Đại số tuyến tính

Trích từ giáo trình **Đại số tuyến tính và Hình học giải tích**,
Châu Thanh Hải, Mai Thị Lệ, Nguyễn Duy Ái Nhân, Hồ Vũ Ngọc Phương, NXB ĐHH, 2019.

(Nguyễn Đặng Hồ Hải biên tập lại theo định dạng ElegantBook. Cập nhật Ngày 7 tháng 4 năm 2024.)

Mục lục

Chương 1 MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1 MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm ma trận

Định nghĩa 1.1.1 (Ma trận-matrix)

Cho m, n là hai số tự nhiên. Một **ma trận cỡ $m \times n$ với hệ số thực** là một bảng số hình chữ nhật gồm m dòng và n cột có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ được gọi là phần tử ở dòng i, cột j của ma trận ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

♣

- Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.
- Vectơ dòng
$$R_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$$
được gọi là **dòng thứ i** của ma trận A.
- Vectơ cột
$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$
được gọi là **cột thứ j** của ma trận A.
- Khi $m = 1$, A được gọi là **ma trận dòng**. Khi $n = 1$, A được gọi là **ma trận cột**.
- Khi $m = n$, ma trận A được gọi là **ma trận vuông cấp n**,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Đường chéo nối các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là **đường chéo chính** của A, và **đường chéo phụ** của A là đường chéo xác định bởi các phần tử $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$.
- Tập tất cả các ma trận kích cỡ $m \times n$ với hệ số thực được ký hiệu là $M(m \times n, \mathbb{R})$.
- Tập các ma trận vuông cấp n với hệ số thực được ký hiệu là $M(n, \mathbb{R})$.

Ví dụ 1.1.2

1. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử: $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = 5$.
2. Cho $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận vuông cấp 3, với các phần tử trên đường chéo chính là $3, -5, -2$

và các phần tử trên đường chéo phụ là 0, −5, 6.

3. Cho $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 3×1 hay còn gọi là ma trận cột.

4. Cho $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 1×3 hay ma trận dòng.

1.1.2 Một số ma trận đặc biệt

1. **Ma trận không** (zero matrix) kích cỡ $m \times n$, ký hiệu là $O_{m\times n}$ hoặc O, là một ma trận cỡ $m \times n$ có tất cả các phần tử đều bằng 0,
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

2. **Ma trận đường chéo** (diagonal matrix) cấp n, ký hiệu $\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, là một ma trận vuông cấp n có các phần tử $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. **Ma trận đơn vị** (identity matrix) cấp n, ký hiệu là I_n hoặc đơn giản I, là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, và $a_{ii} = 1$ với mọi $i = \overline{1, n}$,
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

4. **Ma trận tam giác trên** (upper triangular matrix) cấp n là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = 0$ với mọi $1 \le j < i \le n$,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

5. **Ma trận tam giác dưới** (lower triangular matrix) cấp n là ma trận vuông cấp n có các phần tử $a_{ij} = 0$ với mọi $1 \le i < j \le n$,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

6. **Ma trận có dạng bậc thang theo dòng** (row echelon form) là ma trận thỏa mãn hai tính chất sau:
   - Các dòng khác không (tức là dòng có một phần tử nào đó khác 0), nếu có, luôn ở trên các dòng bằng không (tức là dòng có tất cả các phần tử bằng 0).
   - Đối với hai dòng khác không thì phần tử khác không đầu tiên của dòng ở bên dưới bao giờ cũng nằm bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên của dòng ở bên trên.

   Chẳng hạn, các ma trận sau có dạng bậc thang theo dòng:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. **Ma trận đối xứng** cấp n là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = \overline{1, n}$, tức là các phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính thì bằng nhau. Chẳng hạn, ma trận sau là một ma trận đối xứng cấp 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.3 Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa 1.1.3 (Ma trận bằng nhau)

Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ được gọi là bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Định nghĩa 1.1.4 (Phép cộng hai ma trận)

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. **Tổng của hai ma trận A và B**, ký hiệu $A + B$, là một ma trận cỡ $m \times n$ được xác định bởi

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.5

Ta có

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.1.6

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó,

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
2. $A + O = O + A = A$,
3. $A + A' = A' + A = O$, trong đó $A' = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
4. $A + B = B + A$,

Nhận xét 1.1.7

Ma trận A' được gọi là **ma trận đối** của A, ký hiệu là $-A$. Các tính chất trong mệnh đề trên nói rằng tập hợp $M(m \times n, \mathbb{R})$ với phép toán cộng ma trận là một nhóm giao hoán.

Định nghĩa 1.1.8 (Phép nhân ma trận với một số)

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. **Tích của λ với A**, ký hiệu λA, là một ma trận cỡ $m \times n$, được xác định như sau:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.9

$$3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 5 \\ 3\times(-7) & 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ -21 & 12 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.1.10

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ và $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Khi đó,

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
4. $1.A = A$.

Định nghĩa 1.1.11 (Phép nhân hai ma trận)

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{jk}]_{n\times p}$. **Tích của A và B**, ký hiệu AB, là ma trận $[c_{ik}]_{m\times p}$, trong đó

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

với mọi $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$.

Ví dụ 1.1.12

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Chú ý cột thứ j của AB là tích của A với cột thứ j của B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 1.1.13

1. Phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng của ma trận đứng sau. Do đó, có trường hợp tích AB tồn tại nhưng tích BA không tồn tại, chẳng hạn với A và B như Ví dụ 1.1.12 ta thấy BA không tồn tại.
2. Nếu AB và BA đều tồn tại thì nói chung $AB \neq BA$. Ngoài ra, có thể $A \neq O$ và $B \neq O$ nhưng $AB = O$. Chẳng hạn,
   - Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ta có $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   - Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ta có $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB = BA$ thì ta nói A và B **giao hoán** được với nhau.

Mệnh đề 1.1.14

Cho A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và λ là một số thực. Khi đó,

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$,
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
4. $AI = A; \quad IA = A$.

Định nghĩa 1.1.15 (Lũy thừa ma trận)

Cho A là một ma trận vuông và $k \in \mathbb{N}$. **Lũy thừa bậc k** của ma trận A, ký hiệu A^k, là ma trận xác định bởi

$$A^k = A^{k-1}A$$

với quy ước $A^0 = I$.

♣

Ví dụ 1.1.16

Bằng quy nạp theo $k \in \mathbb{N}$, ta chứng minh được

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

♠

Định nghĩa 1.1.17 (Chuyển vị của ma trận-transpose of a matrix)

Chuyển vị của ma trận $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, ký hiệu A^t, là một ma trận kích cỡ $n \times m$ có được bằng việc đổi các dòng của A thành các cột, tức là với

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ thì } A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

♣

Ví dụ 1.1.18

1. Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ma trận chuyển vị của A là $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Với $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, ma trận chuyển vị của B là $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

♠

Mệnh đề 1.1.19

Cho số thực λ và A, B là các ma trận sao cho các phép toán sau thực hiện được. Khi đó,

1. $(A^t)^t = A$,
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$,
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,
4. $(AB)^t = (B^t)(A^t)$,
5. $A^t = A$ khi chỉ khi A là ma trận đối xứng.

♠

Chứng minh Các tính chất (1), (2), (3) và (5) là hiển nhiên. Ta chứng minh (4), giả sử $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, $AB = [d_{ik}]_{m\times p}$, ta có

$$A^t = [a'_{ji}]_{n\times m}, \quad B^t = [b'_{kj}]_{p\times n}, \quad (AB)^t = [d'_{ki}]_{p\times m},$$

trong đó $a'_{ji} = a_{ij}, b'_{kj} = b_{jk}, d'_{ki} = d_{ik}$ với mọi $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,p}$. Ta có

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}a'_{ji} = d'_{ki}.$$

□

1.1.4 Ma trận khả nghịch

Định nghĩa 1.1.20 (Ma trận khả nghịch-invertible matrix)

Ma trận $A \in M(n, \mathbb{R})$ được gọi là **ma trận khả nghịch** nếu tồn tại ma trận $B \in M(n, \mathbb{R})$ sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

♣

Nhận xét 1.1.21

Ma trận B trong định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất. Thật vậy, giả sử B và C là hai ma trận thỏa mãn định nghĩa trên, nghĩa là

$$AB = BA = I, \qquad AC = CA = I.$$

Ta suy ra

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Như vậy, B được xác định duy nhất (theo A) và được gọi là **nghịch đảo** (inverse) của A, ký hiệu là A^{-1}. Ta ký hiệu $GL_n(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n khả nghịch. Tập hợp $GL_n(\mathbb{R})$ với phép toán nhân ma trận tạo thành một nhóm (không giao hoán) gọi là **nhóm tuyến tính tổng quát cấp n trên $\mathbb{R}$** (general linear group of degree n over $\mathbb{R}$).

♣

Ví dụ 1.1.22

1. Ma trận đơn vị I_n là ma trận khả nghịch với $I_n^{-1} = I_n$ vì $I_n I_n = I_n$.

2. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ta có ma trận A không khả nghịch vì với mọi $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thuộc $M(2, \mathbb{R})$ thì

$$AC = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

3. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ khả nghịch với nghịch đảo là $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tổng quát, ta có thể chứng minh được $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch khi chỉ khi $ad - bc \neq 0$. Nghịch đảo của A được cho bởi

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

♠

Mệnh đề 1.1.23

Nếu $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

♠

Chứng minh Ta có

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Do đó, AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Mệnh đề 1.1.24

Nếu A khả nghịch thì A^t khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

♠

Chứng minh Ta có

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I,$$
$$(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I^t = I.$$

Do đó, A^t khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. □

Mệnh đề 1.1.25

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

1. A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Với mọi số nguyên dương m, A^m khả nghịch và
$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$
3. Với mọi $\lambda \neq 0$, ta có λA khả nghịch và
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

1.1.5 Phép biến đổi sơ cấp và ma trận sơ cấp

Các phép biến đổi sơ cấp (elementary operations)

Cho $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $m \geq 2$. Ký hiệu d_i là dòng thứ i của ma trận A. Các phép biến đổi sau được gọi là **các phép biến đổi sơ cấp dòng** của ma trận A:

1. Nhân một dòng của ma trận với một số λ khác không,
$$d_i \to \lambda d_i, \ 1 \leq i \leq m.$$
2. Đổi chỗ hai dòng của ma trận cho nhau,
$$d_i \leftrightarrow d_k, \ 1 \leq i \neq k \leq m.$$
3. Thay một dòng của ma trận bởi tổng của dòng đó và tích của một số λ với một dòng khác của ma trận,
$$d_i \to d_i + \lambda d_k, \ 1 \leq i \neq k \leq m.$$

Tương tự, ký hiệu c_j là cột thứ j của A, $1 \leq j \leq n$ với $n \geq 2$. Khi đó, **các phép biến đổi sơ cấp cột** của A gồm:

1. Nhân một cột của ma trận với một số λ khác không,
$$c_j \to \lambda c_j, \ 1 \leq j \leq n.$$
2. Đổi chỗ hai cột của ma trận cho nhau,
$$c_j \leftrightarrow c_k, \ 1 \leq j \neq k \leq n.$$
3. Thay một cột của ma trận bởi tổng của cột đó và tích của một số λ với một cột khác của ma trận,
$$c_j \to c_j + \lambda c_k, \ 1 \leq j \neq k \leq n.$$

Các phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột được gọi chung là **các phép biến đổi sơ cấp**. Chúng là những công cụ quan trọng trong nhiều bài toán của đại số tuyến tính.

Các ma trận sơ cấp (elementary matrices)

Cho $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ với $m \geq 2$.

1. Phép nhân các phần tử của hàng r của ma trận A với số $\lambda \neq 0$, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận
$$P(r, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận $P(r, \lambda)$ thu được từ I bằng cách nhân λ vào hàng r (tương đương cột r). Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $P(r, \lambda)$ tương ứng với phép nhân cột r của A với số λ.

Ma trận $P(r, \lambda)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 1**.

2. Phép đổi chỗ hai hàng r và s của ma trận A, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận

$$Q(r, s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận $Q(r, s)$ thu được từ I bằng cách đổi chỗ hai hàng r và s (tương đương đổi chỗ hai cột r và cột s). Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $Q(r, s)$ tương ứng với phép đổi chỗ hai cột r và s.

Ma trận $Q(r, s)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 2**.

3. Phép cộng λ lần hàng r vào hàng s của ma trận A, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận

$$R(r, \lambda, s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \lambda & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận $R(r, \lambda, s)$ thu được từ I bằng cách cộng λ lần hàng r vào hàng s (tương đương cộng λ cột s vào cột r). Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $R(r, \lambda, s)$ tương ứng với phép cộng λ lần cột s vào cột r.

Ma trận $R(r, \lambda, s)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 3**.

Các ma trận sơ cấp loại 1, 2 và 3 thường gọi chung là **ma trận sơ cấp**, ký hiệu là E.

Mệnh đề 1.1.26

Nếu E là một ma trận sơ cấp thì E khả nghịch. Hơn nữa, E^{-1} cũng là ma trận sơ cấp cùng loại với E.

Chứng minh $P(r, \lambda)^{-1} = P(r, \frac{1}{\lambda})$, $\quad Q(r, s)^{-1} = Q(r, s)$, $\quad R(r, \lambda, s)^{-1} = R(r, -\lambda, s)$. □

Sau đây là một định lý khá đặc biệt, nêu lên ý nghĩa cơ bản của ma trận có dạng bậc thang đồng thời làm cơ sở cho nhiều thuật toán trong đại số tuyến tính.

Định lý 1.1.27

Mọi ma trận cấp $m \times n$ đều có thể đưa về dạng bậc thang theo dòng sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng.

Chứng minh Chứng minh bằng quy nạp theo số dòng m. Ta chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ khác không và $m, n \geq 2$. Lúc đó, A có ít nhất một cột khác không. Gọi cột j_1 $(1 \leq j_1 \leq n)$ là cột đầu tiên khác không của A. Nếu cần có thể đổi chỗ hai dòng nào đó của A để nhận được $a_{1j_1} \neq 0$. Ta sẽ biến đổi sơ cấp dòng trên A như sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1(j_1+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j_1} & a_{2(j_1+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj_1} & a_{m(j_1+1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{d_i \to d_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} d_1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1(j_1+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2(j_1+1)} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m(j_1+1)} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tiếp tục quá trình này áp dụng cho

$$B = \begin{bmatrix} a'_{2(j_1+1)} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{m(j_1+1)} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

ta thu được ma trận bậc thang. □

Ví dụ 1.1.28

Đưa ma trận sau về dạng bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 2 trừ đi 2 lần dòng 1 và dòng 3 trừ đi 3 lần dòng 1 ta thu được ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 14 & 22 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 3 trừ đi 2 lần dòng 2 ta được

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ta có thể viết lại các phép biến đổi trên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 14 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

♠

Định lý 1.1.29

Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

1. A khả nghịch.
2. A có thể được đưa về ma trận đơn vị sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng (hay cột).
3. A là tích của một số hữu hạn các ma trận sơ cấp.

♡

Chứng minh Ta chứng minh cho trường hợp biến đổi sơ cấp theo dòng, trường hợp theo cột chứng minh tương tự.

• (1)⇒(2) Giả sử A khả nghịch, gọi B là ma trận dạng bậc thang thu được từ A bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng $e_1, e_2, \ldots, e_k$ nào đó và đặt $E_i = e_i(I_n)$ là ma trận sơ cấp thu được từ I_n bởi e_i, với mọi $i = \overline{1,k}$. Ta có

$$B = E_k \cdots E_1 A$$

và B khả nghịch vì $E_1, \ldots, E_k, A$ đều khả nghịch. Do đó, mọi dòng của B đều khác không (suy ra từ định nghĩa ma trận khả nghịch). Tiếp tục thực hiện các phép biến đổi sơ cấp dòng ta có thể đưa B về ma trận I_n. Vậy I_n có thể nhận được từ A bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng.

• (2)⇒(3) Giả sử có (2), theo chứng minh trên ta có $I_n = E_k \cdots E_1 A$. Do đó, $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$, tức là (3) đúng.

• (3)⇒(1) Giả sử có (3), lúc này A khả nghịch vì mỗi ma trận sơ cấp dòng (hay cột) đều khả nghịch.

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 1.1.30

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ được đưa về ma trận đơn vị bằng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3+2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2-3d_3]{d_1+3d_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1-2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-d_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng tương đương với phép nhân bên trái với các ma trận sơ cấp như sau:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{I}.$$

Chuyển các ma trận sơ cấp sang vế phải ta được biểu diễn của A thành tích các ma trận sơ cấp:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

♠

Nhận xét 1.1.31

Trong ví dụ trên ta thấy $BA = I$ với B là tích của các ma trận sơ cấp dùng để đưa A về ma trận đơn vị. Theo định nghĩa ma trận nghịch đảo, để kết luận B là nghịch đảo của A ta cần phải chứng minh $AB = I$. Sau này (1.2.15) ta sẽ thấy rằng chỉ cần $BA = I$ hoặc $AB = I$ là đủ để kết luận B là nghịch đảo của A. Như thế ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp để tìm nghịch đảo của một ma trận.

♣

Từ chứng minh định lý trên, ta thấy rằng nếu A không khả nghịch thì ma trận bậc thang thu được từ A sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp theo hàng phải có hàng cuối cùng bằng không (ngược lại thì ta có thể tiếp tục thực hiện các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa A về ma trận đơn vị, mâu thuẫn với việc A không khả nghịch). Ta thu được kết quả sau đây:

Định lý 1.1.32

Nếu A không khả nghịch thì dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng ta có thể viết A dưới dạng $A = E_1 \cdots E_k A'$ trong đó E_i là các ma trận sơ cấp và A' là ma trận có hàng cuối bằng không.
Tương tự, nếu dùng các phép biến đổi theo cột thì ta có thể viết A dưới dạng $A = A'E_1 \cdots E_k$ trong đó A' có cột cuối cùng bằng không.

♡

Ví dụ 1.1.33

Ma trận $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}$ được đưa về dạng bậc thang như sau:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3-d_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Biểu diễn dưới dạng phép nhân bên trái với các ma trận sơ cấp tương ứng:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Chuyển các ma trận sơ cấp sang bên phải ta được:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}}_{A'},$$

trong đó E là tích các ma trận sơ cấp và A' là ma trận bậc thang có hàng cuối bằng không.

