2.1 Quan hệ hai ngôi và các tính chất

Định nghĩa 2.1.1. *Quan hệ hai ngôi* (gọn hơn là quan hệ) trong tập hợp E là một tập con $\mathcal{R}$ của tập hợp tích $E \times E$. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết $x\mathcal{R}y$, ngược lại ta nói x không quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết $x\overline{\mathcal{R}}y$.

Quan hệ $\mathcal{R}$ có thể có những tính chất sau đây.

- $\mathcal{R}$ có tính *phản xạ* nếu với mọi $x \in E$ ta luôn có $x\mathcal{R}x$. Điều này tương đương với đường chéo $\Delta = \{(x, x) \in E \times E / x \in E\}$ chứa trong $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *đối xứng* nếu $x\mathcal{R}y$ thì ta luôn có $y\mathcal{R}x$. Nói cách khác, $\mathcal{R}$ có tính đối xứng nếu cặp thứ tự (x, y) tùy ý thuộc $\mathcal{R}$ thì cặp đối xứng qua đường chéo là (y, x) cũng thuộc $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *phản đối xứng* nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}x$ thì ta luôn có $x = y$. Điều này có nghĩa là nếu cặp thứ tự $(x, y) \in \mathcal{R}$ mà $x \neq y$ thì cặp $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *bắc cầu* nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì ta luôn có $x\mathcal{R}z$.

2.2 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 2.2.1. Quan hệ trong tập hợp E có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu gọi là một quan hệ *tương đương*.

Xét quan hệ tương đương $\sim$ trong E. Cho $x \in E$ ta ký hiệu

$$\overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\},$$

gọi là *lớp tương đương* của x. Phần tử $y \in \overline{x}$ gọi là một đại diện của lớp tương đương $\overline{x}$.

Mệnh đề 2.2.2. *Cho $\sim$ là quan hệ tương đương trong tập hợp E. Khi đó ta có:*

i) Mỗi lớp tương đương là một tập hợp khác rỗng;

ii) Hai lớp tương đương hoặc có giao bằng rỗng hoặc bằng nhau. Nếu hai lớp tương đương có hai phần tử đại diện nào đó tương đương thì bằng nhau;

iii) E là hợp của tất cả các lớp tương đương.

Tập thương: Tập E chia thương cho quan hệ tương đương $\sim$ trên E là tập gồm tất cả các lớp tương đương $\overline{x}$ với mọi $x \in E$. Kí hiệu:

$$E/_{\sim} = \{\overline{x} : x \in E\}$$

2.3 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 2.3.2. Cho tập hợp E có thứ tự $\preceq$ và $A \subset E$.

i) Phần tử $a \in A$ gọi là *cực đại* trong A nếu $\forall x \in A$ mà $a \preceq x$ thì $x = a$, tức là trong các phần tử của A mà so sánh được với a thì không có phần tử nào lớn hơn a.

ii) Phần tử $b \in A$ gọi là *cực tiểu* trong A nếu $\forall x \in A$ mà $x \preceq b$ thì $x = b$, nghĩa là trong các phần tử của A nếu so sánh được với b thì không có phần tử nào nhỏ hơn b.

Chú ý: phần tử cực đại còn được gọi là phần tử tối đại, phần tử cực tiểu còn được gọi là phần tử tối tiểu.

iii) Phần tử $a \in A$ gọi là *lớn nhất* trong A nếu $x \preceq a$ với mọi $x \in A$, điều này có nghĩa là mọi phần tử trong A đều so sánh được với a và không có phần tử nào lớn hơn a.

iv) Phần tử $b \in A$ gọi là *nhỏ nhất* trong A nếu $b \preceq x$ với mọi $x \in A$, tức là mọi phần tử trong A đều so sánh được với b và không có phần tử nào nhỏ hơn b.

