\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega^k$.

Đạo hàm cấp cao

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trên $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Khi đó ta có hàm đạo hàm $f^{'}(x)$ trên $(a; b)$. Đạo hàm của $f^{'}(x)$ (nếu có) được gọi là đạo hàm cấp hai của f và kí hiệu là $f^{''}$ hay $f^{(2)}$, tức là đạo hàm cấp hai là đạo hàm của hàm đạo hàm cấp một, ... tương tự, đạo hàm của hàm đạo hàm cấp n được gọi là đạo hàm cấp $(n+1)$ của hàm f:

$$\left(f^{(n)}\right)^{'} = f^{(n+1)}.$$

KHỐI 4:

Câu 4.1 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

b) (1 điểm) Tính

$$\frac{(1-i)^n}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1$: $2^3 = 2.1^2(1+1)^2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

+ Khi đó

$$2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 + \big(2(n+1)\big)^3 = 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3$$
$$= 2(n+1)^2\big(n^2 + 4(n+1)\big) = 2(n+1)^2(n+2)^2.$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b)

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

$$\frac{(1-i)^n}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^n} = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}}{2e^{\frac{5\pi}{3}i}}\right)^n = \left(\frac{e^{\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{3}\right)\pi i}}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right).$$

Câu 4.2 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

b) (1 điểm) Tính

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Giải:a)

+ Khi $n = 1$: $1^3 = \left[\frac{1}{2}(1+1)\right]^2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

+ Khi đó

$$1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 + (n+1)^3$$
$$= (n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2 + (n+1)\right) = \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2.$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b)

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{(1+i)^{n+1}}=\frac{2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n}{2^{\frac{n+1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}}{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{e^{\frac{n}{3}\pi i}}{e^{\frac{n+1}{4}\pi i}}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}e^{\frac{n-3}{12}\pi i}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{(n-3)\pi}{12}+i\sin\frac{(n-3)\pi}{12}\right).$$

Câu 4.3 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$$

Với mọi số nguyên $n\geq 2$.

b) (1 điểm) Tìm dạng lượng giác của số phức

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

Giải:

+ Khi $n=2$: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}>\frac{3.2}{2.2+1}$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n\geq 2$, tức là

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$$

+ Khi đó

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{3n^3+6n^2+5n+1}{(2n+1)(n+1)^2}>\frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên $n\geq 2$.

b) $$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}$$
$$=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

Câu 4.4 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\frac{13}{15}\cdots\frac{4n+1}{4n+3}>\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

Với mọi số nguyên $n \geq 1$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc ba của $1 - i\sqrt{3}$.
Giải:

+ Khi $n = 1$: $\frac{5}{7} > \sqrt{\frac{3}{4+3}}$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\frac{13}{15}\cdots\frac{4n+1}{4n+3} > \sqrt{\frac{3}{4n+3}},$$

+ Khi đó

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\cdots\frac{4n+1}{4n+3}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+7}}.$$

$$\left(\text{vì } \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+7}} \Leftrightarrow \frac{4n+5}{\sqrt{(4n+3)(4n+7)}} > 1\right.$$

$$\left.\Leftrightarrow (4n+5)^2 > (4n+3)(4n+7) \Leftrightarrow 25 > 21 \Leftrightarrow 4 > 0.\right)$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy bđt đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi\frac{5}{3}}$

$$u_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)$$

$$u_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

Câu 4.5 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}.$$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc ba của $(1+i)/\sqrt{2}$.

Giải:

+ Khi $n = 1$: $1^2 = \frac{(-1)^0.1.(1+1)}{2}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

+ Khi đó

$$1^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}(n+1)(2n+2-n+) = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$$u_k = \cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$$

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$u_1 = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}$$

$$u_2 = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$$

Câu 4.6 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n^3 + 3n^2 + 5n) \vdots 3$$

b) (1 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a < b$ và $x \in (a, b)$. Chỉ ra số $\epsilon > 0$ sao cho

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b).$$

Giải:a)

+ Khi $n = 1: 1 + 3 + 5 = 9 \vdots 3$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$n^3 + 3n^2 + 5n \vdots 3$$

+ Khi đó

$$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 5n) + 3(n^2 + 3n + 3) \vdots 3$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Đặt $0 < \epsilon \leq \min\{x - a, b - x\}$.