♠

Ví dụ 1.1.34

Nếu dùng các phép biến đổi sơ cấp cột, thì ma trận A được đưa về dạng bậc thang theo cột (column echelon form) như sau:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3-3c_1]{c_2-2c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&-2\\3&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{c_3-2c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-1&0\end{bmatrix}.$$

Biểu diễn dưới dạng phép nhân bên phải với các ma trận sơ cấp tương ứng:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-1&0\end{bmatrix}.$$

Chuyển các ma trận sơ cấp sang bên phải ta được:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

1.2 ĐỊNH THỨC

1.2.1 Định thức của ma trận vuông

Định nghĩa 1.2.1 (Ma trận con-submatrix)

Cho $A = [a_{ij}]_n$ là một ma trận vuông cấp n và $1 \le i, j \le n$. Ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j gọi là **ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}**, ký hiệu là A_{ij}.

Ví dụ 1.2.2

Với ma trận $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&2\\3&2&3\end{bmatrix}$ thì

$$A_{11}=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix},\quad A_{23}=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix},\quad A_{33}=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix},\quad \dots$$

Định nghĩa 1.2.3 (Định thức-determinant)

Cho $A \in M(n,\mathbb{R})$. **Định thức** của ma trận A, ký hiệu là $\det(A)$ hay $|A|$, được định nghĩa bằng cách quy nạp theo n như sau:

- Với $n = 1$, $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.
- Với $n \ge 2$, $A = [a_{ij}]_n$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}). \tag{1.1}$$

Nhận xét 1.2.4

Sau này (1.2.19) ta sẽ gọi công thức quy nạp trong định nghĩa này là công thức khai triển Laplace theo hàng thứ nhất.

Pierre-Simon Laplace (1749 –1827)

Ví dụ 1.2.5

Với ma trận vuông cấp 2,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Với ma trận vuông cấp 3,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Chẳng hạn, ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 - 12) - 2(10 + 4) - 2(6 + 1) = -49.$$

Ví dụ 1.2.6

Bằng cách quy nạp theo n, ta thấy định thức của ma trận tam giác **dưới** bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Sau này (1.2.11) ta sẽ thấy định thức của ma trận tam giác trên cũng được tính bằng công thức tương tự.

1.2.2 Một số tính chất đơn giản của định thức

Cho

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Để cho đơn giản, ta viết

$$R_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

là hàng thứ i của A và

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

là cột thứ j của A. Khi đó, ta viết

$$\det(A) = \det(R_1, R_2, \dots, R_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Sau đây là ba tính chất cơ bản của định thức:

Mệnh đề 1.2.7

$\det(I_n) = 1$.

Chứng minh Quy nạp theo n. □

Mệnh đề 1.2.8

Nếu cột C_i được viết thành tổng $C_i' + C_i''$ hoặc cột C_i được nhân với một số α thì

$$\begin{aligned} \det(C_1, \dots, C_i' + C_i'', \dots, C_n) &= \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_i'', \dots, C_n), \\ \det(C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) &= \alpha \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Chứng minh Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta sẽ chứng minh đẳng thức sau bằng quy nạp theo n:

$$\det(C_1, \dots, \alpha C_i' + \beta C_i'', \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n) + \beta \det(C_1, \dots, C_i'', \dots, C_n).$$

Rõ ràng đẳng thức này đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức đó đúng với mọi ma trận có cấp nhỏ hơn n. Gọi A là ma trận $(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$ trong đó $C_i = \alpha C_i' + \beta C_i''$. Đặt $A' = (C_1, \dots, C_i', \dots, C_n)$ và $A'' = (C_1, \dots, C_i'', \dots, C_n)$. Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{i+1}(\alpha a_{1i}' + \beta a_{1i}'') \det(A_{1i}) + \sum_{j \neq i} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{i+1}(\alpha a_{1i}' + \beta a_{1i}'') \det(A_{1i}) + \sum_{j \neq i} (-1)^{j+1} a_{1j} (\alpha \det(A_{1j}') + \beta \det(A_{1j}'')) \\ &= \alpha \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n) + \beta \det(C_1, \dots, C_i'', \dots, C_n). \end{aligned}$$

□

Mệnh đề 1.2.9

Ma trận có hai cột **liền kề** bằng nhau có định thức bằng không.

Chứng minh Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấp $n \geq 2$ của ma trận. Kết quả đúng với $n = 2$. Giả sử kết quả đúng với mọi ma trận có cấp nhỏ hơn n. Xét A có cấp n và giả sử $C_j = C_{j+1}$. Khi đó,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}),$$

trong đó $\det(A_{1k}) = 0$ với mọi $k \notin \{j, j+1\}$ theo giả thiết quy nạp. Do đó,

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{1(j+1)} \det(A_{1,j+1}).$$

Vì $C_j = C_{j+1}$ nên $a_{1j} = a_{1,j+1}$ và $A_{1j} = A_{1,j+1}$. Như vậy, $\det(A) = 0$. □

Các tính chất sau đây là hệ quả của các tính chất cơ bản vừa trình bày. Để ý trong chứng minh của các tính chất dưới đây ta sẽ không sử dụng lại định nghĩa của định thức mà chỉ sử dụng ba tính chất cơ bản ở trên.

Hệ quả 1.2.10

1. Ma trận có hai cột bất kỳ bằng nhau có định thức bằng không.
2. Đổi chỗ hai cột bất kỳ làm đổi dấu định thức.
3. Ma trận có một cột bằng không thì có định thức bằng không.
4. Ma trận có hai cột tỉ lệ có định thức bằng không.
5. Cộng vào một cột bất kỳ một bội số của một cột khác thì định thức không đổi.

♡

Chứng minh

- Ta đã chứng minh nếu ma trận có hai cột **liền kề** bằng nhau thì có định thức bằng không (1.2.9). Để chứng minh đổi chỗ hai cột **liền kề** thì định thức đổi dấu, ta áp dụng (1.2.8) và (1.2.9) như sau:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\cdots, C_j + C_{j+1}, C_j + C_{j+1}, \cdots) \\ &= \det(\cdots, C_j, C_j, \cdots) + \det(\cdots, C_j, C_{j+1}, \cdots) \\ &\quad + \det(\cdots, C_{j+1}, C_j, \cdots) + \det(\cdots, C_{j+1}, C_{j+1}, \cdots) \\ &= \det(\cdots, C_j, C_{j+1}, \cdots) + \det(\cdots, C_{j+1}, C_j, \cdots). \end{aligned}$$

  Tiếp theo nếu ma trận có hai cột **bất kỳ** bằng nhau, ta thực hiện liên tiếp các phép đổi chỗ hai cột liền kề để đưa hai cột bằng nhau về nằm gần nhau. Vì các phép biến đổi này chỉ làm đổi dấu định thức (vừa chứng minh xong) và ma trận có hai cột liền kề có định thức bằng không (1.2.9) nên ta suy ra ma trận có hai cột bất kỳ bằng nhau cũng có định thức bằng không.

  Cuối cùng, tương tự như trường hợp hai cột liền kề ở trên, ta thấy rằng tính chất "*ma trận có hai cột bất kỳ bằng nhau có định thức bằng không*" kết hợp với (1.2.8) kéo theo tính chất "*đổi chỗ hai cột bất kỳ làm đổi dấu định thức*".

- Nếu cột C_i bằng không thì ta viết $C_i = 0 \cdot C_i$ và áp dụng (1.2.8).

- Nếu $C_j = \lambda C_i$ thì

$$\begin{aligned} \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) \\ &= \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_i, \ldots, C_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Cộng α lần cột C_j vào cột C_i ta có

$$\begin{aligned} &\det(C_1, \ldots, C_i + \alpha C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \alpha \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.2.11

Định thức của ma trận tam giác **trên** bằng tích các phần tử trên đường chéo chính:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Công thức này được chứng minh bằng quy nạp theo n với chú ý rằng trong công thức tính định thức $\det(A)$, các số hạng $a_{1j}\det(A_{1j})$ với $j \neq 1$ đều bằng không vì A_{1j} có một cột toàn số không.
Ta cũng có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp theo cột cùng với các tính chất của định thức để chứng minh công thức này (đưa a_{11} ra ngoài dấu định thức, khử các phần tử còn lại của hàng đầu tiên, và thực hiện tương tự cho những hàng còn lại).

♠

1.2.3 Liên hệ giữa định thức với các phép toán nhân, nghịch đảo và chuyển vị

Ta cần nhắc lại hai tính chất sau đây liên quan đến các phép biến đổi sơ cấp của ma trận:

1. Nếu A khả nghịch thì A có thể viết thành tích các ma trận sơ cấp (1.1.29).
2. Nếu A không khả nghịch thì A có thể viết dưới dạng $A'E_1 \cdots E_k$ trong đó A' có **cột** cuối bằng không và E_i là các ma trận sơ cấp (1.1.32).

Mệnh đề 1.2.12

Nếu E là một ma trận sơ cấp cùng cấp với A thì $\det(AE) = \det(A)\det(E)$.

Chứng minh Ta xét ba trường hợp:

1. Nếu E nhận được từ I bằng cách nhân cột r với λ thì AE là ma trận nhận được từ A bằng cách nhân cột r với λ. Theo Mệnh đề 1.2.8, ta có $\det(E) = \lambda\det(I) = \lambda$ và $\det(AE) = \lambda\det(A)$.
2. Nếu E nhận được từ I bằng cách đổi chỗ cột r với cột s thì AE là ma trận nhận được từ A bằng cách đổi chỗ cột r với cột s. Theo Hệ quả 1.2.10 (2.), ta có $\det(E) = -\det(I) = -1$ và $\det(AE) = -\det(A)$.
3. Nếu E nhận được từ I bằng cách cộng λ lần hàng r vào hàng s, thì AE là ma trận nhận được từ A bằng cách cộng λ lần hàng r vào hàng s. Theo Hệ quả 1.2.10 (5.), ta có $\det(E) = \det(I) = 1$ và $\det(AE) = \det(A)$.

Ở cả ba trường hợp trên ta đều thấy $\det(AE) = \det(A)\det(E)$. □

Định lý 1.2.13

Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Chứng minh Giả sử B khả nghịch, khi đó B có thể phân tích dưới dạng $B = E_1E_2\cdots E_k$, trong đó E_i là các ma trận sơ cấp. Khi đó,

$$\det(AB) = \det(AE_1E_2\cdots E_k) = \det(A)\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) = \det(A)\det(B).$$

Nếu B không khả nghịch thì B có dạng $B'E_1\cdots E_k$ trong đó B' có cột cuối bằng 0 và E_i là các ma trận sơ cấp. Từ đó $\det(B) = \det(B')\det(E_1)\cdots\det(E_k) = 0$ (vì cột cuối của B' bằng không), và $\det(AB) = \det(AB')\det(E_1)\cdots\det(E_k) = 0$ (vì cột cuối của AB' bằng không). □

Định lý 1.2.14

A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$. Khi A khả nghịch, ta có $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Chứng minh Nếu A khả nghịch thì tồn tại B sao cho $BA = AB = I$ và do đó $\det(A) \neq 0$ vì $\det(A)\det(B) = \det(AB) = 1$. Nói riêng, $\det(B) = \frac{1}{\det(A)}$.

Nếu A không khả nghịch thì A có dạng $A = A'E_1\cdots E_k$, trong đó E_i là các ma trận sơ cấp và A' là ma trận có cột cuối bằng 0. Từ đó $\det(A') = 0$ và do đó

$$\det A = \det(A')\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) = 0.$$

□

Định lý 1.2.15

Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp.

1. Nếu $BA = I$ thì A khả nghịch và $B = A^{-1}$.
2. Nếu $AB = I$ thì A khả nghịch và $B = A^{-1}$.

Chứng minh 1. Vì $BA = I$ nên $\det(BA) = \det(I)$. Từ đó $\det(B)\det(A) = 1$ và do đó $\det(A) \neq 0$. Theo Định lý 1.2.14, A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1}. Nhân hai vế của đẳng thức $BA = I$ với A^{-1}, ta được

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1} \Leftrightarrow B(AA^{-1}) = A^{-1} \Leftrightarrow B = A^{-1}.$$

2. Chứng minh tương tự. □

Nhận xét 1.2.16

Ta đã thấy (1.1.30) việc dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng (tương ứng, cột) để đưa ma trận A về ma trận đơn vị cho phép ta tìm được ma trận B thỏa mãn $BA = I$ (tương ứng, $AB = I$). Theo định lý này, B là nghịch đảo của A. ♣

Định lý 1.2.17

$\det(A^t) = \det(A)$. ♡

Chứng minh Nếu A khả nghịch thì A viết được dưới dạng tích của các ma trận sơ cấp: $A = E_1 E_k \cdots E_k$. Ta dễ dàng kiểm tra được $\det(E) = \det(E^t)$ nếu E là một ma trận sơ cấp. Vì $A^t = E_k^t \cdots E_1^t$ và định thức của tích bằng tích các định thức nên ta suy ra $\det(A) = \det(A^t)$.

Nếu A không khả nghịch thì A^t cũng không khả nghịch (thật vậy, nếu A^t khả nghịch thì tồn tại B sao cho $A^t B = BA^t = I$ và do đó $B^t A = AB^t = I$, tức là B^t là nghịch đảo của A, mâu thuẫn với việc A không khả nghịch). Do đó, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$. □

Hệ quả 1.2.18

Một tính chất đã đúng khi phát biểu về cột của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay cột bằng dòng. ♡

Định lý 1.2.19 (Khai triển Laplace)

1. Khai triển của định thức theo dòng thứ i :

$$\det(A) = (-1)^{i-1}\left[a_{i1}\det(A_{i1}) - a_{i2}\det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{in}\det(A_{in})\right].$$

2. Khai triển của định thức theo cột thứ j :

$$\det(A) = (-1)^{j-1}\left[a_{1j}\det(A_{1j}) - a_{2j}\det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}\det(A_{nj})\right].$$

♡

Chứng minh Thực hiện $i-1$ phép đổi chỗ hai hàng liền kề để đưa hàng i lên vị trí đầu tiên, sau đó sử dụng định nghĩa định thức để thu được khai triển theo dòng i. Đối với khai triển theo cột j, dùng tính chất định thức không thay đổi khi chuyển vị ma trận, sau đó dùng khai triển Laplace theo hàng j cho ma trận chuyển vị. □

1.2.4 Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức, ta có thể dùng định nghĩa hoặc áp dụng các tính chất của định thức để biến đổi đưa định thức đã cho về dạng đơn giản hơn ví dụ như định thức của ma trận tam giác. Cách dùng các biến đổi sơ cấp là một trong những cách như vậy.

Các biến đổi sơ cấp về dòng mà ta sẽ dùng được liệt kê ở bảng dưới đây:

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng
(1) Nhân một số $\lambda \neq 0$ vào một dòng	Định thức nhân với λ
(2) Đổi chỗ hai dòng	Định thức đổi dấu
(3) Cộng một bội số một dòng nào đó vào một dòng khác	Định thức không đổi

Để tính một định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về dòng, tìm cách đưa dần ma trận đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

Bước 2. Tính giá trị của định thức dạng tam giác thu được và kể đến tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi sơ cấp đã sử dụng.

Ví dụ 1.2.20

Xét định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

Ta có

$$D \xlongequal[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3 \to d_3 + 2d_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) = -1.$$

♠

Ví dụ 1.2.21

Xét định thức $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

Ta có

$$D \xlongequal{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 - d_1} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3.$$

♠

Nhận xét 1.2.22

Ta cũng có thể xét các phép biến đổi sơ cấp về cột và áp dụng chúng để tính định thức.

♣

1.2.5 Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_n$. Với mỗi cặp (i, j), nhắc lại A_{ij} là ma trận con của A nhận được bằng cách bỏ hàng i và cột j.

Định nghĩa 1.2.23 (Ma trận phụ hợp-cofactor matrix)

- $D_{ij} := \det(A_{ij})$ được gọi là **định thức con** (minor) ứng với phần tử a_{ij};
- $C_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ được gọi là **phần bù đại số** (cofactor) của a_{ij};
- $C = [C_{ij}]_n$ được gọi là **ma trận phụ hợp** (cofactor matrix) của A.

♣

Định lý 1.2.24 (Công thức nghịch đảo của ma trận)

Nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

♡

Chứng minh Áp dụng khai triển Laplace theo dòng, ta được

$$a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \cdots + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = i \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq i. \end{cases} \tag{*}$$

Trường hợp $k \neq i$, tổng này bằng không là do nó bằng định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách thay dòng i bởi dòng k. Từ (*) ta suy ra $AC^t = \det(A) \cdot I$.

Tương tự, áp dụng khai triển Laplace theo cột, ta được

$$a_{1k}C_{1j} + a_{2k}C_{2j} + \cdots + a_{nk}C_{nj} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = j \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq j. \end{cases} \tag{**}$$

Trường hợp $k \neq j$, tổng này bằng không là do nó bằng định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột j bởi cột k. Từ (**) ta suy ra $C^t A = \det(A) \cdot I$. □

Ví dụ 1.2.25

Xét ma trận cấp hai

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Nếu $\det(A) = ad - bc \neq 0$ thì ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

do

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

và

$$C^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.2.26

Xét ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Ta có $\det A = -49 \neq 0$ nên A khả nghịch. Khi đó,

$$A^{-1} = -\frac{1}{49}C^t,$$

với $C = [c_{ij}]_3$ là ma trận phụ hợp của A, được xác định như sau:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7, \; c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -14, \; c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16, \; c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3, \; c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \; c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8, \; c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Như vậy, ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = -\frac{1}{49}\begin{bmatrix} -7 & -16 & 10 \\ -14 & 3 & -8 \\ 7 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.2.6 Định thức và hạng của ma trận

Xét ma trận kích cỡ $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

và p là một số nguyên sao cho $0 \leq p \leq \min\{m, n\}$.

Định nghĩa 1.2.27 (Ma trận con-submatrix)

Ma trận vuông cấp p thu được từ A bằng cách bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột gọi là một **ma trận con cấp p** của A, định thức của ma trận con này được gọi là một **định thức con** cấp p của A.

Định nghĩa 1.2.28 (Hạng-rank)

Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A, ký hiệu là $\mathrm{rank}(A)$.

Mệnh đề 1.2.29

$\mathrm{rank}(A^t) = \mathrm{rank}(A)$.

Chứng minh Suy ra từ tính chất $\det A = \det A^t$. □

Ví dụ 1.2.30

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A có ít nhất một định thức con cấp 2 khác không, chẳng hạn

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ta thấy rằng A có dòng đầu và dòng cuối tỉ lệ, do đó mọi định thức con cấp 3 của A đều bằng không. Do đó, $\mathrm{rank}(A) = 2$.

Ví dụ 1.2.31

1. Xét ma trận có dạng bậc thang $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Ta thấy các định thức con cấp 3 của A đều bằng 0 và $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Do đó, $\mathrm{rank}(A) = 2$ và bằng số dòng khác không của ma trận A.