Định nghĩa 2.3.3. Cho tập hợp E có thứ tự $\preceq$ và $A \subset E$.

i) Phần tử $a \in E$ gọi là một *chặn trên* của A nếu $x \preceq a$ với mọi $x \in A$. Phần tử nhỏ nhất trong tập hợp các chặn trên của A nếu có gọi là *supremum* của A ký hiệu $\sup A$.

ii) Phần tử $b \in E$ gọi là một *chặn dưới* của A nếu $b \preceq x$ với mọi $x \in A$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp các chặn dưới của A nếu có gọi là *infimum* của A ký hiệu $\inf A$.

Nhận xét rằng nếu a là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) trong A thì $a = \sup A$ (t.ư. $a = \inf A$).

Câu 3.1 (2 điểm): Trên $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}$, xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}, b = a2^n$.

a) $\mathcal{R}$ có phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$ không?

b) Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự, hãy tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của tập hợp $\{2,3,4,6,8,10,12\}$

Giải:

a) $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = 2^0 a$ nên $a\mathcal{R}a$.

Phản đối xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}a$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{N}$ để

$b = 2^n a$ và $a = 2^m b$ nên $b = 2^{n+m} b$ suy ra $n + m = 0$ nên $m = n = 0$. Vậy $a = b$.
Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}c$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{N}$ để $b = 2^n a$ và $c = 2^m b$ nên $c = 2^{n+m} a$, suy ra $a\mathcal{R}c$.
b) Ta có

$$\{2,3,4,6,8,10,12\}$$

$2\mathcal{R}4,\ 4\mathcal{R}8;\quad 3\mathcal{R}6, 6\mathcal{R}12;\quad 10\mathcal{R}10$

Phần tử tối đại: 8,12,10
Phần tử tối tiểu: 2,3,10
Phần tử lớn nhất: không có
Phần tử nhỏ nhất: không có

Câu 3.2 (2 điểm): Xét quan hệ $\sim$ trên tập $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \sim b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a2^n.$$

Chứng minh rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương. Trong số các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}$ có bao nhiêu lớp đôi một phân biệt.

Giải:

$\sim$ là quan hệ tương đương

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = 2^0 a$ nên $a \sim a$.
Đối xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ mà $a \sim b$ thì tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $b = 2^n a$ suy ra $a = 2^{-n} b$ nên $b \sim a$.
Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ mà $a \sim b$ và $b \sim c$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{Z}$ để $b = 2^n a$ và $c = 2^m b$ nên $c = 2^{n+m} a$, suy ra $a \sim c$.

Có hai lớp tương đương phân biệt $\overline{1} = \overline{2} = \overline{4} \neq \overline{3} = \overline{6}$.

Câu 3.3 (2 điểm): Trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực, xét quan hệ $\mathcal{R}$ như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow (x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1).$$

Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và xác định các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}$.

Giải:

$\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương

Phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $(x^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(x^2+1)$ nên $x\mathcal{R}x$.

Đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mà $x\,\mathcal{R}\,y$ thì ta có $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$. Khi đó $(y^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(y^2+1)$ nên $y\mathcal{R}x$.

Bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$ và $(y^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(y^2+1)$ nên

$$(x^3+2)(y^2+1)(y^3+2)(z^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)(z^3+2)(y^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(x^2+1).$$

Vậy $x\mathcal{R}z$.

Ta có

$$x\mathcal{R}1 \Leftrightarrow (x^3+2)(1^2+1) = (1^3+2)(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+4 = 3x^2+3 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\bar{1} = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$$

Tương tự

$$x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow (x^3+2)(2^2+1) = (2^3+2)(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 5x^3+10 = 10x^2+10 \Leftrightarrow 5x^3-10x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Nên

$$\bar{2} = \{2; 0\}$$

Câu 3.4 (2 điểm): Ký hiệu $X = \{m + n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Trên X xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$$\left(m + n\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m' + n'\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow m - m' \text{ và } n - n' \text{ đều là bội số của 2.}$$

Chứng tỏ $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và tìm các lớp tương đương.