Khi đó $x - \varepsilon \geq x - (x - a) = a$ và $x + \varepsilon \leq x + (b - x) = b$. Nên

$$a \leq x - \varepsilon < x + \varepsilon \leq b.$$

Vậy:

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b).$$

Câu 4.7 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(4^n + 15n - 1) \vdots 9$$

b) (1 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a < b$. Chứng minh rằng

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in (0,1): x = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1: 4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$4^n + 15n - 1 \vdots 9$$

+ Khi đó

$$4^{n+1} + 15(n + 1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 9(5n - 2) \vdots 9$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Nếu $x \in (a, b)$ thì chọn $\lambda = \frac{b-x}{b-a} \in (0,1)$ vì $0 < b - x < b - a$. Khi đó

$$\lambda = \frac{b - x}{b - a} \Leftrightarrow b - x = \lambda(b - a) \Leftrightarrow x = b - \lambda(b - a) = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Ngược lại, nếu $\exists\, \lambda \in (0,1): x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ thì

$$a = \lambda a + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)b < \lambda b + (1 - \lambda)b = b$$

hay $x \in (a, b)$.

Câu 4.8 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n^3 + 11n) \vdots 6$$

b) (1 điểm) Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1,2, \dots, n\}$ sao cho $x_i \geq \frac{1}{n}$.

Giải:

+ Khi $n = 1: 1 + 11 = 12 \vdots 6$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$n^3 + 11n \vdots 6$$

+ Khi đó

$$(n + 1)^3 + 11(n + 1) = (n^3 + 11n) + 3n(n + 1) + 12 \vdots 6$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Giả sử $x_i < 1/n$ với mọi $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Lúc đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < n\frac{1}{n} = 1 \text{ (vô lí)}$$

Câu 4.9 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(2n^3 - 3n^2 + n) \vdots 6$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} = 0.$$

Giải:

a) + Khi $n = 1: 2 - 3 + 1 = 0 \vdots 6$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$2n^3 - 3n^2 + n \vdots 6$$

+ Khi đó

$$2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) = (2n^3 - 3n^2 + n) + 6n^2 \vdots 6$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) + Ta có $\frac{1}{n} \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

+ Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{n} < \epsilon$. (Chẳng hạn, chọn $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$). Từ đó suy ra đpcm.

$$\alpha = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Câu 4.10 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: đạo hàm cấp n

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty) = \emptyset.$$

+ Khi $n = 1: [\ln(ax+b)]' = \frac{a}{ax+b}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$$

+ Khi đó

$$[\ln(ax+b)]^{(n+1)} = \left[\frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}\right]' = \frac{(-1)^n.n!.a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ (có thể chọn $n = [x] + 1$) sao cho $n > x$, do đó $x \notin (n, +\infty)$. Nên $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty)$. Vậy $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty) = \emptyset$.

Câu 4.11 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.\,n!.\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

b) (1 điểm) Tìm supremum và infimum của tập sau trong $\mathbb{R}$ (không cần chứng minh)

$$A = \left\{\frac{n}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1$: $\left[\frac{1}{ax+b}\right]' = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n.\,n!.\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

+ Khi đó

$$\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n+1)} = \left[\frac{(-1)^n.\,n!.\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}\right]' = \frac{(-1)^{n+1}.\,(n+1)!.\,a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $\sup A = \frac{1}{2}$ và $\inf A = \frac{1}{3}$.

$$\left(\text{Do } \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \cdots < \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2(n+1)+1} \cdots < \frac{1}{2}\right)$$

Câu 4.12 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: đạo hàm cấp n

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2})$$

b) (1 điểm) Cho ω là một nghiệm phức của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$. Tính ω^3.

Giải:

+ Khi $n = 1$: $[\sin 2x]' = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$[\sin 2x]^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

+ Khi đó

$$[\sin 2x]^{(n+1)} = \left([\sin 2x]^{(n)}\right)' = \left[2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = 2^{n+1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$= 2^{n+1}\sin\left(2x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Ta có $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ hay $\omega^3 = 1$.

