- Tên học phần: `Giải tích` - Mã học phần: `TOA1053` - Số tín chỉ: `3`

Câu 1.

Cho dãy số $(u_n)_n$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}, \forall n \in N^*$:

1. Chứng minh $(u_n)_n$ là dãy tăng, bị chặn trên bởi 1.
2. Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} u_n$.

> ## Câu 1.
>
> 1. **Dãy tăng, bị chặn trên bởi 1:**
>
> - **Dãy tăng:** Ta có:
>
> $$u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \geq u_n \quad (\text{vì } (u_n - 1)^2 \geq 0).$$
>
> - **Bị chặn trên:** Chứng minh bằng quy nạp:
>
> $$u_1 = \frac{1}{2} \leq 1, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \leq 1 \quad \text{nếu } u_n \leq 1.$$
>
> 2. **Giới hạn:** Giả sử $u_n \to L$:
>
> $$L = \frac{1+L^2}{2}, \quad \Rightarrow L^2 - 2L + 1 = 0, \quad \Rightarrow L = 1.$$
>
> Kết luận: $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Câu 2.

Xét hàm $f(x)$ phụ thuộc vào hai số thực a, b như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a\sin x + b & nếu\ x < 0 \\ 2x - 1 & nếu\ x \geq 0 \end{cases}$$

Xác định giá trị của a, b để $f(x)$:

1. Liên tục trên R.
2. Khả vi trên R.

Câu 2.

1. **Liên tục trên $\mathbb{R}$:**
   Để hàm liên tục tại $x = 0$, ta cần:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

- $f(0) = -1$.
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = b$.

Vậy $b = -1$.

2. **Khả vi trên $\mathbb{R}$:**
   Để hàm khả vi tại $x = 0$, ta cần:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

- $f'(x) = 2$ khi $x \geq 0$.
- $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = a$.

Vậy $a = 2$.

Kết luận: $a = 2$ và $b = -1$.

Câu 3.

Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$\int_1^\infty \frac{x^2 + 1}{(x+1)\sqrt{x^3}} dx$$

Câu 3.

Xét tích phân:

$$I = \int_1^\infty \frac{x^2 + 1}{(x+1)\sqrt{x^3}} \, dx.$$

1. **Biểu thức hàm tích phân khi $x \to \infty$:**
   Khi x lớn, ta có:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)\sqrt{x^3}} \sim \frac{x^2}{x \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Vì vậy, hàm tích phân hành vi như $\frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to \infty$.

2. **Xét hội tụ tại $x \to \infty$:**

   Xét tích phân suy rộng:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^\infty = \infty.$$

   Vậy, tích phân I không hội tụ tại $x \to \infty$.

Kết luận: Tích phân suy rộng không hội tụ.

Câu 4.

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{n}$$

Câu 4.

Xét chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Để tìm miền hội tụ của chuỗi, ta sử dụng **định lý D'Alembert** (tiêu chuẩn tỷ lệ):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-1)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\right| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x-1|.$$

Chuỗi hội tụ khi:

$$|x-1| < 1.$$

Do đó, **miền hội tụ** của chuỗi là:

$$(0, 2).$$

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi là $(0, 2)$.

Câu 5.

1. Khảo sát cực trị của hai hàm biến $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y - 4$.
2. Tính tích phân $\int\int_D ydxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi tam giác ABO với $A(6;0)$, $B(2;4)$ và $O(0;0)$.

Câu 5.

1. **Khảo sát cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y - 4$:**

- Đạo hàm riêng:
  - $f_x = 2x - y - 1$, $f_y = 4y - x - 3$.
- Giải hệ phương trình $f_x = 0$ và $f_y = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

  Giải ra $x = 1, y = 1$.
- Ma trận Hessian:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 7.$$

  Vì $\det(H) > 0$ và $f_{xx} > 0$, điểm $(1,1)$ là cực tiểu.

Kết luận: Cực tiểu tại $(1,1)$.