Giải:

<u>R là quan hệ tương đương</u>

<u>Phản xạ</u>: Ta có $(m+n\sqrt{5})\mathcal{R}(m+n\sqrt{5})$ vì $m-m=n-n=0 \vdots 2$.

<u>Đối xứng</u>: $(m+n\sqrt{5})\mathcal{R}(m'+n'\sqrt{5}) \Rightarrow m-m'=2k, n-n'=2\ell$

$\Rightarrow m'-m=-2k, n'-n=-2\ell$ nên $(m'+n'\sqrt{5})\mathcal{R}(m+n\sqrt{5})$

<u>Bắc cầu</u>: $(m+n\sqrt{5})\mathcal{R}(m'+n'\sqrt{5}); (m'+n'\sqrt{5})\mathcal{R}(m''+n''\sqrt{5})$

$$\Rightarrow m-m'=2k, n-n'=2\ell; m'-m''=2k', n'-n''=2\ell'$$

$$\Rightarrow m-m''=2(k+k'), n-n''=2(\ell+\ell')$$

$$\Rightarrow (m+n\sqrt{5})\mathcal{R}(m''+n''\sqrt{5})$$

Các lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{R}$:
Do $0=0+0\sqrt{5}$ nên $\overline{0}=\{m+n\sqrt{5}|m$ chẵn và n chẵn$\}$
Do $1=1+0\sqrt{5}$ nên $\overline{1}=\{m+n\sqrt{5}|m$ lẻ và n chẵn$\}$
Do $\sqrt{5}=0+1\sqrt{5}$ nên $\overline{\sqrt{5}}=\{m+n\sqrt{5}|m$ chẵn và n lẻ$\}$
Do $1+\sqrt{5}=1+1\sqrt{5}$ nên $\overline{1+\sqrt{5}}=\{m+n\sqrt{5}|m$ lẻ và n lẻ$\}$

Câu 3.5 (2 điểm): Xét tập hợp $\mathcal{P}(X)$ (tập tất cả các tập con của X) được sắp thứ tự bởi quan hệ bao hàm "$\subset$", trong đó $X=\{1,2,3,4,5,6\}$. Hãy xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất, cận trên, cận dưới của các tập $A=\mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$ và $B=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$.
Giải:
Tập $A=\mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$:
Phần tử tối đại: X
Phần tử tối tiểu: các tập con của X gồm 1 phần tử
Phần tử lớn nhất: X
Phần tử nhỏ nhất: không có
Phần tử cận trên: X ($\sup A=X$)
Phần tử cận dưới: $\emptyset$ ($\inf A=\emptyset$)

Tập $B=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử tối đại: $\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử tối tiểu: $\{1,2\},\{2,3,4\}$
Phần tử lớn nhất: $\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử nhỏ nhất: không có
Phần tử cận trên: $\sup B=\{1,2,3,4,5\}$.

Phần tử cận dưới: $\inf B = \{2\}$.

Câu 3.6 (2 điểm): Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*. m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m|n.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định phần tử tối đại, phần tử tối tiểu, sup, inf của tập hợp $X = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15\}$.

Giải:

a) Với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ ta có

Phản xạ: $m \in \mathbb{N}^*, m|m$ nên $m\mathcal{R}m$.

Phản xứng $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \\ n\mathcal{R}m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m|n \\ n|m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = km \\ m = \ell n \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = k\ell n \Rightarrow k\ell = 1$$

$$\Rightarrow k = \ell = 1 \Rightarrow m = n.$$

Bắc cầu: $m, n, p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \\ n\mathcal{R}p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m|n \\ n|p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = km \\ p = \ell n \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p = k\ell m \Rightarrow m|p \Rightarrow m\mathcal{R}p.$$

Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$

Phần tử tối đại của $X = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15\}$:

$$7, 8, 9, 10, 12, 15.$$

Phần tử tối tiểu của X: $2, 5, 7, 9$

Tập các chặn trên của X: $\{2^3.3^2.5^1.7^1.k | k \in \mathbb{N}^*\}$ nên $\sup X = 2520$.