Câu 4.13 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

b) (1 điểm) Cho ω là một nghiệm phức của phương trình $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Tính ω^4

Giải: a)

+ Khi $n = 1: 3 = \frac{1}{2}(3^2 - 3)$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

+ Khi đó

$$3 + 9 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3) + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 3)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Ta có $\omega^4 - 1 = (\omega - 1)(\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$ hay $\omega^4 = 1$.

Câu 4.14 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n + 1)(n + 2) \ldots (n + n) = 2^n.1.3.5 \ldots (2n - 1)$$

b) (1 điểm) Giải phương trình sau trong $\mathbb{C}$: $z^3 - 2 - 2i = 0$.

Giải:a)

+ Khi $n = 1: 1 + 1 = 2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$(n + 1)(n + 2) \ldots (n + n) = 2^n.1.3.5 \ldots (2n - 1)$$

+ Khi đó

$$(n + 2)(n + 3) \ldots (2n + 2) = \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n)(2n + 1)(2n + 2)}{n + 1}$$

$$= \frac{2^n.1.3 \ldots (2n - 1)(2n + 1)(2n + 2)}{n + 1} = 2^{n+1}1 \ldots (2n - 1)(2(n + 1) - 1)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

$b)$ $z^3 = 2(1 + i) = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ suy ra

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm

$$z_0 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}), z_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}),\ \ z_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

Câu 4.15 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n}{3n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = \frac{n}{3^n}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| \leq 2, |z - \bar{z}| \leq 2 \,\}.$$

Giải:

+ Khi $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{3}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = \frac{n}{3^n}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{3n} = \frac{(n+1)\,\frac{n}{3^n}}{3n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $b)$ $A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| \leq 2, |z - \bar{z}| \leq 2 \,\}$. Đặt $z = a + ib$ khi đó $\overline{z} = a = ib$ nên $z + \bar{z} = 2a$ và $z - \bar{z} = 2b$. Vậy
$z = a + ib \in A$ khi và chỉ khi $|a| \leq 1$ và $|b| \leq 1$.

A chính là hình vuông $[-1,1] \times [-1,1]$ trong mặt phẳng phức, có 4 đỉnh là $M(1;1), N(-1;1), P(-1;-1), Q(1;-1)$.

Câu 4.16 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq 1 \}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1: u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 3u_n + 2^{n+1} = 3(5.3^{n-1} - 2^{n+1}) + 2^{n+1} = 5.3^n - 2^{n+2}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

$$b)\ B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq 1 \}$$

$$z = a + ib \in B \text{ khi và chỉ khi } |a| + |b| \leq 1.$$

B là hình vuông (đặc) với 4 đỉnh $M(1,0), N(0,1), P(-1,0), Q(0,-1)$.

Câu 4.17 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 5u_{n-1} + 2.3^n - 6.7^n + 12, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = 157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, 0 \leq \text{Im } z, 0 \leq \text{Re } z \}.$$

Giải: a)
+ Khi $n = 1: u_1 = -2$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = 157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 5(157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3) + 2.3^{n+1} - 6.7^{n+1} + 12$$
$$= 157.5^n - 3^{n+2} - 3.7^{n+2} - 3$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) C là ¼ hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Câu 4.18 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3^n - n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = -11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc năm của đơn vị 1.

Giải:

+ Khi $n = 1: u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = -11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 2u_n + 3^{n+1} - (n+1) = 2(-11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2) + 3^{n+1} - n - 1$$
$$= -11.2^n + 3^{n+2} + n + 1 + 2$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b)Có 5 căn bậc năm của $1 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{i0}$.

$$\omega_k = \cos\frac{k2\pi}{5} + i\sin\frac{k2\pi}{5}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

Câu 4.19 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{3u_{n-1} + 4}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = \frac{2}{5.2^{n-1} - 3}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Sử dụng công thức Moirve tìm khai triển $\cos 3x$ theo $\cos x$ và $\sin 3x$ theo $\sin x$.