2. Xét ma trận có dạng bậc thang $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Ma trận B có định thức con cấp cao nhất khác không là 3. Do đó, $\mathrm{rank}(B) = 3$ và bằng số dòng khác không của B.

Nhận xét 1.2.32

Ta nhận thấy:

1. Hạng của một ma trận có dạng bậc thang bằng số dòng khác không của nó.
2. Do các phép biến đổi sơ cấp về dòng không làm thay đổi tính bằng không và khác không của các định thức con nên chúng không làm thay đổi hạng của ma trận.

Vì vậy, ta có thể áp dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa ma trận ban đầu về dạng bậc thang để dễ xác định hạng hơn.

Ví dụ 1.2.33

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 2 trừ đi 2 lần dòng 1 và dòng 3 trừ đi 3 lần dòng 1 ta thu được ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 14 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 3 trừ đi 2 lần dòng 2 ta được

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = 2$.

1.3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.3.1 Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.3.1 (Hệ phương trình tuyến tính-System of linear equations)

Một **hệ phương trình tuyến tính** gồm m phương trình theo n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với hệ số thực có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{$\star$}$$

trong đó a_{ij} và b_i là các số thực với mọi $i = \overline{1,m}$ và $j = \overline{1,n}$.

Đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\ [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Khi đó, hệ phương trình tuyến tính ($\star$) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$Ax = b.$$

- Ma trận A được gọi là ma trận hệ số.
- Ma trận cột b được gọi là cột hệ số tự do.
- Ma trận $[A \mid b]$ được gọi là ma trận hệ số bổ sung (hoặc ma trận hệ số mở rộng).

Định nghĩa 1.3.2

1. Một bộ gồm n số thực $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là một **nghiệm** của hệ phương trình ($\star$) nếu thay $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ vào hệ ($\star$) thì dấu bằng xảy ra với tất cả các phương trình trong hệ.
2. Nếu hệ phương trình tuyến tính cho dưới dạng ma trận $Ax = b$ thì $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ được gọi là nghiệm của hệ nếu $Ax_0 = b$.
3. Giải hệ phương trình là đi tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó, tức là đi tìm tập nghiệm của hệ.
4. Hai hệ phương trình được gọi là **tương đương** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1.3.3

Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

là một hệ phương trình tuyến tính gồm 2 phương trình theo 3 ẩn. Bộ số $(0, 0, 0)$ không phải là một nghiệm của hệ, bộ số $(2, 0, 1)$ là một nghiệm của hệ.

Định nghĩa 1.3.4 (Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất-homogeneous system of linear equations)

Nếu hệ phương trình tuyến tính $(\star)$ có $b = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$ thì hệ được gọi là **hệ phương trình tuyến tính thuần nhất**. Khi đó, hệ có dạng

$$Ax = 0.$$

Nhận xét 1.3.5

Hệ thuần nhất luôn có nghiệm $x = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$ và được gọi là nghiệm tầm thường của hệ.

1.3.2 Hệ Cramer

Bây giờ, ta xét hệ gồm n phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

với ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

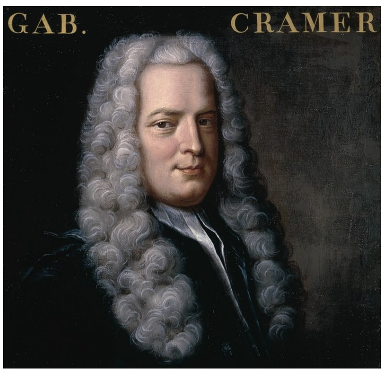
là một ma trận vuông cấp n và $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ $(\star\star)$ là

$$Ax = b. \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.3.6 (Hệ Cramer)

Hệ $(\star\star)$ được gọi là **hệ Cramer** nếu $\det(A) \neq 0$.



Gabriel Cramer (1704–1752)

Định lý 1.3.7 (Quy tắc Cramer)

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất, được tính bằng công thức $x = A^{-1}b$, nghĩa là

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

với mọi $j = \overline{1, n}$, trong đó A_j là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do b. ♡

Chứng minh Vì $\det(A) \neq 0$, nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Ta có

$$Ax = b \iff A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b.$$

Như vậy, $x = A^{-1}b$ là nghiệm duy nhất của hệ. Sử dụng công thức của A^{-1} trong Định lý 1.2.24, ta có

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

tức là

$$x_j = \frac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \cdots + C_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

□

Ví dụ 1.3.8

Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 & = 5. \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất cho bởi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-230}{-46} = 5, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-46} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-46} = 1.$$

♠

Nhận xét 1.3.9

Trong trường hợp $b = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$, hệ phương trình (⋆⋆) trở thành hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với n phương trình và n ẩn số

$$Ax = 0.$$

Khi đó, hệ $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A) = 0$. ♣

1.3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss

Carl Friedrich Gauss [1] (1777–1855)

Quy tắc Cramer tuy tường minh nhưng lại chỉ áp dụng được cho các hệ phương trình tuyến tính Cramer. Trên thực tế, người ta thường dùng phương pháp Gauss để giải một hệ phương trình tuyến tính tùy ý.

Trước tiên, ta nhận thấy có sự tương ứng giữa các phép biến đổi phương trình trong hệ phương trình tuyến tính với các phép biến đổi sơ cấp theo dòng trên ma trận hệ số mở rộng của hệ đó:

- Phép biến đổi sơ cấp nhân một dòng của ma trận với một số khác không tương ứng với phép nhân một phương trình của hệ với một số khác không.
- Phép biến đổi chỗ của hai dòng của ma trận tương ứng với phép đổi vị trí của hai phương trình của hệ.
- Phép cộng tích của số k với một dòng vào một dòng khác của ma trận tương ứng với phép cộng tích của số k với một phương trình vào một phương trình khác của hệ.

Các phép biến đổi trên không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình. Như vậy, ta có thể giải một hệ phương trình tuyến tính bằng cách tác động các phép biến đổi sơ cấp theo dòng lên ma trận hệ số mở rộng của hệ và đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng ma trận bậc thang. Khi đó, ta được một hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình ban đầu và việc giải hệ trở nên đơn giản hơn bằng cách giải từ dưới lên. Phương pháp này được gọi là phương pháp khử Gauss, cụ thể như sau:

Xét hệ phương trình tuyến tính ($\star$), ta có ma trận hệ số mở rộng là

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu cần, đổi chỗ các phương trình và đánh số lại các ẩn). Khi đó, nhân phương trình thứ nhất với $(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$ rồi cộng vào phương trình thứ i với mọi $i = \overline{2, m}$, ta nhận được ma trận mới có dạng

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right].$$

[1]Quảng cáo: Ở tuổi 19, Gauss tính được

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

từ đó có thể dựng được đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa.

Lặp lại quá trình trên với ma trận con tạo bởi $(m-1)$ dòng cuối và n cột cuối. Sau một số hữu hạn bước, ta được ma trận hệ số mở rộng có dạng bậc thang là

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \overline{a}_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} & * & \dots & * & \overline{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_m \end{array}\right],$$

trong đó $\overline{a}_{ii} \neq 0$ với mọi $i = \overline{1, r}$, các dấu $*$ ký hiệu các phần tử tùy ý trong $\mathbb{R}$.

- Nếu một trong các số $\overline{b}_{r+1}, \dots, \overline{b}_m$ khác 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\overline{b}_{r+1} = \dots = \overline{b}_m = 0$ thì hệ phương trình có nghiệm và được xác định bằng cách giải hệ từ dưới lên. Hơn nữa, mỗi nghiệm của hệ phương trình đều có thể nhận được bằng cách gán cho $x_{r+1}, \dots, x_n$ những giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}$ (nếu $n > r$), rồi thay vào tính $x_1, \dots, x_r$.

Ví dụ 1.3.10

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 & = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 25x_4 & = 3. \end{cases}$$

Ta có

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -11 & -25 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -40 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 10d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Do đó, hệ đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 1 \\ \quad\; -x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = 0. \end{cases}$$

Từ đây, ta suy ra được công thức nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 + a + 3b \\ x_2 = -2a - 4b \\ x_3 = a \in \mathbb{R} \\ x_4 = b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ta có thể viết nghiệm dưới dạng vectơ cột:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1.3.11

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 & = 0. \end{cases}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ là

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ta có

$$[A \mid b] \xrightarrow[d_2 \to d_2 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - 3d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hệ phương trình thuần nhất trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 & = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được

$$\begin{cases} x_1 = a + 7b \\ x_2 = -a - 3b \\ x_3 = a \in \mathbb{R} \\ x_4 = b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ta có thể viết nghiệm dưới dạng vectơ cột:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Chú ý

1. Ta có thể lược bỏ những dòng gồm toàn phần tử không trong quá trình biến đổi ma trận hệ số mở rộng. Đặc biệt, đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi dòng cho ma trận hệ số.
2. Nếu có thể đưa ma trận bổ sung $[A \mid b]$ của hệ phương trình tuyến tính về dạng $[I \mid b']$ thì ta rút ra ngay nghiệm của hệ là $x = b'$.

Ví dụ 1.3.12

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3. \end{cases}$$

Ta có

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 \to d_2 + d_3]{d_1 \to d_1 - 1/2d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_1 \to d_1 + d_2]{\substack{d_3 \to 1/2d_3 \\ d_2 \to 1/2d_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right].$$

Từ đây, ta có ngay nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x_1 & = 3/2 \\ x_2 & = 1 \\ x_3 & = 1/2. \end{cases}$$

1.3.4 Ứng dụng phương pháp khử Gauss để tìm ma trận nghịch đảo

Muốn tính ma trận nghịch đảo của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ khả nghịch, theo Định lý 1.2.15, ta chỉ cần tìm ma trận B sao cho $AB = I$. Khi đó, $B = A^{-1}$. Giả sử

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ta cần tìm ma trận

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

sao cho $AB = I$. Ta viết $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \dots & b_{nj} \end{bmatrix}^t$ và $E_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^t$ (số 1 ở vị trí thứ j). Khi đó, $AB = I$ tương đương $AB_j = E_j$ với mọi $j = \overline{1,n}$. Đây chính là n hệ phương trình tuyến tính có chung ma trận hệ số là A. Vì vậy, ta sẽ giải chúng bằng phương pháp Gauss trong cùng một bảng.

Như vậy, muốn tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau:

- Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A dạng $[A \mid I]$.
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa $[A \mid I]$ về dạng $[I \mid B]$.
- Nếu A có thể đưa về ma trận I thì A khả nghịch và $A^{-1} = B$. Ngược lại, nếu trong quá trình thực hiện bước 2 có một dòng của A trở thành dòng không thì A không khả nghịch.

Ví dụ 1.3.13

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 4d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_2 \to -d_2]{d_3 \to d_3 + d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to -d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_3]{d_1 \to d_1 - 2d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Như vậy,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

♠

1.3.5 Tiêu chuẩn có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý 1.3.14 (Định lý Kronecker - Capelli)

Hệ phương trình tuyến tính ($\star$) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b].$$

♡

Chứng minh Không mất tính tổng quát (bằng cách đánh số lại các ẩn nếu cần), ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa ma trận $[A \mid b]$ về dạng bậc thang:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right]$$

trong đó $r \leq \min\{m, n\}$. Từ đây, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Nhận xét 1.3.15

Từ Định lý 1.3.14, ta có một số lưu ý sau:

1. Nếu $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}[A \mid b]$ thì hệ vô nghiệm.
2. Nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
3. Nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] < n$ thì hệ có vô số nghiệm, phụ thuộc $n - \operatorname{rank} A$ tham số.

♣

Ví dụ 1.3.16

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính hệ số thực

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 &= m \\ x_1 + x_2 + mx_3 &= m^2. \end{cases}$$

Xét ma trận hệ số bổ sung

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right].$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1-m)(m+1)^2 \end{array}\right].$$

Khi đó, ta có các trường hợp sau có thể xảy ra:

- *Nếu $m = 1$ thì $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = 1 < 3$. Do đó, hệ có vô số nghiệm và tập nghiệm của hệ được xác định bởi*

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - a - b, a, b), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

- *Nếu $m = -2$ thì $\operatorname{rank} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}[A \mid b]$. Do đó, hệ vô nghiệm.*
- *Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = 3$. Khi đó, hệ có duy nhất một nghiệm được xác định bởi hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 &= m^2 \\ (m-1)x_2 + (1-m)x_3 &= m(1-m) \\ (1-m)(m+2)x_3 &= (1-m)(m+1)^2. \end{cases}$$

Giải từ dưới lên, ta được nghiệm duy nhất của hệ là

$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{m+1}{m+2} \\ x_2 &= \dfrac{1}{m+2} \\ x_3 &= \dfrac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

♠

1.4 BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Tính
   (a) $(A + B) + C$;
   (b) $A + (B + C)$;
   (c) $4C$;
   (d) A^t, B^t, C^t.

2. Tính tích của ma trận A và B biết
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ -6 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Tính các lũy thừa sau:
$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^3, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^n.$$

4. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 với hệ số thực giao hoán với ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

6. Viết các ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ thành tích của các ma trận sơ cấp.

7. Tính các định thức:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 19 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 19 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Tìm hạng của các ma trận:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

9. Tìm hạng của ma trận sau theo a:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0. \end{cases}$$

12. Giải các hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = -1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 & = 5. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = 3. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 2 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 & = 3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 5x_4 & = 1. \end{cases}$

13. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

(a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 & = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 & = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 & = 22. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = -3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 & = 2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 & = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 5 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 12. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = -6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 & = -8 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 & = -8. \end{cases}$

14. Tìm a để hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$$\begin{cases} ax + y + z + t & = 1 \\ x + ay + z + t & = 1 \\ x + y + az + t & = 1 \\ x + y + z + at & = 1. \end{cases}$$

15. Tìm a để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z & = 0 \\ ax + y + 4z & = 0 \\ ax + ay + 5z & = 0. \end{cases}$$

16. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo λ

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + t = 2 \\ x + 9y + 15z + 3t = 2 \\ 4x - 3y - 5z - t = 8 \\ 3x + 3y + 5z - \lambda t = 2. \end{cases}$$

Chương 2 KHÔNG GIAN VECTƠ - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

2.1 KHÔNG GIAN VECTƠ

2.1.1 Khái niệm về không gian vectơ

Định nghĩa 2.1.1 (Không gian vectơ)

Tập hợp khác rỗng V được gọi là một **không gian vectơ thực** (hay $\mathbb{R}$-không gian vectơ) nếu được trang bị hai phép toán

$$\begin{aligned}(+):\ & V \times V \longrightarrow V\\ & (u, v) \longmapsto u + v\\ (\cdot):\ & \mathbb{R} \times V \longrightarrow V\\ & (\alpha, v) \longmapsto \alpha v\end{aligned}$$

thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. $\forall u, v, w \in V,\ (u + v) + w = u + (v + w)$;
2. $\exists 0 \in V, \forall v \in V,\ v + 0 = 0 + v = v$;
3. $\forall v \in V, \exists v' \in V,\ v + v' = v' + v = 0$;
4. $\forall u, v \in V,\ u + v = v + u$;
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V,\ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V,\ \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
8. $\forall v \in V,\ 1v = v$.

♣

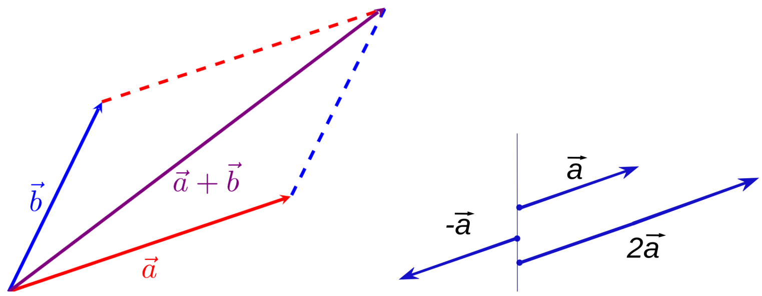
Nhận xét 2.1.2

1. Mỗi phần tử $v \in V$ được gọi là một **vectơ** (vector). Mỗi phần tử $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là một vô hướng (scalar, phái sinh từ chữ scale: hệ số tỉ lệ).
2. Vectơ 0 thỏa mãn điều kiện (2) xác định duy nhất, vectơ này được gọi là **vectơ không** và ký hiệu là 0_V hoặc đơn giản là 0.
   Thật vậy, nếu 0 *và* $0'$ *là hai vectơ thỏa mãn điều kiện (2) thì* $0 + 0' = 0$ *do* $0'$ *thỏa điều kiện (2) và* $0 + 0' = 0'$ *do* 0 *thỏa điều kiện (2), do đó* $0 = 0'$.
3. Với $v \in V$, vectơ v' thỏa mãn điều kiện (3) xác định duy nhất, vectơ này được gọi là **vectơ đối** của vectơ v và ký hiệu là $-v$.
   Thật vậy, với $v \in V$ *nếu* v' *và* $v"$ *cùng thỏa điều kiện (3) thì ta có* $v' = v' + (v + v") = (v' + v) + v" = v"$.
4. Từ đây trở về sau, ta sẽ ký hiệu $u - v$, đọc là u trừ v, thay cho phép cộng $u + (-v)$ giữa u và vectơ đối của v.

♣

2.1.2 Ví dụ

1. **Tập hợp các vectơ tự do trong hình học sơ cấp** cùng với các phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số thực lập thành một không gian vectơ thực.
   - Trong không gian vectơ này, mỗi vectơ là một vectơ tự do trong hình học sơ cấp.
   - Vectơ không của không gian vectơ này là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
   - Vectơ đối của vectơ v cho trước là vectơ cùng phương, ngược chiều và có cùng độ lớn với vectơ v.



2. **Tập hợp** $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ cùng với hai phép toán xác định bởi
$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

lập thành một không gian vectơ thực với mọi số tự nhiên khác không n.

- Trong không gian vectơ này, mỗi vectơ là một bộ gồm n số thực.
- Vectơ không của không gian vectơ này là $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$.
- Vectơ đối của vectơ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

3. **Tập hợp các đa thức một biến x với hệ số thực**

$$\mathbb{R}[x] = \{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}\}$$

cùng với phép toán cộng hai đa thức và nhân một đa thức với một số thực xác định bởi
$\forall f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i, g(x) = \sum_{i\geq 0} b_i x^i \in \mathbb{R}[x], (a_i = b_i = 0$ với i đủ lớn$), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + g(x) = \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i) x^i, \qquad \alpha f(x) = \sum_{i\geq 0} (\alpha a_i) x^i$$

lập thành một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

- Trong không gian vectơ này, mỗi vectơ là một đa thức.
- Vectơ không của không gian vectơ này là đa thức không (đa thức có tất cả hệ số đều bằng 0).
- Với vectơ $f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, vectơ đối của $f(x)$ là $-f(x) = \sum_{i\geq 0} (-a_i) x^i$.