Chặn dưới của X: 1 nên $\inf X = 1$.

Câu 3.7 (2 điểm): Ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là tập các tập con của tập: $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. $\prec$ là một quan hệ hai ngôi trên $\mathcal{P}(X)$ xác định bởi:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \prec B \Leftrightarrow A \supset B.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\prec$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathcal{P}(X)$.

b) (1 điểm) Xác định phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập hợp

$$Y = \{\{0\}, \{0; 1; 2\}; \{0; 1; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\{1; 2; 3; 5\}\}$$

Giải**:**

a) Bài tập.

$$A \supset A$$

$$A \supset B, B \supset A \Rightarrow A = B.$$

$$A \supset B, B \supset C \Rightarrow A \supset C$$

b) Phần tử tối đại của Y: $\{0\}; \{1; 2; 3\}; \{2; 3; 4\}$.

Phần tử tối tiểu của Y: $\{0; 1; 2\}; \{0; 1; 3\}; \{2; 3; 4\}; \{1; 2; 3; 5\}$.

$$\sup Y = \emptyset, \inf Y = X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Câu 3.8 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall (a; b), (c; d) \in \mathbb{R}^2, (a; b)S(c; d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \le d \end{cases}$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên trên $\mathbb{R}^2$.

b) (1 điểm) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $A = (0; 1] \times [0; 1]$.

Giải:

a) $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} a \le a \\ b \le b \end{cases} \Rightarrow (a; b)S(a; b)$.

$$\forall (a; b), (c; d) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} (a; b)S(c; d) \\ (c; d)S(a; b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \le d \\ c \le a \\ d \le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a; b) = (c; d).$$

$$\forall (a; b), (c; d), (e; f) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} (a; b)S(c; d) \\ (c; d)S(e; f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \le e \\ b \le d \le f \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a; b)S(e; f).$$

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}^2$.

b) Giả sử $(a; b)S(x; y)$. Khi đó $\begin{cases} a \le x, \forall a \in (0; 1] \\ b \le y, \forall b \in [0; 1] \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 \le x \\ 1 \le y \end{cases}$ nên $(1; 1)$ là phần tử lớn nhất và cũng là phần tử tối đại của tập A; hơn nữa $\sup A = (1; 1)$

Giả sử $(x; y)S(a; b)$. Khi đó $\begin{cases} x \le a, \forall a \in (0; 1] \\ y \le b, \forall b \in [0; 1] \end{cases}$ nên $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ nên $\inf A = (0; 0)$ Do $(0; 0) \notin A$ nên A không có phần tử tối tiểu.

Câu 3.9 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, b = a.5^n$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$.

Giải:

a) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ta có

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*, a = a.5^0 \Rightarrow aSa$.
Phản xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*: aSb, bSa \Rightarrow \exists n; m \in \mathbb{N}, b = a.5^n; a = b.5^m$

$$\Rightarrow a = a.5^{n+m} \Rightarrow n + m = 0 \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow b = a.$$

Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*: aSb, bSc \Rightarrow \exists n; m \in \mathbb{N}, b = a.5^n; c = b.5^m$

$$\Rightarrow c = a.5^{n+m} \Rightarrow aSc.$$

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.
b) Phần tử tối đại của $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$: 10;15;25
Phần tử tối tiểu của $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$: 1; 2; 3
Vì $1S5, 5S25$. $2S10$. $3S15$
Tập X không có chặn trên nên không tồn tại sup X.
Vì nếu $a \in \mathbb{N}^*$ là một chặn trên của X thì $1Sa, 2Sa$. Khi đó a vừa có dạng 5^n và 2.5^m với $n, m \in \mathbb{N}$ vô lý.

Tập X không có chặn dưới nên không tồn tại inf X.