Giải: a)
+ Khi $n = 1: u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = \frac{2}{5.2^{n-1} - 3}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 4} = \frac{2\dfrac{2}{5.2^{n-1} - 3}}{3\dfrac{2}{5.2^{n-1} - 3} + 4} = \frac{2}{5.2^n - 3}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

Ta có công thức Moivre: $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$ hay $e^{inx} = (e^{ix})^n$.

$$\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$$
$$= \cos^3 x + 3\cos^2 x\, i \sin x + 3 \cos x\, i^2 \sin^2 x + i^3 \sin^3 x$$
$$= \cos^3 x + 3(1 - \sin^2 x) i \sin x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x) - i \sin^3 x$$

$$= (4\cos^3 x - 3\cos x) + i(3\sin x - 4\sin^3 x)$$

Từ đó suy ra $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ và $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Câu 4.20 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ tổng các căn bậc n $(n \geq 2)$ của 1 bằng 0.

Giải:a)

+ Khi $n = 1: 1 < 2$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

+ Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Có n căn bậc n của đơn vị là $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, trong đó

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Suy ra

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$$

V

Đa thức bậc n: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ trong đó $a_0 \neq 0$. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực cho trước, gọi là hệ số của đa thức. Khi $a_k \in \mathbb{R}, k = 0; 1; 2; \ldots; n$ thì ta nói đa thức $P_n(x)$ có hệ số thực, kí hiệu $P_n \in \mathbb{R}[x]$, tương tự ta có tập các đa thức hệ số hữu tỉ $\mathbb{Q}[x]$, tập các đa thức có hệ số phức $\mathbb{C}[x]$.

Nếu $P_n(x_0) = 0$ thì

$$P_n(x) = P_n(x) - P_n(x_0) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$-(a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n)$$
$$= a_0(x^n - x_0^n) + a_1(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)$$
$$= (x - x_0)P_{n-1}(x)$$

Ta nói x_0 là một nghiệm của đa thức $P_n(x)$.

Người ta chứng minh được rằng, đa thức bậc n hệ số thực có nhiều nhất n nghiệm thực. Khi $P_n(x) = (x - x_0)^2P_{n-2}(x)$ và $P_{n-2}(x_0) \neq 0$ ta nói x_0 là nghiệm bội 2 hay là nghiệm kép của đa thức $P_n(x)$. Tương tự, khi $P_n(x) = (x - x_0)^kP_{n-k}(x)$ và $P_{n-k}(x_0) \neq 0$ ta nói x_0 là nghiệm bội k của đa thức $P_n(x)$.

Nếu đa thức hệ số thực $P_n(x)$ có nghiệm là số phức $z = a + ib$ thì số phức liên hiệp của số phức z là $\overline{z} = a - ib$ cũng là nghiệm của $P_n(x)$.

Một đa thức được bất khả qui trên trường số thực (phức) nếu nó không phân tích được thành tích của đa thức hệ số thực (phức) có bậc nhỏ hơn.

Các đa thức bất khả qui trên trường số thực có dạng bậc nhất hoặc đa thức bậc hai với biệt số $\Delta < 0$.

Ước chung lớn nhất của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức $D(x)$ nếu $D(x)$ là ước chung của hai đa thức này và nếu $d(x)$ là một ước chung bất kỳ của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $d(x)$ cũng là ước của $D(x)$. Kí hiệu $D(x) = \big(P(x), Q(x)\big)$. Khi $D(x) \equiv 1$ thì ta nói hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau.

Cách tìm USC lớn nhất của hai đa thức $\boldsymbol{P(x)}$ và $\boldsymbol{Q(x)}$, bậc của $\boldsymbol{Q} \leq$ bậc của $\boldsymbol{P}$.

Chia có dư P cho Q có thương là T_1 và dư là R_1; $\deg R_1 < \deg Q$,

$$P = QT_1 + R_1,$$

Chia có dư Q cho R_1 có thương là T_2 và dư là R_2, $\deg R_2 < \deg R_1$.

$$Q = R_1T_2 + R_2$$

...

Chia có dư R_{n-2} cho R_{n-1} có thương là T_n dư là R_n

$$R_{n-2} = R_{n-1}T_n + R_n$$

Chia có dư R_{n-1} cho R_n có thương là T_{n+1} dư là 0.

Kết luận: R_n là USC lớn nhất của P và Q.