4. Với n là số tự nhiên khác không, **tập các đa thức một biến x với hệ số thực và có bậc không quá n**, ký hiệu là $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

là một không gian vectơ thực với phép cộng hai đa thức và nhân một đa thức với một số thực.

5. **Tập hợp $M(m \times n, \mathbb{R})$ các ma trận kích cỡ m hàng n cột với hệ số thực** cùng với phép toán cộng hai ma trận và nhân một số thực với một ma trận tạo thành một không gian vectơ thực.

- Trong không gian vectơ này, mỗi vectơ là một ma trận.
- Vectơ không của không gian vectơ này là ma trận không.
- Vectơ đối của vectơ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ cho trước là ma trận đối $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ của A.

6. **Tập hợp $C[a, b]$ các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$** cùng với phép toán cộng hai hàm số và nhân số thực với hàm số xác định bởi
$\forall f(t), g(t) \in C[a, b], \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in [a, b]$,

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

lập thành một không gian vectơ thực.

- Trong không gian vectơ này, mỗi vectơ là một hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$.
- Vectơ không của không gian vectơ này là hàm hằng nhận giá trị 0 tại mọi t thuộc $[a, b]$.

- Vectơ đối của vectơ $f(t)$ cho trước là hàm số nhận giá trị $-f(t)$ với mọi t thuộc $[a, b]$.

7. Cho V, W là các không gian vectơ thực. Khi đó,

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

cùng với hai phép toán

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'), \quad \alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

là một không gian vectơ thực và gọi là **tích trực tiếp** của không gian V và W.

- Vectơ không của không gian vectơ này là $(0_V, 0_W)$.
- Vectơ đối của vectơ (v, w) là vectơ $(-v, -w)$.

2.1.3 Tính chất

Cho V là không gian vectơ thực, ta có các tính chất đơn giản sau đây:

1. $\forall u, v, w \in V, u + v = w \Rightarrow u = w - v$.
2. $\forall u, v, w \in V, u + v = u + w \Rightarrow v = w$.
3. $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, 0v = 0_V, \alpha 0_V = 0_V$.
4. $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v = 0_V \Leftrightarrow (\alpha = 0$ hoặc $v = 0_V)$.
5. $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.
6. $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}, \forall v_j \in V, j = \overline{1, n}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j.$$

2.2 ĐỘC LẬP VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.2.1 Tổ hợp tuyến tính và biểu diễn tuyến tính

Định nghĩa 2.2.1 (Tổ hợp tuyến tính và biểu diễn tuyến tính)

Cho V là một không gian vectơ thực, v thuộc V và $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là một hệ vectơ của V.

1. Một **tổ hợp tuyến tính** của các vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ của V là một vectơ có dạng

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

trong đó $\alpha_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = \overline{1, m}$.

2. Vectơ v gọi là biểu diễn tuyến tính được qua hệ vectơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ nếu tồn tại các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sao cho

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Đẳng thức $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ gọi là một **biểu diễn tuyến tính** của v qua các vectơ $v_1, \ldots, v_m$.

♣

Ví dụ 2.2.2

1. Mọi vectơ đều biểu diễn được qua chính nó bằng biểu diễn $v = 1v$.
2. Vectơ không luôn biểu diễn được qua mọi hệ vectơ bằng biểu diễn tầm thường là $0_V = 0v_1 + \cdots + 0v_m$ (tất cả các hệ số α_i đều bằng 0).
3. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}_1[x]$ gồm các đa thức một biến x với hệ số thực và có bậc không quá 1, vectơ

$v = -2 + x$ có duy nhất một biểu diễn qua hệ vectơ $X = \{v_1 = 1 + x, v_2 = 2x\}$.
Thật vậy, giả sử $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, *với* α_1, α_2 *là các số thực, ta có*

$$-2 + x = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2x) = \alpha_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)x.$$

Lúc này, (α_1, α_2) *là nghiệm của hệ phương trình*

$$\begin{cases} \alpha_1 & = -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 1. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Như vậy, $v = -2 + x$ *có duy nhất một biểu diễn qua* X *là* $v = -2v_1 + \dfrac{3}{2}v_2$.

4. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^2$, vectơ $v = (1, 2)$ của $\mathbb{R}^2$ luôn có vô số biểu diễn qua hệ vectơ $S = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, -1)\}$.
Thật vậy, giả sử $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, *với* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *là các số thực, ta có*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lúc này, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *là nghiệm của hệ phương trình*

$$\begin{cases} \alpha_1 \quad\quad + \alpha_3 = 1 \\ \quad\quad \alpha_2 - \alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_3 \\ \alpha_2 = 2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Như vậy, $v = (1, 2)$ *có vô số biểu diễn qua* S, *các biểu diễn này có dạng*

$$v = (1 - \alpha_3)v_1 + (2 + \alpha_3)v_2 + \alpha_3 v_3,$$

trong đó α_3 *là số thực bất kỳ.*

♠

2.2.2 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 2.2.3 (Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính)

Cho V là không gian vectơ thực và $v_1, \dots, v_n$ là các vectơ của V.

1. Hệ vectơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ là **độc lập tuyến tính** nếu vectơ 0_V chỉ có duy nhất một biểu diễn là biểu diễn tầm thường qua hệ này, tức là
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \text{ khi và chỉ khi } \alpha_i = 0 \text{ với mọi } i = \overline{1,n}.$$

2. Hệ vectơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ là **phụ thuộc tuyến tính** nếu tồn tại các số thực $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

♣

Ví dụ 2.2.4

1. Hệ $\{0_V\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

2. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$, hệ vectơ $\{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (1,-1)\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì
$$v_1 - v_2 - v_3 = 0.$$

3. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, hệ vectơ $\{e_1, \dots, e_n\}$ trong đó
$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{vị trí thứ } i}, 0, \dots, 0),$$
với mọi $i = \overline{1,n}$, là hệ độc lập tuyến tính.

4. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, hệ vectơ $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,2,0), v_3 = (1,2,3)\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

5. Trong không gian các vectơ tự do của hình học sơ cấp, ta có
   - Hệ hai vectơ **độc lập tuyến tính** khi và chỉ khi chúng **không cùng phương**.
   - Hệ ba vectơ **độc lập tuyến tính** khi và chỉ khi chúng **không đồng phẳng**.
   - Hệ **bốn** vectơ bất kỳ luôn **phụ thuộc tuyến tính**.

♠

2.2.3 Một số tính chất

1. Hệ một vectơ $\{v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq 0_V$.

   Chứng minh Với số thực α, ta có $\alpha v = 0_V$ khi và chỉ khi hoặc $\alpha = 0$ hoặc $v = 0_V$. Vì vậy, để 0_V có duy nhất một biểu diễn tuyến tính qua $\{v\}$ thì v phải khác 0_V, tức là $\{v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq 0_V$. □

2. Mỗi hệ con của một hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

   Chứng minh Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính và $\{v_i\}_{i \in I \subset \{1,\dots,n\}}$ là một hệ con của S, xét biểu diễn tuyến tính
$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0_V,$$
   trong đó α_i là số thực với mọi $i \in I$. Do $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus I} 0 v_j$ nên biểu diễn tuyến tính trên được viết lại dưới dạng
$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus I} 0 v_j = 0_V,$$
   đây là một biểu diễn tuyến tính của 0_V qua hệ vectơ độc lập S nên $\alpha_i = 0$ với mọi $i \in I$. Như vậy, hệ vectơ con của hệ độc lập tuyến tính S là một hệ độc lập. □

3. Mỗi hệ vectơ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính là một hệ phụ thuộc tuyến tính. Nói riêng, mỗi hệ chứa vectơ 0_V đều phụ thuộc tuyến tính.

   Chứng minh Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính và

   $$\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m\},$$

   với $m \in \mathbb{N}$, là một hệ vectơ chứa S. Do S phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

   $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

   Lúc này, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + 0u_1 + \cdots + 0u_m = 0_V$ là một biểu diễn tuyến tính khác biểu diễn tầm thường của 0_V qua $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m\}$ nên hệ này là một hệ phụ thuộc tuyến tính. □

4. Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính và $v \in V$, hệ vectơ $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi vectơ v biểu diễn tuyến tính được qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Khi đó, biểu diễn tuyến tính này là duy nhất.

   Chứng minh Hệ $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số thực $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma$ không đồng thời bằng 0 sao cho

   $$\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n + \gamma v = 0_V.$$

   Trong biểu diễn trên, γ không thể bằng 0 vì nếu γ bằng không thì $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$ do hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính. Vì $\gamma \neq 0$ nên v được biểu diễn qua $v_1, \ldots, v_n$ dưới dạng

   $$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

   trong đó $\alpha_i = \dfrac{-\gamma_i}{\gamma}$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

   Nếu v có hai biểu diễn qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ và $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ thì ta có

   $$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0_V$$

   là một biểu diễn của 0_V qua hệ độc lập tuyến tính $\{v_1, \ldots, v_n\}$, từ đây suy ra $\alpha_i = \beta_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$. □

Chú ý Các khái niệm tổ hợp tuyến tính, biểu diễn tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính được mở rộng cho hệ vectơ bất kỳ (có thể gồm vô hạn vectơ). Cụ thể, xét $\{v_i\}_{i \in I}$ là hệ vectơ tùy ý của $\mathbb{R}$-không gian vectơ V.

1. Một tổ hợp tuyến tính của $\{v_i\}_{i \in I}$ là một tổng có dạng $\sum_{i \in J} \alpha_i v_i$, trong đó J là một tập con hữu hạn của I.
2. Vectơ v gọi là biểu diễn tuyến tính được qua hệ vectơ $\{v_i\}_{i \in I}$ khi và chỉ khi tồn tại tập con hữu hạn J của I sao cho $v = \sum_{i \in J} \alpha_i v_i$.
3. Hệ vectơ $\{v_i\}_{i \in I}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{v_i\}_{i \in J}$ độc lập tuyến tính với mọi tập con hữu hạn J của I
4. Hệ vectơ $\{v_i\}_{i \in I}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại tập con hữu hạn J của I sao cho $\{v_i\}_{i \in J}$ phụ thuộc tuyến tính.

★

Ví dụ 2.2.5

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}[x]$, hệ vô hạn vectơ $\{1, x, x^2, \ldots\}$ là độc lập tuyến tính.

2.3 SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

2.3.1 Hệ sinh và cơ sở

Cho V là một không gian vectơ thực.

Định nghĩa 2.3.1 (Hệ sinh và cơ sở)

Hệ vectơ $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ được gọi là

1. một **hệ sinh** của V nếu mọi vectơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ này;
2. một **cơ sở** của V nếu mọi vectơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ này **một cách duy nhất**.

♣

Nhận xét 2.3.2

Rõ ràng mọi cơ sở đều là hệ sinh.

♣

Ví dụ 2.3.3

1. Hệ gồm hai vectơ không cùng phương lập thành một cơ sở của mặt phẳng trong hình học sơ cấp.
2. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^2$, hệ vectơ $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), v = (1,-1)\}$ là một hệ sinh nhưng không phải là một cơ sở, hệ vectơ $\{e_1, e_2\}$ là một cơ sở.
3. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^n$, hệ vectơ $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở, cơ sở này gọi là **cơ sở chính tắc** của $\mathbb{R}^n$.
4. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}_n[x]$, hệ vectơ $\{1, x, \dots, x^n\}$ là một cơ sở, cơ sở này gọi là **cơ sở chính tắc** của $\mathbb{R}_n[x]$.
5. Trong không gian vectơ thực $M(m\times n, \mathbb{R})$, hệ vectơ $\{E_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ là một cơ sở, trong đó $E_{ij} \in M(m\times n,\mathbb{R})$ là ma trận có phần tử ở vị trí hàng i cột j bằng 1 và tất cả các phần tử còn lại bằng 0.

♠

Định nghĩa 2.3.4 (Hệ độc lập tuyến tính cực đại-Hệ sinh cực tiểu)

Hệ vectơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ của V được gọi là

1. một **hệ độc lập tuyến tính cực đại** nếu nó độc lập tuyến tính và nếu thêm một vectơ khác vào hệ thì được một hệ mới không còn độc lập tuyến tính;
2. một **hệ sinh cực tiểu** nếu nó là một hệ sinh của V và nếu bớt một vectơ ra khỏi hệ thì được một hệ mới không phải là hệ sinh của V.

♣

Định lý 2.3.5

Các khẳng định sau là tương đương:

1. $\{v_1, \dots, v_n\}$ là cơ sở của V.
2. $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của V.
3. $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính cực đại của V.
4. $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ sinh cực tiểu của V.

♡

Chứng minh

$(1 \Rightarrow 2)$ Nếu $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ sinh của V và vectơ 0_V chỉ có duy nhất một biểu diễn qua V. Do 0_V luôn có biểu diễn tầm thường qua một hệ vectơ bất kỳ nên lúc này 0_V chỉ có duy nhất một biểu diễn qua $\{v_1, \dots, v_n\}$. Như vậy, $\{v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

$(2 \Rightarrow 3)$ Do $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ sinh nên với mọi vectơ v luôn tồn tại các số thực $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sao cho $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Như vậy, $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính với mọi vectơ v thuộc V. Theo giả thiết, ta có $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Do đó, $\{v_1, \dots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính cực đại.

$(3 \Rightarrow 1)$ Do $\{v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại nên với mọi vectơ v thì hệ $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính và theo tính chất 4 mục 2.2.3 thì v biểu diễn tuyến tính duy nhất qua $\{v_1, \dots, v_n\}$. Như vậy, $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của V.

$(2 \Rightarrow 4)$ Giả sử $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của V. Nếu hệ này chưa cực tiểu thì có thể bớt đi một vectơ, chẳng hạn v_1, sao cho $\{v_2, \dots, v_n\}$ vẫn là hệ sinh của V. Nhưng khi đó v_1 biểu diễn tuyến tính được qua hệ sinh này, mâu thuẫn với giả thiết $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

(4 ⇒ 2) Giả sử $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ sinh cực tiểu của V. Ta chứng minh $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu hệ này phụ thuộc tuyến tính thì có thể biểu diễn một vectơ nào đó, chẳng hạn v_1, qua các vectơ $\{v_2, \dots, v_n\}$ còn lại. Nhưng khi đó do $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ sinh nên dễ thấy $\{v_2, \dots, v_n\}$ cũng là hệ sinh, mâu thuẫn với tính chất cực tiểu của hệ sinh $\{v_1, \dots, v_n\}$.

□

Định nghĩa 2.3.6

Một không gian vectơ được gọi là **hữu hạn sinh** (finitely generated) nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử. ♣

Ví dụ 2.3.7

$\mathbb{R}_n[x]$ là hữu hạn sinh nhưng $\mathbb{R}[x]$ thì không. ♠

Định lý 2.3.8 (Sự tồn tại cơ sở)

Trong một không gian vectơ hữu hạn sinh, mọi hệ sinh hữu hạn đều chứa cơ sở. ♡

Chứng minh Giả sử $\{u_1, \dots, u_m\}$ là một hệ sinh của V. Khi đó nếu hệ sinh này là **cực tiểu** thì nó là một cơ sở. Nếu nó chưa cực tiểu thì ta có thể bớt một vectơ để được một hệ sinh mới. Nếu hệ sinh mới này cực tiểu thì nó là một cơ sở còn không thì ta lại lặp lại quá trình trên. Như thế sau một số hữu hạn bước ta thu được một hệ sinh cực tiểu, tức là một cơ sở của V. □

Định lý 2.3.9 (Tính bất biến của số phần tử trong cơ sở)

Trong một không gian vectơ hữu hạn sinh, hai cơ sở hữu hạn bất kỳ đều có số phần tử bằng nhau. ♡

Để chứng minh định lý này, ta chỉ cần chứng minh:

Bổ đề 2.3.10

Nếu $\{u_1, \dots, u_m\}$ là một **hệ sinh** và $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một **hệ độc lập tuyến tính** thì $m \geq n$. ♡

Chứng minh Do $\{u_1, \dots, u_m\}$ là hệ sinh của V nên các vectơ trong $\{v_1, \dots, v_n\}$ đều biểu diễn tuyến tính được qua S, giả sử

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i,$$

trong đó a_{ij} là số thực với mọi $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Viết các đẳng thức này dưới dạng ma trận:

$$[v_1 \ \dots \ v_n] = [u_1 \ \dots \ u_m] A,$$

trong đó $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$ với ẩn $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ và nhận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ làm ma trận hệ số. Nếu $m < n$ thì hệ phương trình này có số phương trình ít hơn số ẩn nên hệ sẽ có nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Nhân hai vế của đẳng thức $[v_1 \ \dots \ v_n] = [u_1 \ \dots \ u_m] A$ với vectơ cột $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ ta được

$$[v_1 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [u_1 \ \dots \ u_m] A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0.$$

Do đó, ta có biểu diễn tuyến tính

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

với các hệ số $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\{v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính. □

Hệ quả 2.3.11

Trong một không gian vectơ hữu hạn sinh, mọi hệ độc lập tuyến tính đều có thể bổ sung để trở thành cơ sở. ♡

Chứng minh Giả sử V có một hệ sinh gồm m phần tử và $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này **cực đại** thì nó là một cơ sở. Nếu nó chưa cực đại thì ta có thể bổ sung vào một vectơ để được một hệ mới độc lập tuyến tính. Nếu hệ mới này cực đại thì nó là một cơ sở, nếu không thì ta tiếp tục quá trình trên. Quá trình này phải dừng lại sau một số hữu hạn bước vì mọi hệ độc lập tuyến tính đều có số phần tử không vượt quá m (Bổ đề 2.3.10). Như vậy, ta thu được một hệ độc lập tuyến tính cực đại, tức là một cơ sở của V. □

2.3.2 Số chiều

Theo Định lý 2.3.8, ta biết rằng nếu $V \neq \{0_V\}$ là một không gian vectơ **hữu hạn sinh** thì V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa, Định lý 2.3.9 đã chỉ ra rằng mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa 2.3.12 (Số chiều-dimension)

Số phần tử của mỗi cơ sở trong không gian vectơ hữu hạn sinh $V \neq \{0_V\}$ được gọi là **số chiều** của V và ký hiệu là $\dim V$.
Quy ước, $\dim\{0_V\} = 0$. ♣

Ví dụ 2.3.13

1. $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ có số chiều là n.
2. $\mathbb{R}_n[x]$ là không gian vectơ có số chiều là $n + 1$.
3. $M(m \times n, \mathbb{R})$ là không gian vectơ có số chiều là $m \times n$. ♠

Mệnh đề 2.3.14

Cho V là một không gian vectơ n-chiều. Khi đó,

1. Mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n vectơ của V đều là một cơ sở.
2. Mọi hệ sinh gồm n vectơ của V đều là cơ sở. ♠

Chứng minh Áp dụng Định lý 2.3.5 và định nghĩa số chiều của không gian vectơ. □

Ví dụ 2.3.15

Hệ vectơ $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ vì đây là một hệ gồm 3 vectơ và độc lập tuyến tính trong không gian 3-chiều $\mathbb{R}^3$. ♠

Chú ý Nếu V không phải là không gian hữu hạn sinh, người ta cũng chứng minh được V có cơ sở và hai cơ sở bất kỳ có cùng lực lượng (tức là có một song ánh giữa hai cơ sở). Từ đây trở đi, nếu không nói gì khác thì ta sẽ nghiên cứu không gian vectơ hữu hạn sinh. ★

2.3.3 Tọa độ của một vectơ

Định nghĩa 2.3.16 (Tọa độ)

Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Khi đó, với vectơ v bất kỳ của V, v luôn biểu diễn tuyến tính được một cách duy nhất qua S dưới dạng

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

trong đó $\alpha_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

- Bộ vô hướng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là **tọa độ** của vectơ v đối với cơ sở S, α_i được gọi là tọa độ thứ i, với mọi $i = \overline{1, n}$.