Vì nếu $b \in \mathbb{N}^*$ là một chặn dưới của X thì $bS1$ suy ra $1 = b.5^n, n \in \mathbb{N}$. Khi đó $b = 1$ và $n = 0$. Vậy $b = 1$. Đồng thời ta cũng phải có $1S2$ suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $2 = 5^n$, vô lý.

Câu 3.10 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a \in \mathbb{R}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{R}, (a^2 + 1)(a + 1) = (a + 1)(a^2 + 1) \Rightarrow aSa$.
Đối xứng: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 1)(a + 1) = (b + 1)(a^2 + 1) \Rightarrow bSa.$$

Bắc cầu: $\forall a; b; c \in \mathbb{R}, aSb, bSc \Rightarrow (a^2 + 1)(b + 1) =$

$$(a + 1)(b^2 + 1); (b^2 + 1)(c + 1) = (b + 1)(c^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (a^2 + 1)(b + 1)(b^2 + 1)(c + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)(b + 1)(c^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (a^2 + 1)(c + 1) = (a + 1)(c^2 + 1) \Rightarrow aSc.$$

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, x \in \overline{a} \Leftrightarrow (x^2 + 1)(a + 1) = (x + 1)(a^2 + 1) \Leftrightarrow$

$$(x-a)(xa+x+a-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \text{nếu } a=-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{1-a}{1+a}, \end{array}\right. \quad \text{nếu } a \neq -1 \end{cases}$$

Do đó $\overline{a} = \begin{cases} \{-1\}, & \text{nếu } a=-1 \\ \left\{a; \frac{1-a}{1+a}\right\}, & \text{nếu } a \neq -1 \end{cases}$.

Câu 3.11 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = 3(a-b)$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a \in \mathbb{R}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{R}, a^3 - a^3 = 0 = 3(a-a) \Rightarrow aSa$.

Đối xứng: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = 3(a-b) \Leftrightarrow b^3 - a^3 = 3(b-a) \Leftrightarrow bSa$.

Bắc cầu: $\forall a; b; c \in \mathbb{R}, aSb, bSc \Rightarrow a^3 - b^3 = 3(a-b), b^3 - c^3 = 3(b-c) \Rightarrow (a^3 - b^3) + (b^3 - c^3) = 3(a-b) + 3(b-c) \Rightarrow$

$$a^3 - c^3 = 3(a-c) \Rightarrow aSc.$$

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) $\forall a \in \mathbb{R}, x \in \overline{a}, xSa \Leftrightarrow x^3 - a^3 = 3(x-a) \Leftrightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$.

Tam thức bậc hai theo x: $x^2 + ax + a^2 - 3$ có biệt số: $\Delta = a^2 - 4(a^2-3) = 3(4-a^2) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$. Do đó:

$$\overline{a} = \begin{cases} \{-1; 2\}, & \text{nếu } a=2 \\ \{1; -2\}, & \text{nếu } a=-2 \\ \{a\}, & \text{nếu } |a|>2 \\ \left\{a; \dfrac{-a \pm \sqrt{3(4-a^2)}}{2}\right\}, & \text{nếu } |a|<2. \end{cases}$$

Câu 3.12 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a, b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Chứng minh rằng S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu f là một đơn ánh.

Giải:

a) $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = f(a) \Rightarrow aSa$ (phản xạ)

$\forall a, b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a) \Leftrightarrow bSa$. (Đối xứng)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, aSb, bSc \Rightarrow f(a) = f(b), f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c)$
$\Rightarrow aSc$. (Bắc cầu)

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) Giả sử S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$. Khi đó, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = f(b)$ thì ta có aSb và bSa nên $a = b$. Vậy f là đơn ánh. Ngược lại, nếu f là đơn ánh và aSb, bSa thì $f(a) = f(b)$ nên $a = b$. Do đó S có tính phản xứng. Vậy S là một quan hệ thứ tự.

Câu 3.13 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a.5^n$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định các lớp tương đương $\overline{2}, \overline{5}$.

Giải: a) Với mọi $a \in \mathbb{N}^*$, $a = a.5^0$ nên S phản xạ.