Khi đó

$$R_n = R_{n-2} - R_{n-1}T_n$$
$$= R_{n-2} - T_n(R_{n-3} - R_{n-2}T_{n-1}) = -T_nR_{n-3} + (1 - T_{n-1})R_{n-2}$$

...

$$R_n = PU + QV.$$

Câu 5.1 (2 điểm): Cho đa thức hệ số thực

$$P(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$$

a) Chứng tỏ i là nghiệm kép của $P(x)$.

b) Hãy phân tích $P(x)$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$.

Giải: a) Sử dụng phép chia hai đa thức cho nhau ta có

$$P(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 - x + 1)$$
$$P(x) = (x - i)^2(x + i)^2(x^2 - x + 1)$$

Nên i là nghiệm kép của $P(x)$

b)

$$P(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 - x + 1)$$

$x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$	$x^4 + 2x^2 + 1$
$x^6 \quad + 2x^4 \quad + x^2$	x^2
$-x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$	
$-x^5 - \quad 2x^3 \quad - x$	
$x^4 + 2x^2 + 1$	$-x$
$x^4 + 2x^2 + 1$	
0	1

Câu 5.2 (2 điểm): Trong $\mathbb{R}[x]$ cho hai đa thức $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ và $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên tố cùng nhau hay không?

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau, hãy tìm hai đa thức $r(x)$ và $s(x)$ sao cho $1 = r(x)f(x) + s(x)g(x)$.

Giải:

$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$	$x^2 + x + 1$
$x^4 + x^3 \quad + x^2$	x^2
$2x^3 + 5x^2 + 6x + 4$	
$2x^3 + 2x^2 + 2x$	$2x$
$3x^2 + 4x + 4$	
$3x^2 + 3x + 3$	3
$x + 1$	

$$f(x) = g(x)(x^2 + 2x + 3) + (x + 1)$$
$$g(x) = (x + 1)x + 1$$

Do đó $f(x), g(x)$ nguyên tố cùng nhau. $(f(x), g(x)) = 1$.

Ta có

$$1 = g(x) - (x+1)x$$
$$= g(x) - [f(x) - g(x)(x^2+2x+3)]x$$
$$= -xf(x) + (x^3+2x^2+3x+1)g(x)$$
Vậy $r(x) = -x$ và $s(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$$1 = -x(x^4+3x^3+6x^2+6x+4) + \left((x^3+2x^2+3x+1)(x^2+x+1)\right)$$

Câu 5.3 (2 điểm):

a) Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = 0$ trên trường số phức.

b) Hãy tính $f(i+1)$ với $f(x) = x^7 - 3x^5 + 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x + 1$

Giải: a) Ta có
$$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 - i^2$$
$$= (x-1-i)(x-1+i)$$
Nên phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1 - i, x_2 = 1 + i$

b) Ta chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x) = x^2 - 2x + 2$ thì được

$$f(x) = g(x)P_5(x) + x - 1$$

Do $g(1+i) = 0$ nên
$$f(i+1) = (1+i) - 1 = i.$$
Tương tự
$$f(1-i) = (1-i) - 1 = -i.$$

Câu 5.4 (2 điểm): Trên trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, tìm ước chung lớn nhất của
$$f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1, g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$$

Hãy tìm hai đa thức $r(x)$ và $s(x)$ sao cho $d(x) = r(x)f(x) + s(x)g(x)$. Trong đó $d(x)$ là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$.

$$f(x) = g(x)(x+1) + (2x^2 - x - 1)$$
$$g(x) = (2x^2 - x - 1)(x-1) + (2x+1)$$
$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$$
Do đó $\left(f(x), g(x)\right) = 2x + 1$
$$2x + 1 = g(x) - (2x^2 - x - 1)(x-1) = g(x) - [f(x) - g(x)(x+1)](x-1)$$
$$2x + 1 = (-x+1)f(x) + x^2 g(x)$$
KL: $r(x) = -x + 1; s(x) = x^2$.

Câu 5.5 (2 điểm): Cho đa thức $A(x) = x^3 + x - 2$ với α, β là các nghiệm khác 1 của $A(x)$ trong $\mathbb{C}$.

a) Tính: $\alpha + \beta$ và $\alpha\beta$.

b) Tìm đa thức bậc hai $B(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $B(1) = 1, B(\alpha) = \beta, B(\beta) = \alpha$.