2. **Tính tích phân $\int\int_D y\,dx\,dy$ với miền D là tam giác ABO có $A(6,0)$, $B(2,4)$, $O(0,0)$:**

- Phương trình các cạnh của tam giác:
  - Cạnh OA: $y = 0$, OB: $y = 2x$, AB: $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
- Giới hạn tích phân:

$$\int_0^6 \int_0^{2x} y\,dy\,dx.$$

- Tính tích phân:

$$\int_0^{2x} y\,dy = 2x^2, \quad \int_0^6 2x^2\,dx = 144.$$

Kết luận: Tích phân có giá trị 144.

Giải

Câu 1.

1. **Dãy tăng, bị chặn trên bởi 1:**

- **Dãy tăng:** Ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \geq u_n \quad (\text{vì } (u_n-1)^2 \geq 0).$$

- **Bị chặn trên:** Chứng minh bằng quy nạp:

$$u_1 = \frac{1}{2} \leq 1, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \leq 1 \quad \text{nếu } u_n \leq 1.$$

2. **Giới hạn:** Giả sử $u_n \to L$:

$$L = \frac{1+L^2}{2}, \quad \Rightarrow L^2 - 2L + 1 = 0, \quad \Rightarrow L = 1.$$

Kết luận: $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Câu 2.

1. **Liên tục trên $\mathbb{R}$:**
   Để hàm liên tục tại $x = 0$, ta cần:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

- $f(0) = -1$.
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$.

Vậy $b = -1$.

2. **Khả vi trên $\mathbb{R}$:**
   Để hàm khả vi tại $x = 0$, ta cần:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

- $f'(x) = 2$ khi $x \geq 0$.
- $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = a$.

Vậy $a = 2$.

Kết luận: $a = 2$ và $b = -1$.

Câu 3.

Xét tích phân:

$$I = \int_1^\infty \frac{x^2+1}{(x+1)\sqrt{x^3}}\,dx.$$

1. **Biểu thức hàm tích phân khi $x \to \infty$:**
   Khi x lớn, ta có:
   $$\frac{x^2+1}{(x+1)\sqrt{x^3}} \sim \frac{x^2}{x \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$
   Vì vậy, hàm tích phân hành vi như $\frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to \infty$.
2. **Xét hội tụ tại $x \to \infty$:**
   Xét tích phân suy rộng:
   $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^\infty = \infty.$$
   Vậy, tích phân I không hội tụ tại $x \to \infty$.

Kết luận: Tích phân suy rộng không hội tụ.

Câu 4.

Xét chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Để tìm miền hội tụ của chuỗi, ta sử dụng **định lý D'Alembert** (tiêu chuẩn tỷ lệ):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-1)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\right| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x-1|.$$

Chuỗi hội tụ khi:

$$|x-1| < 1.$$

Do đó, **miền hội tụ** của chuỗi là:

$$(0,2).$$

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi là $(0,2)$.

Câu 5.

1. **Khảo sát cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y - 4$:**

- Đạo hàm riêng:
  - $f_x = 2x - y - 1$, $f_y = 4y - x - 3$.
- Giải hệ phương trình $f_x = 0$ và $f_y = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

  Giải ra $x = 1, y = 1$.
- Ma trận Hessian:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 7.$$

  Vì $\det(H) > 0$ và $f_{xx} > 0$, điểm $(1, 1)$ là cực tiểu.

Kết luận: Cực tiểu tại $(1, 1)$.

2. **Tính tích phân $\int\int_D y\,dx\,dy$ với miền D là tam giác ABO có $A(6, 0)$, $B(2, 4)$, $O(0, 0)$:**

- Phương trình các cạnh của tam giác:
  - Cạnh OA: $y = 0$, OB: $y = 2x$, AB: $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
- Giới hạn tích phân:

$$\int_0^6 \int_0^{2x} y\,dy\,dx.$$

- Tính tích phân:

$$\int_0^{2x} y\,dy = 2x^2, \quad \int_0^6 2x^2\,dx = 144.$$

Kết luận: Tích phân có giá trị 144.