Câu 1.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n}, \forall n \geq 1$$

1. Chứng minh (u_n) tăng + bị chặn trên.
2. Tìm $sup(u_n|n \geq 1) = \lim_{n\to\infty} u_n$

> ## Câu 1.
>
> 1. **Chứng minh (u_n) tăng và bị chặn trên:**
>
> - Dễ dàng thấy $u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n}$ và $u_1 = 0$.
> - Chứng minh dãy tăng: Ta chứng minh $u_{n+1} > u_n$ bằng cách giải bất phương trình $\frac{1}{3-2u_n} > u_n$.
> - Chứng minh bị chặn trên: Giả sử $u_n \leq 1$, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n} \leq 1$. Do đó, dãy bị chặn trên bởi 1.
>
> **Kết luận:** Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1.
>
> 2. **Tìm $\lim_{n\to\infty} u_n$:**
>
> - Giả sử $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, ta có phương trình:
>
> $$L = \frac{1}{3-2L}.$$
>
> Giải phương trình này ta được:
>
> $$L = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } L = 1 \text{ không hợp lý với dãy tăng}).$$
>
> **Kết luận:** $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Câu 2.

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + x - 1, & x \leq 0 \\ ax^2 - b\cos x, & x > 0 \end{cases}$$

trong đó a, b là các tham số thực.

1. Tìm a, b để $f(x)$ liên tục trên R.
2. Tìm a, b để $f(x)$ có đạo hàm trên R.

Câu 2.

1. **Liên tục trên R:**

- Hàm liên tục tại $x = 0$ nếu $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.
- Tính $f(0) = -1$.
- Giới hạn bên trái $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.
- Giới hạn bên phải $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -b$.
- Để liên tục, ta cần $b = 1$.

Kết luận: $b = 1$, không có điều kiện về a.

2. **Đạo hàm trên R:**

- Hàm có đạo hàm tại $x = 0$ nếu $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$.
- $f'(x) = a \cos x + 1$ khi $x \leq 0$, và $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = a + 1$.
- $f'(x) = 2ax - b \sin x$ khi $x > 0$, và $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.
- Để hàm có đạo hàm tại $x = 0$, ta cần $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Kết luận: $a = -1$ và $b = 1$.

Câu 3.

1. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = 0, \forall x \in R$. Chứng minh $f(x)$ là hàm số hằng.
2. Viết khai triển Maclaurin của $f(x) = \ln(1 + x)$ đến cấp 2. Áp dụng chứng minh:

$$\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0$$

Câu 3.

1. **Chứng minh $f(x)$ là hàm số hằng:**

- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì $f(x)$ là một hàm số hằng.
- Cụ thể, với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} 0\,dx = 0.$$

- Do đó, $f(x_2) = f(x_1)$, chứng tỏ $f(x)$ là hằng.

2. **Khai triển Maclaurin của $f(x) = \ln(1+x)$ đến cấp 2:**

- Đạo hàm:
  - $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$,
  - $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = -1$.
- Khai triển Maclaurin đến cấp 2:

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Áp dụng chứng minh:

- $f(x) = \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Câu 4.

1. Minh họa hình học tích phân $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$. Và cho biết kết quả của nó.
2. Khảo sát sự hội tụ của $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+10}dx$.

Câu 4.

1. **Minh họa hình học tích phân $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$:**

- Tích phân này đại diện cho diện tích hình cung của phần bán kính bán kính 3 của đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ trong khoảng từ $x = 0$ đến $x = 3$.
- Hàm $y = \sqrt{9-x^2}$ mô tả bán cung phía trên trục x của đường tròn bán kính 3 với tâm tại gốc tọa độ.
- Diện tích dưới cung này chính là diện tích của phần bán tròn với bán kính 3, do đó:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Kết quả:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\pi}{2}.$$

2. **Khảo sát sự hội tụ của $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+10}dx$:**

- Xét hàm $f(x) = \frac{x+2}{x^3+10}$ khi $x \to \infty$.
- Khi x lớn, ta có:

$$f(x) \approx \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

- Vì $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ (có giá trị 1), ta có thể so sánh $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+10}dx$ với $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$.
- Do đó, hàm $f(x)$ suy rộng giống như $1/x^2$ khi $x \to \infty$, và tích phân hội tụ.

Kết luận: Tích phân hội tụ.

Câu 5.

Tìm miền hội tụ của:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(x-2)^n$$

Câu 5.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

Xét chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(x-2)^n.$$

Áp dụng **định lý kiểm tra tỷ lệ** (Test the Ratio Test) để tìm miền hội tụ.