- Ký hiệu $[v]_S = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$, ta gọi $[v]_S$ là **vectơ tọa độ** của v đối với cơ sở S.

♣

Ví dụ 2.3.17

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho vectơ $v = (7, 3, -1)$.

1. Vectơ v có tọa độ $(7, 3, -1)$ đối với cơ sở chính tắc $S = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.
   Thật vậy, biểu diễn v qua cơ sở chính tắc S ta được $v = 7e_1 + 3e_2 + (-1)e_3$.

2. Vectơ v có tọa độ $(-1, 2, 3)$ đối với cơ sở $T = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$.
   Thật vậy, xét biểu diễn tuyến tính $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, *với* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *là các số thực, ta có*

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3\\ \alpha_1 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -1\\ \alpha_2 = 2\\ \alpha_3 = 3.\end{cases}$$

   Như vậy, $v = (-1)v_1 + 2v_2 + 3v_3$ *tức là v có tọa độ* $(-1, 2, 3)$ *đối với cơ sở T.*

3. Ta có thể viết biểu diễn tuyến tính $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ ở trên dưới dạng ma trận như sau:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

   Như thế, vectơ tọa độ của v đối với cơ sở S được liên hệ với vectơ tọa độ của v đối với cơ sở T bởi công thức:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

♠

Nhận xét 2.3.18

1. Tọa độ của một vectơ đối với các cơ sở khác nhau nói chung là khác nhau.
2. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^n$, tọa độ của $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với cơ sở chính tắc là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

♣

2.3.4 Công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở

Cho $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ và $S' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ là hai cơ sở của không gian vectơ V. Với $v \in V$, giả sử

- $(x_1, \ldots, x_n)$ là toạ độ của v đối với cơ sở $\{v_1, \ldots, v_n\}$,
- $(x'_1, \ldots, x'_n)$ là tọa độ của v đối với cơ sở $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$.

Do $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V nên các vectơ v'_j được biểu diễn một cách duy nhất qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dưới dạng

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

trong đó a_{ij} là các số thực với mọi $i = \overline{1, n}$ và $j = \overline{1, n}$. Với $A = [a_{i,j}]$, ta viết lại các đẳng thức trên dưới dạng ma trận:

$$[v'_1 \ \ldots \ v'_n] = [v_1 \ \ldots \ v_n]A.$$

Như thế, cột thứ j của ma trận A là vectơ tọa độ của v'_j theo cơ sở $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Ma trận A được gọi là **ma trận chuyển cơ sở (change-of-basis matrix)** từ $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ sang $S' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$. Nhân hai vế của đẳng thức $[v'_1 \ \dots \ v'_n] = [v_1 \ \dots \ v_n]A$ với vectơ cột $(x'_1, \dots, x'_n)^t$ ta được:

$$[v'_1 \ \dots \ v'_n]\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [v_1 \ \dots \ v_n]A\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Từ đây ta suy ra

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Công thức này được gọi là **công thức đổi tọa độ** khi đổi cơ sở từ $\{v_1, \dots, v_n\}$ sang $\{v'_1, \dots, v'_n\}$.

Ví dụ 2.3.19

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở $T = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$.

1. Tìm công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc S của $\mathbb{R}^3$ sang cơ sở T.
   Với $v \in \mathbb{R}^3$, gọi tọa độ của v đối với cơ sở S và T lần lượt là (x_1, x_2, x_3) và (x'_1, x'_2, x'_3). Biểu diễn các vectơ trong T theo cơ sở S, ta được
   $$v_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3,$$
   $$v_2 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3,$$
   $$v_3 = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3.$$
   Do đó, ma trận chuyển cơ sở từ S sang T là $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở từ S sang T là
   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$
   hay $\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + 2x'_3 \\ x_2 = x'_1 + 2x'_2 \\ x_3 = x'_1. \end{cases}$

2. Biết $v \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ là $(-4, 2, 0)$ đối với cơ sở T. Tìm tọa độ của v đối với cơ sở chính tắc S của $\mathbb{R}^3$.
   Do v có tọa độ $(-4, 2, 0)$ đối với cơ sở T nên thay tọa độ này vào vị trí (x'_1, x'_2, x'_3) trong công thức đổi tọa độ từ S sang T thì ta được
   $$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -4. \end{cases}$$
   Như vậy, tọa độ của v đối với cơ sở S là $(-2, 0, -4)$.

Mệnh đề 2.3.20

Ma trận chuyển cơ sở A từ cơ sở S sang T của không gian vectơ V là ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S.

Chứng minh Với v là vectơ bất kỳ trong V, ta gọi tọa độ của v đối với cơ sở S và T lần lượt là $(x_1, \dots, x_n)$ và $(x'_1, \dots, x'_n)$. Đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ và $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$, ta có $X = AX'$ và $X' = A'X$, trong đó A là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T và A' là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S. Lúc này,

$$X = (AA')X \text{ và } X' = (A'A)X'$$

với mọi X, X'. Dễ dàng suy ra $AA' = A'A = I_n$, tức là A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A'. □

2.4 KHÔNG GIAN CON

2.4.1 Khái niệm và một số tính chất đơn giản

Định nghĩa 2.4.1 (Không gian vectơ con)

Tập con W khác rỗng của không gian vectơ V được gọi là **không gian vectơ con của V** nếu với mọi vectơ u, v của W và với mọi số thực α thì các vectơ $u + v$ và αu cũng thuộc vào W. ♣

Nhận xét 2.4.2

1. Nếu W là không gian vectơ con của V thì W cùng với hai phép toán là hạn chế của hai phép toán trên V là một không gian vectơ với $0_W = 0_V$.
2. Tập con khác rỗng W của không gian vectơ V là một không gian con khi và chỉ khi với mọi u, v thuộc W và với mọi số thực α, β ta có $\alpha u + \beta v \in W$. ♣

Ví dụ 2.4.3

1. V và $\{0_V\}$ là các không gian vectơ con của V.
2. Trong không gian các vectơ tự do trong hình học sơ cấp, cho $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tập hợp gồm tất cả các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{a}$ là một không gian vectơ con.
3. Tập hợp $\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}\}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}[x]$, đây là không gian vectơ có số chiều là $n + 1$ với một cơ sở là $\{1, x, \ldots, x^n\}$.
4. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ là một không gian vectơ con.
5. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ không phải là không gian vectơ con.
   Thật vậy, vectơ $0_{\mathbb{R}^3}$ không thuộc vào B nên theo Nhận xét 2.4.2 ta suy ra B không phải là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.
6. Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình với n ẩn $AX = 0$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.
   Do hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ luôn có nghiệm $X = 0$ nên tập nghiệm của hệ này khác rỗng. Ngoài ra, nếu X_0, X_0' là các nghiệm của hệ thì với mọi số thực α, β, ta có
   $$A(\alpha X_0 + \beta X_0') = \alpha A X_0 + \beta A X_0' = 0.$$
   Như vậy, $\alpha X_0 + \beta X_0'$ cũng là nghiệm của hệ thuần nhất đã cho. ♠

Mệnh đề 2.4.4

Nếu W là một không gian vectơ con của V thì $\dim W \leq \dim V$. Đặc biệt, $\dim W = \dim V$ khi và chỉ khi $W = V$. ♠

Chứng minh

1. Vì $W \subset V$ nên mỗi hệ độc lập tuyến tính trong W cũng độc lập tuyến tính trong V. Do đó, $\dim W \leq \dim V$.
2. $\dim W = \dim V$ khi và chỉ khi cơ sở của W cũng là cơ sở của V tức là $W = V$.

□

Mệnh đề 2.4.5

Giao của một họ khác rỗng bất kỳ các không gian vectơ con của một $\mathbb{R}$-không gian vectơ V là một không gian vectơ con của V.

Chứng minh Giả sử $\{V_i\}_{i\in I}$ là một họ khác rỗng các không gian con của V, đặt $W = \cap_{i\in I} V_i$.

1. Do V_i là không gian con của V nên 0_V thuộc V_i với mọi $i \in I$. Như vậy, 0_V thuộc W hay $W \neq \emptyset$ (1).
2. Với mọi u, v thuộc W, ta có u, v thuộc V_i với mọi $i \in I$. Với mọi số thực α và β, ta có $\alpha u + \beta v$ thuộc vào mọi V_i vì các V_i đều là không gian vectơ con. Như vậy, $\alpha u + \beta v \in W$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra W là không gian vectơ con của V. □

2.4.2 Không gian vectơ con sinh bởi một tập hợp

Định nghĩa 2.4.6 (Không gian con sinh bởi một tập hợp)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ và X là một tập con của V. Giao của tất cả các không gian vectơ con chứa X của V là một không gian vectơ con của V, gọi là **không gian vectơ con của V sinh bởi X**, ký hiệu là $\langle X\rangle$.

Nhận xét 2.4.7

1. $\langle X\rangle$ là không gian vectơ con nhỏ nhất của V chứa X.
2. $\langle\emptyset\rangle = \{0_V\}$.
3. $\langle W\rangle = W$ với mọi không gian con W của V.
4. $V^* = V \setminus \{0\}$, $\langle V^*\rangle = V$.

Mệnh đề 2.4.8

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ, $\emptyset \neq X \subset V$. Khi đó, không gian vectơ con sinh bởi X là tập hợp bao gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của X.

Chứng minh Đặt A là tập hợp gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của X. Ta dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

1. A là không gian vectơ con của V.
2. $X \subset A$.
3. Với mọi B là không gian vectơ con của V mà $X \subset B$ thì $A \subset B$.

Như vậy, A là không gian con nhỏ nhất của V mà chứa X, tức là $A = \langle X\rangle$. □

Nhận xét 2.4.9

Nếu $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ thì

$$\langle X\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\right\}.$$

Ví dụ 2.4.10

1. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$, $\langle(1,0)\rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\langle(1,0),(1,1)\rangle = \mathbb{R}^2$.
2. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}_2[x]$, $\langle 1, 1+x\rangle = \mathbb{R}_1[x]$.

Định nghĩa 2.4.11 (Hạng của một hệ vectơ)

Cho X là một hệ vectơ trong V, **hạng** của hệ vectơ X, ký hiệu là rank X, là số chiều của không gian vectơ con sinh bởi X, tức là

$$\operatorname{rank} X = \dim\langle X\rangle.$$

Mệnh đề 2.4.12

Hạng của một hệ vectơ X bằng số vectơ của mỗi tập con độc lập tuyến tính cực đại trong X.

Chứng minh Nếu A độc lập tuyến tính cực đại trong X thì mọi vectơ của X đều biểu diễn tuyến tính được qua A. Mặt khác, ta lại có mọi phần tử của $\langle X\rangle$ đều biểu diễn tuyến tính được qua X. Do đó, mọi phần tử của $\langle X\rangle$ đều biểu diễn tuyến tính được qua A, từ đây suy ra A độc lập tuyến tính cực đại trong $\langle X\rangle$ hay nói cách khác A là cơ sở của $\langle X\rangle$. Như vậy, $\dim\langle X\rangle$ bằng số phần tử của A. □

Hệ quả 2.4.13

Hai tập con độc lập tuyến tính cực đại trong X có cùng số phần tử.

Nhận xét 2.4.14

Tính độc lập tuyến tính của một hệ vectơ không đổi khi ta thực hiện các biến đổi:

1. Đổi chỗ hai vectơ của hệ.
2. Nhân một vô hướng khác 0 vào một vectơ.
3. Cộng vào một vectơ một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Do đó, nếu lấy tọa độ của các vectơ trong hệ đã cho đối với một cơ sở nào đó của không gian vectơ V và xây dựng ma trận từ các tọa độ này thì hạng của ma trận được tạo thành bằng hạng của hệ vectơ đã cho.

Ví dụ 2.4.15

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, tìm hạng của hệ vectơ $X = \{v_1 = (-1,3,4), v_2 = (0,2,5), v_3 = (-2,4,3), v_4 = (1,-1,1)\}$.

Ta có $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$

2.4.3 Tổng và tổng trực tiếp

Định nghĩa 2.4.16 (Tổng của hai không gian con)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ, và W_1, W_2 là hai không gian vectơ con của V. Tập hợp

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

là một không gian vectơ con của V, ký hiệu là $W_1 + W_2$ và gọi là **tổng (sum)** của hai không gian W_1 và W_2.

Nhận xét 2.4.17

1. Tổng $W_1 + W_2$ chính là không gian con sinh bởi $W_1 \cup W_2$:
$$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2\rangle.$$
2. Với $w \in W_1 + W_2$, ta có $w = w_1 + w_2$, trong đó $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Biểu diễn này nói chung là không duy nhất (ví dụ, trường hợp $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$).

Định nghĩa 2.4.18 (Tổng trực tiếp)

Nếu mọi vectơ w trong $W_1 + W_2$ đều được biểu diễn **duy nhất** dưới dạng $w = w_1 + w_2$, trong đó $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, thì $W_1 + W_2$ được gọi là **tổng trực tiếp (direct sum)** của W_1 và W_2 và ký hiệu là $W_1 \oplus W_2$. ♣

Định lý 2.4.19

Cho V là một không gian vectơ thực, W_1, W_2 là các không gian vectơ con của V. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

1. $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp.
2. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

♡

Chứng minh

- $(1 \Rightarrow 2)$ Giả sử $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp, với $v \in W_1 \cap W_2$, nếu $v \neq 0_V$ thì ta có
$$v = v + 0_V \text{ và } v = 0_V + v$$
là 2 biểu diễn khác nhau của v trong $W_1 + W_2$, điều này mâu thuẫn với giả thiết tổng trực tiếp. Do đó, với $v \in W_1 \cap W_2$ thì $v = 0_V$.
- $(2 \Rightarrow 1)$ Giả sử W_1, W_2 là các không gian vectơ con của V và $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Với $w \in W_1 + W_2$, nếu $w = w_1 + w_2$ và $w = w_1' + w_2'$, trong đó $w_1, w_1' \in W_1$ và $w_2, w_2' \in W_2$, thì ta có
$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2$$
là một vectơ thuộc $W_1 \cap W_2$. Theo giả thiết, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ nên $w_1 = w_1'$ và $w_2 = w_2'$, tức là w chỉ có duy nhất một biểu diễn thành tổng 2 phần tử trong W_1 và W_2. Như vậy, tổng $W_1 + W_2$ lúc này là tổng trực tiếp.

□

Định lý 2.4.20

Cho V là một không gian vectơ thực hữu hạn chiều. Với W_1 và W_2 là các không gian vectơ con của V, ta có
$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$
♡

Chứng minh Giả sử
$$\dim(W_1 \cap W_2) = p,\ \dim W_1 = m + p,\ \dim W_2 = n + p.$$
Gọi $\{z_k\}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$. Khi đó, ta mở rộng $\{z_k\}$ thành các cơ sở $S_1 = \{x_i\} \cup \{z_k\}$ và $S_2 = \{y_j\} \cup \{z_k\}$ của W_1 và W_2. Để chứng minh định lý, ta cần chứng minh $S_1 \cup S_2 = \{x_i\} \cup \{y_j\} \cup \{z_k\}$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$. Dễ thấy, $S_1 \cup S_2$ là một hệ sinh của $W_1 + W_2$. Ta chứng minh $S_1 \cup S_2$ là một hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét biểu diễn tuyến tính
$$\sum_i a_i x_i + \sum_j b_j y_j + \sum_k c_k z_k = 0,$$
ta có
$$\sum_i a_i x_i = -(\sum_j b_j y_j + \sum_k c_k z_k) \in W_1 \cap W_2$$
nên tồn tại các $d_k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\sum_i a_i x_i = \sum_k d_k z_k.$$
Từ đó, ta có
$$\sum_i a_i x_i - \sum_k d_k z_k = 0$$
là một biểu diễn tuyến tính của 0_V qua hệ độc lập tuyến tính S_1. Vậy $a_i = 0$ với mọi i.
Tương tự, ta có $b_j = 0$ với mọi j.
Lúc này,
$$\sum_k c_k z_k = 0$$
là biểu diễn tuyến tính của 0_V qua hệ độc lập tuyến tính $\{z_k\}$ nên ta có $c_k = 0$ với mọi k. Do đó, $S_1 \cup S_2$ độc lập tuyến tính. Như vậy, $S_1 \cup S_2$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của $W_1 + W_2$, nói cách khác $S_1 \cup S_2$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$. □

Hệ quả 2.4.21

$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Ví dụ 2.4.22

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^4$, cho các không gian con

$$U = \langle d_1 = (1,0,0,2), d_2 = (0,2,1,-1)\rangle, \quad V = \langle d_3 = (3,2,0,1), d_4 = (2,0,-1,0)\rangle.$$

Tìm số chiều của $U, V, U+V, U \cap V$.
Ta có:

- $\dim U = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$
- $\dim V = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$
- $\dim(U+V) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3.$
- $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2 + 2 - 3 = 1.$

Nhận xét 2.4.23

Để tìm cơ sở của $U \cap V$, giả sử $w = xd_1 + yd_2 = -zd_3 - td_4$ là một vectơ thuộc $U \cap V$. Ta cần tìm $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ sao cho

$$xd_1 + yd_2 + zd_3 + td_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Thay x, y hoặc z, t vào công thức của w ta được $w = a(1,2,1,1)$, và như thế $U \cap V$ là không gian 1-chiều với cơ sở $\{(1,2,1,1)\}$.