Với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a.5^n \Leftrightarrow a = b.5^{-n} \Leftrightarrow bSa$.

Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*, aSb, bSc \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, b = a.5^m, c = b.5^n$

$$\Rightarrow c = a.5^{m+n} \Rightarrow aSc.$$

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^*$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}^*, x \in \overline{2} \Leftrightarrow 2Sx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = 2.5^n, n \in \mathbb{N}$. Vậy

$$\overline{2} = \{2.5^n | n \in \mathbb{N}\}.$$

$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \in \overline{5} \Leftrightarrow 5Sx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = 5.5^n = 5^{n+1}, n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Câu 3.14 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương của $\overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên xSx.

Đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 1 - \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 y + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow ySx$.

Bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \begin{cases} xSy \\ ySz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\sin^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y+\cos^2 z=2\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 z=1\Rightarrow xSz.$

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

$x\in\overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\Leftrightarrow xS\left(\frac{\pi}{2}\right)\ \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2\frac{\pi}{2}=1\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy: $\overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x\in\overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow xS\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2\frac{2\pi}{3}=1\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$
$\cos 2x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Vậy: $\overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\left\{\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 3.15 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall m,n\in\mathbb{N}^*, mSn\Leftrightarrow m\ \vdots\ n\Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{N}^*, m=qn.$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.
b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, phần tử tối tiểu, chặn trên, chặn dưới, sup, inf của tập $X=\{1;2;4;5;6;7;8;9;10;12;15\}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall m\in\mathbb{N}^*, m=1.m$ nên mSm.

Phản xứng: $\forall m,n\in\mathbb{N}^*, mSn\wedge nSm\Rightarrow \exists q;r\in\mathbb{N}^*, (m=qn)\wedge(n=rm)\Rightarrow m=qrm\Rightarrow qr=1\Rightarrow r=q=1\Rightarrow m=n.$

Bắc cầu: $\forall m,n,p\in\mathbb{N}^*, mSn\ \wedge nSp\Rightarrow$

$$\exists q;q'\in\mathbb{N}^*, (m=qn)\wedge(n=q'p)\ \Rightarrow m=qq'p\Rightarrow mSp$$

Vậy S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) Phần tử tối đại của X là 1.

Các phần tử tối tiểu của X là: $7;8;9;10;12;15$.
Tập các chặn dưới của X là $\{2^3.3^2.5.7.k|k\in\mathbb{N}^*\}$ nên $\inf X=2520$.
Tập chặn trên của X là $\{1\}$ nên $\sup X=1$.

Câu 3.16 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a,b\in\mathbb{R}, aSb\Leftrightarrow a^2-b^2=a-b$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a\in\mathbb{R}$.

Giải:

a) Với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$ ta có

- $a^2 - a^2 = a - a \Rightarrow aSa \Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $aSb \Rightarrow a^2 - b^2 = a - b \Rightarrow b^2 - a^2 = b - a \Rightarrow bSa \Rightarrow S$ có tính đối xứng.
- $\begin{cases} aSb \\ bSc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a - b \\ b^2 - c^2 = b - c \end{cases} \Rightarrow a^2 - c^2 = a - c \Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) $x \in \overline{a} \Leftrightarrow xSa \Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow (x-a)(x+a-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 1 - a \end{array}\right.$

Do đó $\overline{a} = \{a; 1-a\}$

Câu 3.17 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^2$ xác định bởi:

$\forall (m;n), (m';n') \in \mathbb{N}^2, (m;n)S(m';n') \Leftrightarrow \begin{cases} m - m' = 2k \\ n - n' = 2k' \end{cases} k, k' \in \mathbb{N}$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^2$.
b) (1 điểm) Xác định tập thương của $\mathbb{N}^2$ theo quan hệ tương đương S.