1. Xét tỷ lệ:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}(x-2)^{n+1}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}(x-2)^n}\right|.$$

- Tính toán tỷ lệ:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}\cdot(x-2)\right|.$$

- Khi $n \to \infty$, ta có:

$$L = |x-2|.$$

> 2. Điều kiện hội tụ theo định lý kiểm tra tỷ lệ là $L < 1$:
>
> $$|x-2| < 1.$$
>
> **Miền hội tụ của chuỗi là**:
>
> $$1 < x < 3.$$
>
> Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(1, 3)$.

Giải

Câu 1.

1. **Chứng minh (u_n) tăng và bị chặn trên:**

- Dễ dàng thấy $u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n}$ và $u_1 = 0$.
- Chứng minh dãy tăng: Ta chứng minh $u_{n+1} > u_n$ bằng cách giải bất phương trình $\frac{1}{3-2u_n} > u_n$.
- Chứng minh bị chặn trên: Giả sử $u_n \leq 1$, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n} \leq 1$. Do đó, dãy bị chặn trên bởi 1.

Kết luận: Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1.

2. **Tìm $\lim_{n\to\infty} u_n$:**

- Giả sử $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, ta có phương trình:

$$L = \frac{1}{3-2L}.$$

Giải phương trình này ta được:

$$L = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } L = 1 \text{ không hợp lý với dãy tăng}).$$

Kết luận: $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Câu 2.

1. **Liên tục trên R:**

- Hàm liên tục tại $x = 0$ nếu $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
- Tính $f(0) = -1$.
- Giới hạn bên trái $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.
- Giới hạn bên phải $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -b$.

- Để liên tục, ta cần $b = 1$.

Kết luận: $b = 1$, không có điều kiện về a.

2. **Đạo hàm trên R:**

- Hàm có đạo hàm tại $x = 0$ nếu $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$.
- $f'(x) = a \cos x + 1$ khi $x \leq 0$, và $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = a + 1$.
- $f'(x) = 2ax - b \sin x$ khi $x > 0$, và $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.
- Để hàm có đạo hàm tại $x = 0$, ta cần $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Kết luận: $a = -1$ và $b = 1$.

Câu 3.

1. **Chứng minh $f(x)$ là hàm số hằng:**

- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì $f(x)$ là một hàm số hằng.
- Cụ thể, với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} 0 \, dx = 0.$$

- Do đó, $f(x_2) = f(x_1)$, chứng tỏ $f(x)$ là hằng.

2. **Khai triển Maclaurin của $f(x) = \ln(1 + x)$ đến cấp 2:**

- Đạo hàm:
  - $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$,
  - $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = -1$.
- Khai triển Maclaurin đến cấp 2:

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Áp dụng chứng minh:

- $f(x) = \ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Câu 4.

1. **Minh họa hình học tích phân $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$:**

- Tích phân này đại diện cho diện tích hình cung của phần bán kính bán kính 3 của đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ trong khoảng từ $x = 0$ đến $x = 3$.
- Hàm $y = \sqrt{9 - x^2}$ mô tả bán cung phía trên trục x của đường tròn bán kính 3 với tâm tại gốc tọa độ.
- Diện tích dưới cung này chính là diện tích của phần bán tròn với bán kính 3, do đó:

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Kết quả:

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{2}.$$

2. **Khảo sát sự hội tụ của $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+10} dx$:**

- Xét hàm $f(x) = \frac{x+2}{x^3+10}$ khi $x \to \infty$.
- Khi x lớn, ta có:

$$f(x) \approx \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

- Vì $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ (có giá trị 1), ta có thể so sánh $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+10} dx$ với $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$.
- Do đó, hàm $f(x)$ suy rộng giống như $1/x^2$ khi $x \to \infty$, và tích phân hội tụ.

Kết luận: Tích phân hội tụ.

Câu 5.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

Xét chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (x-2)^n.$$

Áp dụng **định lý kiểm tra tỷ lệ** (Test the Ratio Test) để tìm miền hội tụ.

1. Xét tỷ lệ:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}(x-2)^{n+1}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}(x-2)^n} \right|.$$

- Tính toán tỷ lệ:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cdot (x-2) \right|.$$

- Khi $n \to \infty$, ta có:

$$L = |x-2|.$$

2. Điều kiện hội tụ theo định lý kiểm tra tỷ lệ là $L < 1$:

$$|x-2| < 1.$$

Miền hội tụ của chuỗi là:

$$1 < x < 3.$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(1, 3)$.