Giải:

$$x^3 + x - 2 = x^3 - 1 + x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) + x - 1 =$$
$$= (x-1)(x^2 + x + 2)$$

Do $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$ nên $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2$

Gọi $B(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ Ta có

$$\begin{cases} B(1) = 1 \\ B(\alpha) = \beta \\ B(\beta) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c = \beta \\ a\beta^2 + b\beta + c = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + b = -1 \\ -3a - b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c - (a\beta^2 + b\beta + c) = \beta - \alpha$$
$$a(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c + (a\beta^2 + b\beta + c) = \beta + \alpha$$
$$a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2c = \beta + \alpha$$

$$a[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + b(\alpha + \beta) + 2c = \beta + \alpha$$
$$-3a - b + 2c = -1$$

Do đó

$$B(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

Câu 5.6 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3.$$

a) Chứng tỏ $x = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

b) Hãy phân tích $P(x)$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}[x]$.

Giải:

Do $P(x)$ là đa thức hệ số thực nếu có nghiệm $x = 1 + \sqrt{2}i$ thì cũng có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}i$ nên chia hết cho

$$(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i) = x^2 - 2x + 3$$

Ta dùng phép chia hai đa thức với nhau thì có

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 1)$$

Nên suy ra a) và b) (Vì hai đa thức bậc hai trong phân tích của đa thức $P(x)$ đều có biệt thức $\Delta < 0$).

Câu 5.7 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3.$$

a) Chứng tỏ $x = -1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

b) Tìm các nghiệm còn lại của $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

Giải: a)
Do $P(x)$ là đa thức hệ số thực nếu có nghiệm $x = -1 + \sqrt{2}i$ thì cũng có nghiệm $x = -1 - \sqrt{2}i$ nên chia hết cho

$$\left(x + 1 - \sqrt{2}i\right)\left(x + 1 + \sqrt{2}i\right) = x^2 + 2x + 3$$
$$P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - x + 1)$$

b) $P(x)$ có bốn nghiệm là:

$$-1 + \sqrt{2}i, -1 - \sqrt{2}i, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$
$$= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Câu 5.8 (2 điểm): Tìm đa thức $P(x)$ bậc 4 hệ số thực biết rằng trên trường số phức đa thức đó có hai nghiệm là $1 + 2i$ và $-i$. Từ đó chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + (i - 1)x + i + 2$.

Giải: a)
$P(x)$ đa thức hệ số thực có hai nghiệm $1 + 2i, -i$ nên cũng có hai nghiệm là $1 - 2i, i$.

$$P(x) = k(x - i)(x + i)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = k(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)$$

trong đó $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.
Ta có: $Q(x) = (x - i)(x - 1 + 2i)$
Do đó $P(x) \vdots Q(x)$ trên trường số phức.

Câu 5.9 (2 điểm): Cho $P(x) = x^2 + x + 1 - i$.

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Tìm đa thức $Q(x)$ bậc 4 trên trường số thực biết rằng $Q(x)$ chia hết cho $P(x)$.

Giải: a)

$$P(x) = (x - i)(x + i + 1)$$

$P(x)$ có hai nghiệm là $i, -1 - i$

b) Do $Q(x) \vdots P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số thực nên $Q(x)$ có nghiệm $i, -1 - i$ và $-i, -1 + i$ trên $\mathbb{C}$.

$$Q(x) = k(x - i)(x + i)(x + i + 1)(x - i + 1) = k(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2), k \neq 0$$

Câu 5.10 (2 điểm): Cho $P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i$.

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Tìm đa thức $Q(x)$ bậc 4 trên trên trường số thực biết rằng $Q(x)$ chia hết cho $P(x)$.

Giải: a)

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i = x^2 - i^2 + 2x + 2i = (x + i)(x + 2 - i)$$

$P(x)$ có hai nghiệm là $-i, -2 + i$.

b) Do $Q(x) \vdots P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số thực nên $Q(x)$ có nghiệm $-i, -2 + i$ và $i, -2 - i$ trên $\mathbb{C}$

$$Q(x) = k(x - i)(x + i)(x + 2 + i)(x + 2 - i) = k(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5), k \neq 0$$

Câu 5.11 (2 điểm):

a) Tìm a, b sao cho đa thức $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + 3x + b$.

b) Phân tích đa thức $R(x) = x^4 - x^2 + 1$ thành tích các đa thức bất khả quy trên trường số phức.