Nhận xét 2.4.24

Ta cũng có thể tìm cơ sở của $U+V$ và $U \cap V$ cùng lúc bằng cách biến đổi sơ cấp theo dòng ma trận dùng để tính số chiều của $U+V$ ở trên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 - 3d_1 \\ d_4 - 2d_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 - 3d_1 - d_2 \\ d_4 - 2d_1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 - 3d_1 - d_2 \\ d_4 - d_3 + d_1 + d_2 \end{matrix}.$$

Ba dòng đầu tiên của ma trận dạng bậc thang cho ta một cơ sở của $U+V$. Do dòng cuối bằng không nên

$$d_1 + d_2 = d_3 - d_4.$$

Như thế nếu ta đặt

$$w = d_1 + d_2 = d_3 - d_4 = (1, 2, 1, 1)$$

thì w vừa thuộc U (do $w = d_1 + d_2$) vừa thuộc V (do $w = d_3 - d_4$), tức là $w \in U \cap V$. Ta được $\{w\}$ là một cơ sở của không gian $U \cap V$.

2.4.4 Không gian thương

Cho W là một không gian con của không gian vectơ V. Với mỗi $v \in V$, ta kí hiệu $[v]$ là tập hợp con $v + W$ của V, tức là tập hợp gồm các vectơ có dạng $v + w$ trong đó $w \in W$. Ta gọi v là một **đại diện** của tập hợp $[v]$.

Ta kiểm tra được

$$[v] = [v'] \Longleftrightarrow v - v' \in W.$$

Nói riêng $[0]$ chính là tập hợp các vectơ trong W và ta có $[0] = [w]$ với mọi w thuộc W.

Kí hiệu V/W là tập hợp gồm các tập con có dạng $[v]$.

Ví dụ 2.4.25

Nếu V là mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và W là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ, thì V/W chính là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ song song với đường thẳng này.

Trên V/W, ta định nghĩa hai phép toán:

$$\begin{aligned} [v] + [v'] &= [v + v'], \quad v, v' \in V, \\ \lambda[v] &= [\lambda v], \quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in V. \end{aligned}$$

Ta kiểm tra được các phép toán được định nghĩa ở đây **không phụ thuộc vào việc chọn đại diện** của mỗi tập con $[v]$. Hơn nữa, với hai phép toán này, V/W trở thành một không gian vectơ, và được gọi là **không gian thương** của V bởi W. **Vectơ không** trong không gian thương chính là $[0]$, tức là tập hợp W, và **vectơ đối** của $[v]$ là $[-v]$.

Định lý 2.4.26

Nếu V là một không gian vectơ hữu hạn chiều thì $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

Chứng minh Giả sử $\{w_1, \ldots, w_k\}$ là một cơ sở của W. Ta bổ sung vào cở sở này các vectơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ để được một cơ sở của V. Ta chứng minh được $\{[v_1], \ldots, [v_m]\}$ là một cơ sở của không gian thương V/W bằng cách chứng minh nó là một hệ sinh độc lập tuyến tính. □

Nhận xét 2.4.27

Xét ánh xạ $\pi : V \to V/W$ cho bởi $\pi(v) = [v]$. Theo định nghĩa của các phép toán trên V/W, ánh xạ π thỏa mãn

$$\begin{aligned} \pi(v + v') &= \pi(v) + \pi(v'), \quad v, v' \in V, \\ \pi(\lambda v) &= \lambda\pi(v), \quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in V. \end{aligned}$$

Một ánh xạ giữa hai không gian vectơ thỏa mãn hai tính chất như thế được gọi là một ánh xạ tuyến tính. Mục tiếp theo sẽ nghiên cứu chi tiết về loại ánh xạ này.

2.5 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

2.5.1 Định nghĩa và một số tính chất

Định nghĩa 2.5.1 (Ánh xạ tuyến tính)

Cho hai không gian vectơ thực V và V', một ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là **ánh xạ tuyến tính** nếu f thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $\forall u, v \in V,\ f(u + v) = f(u) + f(v)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall v \in V,\ f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

Trong trường hợp V' trùng với V, ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ được gọi là **tự đồng cấu** tuyến tính hay toán tử tuyến tính.

Nhận xét 2.5.2

Dễ thấy hai điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính tương đương với điều kiện

$$\forall u, v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

♣

Ví dụ 2.5.3

1. Ánh xạ $f : V \to V'$ xác định bởi $f(v) = 0_{V'}$, với mọi $v \in V$, là một ánh xạ tuyến tính, ánh xạ này gọi là ánh xạ không, ký hiệu là 0.
2. Ánh xạ đồng nhất $id_V : V \to V$ xác định bởi $id_V(v) = v$, với mọi $v \in V$, là một ánh xạ tuyến tính.
3. Ánh xạ đạo hàm $d : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ xác định bởi $d(f(x)) = f'(x)$, với mọi $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, là một ánh xạ tuyến tính.
4. Phép chiếu $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\pi(x, y) = x$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, là một ánh xạ tuyến tính.
   Thật vậy, với mọi $u = (x, y), v = (x', y')$ thuộc $\mathbb{R}^2$ và với mọi α, β thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}\pi(\alpha u + \beta v) &= \pi(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')\\ &= \alpha x + \beta x'\\ &= \alpha\pi(x, y) + \beta\pi(x', y').\end{aligned}$$

5. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$, với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$, là ánh xạ tuyến tính.
   Thật vậy, với mọi $u = (x, y), v = (x', y')$ thuộc $\mathbb{R}^2$ và với mọi α, β thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')\\ &= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'))\\ &= (\alpha(x + y) + \beta(x' + y'), \alpha(x - y) + \beta(x' - y'))\\ &= \alpha(x + y, x - y) + \beta(x' + y', x' - y')\\ &= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')\\ &= \alpha f(u) + \beta f(v).\end{aligned}$$

♠

Mệnh đề 2.5.4

Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, ta có các tính chất sau

1. $f(0_V) = 0_{V'}$.
2. $\forall v \in V,\ f(-v) = -f(v)$.
3. $\forall u, v \in V,\ f(u - v) = f(u) - f(v)$.
4. $\forall v_1, \ldots, v_n \in V,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$.

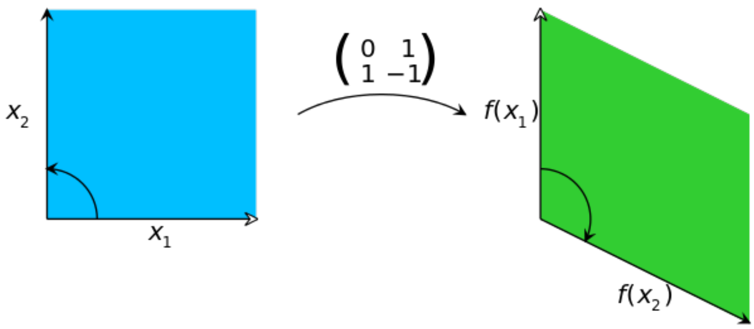
♠

Chứng minh Các tính chất trên dễ dàng kiểm tra được bằng việc sử dụng các điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính. □

2.5.2 Định lý cơ bản về sự xác định ánh xạ tuyến tính

Định lý 2.5.5 (Định lý cơ bản về sự xác định ánh xạ tuyến tính)

Mỗi ánh xạ tuyến tính từ V đến V' được xác định bởi ảnh của nó trên một cơ sở. Cụ thể, nếu $\{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của V và $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ là một hệ vectơ bất kỳ của V' thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ sao cho $f(v_i) = v'_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$.



Chứng minh

- Do $\{v_1, \dots, v_n\}$ là cơ sở của V nên với mỗi $v \in V$ ta luôn thu được duy nhất biểu diễn tuyến tính

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

  trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các số thực.
  Ta định nghĩa ánh xạ f như sau:

$$\begin{aligned} f : \quad & V && \longrightarrow && V' \\ v = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i && \longmapsto && f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v'_i. \end{aligned}$$

  Rõ ràng, ánh xạ trên là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $f(v_i) = v'_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

- Giả sử có hai ánh xạ tuyến tính f và g thỏa mãn điều kiện của Định lý. Khi đó, với mọi $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$, ta có

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \\ &= \alpha_1 g(v_1) + \cdots + \alpha_n g(v_n) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

  Như vậy, $f(v) = g(v)$ với mọi $v \in V$, tức là $f = g$.

□

Ví dụ 2.5.6

Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(v_1) = (1, 1, 1), f(v_2) = (0, 0, 1), f(v_3) = (1, 2, 1)$.
Với $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, giả sử $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, ta có

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1, 1, 0) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3). \end{cases}$$

Vì f là ánh xạ tuyến tính nên $f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3)$. Thay các giá trị $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vừa tính và các giá trị

$f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ đã cho ta được

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1,\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right).$$

2.5.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho V và V' là các không gian vectơ hữu hạn chiều với

- $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V,
- $S' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ là một cơ sở của V'.

Theo Định lý 2.5.5, mỗi ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ được xác định một cách duy nhất bởi $f(v_1), \ldots, f(v_n)$. Do S' là cơ sở của V' nên $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ được biểu diễn một cách duy nhất qua S', giả sử các biểu diễn đó là

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}v'_1 + a_{21}v'_2 + \cdots + a_{m1}v'_m, \\ &\vdots \\ f(v_j) &= a_{1j}v'_1 + a_{2j}v'_2 + \cdots + a_{mj}v'_m, \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}v'_1 + a_{2n}v'_2 + \cdots + a_{mn}v'_m. \end{aligned}$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 & v'_2 & \cdots & v'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 2.5.7 (Ma trận của ánh xạ tuyến tính)

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

xác định như trên được gọi là **ma trận của ánh xạ tuyến tính** f đối với cặp cơ sở (S, S'), ký hiệu $M_S^{S'} f$.

Nhận xét 2.5.8

1. Ma trận A có số hàng bằng $\dim V'$ và số cột bằng $\dim V$.
2. Với mọi $j = \overline{1, n}$ thì cột thứ j của ma trận A là vectơ tọa độ của vectơ $f(v_j)$ đối với cơ sở S', tức là $[f(v_j)]_{S'}$.
3. Nếu f là một tự đồng cấu tuyến tính thì ma trận của f đối với cặp cơ sở bất kỳ luôn là ma trận vuông.
4. Đặc biệt, nếu $f : V \to V$ là tự đồng cấu tuyến tính và S là cơ sở của V thì ma trận của f đối với cặp cơ sở (S, S) được gọi tắt là **ma trận của f đối với cơ sở S**, ký hiệu là $M_S f$.

Ví dụ 2.5.9

1. Ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Cho V là không gian vectơ n-chiều. Khi đó,

   - Ma trận của ánh xạ đồng nhất id_V đối với cơ sở S bất kỳ của V là ma trận đơn vị I_n.
   - Ma trận của ánh xạ đồng nhất id_V đối với cặp cơ sở (S, S') là ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.

3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ được xác định bởi

$$f(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + a_2) + (-a_3)x$$

với mọi $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở S và S' của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}_1[x]$ lần lượt được cho như sau

$$S = \{v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,2,0), v_3 = (2,0,0)\}, S' = \{v_1' = 1 + x, v_2' = -1 + x\}.$$

Ta có

$$f(v_1) = f(0,0,1) = -x,$$
$$f(v_2) = f(0,2,0) = 2,$$
$$f(v_3) = f(2,0,0) = 4.$$

Biểu diễn $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ qua cơ sở S' ta được

$$f(v_1) = -x = -\frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(-1+x),$$
$$f(v_2) = 2 = 1(1+x) - 1(-1+x),$$
$$f(v_3) = 4 = 2(1+x) - 2(-1+x).$$

Như vậy, ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

♠

2.5.4 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ là cơ sở của V, $S' = \{v_1', \dots, v_m'\}$ là một cơ sở của V', và $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ma trận của f đối với cặp cơ sở (S, S'). Nhắc lại A được xác định bởi đẳng thức:

$$\begin{bmatrix} f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' & v_2' & \cdots & v_m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Với mỗi $v \in V$, giả sử

$$X = [v]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là vectơ tọa độ của v theo cơ sở S và

$$Y = [f(v)]_{S'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

là vectơ tọa độ của $f(v)$ theo cơ sở S'.

Đẳng thức sau được gọi là **biểu thức tọa độ** của f đối với cặp cơ sở (S, S'):

Mệnh đề 2.5.10

$$Y = AX.$$

Chứng minh Ta có

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_1' & \cdots & v_m' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= f(v) \\
&= f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) \\
&= x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n) \\
&= \begin{bmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1' & \cdots & v_m' \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.5.11

Cho ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

$S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $S' = \{v_1' = (2, 1), v_2' = (1, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

1. Tìm ma trận của T đối với cặp cơ sở (S, S').
   Ta có
$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 0), \\ T(v_2) &= T(1, 1, 0) = (1, 1), \\ T(v_3) &= T(-1, 0, 1) = (-1, 0). \end{aligned}$$
   Biểu diễn $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ qua cơ sở S', ta được
$$\begin{aligned} T(v_1) &= (1, 0) = 1v_1' - 1v_2', \\ T(v_2) &= (1, 1) = 0v_1' + 1v_2', \\ T(v_3) &= (-1, 0) = (-1)v_1' + 1v_2'. \end{aligned}$$
   Như vậy, ma trận của ánh xạ tuyến tính T đối với cặp cơ sở đã cho là
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Viết biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính T đối với cặp cơ sở (S, S').
   Với $v \in \mathbb{R}^3$, gọi tọa độ của v đối với cơ sở S là (x_1, x_2, x_3) và tọa độ của $T(v) \in \mathbb{R}^2$ đối với cơ sở S' là (y_1, y_2).
   Đặt $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, ta có biểu thức tọa độ của T đối với cặp cơ sở (S, S') là $Y = AX$, tức là
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
   cụ thể
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

3. Dùng biểu thức tọa độ vừa tìm được ở Câu (2) để tính $T(v_0)$, trong đó $v_0 = (2, 2, 1)$ là một vectơ của $\mathbb{R}^3$. Biểu diễn v_0 qua cơ sở S, ta được
$$v_0 = 1v_1 + 2v_2 + 1v_3,$$
vậy nên $X_0 = [v]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Do đó, tọa độ của $T(v_0)$ đối với cơ sở S' là $Y = [T(v_0)]_{S'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ được xác định bởi $Y = AX_0$, ta được
$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$
Như vậy, $T(v_0) = 0v_1' + 2v_2' = (2, 2)$.

Kết quả sau đây chỉ ra được mối liên hệ giữa các ma trận của một tự đồng cấu đối với các cơ sở khác nhau.

Định lý 2.5.12

Cho V là không gian vectơ n-chiều, S và S' là hai cơ sở của V và $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Nếu A là ma trận của f đối với cơ sở S, A' là ma trận của f đối với cơ sở S' và C là ma trận chuyển cơ sở từ S sang S' thì
$$A' = C^{-1}AC.$$

Chứng minh Với $v \in V$, ta có
$$[f(v)]_S = A[v]_S \text{ và } [f(v)]_{S'} = A'[v]_{S'}.$$
Vì C là ma trận chuyển cơ sở từ S sang S' nên
$$[v]_S = C[v]_{S'} \text{ và } [f(v)]_S = C[f(v)]_{S'}.$$
Thay vào đẳng thức $[f(v)]_S = A[v]_S$ ta được
$$C[f(v)]_{S'} = AC[v]_{S'},$$
và do C khả nghịch, ta được
$$[f(v)]_{S'} = C^{-1}AC[v]_{S'}.$$
So sánh với đẳng thức $[f(v)]_{S'} = A'[v]_{S'}$ ta được $A' = C^{-1}AC$. □

Ví dụ 2.5.13

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$$
với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở chính tắc $S = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
Ta có
$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0, -1), \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0), \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1, 1). \end{aligned}$$
Như vậy, ma trận của f đối với cơ sở chính tắc S của $\mathbb{R}^3$ là
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở $S' = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)\}$.
Ta có
$$\begin{aligned} f(u_1) &= f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3, \\ f(u_2) &= f(0, 1, 1) = (-1, 0, 1) = -1u_1 + 1u_2 + 1u_3, \\ f(u_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1, 1) = 0u_1 - 1u_2 + 2u_3. \end{aligned}$$

Do đó, ma trận của f đối với cơ sở S' là

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ta có thể tìm ma trận A' bằng công thức $A' = C^{-1}AC$ trong đó C là ma trận chuyển cơ sở từ S sang S' như sau:

- Ma trận chuyển cơ sở từ S sang S' là $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S là $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Ma trận của f đối với cơ sở S' là $A' = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, trong đó A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc S đã xác định ở Câu (1).

Định nghĩa 2.5.14 (Ma trận đồng dạng)

Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n, ma trận B được gọi là **đồng dạng (similar)** với ma trận A, ký hiệu $B \sim A$, nếu tồn tại P là một ma trận khả nghịch cấp n sao cho $B = P^{-1}AP$.

Nhận xét 2.5.15

1. Ta kiểm tra được $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập các ma trận vuông cấp n. Chẳng hạn, để chứng minh $\sim$ có tính phản xạ, ta thấy nếu $B = P^{-1}AP$ thì $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, tức là, nếu $B \sim A$ thì $A \sim B$.
2. Các ma trận của một tự đồng cấu đối với các cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau.

2.5.5 Hạt nhân và ảnh

Định nghĩa 2.5.16 (Hạt nhân và ảnh)

Cho V và V' là các không gian vectơ và $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

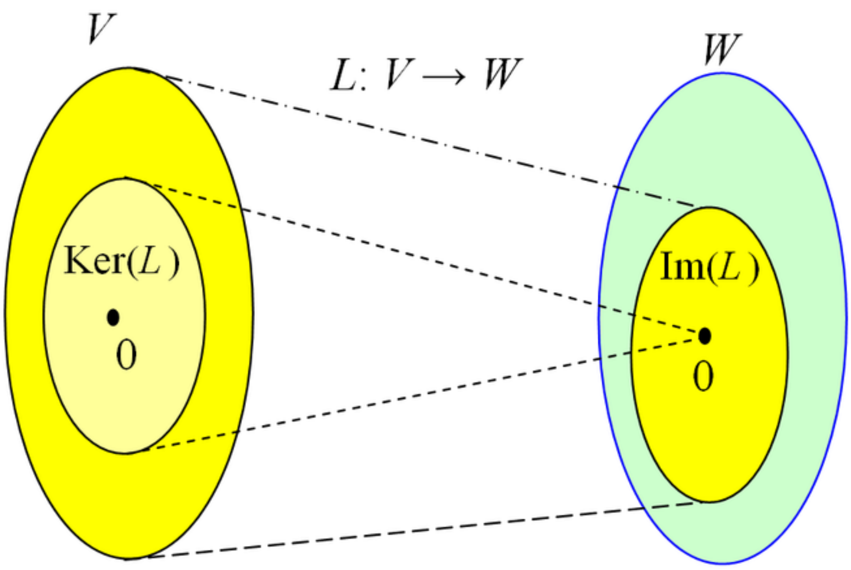
1. Tập tất cả các phần tử của V có ảnh là $0_{V'}$ được gọi là **hạt nhân (kernel)** của f, ký hiệu là $\mathrm{Ker}(f)$,
$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \mid v \in V, f(v) = 0_{V'}\}.$$
2. Tập tất cả các phần tử của V' là ảnh của ít nhất một phần tử trong V được gọi là **ảnh (image)** của f, ký hiệu là $\mathrm{Im}(f)$,
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

Nhận xét 2.5.17

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_{V'})$.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(V)$.