Giải:

a) Với mọi $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}^2$ ta có

- $\begin{cases} a - a \vdots 2 \\ b - b \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow (a,b)S(a,b) \Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $(a,b)S(c,d) \Rightarrow \begin{cases} a - c \vdots 2 \\ b - d \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - a \vdots 2 \\ d - b \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow (c,d)S(a,b) \Rightarrow S$ có tính đối xứng.
- $\begin{cases} (a,b)S(c,d) \\ (c,d)S(e,f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c \vdots 2, b - d \vdots 2 \\ c - e \vdots 2, d - f \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - e \vdots 2 \\ b - f \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow (a,b)S(e,f) \Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}$.
b) Tập thương

$\mathbb{N}^2/S = \left\{\overline{(0;0)}, \overline{(0;1)}, \overline{(1;0)}, \overline{(1;1)}\right\}$

Câu 3.18 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall (p;q), (p';q') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$(p;q)S(p';q') \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
b) (1 điểm) Xác định các lớp tương đương $\overline{(1;2)}, \overline{(2;3)}$.

Giải:

a) Với mọi $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ta có

- $ab = ba \Rightarrow (a,b)S(a,b) \Rightarrow S$ có tính phản xạ.

- $(a,b)S(c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d)S(a,b) \Rightarrow S$ có tính đối xứng.

- $\begin{cases}(a,b)S(c,d)\\(c,d)S(e,f)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ad = bc\\cf = de\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}\\\dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{f}$

$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b)S(e,f) \Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên □ .

b)

$$(x;y)S(1;2) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (n;2n), n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \overline{(1;2)} = \{(n;2n) | n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$(x;y)S(2;3) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x;y) = (2n;3n), n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \overline{(2;3)} = \{(2n;3n) | n \in \mathbb{N}^*\}$$

Câu 3.19 (2 điểm): Ký hiệu $\wp(X)$ à tập các tập con của tập: $X = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. $\prec$ là một quan hệ hai ngôi trên $\wp(X)$ xác định bởi:

$$\forall A, B \in \wp(X), A \prec B \Leftrightarrow A \subset B.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\prec$ là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$.

b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $Y = \{\{0\},\{0;1;2\},\{0;1;3\},\{1;2;3\},\{2;3;4\},\{0;1;3;4;5\}\}$.

Giải:

a) Với mọi $A, B, C \in P(X)$ ta có

- $A \subset A \Rightarrow A \prec A \Rightarrow \prec$ có tính phản xạ.

- $\begin{cases}A \prec B\\B \prec A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A \subset B\\B \subset A\end{cases} \Rightarrow A = B \Rightarrow \prec$ có tính phản đối xứng.

- $\begin{cases}A \prec B\\B \prec C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A \subset B\\B \subset C\end{cases} \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A \prec C \Rightarrow \prec$ có tính bắc cầu.

Do đó $\prec$

là một quan hệ thứ tự trên $P(X)$.

b) Phần tử tối tiểu của Y: $\{0\};\{1;2;3\};\{2;3;4\}$.

Phần tử tối đại của Y: $\{0;1;2\};\{1;2;3\};\{2;3;4\};\{0;1;3;4;5\}$.

$\sup Y = X = \{0;1;2;3;4;5\}, \inf Y = \varnothing$.

Câu 3.20 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, b = a^n$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, chặn trên, chặn dưới của tập $X = \{3; 9; 27; 81\}$.

Giải:

a) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ta có

- $a = a^1 \Rightarrow aSa \Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $\begin{cases} aSb \\ bSa \end{cases} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} b = a^m \\ a = b^n \end{cases} \Rightarrow b = b^{mn} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ mn = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ m = n = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b \end{array}\right. \Rightarrow S$ có tính phản đối xứng.

- $\begin{cases} aSb \\ bSc \end{cases} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} b = a^m \\ c = b^n \end{cases} \Rightarrow c = a^{mn} \Rightarrow aSc \Rightarrow S$ có tính bắc cầu

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) Phần tử rối đại: 27; 81

Phần tử tối tiểu: 3

Tập các chặn trên: $\{3^{12k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Chặn dưới: 3