Giải: a)

$x^3 + 8x^2 + 5x + a$	$x^2 + 3x + b$
$x^3 + 3x^2 + bx$	x
$5x^2 + (5 - b)x + a$	
$5x^2 + 15x + 5b$	5
$-(b + 10)x + a - 5b$	

Ta có $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a = (x + 5)(x^2 + 3x + b) - (b + 10)x + a - 5b$

Để $P(x) \vdots Q(x)$ thì $b = -10, a = -50$

b) $R(x) = x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2$

$$= \left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right).$$

Câu 5.12 (2 điểm): Hãy tìm những đa thức $U(x)$ và $V(x)$ có bậc thấp nhất sao cho $U(x)P(x) + V(x)Q(x) = D(x)$, ở đây $D(x)$ là ước chung lớn nhất của hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2; Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$

Giải:

$$P(x) = Q(x) + (x^3 - 2x)$$
$$Q(x) = (x^3 - 2x)(x + 1) + (x^2 - 2)$$
$$x^3 - 2x = (x^2 - 2)x$$

Vậy $\big(P(x), Q(x)\big) = x^2 - 2$

$$x^2 - 2 = Q(x) - (x^3 - 2x)(x + 1) = Q(x) - \big(P(x) - Q(x)\big)(x + 1)$$
$$= (-x - 1)P(x) + (x + 2)Q(x)$$

Vậy $U(x) = -x - 1, V(x) = x + 2$

Câu 5.13 (2 điểm): Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

a) Tìm ước số chung lớn nhất $S(x)$ của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$.

b) Tìm hai đa thức $U(x)$ và $V(x)$ sao cho $U(x)P(x) + V(x)Q(x) = S(x)$.

Giải:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = x^3(x + 1) - 3x(x + 1) - (x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^3 - 3x - 1)$$
$$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$$

Do $\big((x^3 - 3x - 1), (x + 1)(x - 1)\big) = 1$ nên $\big(P(x), Q(x)\big) = x - 1.$

$$P(x) = Q(x).x + (-2x^2 - 3x - 1)$$
$$2Q(x) = (-2x^2 - 3x - 1)\left(-x + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$$
$$-2x^2 - 3x - 1 = \left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

Vậy $\big(P(x), Q(x)\big) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 2Q(x) - (-2x^2 - 3x - 1)\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2Q(x) - \big(P(x) - x.Q(x)\big)\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)P(x) + \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)Q(x)$$

Vậy $U(x) = x - \frac{1}{2}, V(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Câu 5.14 (2 điểm):

a) Tìm đa thức bậc 3 có dạng $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho $P(x)$ chia hết cho $x - 1$, $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư -16 và $P(x)$ chia cho $x + 2$ dư -60.

b) Phân tích $P(x)$ thành các đa thức bất khả quy trên trường số thực.

$$P(x) \vdots (x - 1) \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0$$
$$(P(x) + 16) \vdots (x + 1) \Rightarrow P(-1) + 16 = 0 \Rightarrow a - b + c + 15 = 0$$

$$(P(x) + 60) \vdots (x + 2) \Rightarrow P(-2) + 60 = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c + 52 = 0$$
$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = -15 \\ 4a - 2b + c = -52 \end{cases}$$
$$a = -10, b = 7, c = 2$$

Câu 5.15 (2 điểm): Tìm đa thức bậc 3 có dạng $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho $P(x)$ chia hết cho $x - 2$ và $P(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thi dư $2x$.
Giải:

$$P(x) \vdots (x - 2) \Rightarrow P(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0$$
$$P(x) - 2x \vdots (x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} P(1) - 2 = 0 \\ P(-1) + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10/3 \\ b = 1 \\ c = 10/3 \end{cases}$$
Vậy $P(x) = x^3 - \frac{10}{3}x^2 + x - \frac{10}{3}$.