Ví dụ 2.5.18

1. Ánh xạ không $0 : V \to V'$ có $\mathrm{Ker}(f) = V$ và $\mathrm{Im}(f) = \{0_{V'}\}$.
2. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (3x-y, 6x-2y)$ có $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1, 3)\rangle$ và $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 2)\rangle$.



Hình 2.1: Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính $L : V \to W$

Mệnh đề 2.5.19

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó,

1. $\text{Ker}(f)$ là một không gian con của V.
2. $\text{Im}(f)$ là một không gian con của V'.

Chứng minh

1. Do $0_V \in \text{Ker}(f)$ nên $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$. Với mọi $u, v \in \text{Ker}(f)$, với mọi số thực α, β, ta có
$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha 0_{V'} + \beta 0_{V'} = 0_{V'}$$
nên $\alpha u + \beta v \in \text{Ker}(f)$. Như vậy, $\text{Ker}(f)$ là một không gian con của V.
2. Do $V \neq \emptyset$ nên $\text{Im}(f) = f(V) \neq \emptyset$. Với mọi $u', v' \in \text{Im}(f)$, tồn tại $u, v \in V$ sao cho
$$u' = f(u), v' = f(v).$$
Lúc này, với mọi số thực α, β, ta có
$$\alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \text{Im}(f).$$
Như vậy, $\text{Im}(f)$ là một không gian con của V'.

□

Định nghĩa 2.5.20 (Đơn cấu-toàn cấu-đẳng cấu)

Ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ được gọi là

1. **đơn cấu (monomorphism)** nếu f là đơn ánh;
2. **toàn cấu (epimorphism)** nếu f là toàn ánh;
3. **đẳng cấu (isomorphism)** nếu f là song ánh.

Mệnh đề sau đây được chứng minh dễ dàng.

Mệnh đề 2.5.21

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

1. f là đơn cấu khi chỉ khi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$.
2. f là toàn cấu khi chỉ khi $\mathrm{Im}(f) = V'$.

Định nghĩa 2.5.22 (Hạng và số khuyết)

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

1. Số chiều của $\mathrm{Im}(f)$ được gọi là **hạng** của f, ký hiệu là $\mathrm{rank}(f)$,
$$\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).$$
2. Số chiều của $\mathrm{Ker}(f)$ được gọi là **số khuyết** của f, ký hiệu là $\mathrm{nullity}(f)$,
$$\mathrm{nullity}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f).$$

Định lý 2.5.23 (Định lý số chiều)

Nếu $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính và $\dim V = n$ thì
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim V,$$
hay nói cách khác
$$\mathrm{rank}(f) + \mathrm{nullity}(f) = n.$$

Chứng minh Giả sử $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = r$.

- Xét trường hợp $0 < r < n$, gọi $S_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$. Do S_1 độc lập tuyến tính nên có thể bổ sung vào S_1 thêm $n - r$ vectơ $v_{r+1}, \ldots, v_n$ để hệ
$$S_2 = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$$
là một cơ sở của V.
Do S_2 là cơ sở của V nên với mọi $v \in V$ luôn tồn tại các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sao cho $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Lúc này, ta có
$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) + \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \\ &= \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \end{aligned}$$
do $v_1, \ldots, v_r$ thuộc $\mathrm{Ker}(f)$. Như vậy, $S_3 = \{f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)\}$ là một hệ sinh của $\mathrm{Im}(f)$.
Mặt khác, xét biểu diễn tuyến tính
$$\lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = 0_{V'}, \qquad (*)$$
trong đó $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ là các số thực. Biểu diễn này được viết lại dưới dạng
$$f(\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n) = 0_{V'},$$
từ đó suy ra $\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ thuộc $\mathrm{Ker}(f)$. Do $\{v_1, \ldots, v_r\}$ là cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ nên tồn tại các số thực $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ thỏa mãn
$$\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r,$$
hay
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r - \lambda_{r+1} v_{r+1} - \cdots - \lambda_n v_n = 0_V. \qquad (**)$$
Vì $S_2 = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V nên từ $(**)$ ta suy ra
$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0,$$
tức là từ biểu diễn $(*)$ ta thu được $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, nói cách khác S_3 là một hệ độc lập tuyến tính.
Theo chứng minh trên, ta có S_3 là một hệ sinh độc lập tuyến tính của $\mathrm{Im}(f)$. Do đó, S_3 là một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$. Vậy $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - r$ và
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n.$$

- Trường hợp Ker(f) có số chiều bằng 0 hoặc bằng n phần chứng minh dành cho bạn đọc.

□

Hệ quả 2.5.24

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính và W là không gian con của V, ta có

$$\dim(f(W)) \leq \dim(W).$$

Nói cách khác, ánh xạ tuyến tính không làm tăng số chiều của các không gian vectơ.

Ví dụ 2.5.25

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$. Tìm cơ sở và số chiều của Im(f) và Ker(f).
Ta có $(x_1, x_2, x_3) \in$ Ker(f) khi chỉ khi (x_1, x_2, x_3) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Như vậy Ker(f) là không gian vectơ 1-chiều với cơ sở là $\{(1, 1, 1)\}$.
Để tìm cơ sở của Im(f), ta thấy Im(f) sinh bởi các vectơ $f(e_1) = (2, 1, 1)$, $f(e_2) = (-1, -2, 1)$, $f(e_3) = (-1, 1, -2)$.
Viết các vectơ này thành ma trận và đưa về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp theo hàng:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, Im(f) là một không gian vectơ 2-chiều và $\{(2, 1, 1), (0, -3, 3)\}$ là một cơ sở của Im(f).

Nhận xét 2.5.26

Ta có thể tìm cơ sở của Im(f) và Ker(f) cùng lúc bằng cách đưa ma trận của f về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp theo cột như sau. Các vectơ $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ viết theo dạng cột cho ta ma trận của f trong cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Biến đổi sơ cấp theo cột để đưa về dạng bậc thang và ghi nhớ lại quá trình biến đổi:

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(2e_2+e_1) & f(2e_3+e_1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(2e_2+e_1) & f(2e_1+2e_2+2e_3) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận bậc thang này chính là ma trận của f trong cặp cơ sở $\{e_1, 2e_2+e_1, 2e_1+2e_2+2e_3\}$ và $\{e_1, e_2, e_3\}$. Hai cột đầu cho ta một cơ sở của Im(f) là $\{(2, 1, 1), (0, -3, 3)\}$. Cột thứ ba bằng không cho ta kết luận vectơ $2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = (2, 2, 2)$ lập thành một cơ sở của Ker(f). Để ý ví dụ này có thể tổng quát hóa để cho ta một cách chứng minh Định lý số chiều 2.5.23 bằng các phép biến đổi sơ cấp.

Nhận xét 2.5.27

Cho U, V là hai không gian con của một không gian vectơ E. Xét ánh xạ tuyến tính

$$f : U \times V \to E$$

cho bởi $f(u, v) = u + v$. Khi đó rõ ràng Im(f) $= U + V$. Để xác định hạt nhân của f, ta thấy $f(u, v) = 0$ khi chỉ khi

$u = -v$. Ta suy ra

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(w, -w) \mid w \in U \cap V\},$$

và do đó $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(U \cap V)$. Định lý số chiều cho ta công thức quen thuộc:

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V.$$

Với cách nhìn này, ta thấy phương pháp tìm cơ sở của $U \cup V$ và $U \cap V$ ở Nhận xét 2.4.24 tương tự với phương pháp tìm cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$ ở Nhận xét 2.5.26 ♣

2.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Không gian vectơ

1. Cho $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

   (a) Các vectơ $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (3, 2, 0), v_3 = (1, 0, 1)$ có độc lập tuyến tính hay không?

   (b) Hãy biểu diễn $v = (2, 3, 0)$ qua $\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. Xét không gian vectơ thực $\mathbb{R}_2[t]$, hệ vectơ
$$\left\{1 + t,\ 2 - t^2,\ -1 + t + t^2\right\}$$
độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

3. Trong không gian vectơ thực $M(2, \mathbb{R})$ gồm những ma trận vuông cấp 2 với hệ số thực, cho các vectơ
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Hệ vectơ $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

   (b) Vectơ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ có biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ hay không?

4. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $S = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 3, m)\}$ với m là tham số.

   (a) Tìm điều kiện của m để S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

   (b) Với điều kiện của m vừa tìm được, hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sang S.

5. Cho V là không gian vectơ thực với cơ sở $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ và các vectơ
$$w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2, w_3 = v_1 + v_2 + v_3, w_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4.$$

   (a) Chứng minh rằng $T = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ là một cơ sở của V.

   (b) Tìm tọa độ của vectơ $u = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4$ đối với cơ sở T.

6. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}_1[x]$, cho các hệ vectơ
$$B = \{1 + x,\ 1 - x\},\ B' = \{-2 + 3x,\ 4 - x\}.$$

   (a) Chứng minh rằng B, B' là các cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}_1[x]$.

   (b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' và ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

   (c) Cho $P = 7 + 10x$. Tìm $[P]_B$ và $[P]_{B'}$ (nhắc lại $[P]_B$ là tọa độ viết theo dạng cột của P đối với cơ sở B).

7. Xét không gian vectơ thực $\mathbb{R}_2[x]$ với cơ sở chính tắc $B = \{1, x, x^2\}$.

   (a) Chứng tỏ rằng $B' = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

   (b) Viết ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

   (c) Cho vectơ $h \in \mathbb{R}_2[x]$ có tọa độ $[h]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tìm vectơ $[h]_B$.

8. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$.

   (a) Chứng minh rằng W là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

   (b) Tìm một cơ sở và xác định số chiều của W.

9. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho hai tập hợp
$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}, \qquad V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\right\}.$$

(a) Chứng minh U và V là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của U và V.

(c) Chứng minh $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

10. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^4$, cho các không gian con $U = \langle v_1, v_2\rangle$, $V = \langle v_3, v_4\rangle$, trong đó

$$v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (2, -2, 1, 1), v_3 = (5, 0, -3, 3), v_4 = (0, -5, 3, 2).$$

Tìm cơ sở và số chiều của U, V, $U + V$, $U \cap V$.

Ánh xạ tuyến tính

1. Các ánh xạ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y,\ x - y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2,\ y)$.

(c) $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$.

2. Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f trong các trường hợp sau:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(3, 1) = (2, 12),\ f(1, 1) = (0, 2)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1, 2, 3) = (1, 0),\ f(1, 0, 10) = (0, 1),\ f(2, 3, 5) = (15, -4)$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết $f(1, 1, 1) = (-1, 1, 1),\ f(1, 1, 0) = (1, 1, -1),\ f(1, 0, 0) = (2, 1, 2)$.

3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1, 0, 0) = (1, 1), f(1, 1, 0) = (3, 0), f(1, 1, 1) = (4, -7)$.

(a) Tìm ma trận của ánh xạ f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

(b) Xác định $f(1, 3, 8)$.

(c) Xác định $f(x, y, z)$ với (x, y, z) là phần tử thuộc $\mathbb{R}^3$.

4. Tìm công thức biểu diễn ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ xác định bởi

$$f(1) = 1 + x,\ f(1 + x) = 3 - x^2,\ f(1 + 2x + x^2) = 4 + 2x - 3x^2.$$

Từ đó, tính $f(2 - 2x + 3x^2)$.

5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 7x_2,\ 3x_1 - 4x_2)$$

với mọi (x_1, x_2) thuộc $\mathbb{R}^2$.

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{u_1 = (2, 3), u_2 = (4, -1)\}$.

(b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B' = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (-1, -1)\}$.

6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận đối với cơ sở $S = \{e_1, e_2\}$ của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Chứng minh rằng $T = \{u_1 = e_1 + 5e_2, u_2 = e_1 - e_2\}$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

(b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở T.

7. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ -y,\ x + 7z)$$

với mọi (x, y, z) thuộc $\mathbb{R}^3$.

(a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$.

(c) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B' = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$.

8. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ xác định bởi

$$f(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1(x+1)$$

với mọi $a_0 + a_1 x$ thuộc $\mathbb{R}_1[x]$.

(a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{u_1 = 6 + 3x, u_2 = 10 + 2x\}$.

(c) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B' = \{v_1 = 2, v_2 = 3 + 2x\}$.

9. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ -x_2)$$

với mọi (x_1, x_2) thuộc $\mathbb{R}^2$.

(a) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

(b) Xác định số chiều và chỉ ra một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ và $\mathrm{Ker}(f)$

10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4, 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4, 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4, 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4).$$

Tìm cơ sở và số chiều của $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

11. Cho ánh xạ $g : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ xác định bởi

$$g(X) = XA - AX$$

với mọi $X \in M(2, \mathbb{R})$ và $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Chứng minh rằng g là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận của g đối với cơ sở $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ của $M(2, \mathbb{R})$, ở đây E_{ij} là ma trận vuông cấp 2 với phần tử ở hàng i, cột j bằng 1 và tất cả các phần tử còn lại bằng 0.

(c) Xác định cơ sở và số chiều của $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Ker}(g)$.

Chương 3 CHÉO HÓA MA TRẬN

Chúng ta đã biết các ma trận của một tự đồng cấu đối với các cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau, tức là nếu A và B lần lượt là hai ma trận của tự đồng cấu $f : V \to V$ đối với hai cơ sở S và T của V thì tồn tại ma trận khả nghịch C sao cho $B = C^{-1}AC$. Chương này nghiên cứu việc tìm một cơ sở của V sao cho ma trận của f trong cơ sở đó có dạng đường chéo.

Khi $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là ma trận chéo, từ đẳng thức $AC = CB$, ta thấy rằng

$$Ac_j = \lambda_j c_j$$

trong đó c_j là cột thứ j của ma trận C. Hơn nữa, vì c_j là một véctơ khác không nên $A - \lambda_j I$ là một ma trận suy biến. Như thế các giá trị trên đường chéo của B không thể tùy tiện mà phải thỏa mãn phương trình

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Các khái niệm toán học trong phần dưới đây sẽ xoay quanh hai đẳng thức này.

3.1 GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG, VÀ ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA MA TRẬN

3.1.1 Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa 3.1.1 (Giá trị riêng-Vectơ riêng)

Cho A là ma trận vuông cấp n với hệ số thực. Số thực λ được gọi là **giá trị riêng (eigenvalue)** của ma trận A nếu tồn tại

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

sao cho $AX = \lambda X$. Lúc này, X được gọi là **vectơ riêng (eigenvector)** ứng với giá trị riêng λ.

♣

Ví dụ 3.1.2

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ta có

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -X.$$

Như vậy, $\lambda = -1$ là một giá trị riêng của A và $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

♠

Nhận xét 3.1.3

1. Nếu X là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ thì kX, với k là số thực khác 0, cũng là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.
   Thật vậy, ta có $A(kX) = k(AX) = k(\lambda X) = \lambda(kX)$.

2. Mỗi vectơ riêng chỉ ứng với một giá trị riêng duy nhất.
   Giả sử vectơ $X \neq 0$ *là vectơ riêng ứng với hai giá trị riêng* λ_1 *và* λ_2. *Ta có* $AX = \lambda_1 X$ *và* $AX = \lambda_2 X$, *suy ra*

   $$(\lambda_1 - \lambda_2)X = \lambda_1 X - \lambda_2 X = 0.$$

   Do X *khác* 0 *nên* $\lambda_1 = \lambda_2$.

♣

3.1.2 Đa thức đặc trưng

Định nghĩa 3.1.4 (Đa thức đặc trưng-Phương trình đặc trưng)

Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n.

1. Đa thức $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, trong đó λ là biến số thực, được gọi là **đa thức đặc trưng (characteristic polynomial)** của A.

2. Phương trình $P_A(\lambda) = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng (characteristic equation)** của A.

♣

Định lý 3.1.5

Số thực λ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

♡

Chứng minh Giả sử λ là giá trị riêng của A. Khi đó, tồn tại vectơ $X \neq 0$ sao cho $AX = \lambda X$, như vậy X là nghiệm khác 0 của hệ phương trình $(A - \lambda I_n)X = 0$. Hệ phương trình $(A - \lambda I_n)X = 0$ là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, hệ này có nghiệm $X \neq 0$ khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I_n) = 0$, tức là λ là nghiệm của phương trình đặc trưng. □

Ví dụ 3.1.6

Tìm các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ta có

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ *có hai nghiệm là* -1 *và* 4. *Như vậy, ma trận* A *có hai giá trị riêng là* $\lambda_1 = -1$ *và* $\lambda_2 = 4$.

♠

Mệnh đề 3.1.7

Các ma trận đồng dạng có chung đa thức đặc trưng và do đó có chung tập các giá trị riêng.

♠

Chứng minh Giả sử A và B là hai ma trận đồng dạng. Lúc này, tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $B = P^{-1}AP$. Ta có

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I_n P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

do $\det(P) \neq 0$ và $\det(P)\det(P^{-1}) = 1$. □

3.1.3 Không gian riêng

Định nghĩa 3.1.8 (Không gian riêng)

Tập hợp gồm vectơ $0_{\mathbb{R}^n}$ và tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ tạo thành một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, không gian con này được gọi là **không gian riêng (eigenspace)** ứng với giá trị riêng λ, ký hiệu là $E_A(\lambda)$, hay gọn hơn $E(\lambda)$.

♣

Nhận xét 3.1.9

Không gian riêng của A ứng với giá trị riêng λ_0 là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - \lambda_0 I_n)X = 0$.

♣

Ví dụ 3.1.10

Hãy tìm cơ sở của các không gian riêng ứng với các giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ ta thu được hai nghiệm là $\lambda_1 = 1$ (bội 2) và $\lambda_2 = 3$.