Câu 5.16 (2 điểm): Cho hai đa thức
$$P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12.$$
a) Tìm các nghiệm của $Q(x)$ trên trường số thực.
b) Tìm a, b, c để $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.
Giải: a)
$Q(x)$ có 3 nghiệm là $x = 2, -2, -3$

b) Do $P(x) \vdots Q(x)$ nên $P(2) = P(-2) = P(-3) = 0$
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 24 \\ 4a - 2b + c = -56 \\ 9a - 3b + c = -81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 20 \\ c = -12 \end{cases}$$
Vậy $a = -1, b = 20, c = -12$

Câu 5.17 (2 điểm): Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức
$$P(x) = (x - 2)^{10} - (x - 1)^5 - 1, \qquad Q(x) = x^2 - 3x + 2.$$
Giải: Ta có

$$Q(x) = (x - 1)(x - 2)$$
Mặt khác, thế $x = 1$ và $x = 2$ vào biểu thức của $P(x)$ ta có
$$P(1) = 0 \Leftrightarrow P(x) \vdots (x - 1)$$
$$P(2) = -2 \Rightarrow P(x) \nmid (x - 2)$$
Vậy $\big(P(x), Q(x)\big) = (x - 1)$.

Câu 5.18 (2 điểm): Cho hai đa thức

$$P(x) = x^2 - 3x + 2, \qquad Q(x) = (x-2)^8 - (x-1)^4 - 1.$$

Tìm đa thức dư $R(x)$ trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$.
Giải: Ta có

$$P(x) = (x-1)(x-2)$$

Mặt khác, thế $x = 1$ và $x = 2$ vào biểu thức của $Q(x)$ ta có

$$Q(1) = 0 \Rightarrow Q(x) \vdots (x-1) \Rightarrow Q(x) = (x-1)Q^{'}(x)$$

$$Q(2) = -2$$

Gọi $T(x)$ là đa thức thương trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$

$$Q(x) = P(x).T(x) + R(x) \Leftrightarrow (x-1)Q^{'}(x) = (x-1)(x-2)T(x) + (x-1)R^{'}(x)$$

$$Q(2) = -2 \Rightarrow R^{'}(2) = -2$$

Do $R(x)$ bậc cao nhất là bậc 1 nên $R^{'}(x)$ có bậc 0 hay $R^{'}(x) = -2$. Vậy $R(x) = -2(x-1)$.

Câu 5.19 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1.$$

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Hãy phân tích đa thức $P(x)$ thành các đa thức bất khả quy trên trường hệ số thực.
Giải: a) Ta có

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)^2 + 1 &= (x^2 + x + 1)^2 - i^2 \\ &= (x^2 + x + 1 - i)(x^2 + x + 1 + i) \\ &= (x^2 - i^2 + x - i)(x^2 - i^2 + x + i) \\ &= (x - i)(x + 1 + i)(x + i)(x + 1 - i)\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức là $i, -i, -1 + i, -1 - i$.
b) Theo a) ta có

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - i)(x + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)\end{aligned}$$

Các đa thức bậc hai $x^2 + 1$ và $x^2 + 2x + 2$ có biệt thức $\Delta < 0$ nên là câc đa thức bất khả qui trên trường số thực.

Câu 5.20 (2 điểm): Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + a, \qquad Q(x) = (x-1)(x^2 + bx + c).$$

Tìm giá trị của a, b, c để đa thức $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.
Giải: Nếu $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$, do $Q(x)$ chia hết cho $(x-1)$ nên

$$P(x) \vdots (x-1) \Rightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 3)$$

$P(x) \vdots Q(x) \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+3) \vdots (x^2+bx+c)$
Vậy $a=3, b=2, c=3$.

$$(x+1)\big((x^2+bx+c)+(2-b)x+c-3\big) \vdots (x^2+bx+c)$$

Suy ra kq trên.

DUYỆT (Ký và ghi rõ họ tên)	**CÁN BỘ PHẢN BIỆN** (Ký và ghi rõ họ tên)	**CÁN BỘ RA ĐỀ VÀ XÂY DỰNG ĐÁP ÁN** (Ký và ghi rõ họ tên)
Ngô Nhân Đức	Bùi Văn Hiếu	Nguyễn Dư Thái