- *Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là nghiệm của hệ phương trình $(A - I)X = 0$, tức là*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \in \mathbb{R} \\ x_3 = b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Như thế, hai vectơ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *tạo thành một cơ sở của $E(1)$.*

- *Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$, không gian riêng $E(3)$ là nghiệm của hệ phương trình $(A - 3I)X = 0$, tức là*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Như thế vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *tạo thành một cơ sở của $E(3)$.*

♠

Nhận xét 3.1.11

Sử dụng biến đổi sơ cấp theo cột để tính hạt nhân như đã trình bày trong Nhận xét 2.5.26, ta có thể xác định các không gian riêng như sau.
Với $\lambda = 1$, biến đổi sơ cấp theo cột ma trận $f := A - I$ để đưa về dạng bậc thang và ghi nhớ lại quá trình biến đổi:

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2 - e_1) & f(e_3) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta có ngay

$$E(1) = \langle e_2 - e_1, e_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Tương tự, với $\lambda = 3$, biến đổi sơ cấp theo cột ma trận $g := A - 3I$ để đưa về dạng bậc thang:

$$\begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2 + e_1) & g(e_3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2 + e_1) & g(e_1 + e_2 + e_3) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta thu được

$$E(3) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

♣

3.2 CHÉO HÓA MA TRẬN

3.2.1 Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa 3.2.1 (Ma trận chéo hóa được)

Ma trận A vuông cấp n được gọi là **chéo hóa được** trên trường số thực (nói gọn là **chéo hóa được**) nếu tồn tại ma trận P vuông cấp n hệ số thực khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.
Khi đó, ta nói ma trận P làm chéo hóa ma trận A và $P^{-1}AP$ là dạng chéo của ma trận A.

♣

Ví dụ 3.2.2

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, với $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ta có

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

và

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Do đó, A là ma trận chéo hóa được và ma trận P làm chéo hóa A là $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

♠

Định lý 3.2.3

Điều kiện cần và đủ để ma trận A vuông cấp n chéo hóa được là A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

♡

Chứng minh

- Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

  Lúc này, ta có $AP = PD$. Nếu ký hiệu cột thứ i của ma trận P là P_i thì cột thứ i của ma trận AP sẽ là AP_i và cột thứ i của ma trận PD sẽ là $\lambda_i P_i$. Do $AP = PD$ nên

$$AP_i = \lambda_i P_i$$

  với mọi $i = \overline{1, n}$. Vì ma trận P khả nghịch nên các vectơ cột $P_i \neq 0$ và $\{P_1, \ldots, P_n\}$ độc lập tuyến tính. Như vậy, λ_i là các giá trị riêng của A và $P_1, \ldots, P_n$ là các vectơ riêng tương ứng độc lập tuyến tính.

- Giả sử A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính là $P_1, \ldots, P_n$ lần lượt ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Giả sử ma trận P là ma trận có các cột là $P_1, \ldots, P_n$, ta có ma trận AP có các cột là $AP_1, \ldots, AP_n$. Do $AP_i = \lambda_i P_i$, với mọi $i = \overline{1, n}$, nên

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

  với D là ma trận đường chéo. Do các vectơ cột của P độc lập tuyến tính nên P khả nghịch, từ $AP = PD$ ta suy ra $P^{-1}AP = D$, tức là ma trận A chéo hóa được.

□

Mệnh đề 3.2.4

Cho A là ma trận vuông cấp n và $v_1, \dots, v_k$ là các vectơ riêng của A ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Khi đó, hệ vectơ $\{v_1, \dots, v_k\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh Nếu $k = 1$ thì $v_1 \neq 0$ là độc lập tuyến tính. Giả sử $v_1,\dots, v_{k-1}$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh $v_1,\dots, v_k$ cũng độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét quan hệ tuyến tính

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0. \tag{*}$$

Do $Av_i = \lambda_i v_i$, với mọi $i = \overline{1, k}$, nên

$$A(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1Av_1 + \cdots + a_kAv_k = a_1\lambda_1v_1 + \cdots + a_k\lambda_kv_k = 0.$$

Trừ vế theo vế đẳng thức trên cho tích của λ_k với $(*)$ ta có

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Do các giá trị riêng là phân biệt nên ta có ngay $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Lúc đó, ta có $a_kv_k = 0$. Vì $v_k \neq 0$ nên $a_k = 0$. Như vậy, hệ vectơ $v_1, \dots, v_k$ là độc lập tuyến tính. □

Hệ quả 3.2.5

Nếu đa thức đặc trưng của một ma trận A vuông cấp n có n nghiệm phân biệt thì A chéo hóa được.

Khi đa thức đặc trưng của A có nghiệm bội, ta có kết quả tổng quát sau đây:

Định lý 3.2.6

Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn:

1. Đa thức đặc trưng của A có đủ nghiệm thực, tức là tồn tại các số thực $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sao cho
$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{s_1}(\lambda_2 - \lambda)^{s_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{s_k},$$
trong đó $s_1 + \cdots + s_k = n$.
2. $\dim E(\lambda_i) = s_i$, với mọi $i = \overline{1, k}$.

Chứng minh Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận P khả nghịch vuông cấp n sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo có s_1 phần tử trên đường chéo chính bằng λ_1, s_2 phần tử trên đường chéo chính bằng $\lambda_2, \dots, s_k$ phần tử trên đường chéo chính bằng λ_k và $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ đôi một phân biệt, thỏa mãn $s_1 + \cdots + s_k = n$.
Ta có

$$P_A(\lambda) = P_D(\lambda) = |D - \lambda I_n| = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k}.$$

Ta thấy ma trận $(D - \lambda_i I_n)$ có s_i phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại bằng $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$, với $j \neq i$. Hơn nữa, do P, P^{-1} là tích các ma trận sơ cấp (do tính khả nghịch) và do các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng ma trận, ta có

$$\operatorname{rank}(D - \lambda_i I_n) = \operatorname{rank} P^{-1}(A - \lambda_i I_n)P = \operatorname{rank}(A - \lambda_i I_n).$$

Vì vậy, $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I_n) = n - s_i$, hay $\dim E(\lambda_i) = s_i$.

Bây giờ, giả sử $\dim E(\lambda_i) = s_i$. Khi đó, tồn tại các vectơ $v_{i1}, \dots, v_{is_i}$ độc lập tuyến tính thỏa mãn $Av_{ij} = \lambda_i v_{ij}$, với mọi $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, s_i}$. Xét hệ vectơ $S = \{v_{11}, \dots, v_{1s_1}, \dots, v_{k1}, \dots v_{ks_k}\}$ gồm $s_1 + \cdots + s_k = n$ vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Theo Mệnh đề 3.2.1, dễ thấy rằng S độc lập tuyến tính. Như vậy, A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính nên A chéo hóa được. □

Định nghĩa 3.2.7 (Bội đại số và bội hình học)

Cho A là ma trận vuông cấp n, λ_0 là một giá trị riêng của A. Giả sử

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda_0) \neq 0$. Khi đó, ta nói

1. m là **bội đại số (algebraic multiplicity)** của λ_0, ký hiệu $\mathrm{BDS}(\lambda_0)$;
2. Số chiều của không gian riêng $E(\lambda_0)$ là **bội hình học (geometric multiplicity)** của λ_0, ký hiệu $\mathrm{BHH}(\lambda_0)$.

♣

Nhận xét 3.2.8

Điều kiện (2) của Định lý 3.2.6 có thể được phát biểu lại

$$\mathrm{BHH}(\lambda_i) = \mathrm{BDS}(\lambda_i), \forall i = \overline{1,k}.$$

Chú ý rằng với mỗi giá trị riêng λ_i của ma trận A vuông cấp n, ta có thể chứng minh được

$$1 \leq \mathrm{BHH}(\lambda_i) \leq \mathrm{BDS}(\lambda_i) \leq n.$$

Để thấy bất đẳng thức ở giữa, ta xem A là ma trận của một tự đồng cấu $f : V \to V$ và giả sử $E(\lambda_i)$ có số chiều ℓ. Giả sử $v_1, \ldots, v_\ell$ là một cơ sở của không gian riêng này. Mở rộng nó thành một cơ sở của V và gọi A' là ma trận của f trong cơ sở này. Ta kiểm tra được đa thức đặc trưng của A', cũng là đa thức đặc trưng của A, chia hết cho $(\lambda - \lambda_i)^\ell$, và như thế nghiệm λ_i của đa thức đặc trưng có bội ít nhất là ℓ.

♣

3.2.2 Ví dụ về chéo hóa ma trận

Ví dụ 3.2.9

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng ma trận A chéo hóa được. Tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận dạng chéo của A.

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12.$$

Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ ta được 3 nghiệm $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

- *Với $\lambda_1 = -2$, các vectơ riêng ứng với λ_1 có dạng $a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ với a là số thực khác 0.*
- *Với $\lambda_2 = 2$, các vectơ riêng ứng với λ_2 có dạng $b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ với b là số thực khác 0.*
- *Với $\lambda_3 = 3$, các vectơ riêng ứng với λ_3 có dạng $c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ với c là số thực khác 0.*

Ma trận A có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính là

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Chọn ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ta có $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ -11 & -1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$ và dạng chéo của ma trận A là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

♠

Ví dụ 3.2.10

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ta có đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3.$$

Dễ thấy, A chỉ có một giá trị riêng $\lambda = -1$. Các vectơ riêng ứng với $\lambda = -1$ có dạng $a\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ với a là một số thực khác 0. Như vậy, hai vectơ riêng bất kỳ của A luôn phụ thuộc tuyến tính, suy ra mọi hệ gồm 3 vectơ riêng bất kỳ của A không thể độc lập tuyến tính. Do đó, A không chéo hóa được. Ngắn gọn hơn, A không chéo hóa được là do bội hình học nhỏ hơn bội đại số ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

♠

Ví dụ 3.2.11

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, ta thấy

$$P_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Ma trận A có ba giá trị riêng $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

- Với $\lambda_1 = -2$, ta có $E(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ và do đó BHH(-2) = BDS$(-2) = 1$;
- Với $\lambda_2 = 2$, ta có $E(2) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ và do đó BHH(2) = BDS$(2) = 1$;
- Với $\lambda_3 = 3$, ta có $E(3) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ và do đó BHH(3) = BDS$(3) = 1$.

Như vậy, A chéo hóa được với ma trận làm chéo hóa A là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ma trận dạng chéo của A là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

♠

Ví dụ 3.2.12

Cho ma trận hệ số thực

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu được, tìm ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ ta thu được hai giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 2$ (nghiệm đơn) và $\lambda_2 = 1$ (nghiệm kép). Như vậy, đa thức đặc trưng của A có đủ nghiệm.

- *Với $\lambda_1 = 2$, ta có* $E(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ *và do đó* $\mathrm{BHH}(2) = \mathrm{BDS}(2) = 1$.
- *Với $\lambda_2 = 1$, ta có* $E(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ *và do đó* $\mathrm{BHH}(1) = \mathrm{BDS}(1) = 2$.

Như vậy, A chéo hóa được, ma trận làm chéo hóa A là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và ma trận dạng chéo của A là $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 3.2.13

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, ta có

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2.$$

Như vậy A có duy nhất một giá trị riêng $\lambda = 3$ với độ bội đại số là 2 (nghiệm kép). Không gian riêng $E(3)$ được cho bởi

$$E(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Không gian riêng này chỉ 1-chiều, như thế $\mathrm{BHH}(3) \neq \mathrm{BDS}(3)$, và do đó A không chéo hóa được.

Ví dụ 3.2.14

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, ta có

$$P_A(\lambda) = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 6).$$

Ta thấy rằng $P_A(\lambda)$ không có đủ nghiệm trong $\mathbb{R}$ nên A không chéo hóa được trên $\mathbb{R}$.

3.2.3 Chéo hóa tự đồng cấu

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều và $f : V \to V$ là một tự đồng cấu. Đồng cấu f được gọi là **chéo hóa được** nếu có một cơ sở của V sao cho ma trận của f trong cơ sở đó có dạng chéo. Ta cũng có những khái niệm tương tự như trong phần chéo hóa ma trận.

Định nghĩa 3.2.15 (Giá trị riêng, vectơ riêng, không gian riêng của tự đồng cấu)

Số thực λ được gọi là **giá trị riêng** của f nếu tồn tại vectơ $v \neq 0$ sao cho $f(v) = \lambda v$. Khi đó, vectơ $v \neq 0$ được gọi là **vectơ riêng** ứng với giá trị riêng λ. Tập hợp các vectơ riêng ứng với λ cùng với vectơ 0 của V tạo thành một không gian con của V và được gọi là **không gian riêng** ứng với λ.

Nhắc lại nếu A và A' lần lượt là ma trận của f trong cơ sở S và S' thì A và A' đồng dạng với nhau.Vì hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng nên định nghĩa sau đây không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở:

Định nghĩa 3.2.16 (Đa thức đặc trưng của tự đồng cấu)

Đa thức đặc trưng của f là đa thức đặc trưng của ma trận A trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở bất kỳ của V.

Mệnh đề 3.2.17

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều, $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính và A là ma trận của f đối với một cơ sở S nào đó của V. Khi đó,

1. f và A có chung tập giá trị riêng.
2. Vectơ v là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ khi và chỉ khi ma trận tọa độ của v theo cơ sở S, ký hiệu là $X = [v]_S$, là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.

Chứng minh $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow [f(v)]_S = \lambda[v]_S \Leftrightarrow A[v]_S = \lambda[v]_S$. □

Nhận xét 3.2.18

Để tìm giá trị riêng và vectơ riêng của tự đồng cấu f, ta sẽ tìm ma trận A của ánh xạ f theo cơ sở S nào đó. Sau đó, ta tìm giá trị riêng và vectơ riêng của A rồi suy ra các giá trị riêng và vectơ riêng tương ứng của f. Tính chéo hóa được của f tương đương với tính chéo hóa được của A.

Ví dụ 3.2.19

Cho tự đồng cấu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2)$$

với mọi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Hãy tìm các giá trị riêng và vectơ riêng tương ứng của f.

Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $S = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$, ta có

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ ta được hai nghiệm là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$.
Như vậy, A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$, đây chính là hai giá trị riêng của f.

- *Với $\lambda_1 = 1$, các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là các nghiệm khác 0 của hệ phương trình $(A - I_2)X = 0$, tức là*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

  Như vậy, các vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $(-a, a)$ với a là số thực khác 0.

- *Với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$, các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ là các nghiệm khác 0 của hệ phương trình $(A - 3I_2)X = 0$, tức là*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

  Như vậy, các vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ có dạng (a, a) với a là số thực khác 0.

Ta cũng kết luận được trong cơ sở $\{v_1, v_2\}$ gồm hai vectơ riêng $v_1 = (-1, 1)$ và $v_2 = (1, 1)$, ma trận của f có dạng chéo $\mathrm{diag}(1, 3)$.

3.3 BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Hãy tìm giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của các ma trận sau:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. Các ma trận vuông cấp 2 với hệ số thực sau có chéo hóa được không? Nếu được, hãy chéo hóa chúng.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Các ma trận vuông cấp 3 với hệ số thực sau có chéo hóa được không? Nếu được, hãy chéo hóa chúng.

   (a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Hãy xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của f.

5. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + x_2)$$

   với mọi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

   (b) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của f.

6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ xác định bởi

$$f(a_1 + a_1 x) = 2a_0 - 3a_1(x + 1)$$

   với mọi $a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x]$.

(a) Hãy chỉ ra một cơ sở của $\mathbb{R}_1[x]$ và tìm ma trận của f đối với cơ sở đó.

(b) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của f.

7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 3x_3)$$

với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của f.

Phụ lục A ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VỚI PHẦN MỀM MAPLE

Trong mục này, giáo trình giới thiệu một số lệnh cơ bản của gói lệnh `LinearAlgebra` trong phần mềm tính toán MAPLE để giải quyết một số vấn đề liên quan đến các đối tượng quen thuộc của Đại số tuyến tính như Vectơ, Ma trận, Định thức, Hệ phương trình tuyến tính.

Một số lưu ý khi thực hành tính toán bằng phần mềm Maple:

- Các câu lệnh đều được đặt phía sau dấu > đồng thời kết thúc bằng dấu `;` trong trường hợp muốn hiển thị kết quả của câu lệnh hoặc kết thúc bằng dấu `:` trong trường hợp thực hiện lệnh nhưng không hiển thị kết quả.

- Kết quả của các câu lệnh có thể được xem như là biến mới bằng ký hiệu `:=`, ví dụ như lệnh

  ```
  > a:=1;
  ```

  dùng để gắn giá trị 1 vào biến `a`.

Sau khi cài đặt phần mềm MAPLE, để sử dụng gói lệnh `LinearAlgebra` ta cần nhập khai báo

```
> with(LinearAlgebra);
```

đây là gói lệnh hỗ trợ việc tính toán các đối tượng liên quan đến Đại số tuyến tính.

A.1 Vectơ

Một số lệnh dùng để tạo vectơ:

`> Vector[column]([x_1, x_2, ..., x_n]);`
dùng để tạo ra một vectơ cột với các phần tử lần lượt được liệt kê trong danh sách.

`> Vector[row]([x_1, x_2, ..., x_n]);`
dùng để tạo ra một vectơ hàng với các phần tử lần lượt được liệt kê trong danh sách.

`> < v_1, v_2, ..., v_n>;`
dùng để tạo ra vectơ cột với các phần tử lần lượt trong danh sách, mỗi phần tử có thể là một vectơ cột.

`> < v_1| v_2| ...| v_n>;`
dùng để tạo ra vectơ hàng với các phần tử lần lượt trong danh sách, mỗi phần tử có thể là một vectơ hàng.

`> Vector(n, fill=v);`
dùng để tạo ra một vectơ có n thành phần, mỗi thành phần đều là v.

`> Vector(n, symbol=v);`
dùng để tạo ra một vectơ có n thành phần, các thành phần lần lượt được ký hiệu là $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Một số lệnh thường dùng khi làm việc với vectơ:

`> v[i];` chỉ ra thành phần thứ i của vectơ v.

`> u+v;` tính tổng của hai vectơ u và v.

`> u-v;` tính hiệu của vectơ u và vectơ v.

`> a*v;` nhân vô hướng a vào vectơ v.

`> Basis([v_1, v_2,..., v_k]);` chỉ ra một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

`> SumBasis([W_1, W_2,..., W_p]);` chỉ ra một cơ sở của không gian là **tổng** của các không gian được xác định bởi các họ vectơ $W_1, \ldots, W_p$.

`> IntersectionBasis([W_1, W_2,..., W_p]);` chỉ ra một cơ sở của không gian là **giao** của các không gian được xác định bởi các họ vectơ $W_1, \ldots, W_p$.

Sau đây là một ví dụ đã được thực hiện bằng phần mềm MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
> v1:=<0|2|1>; v2:=<0|0|0>;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$v2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> u1:= Vector[row]([-1,0,0]); u2:= Vector[row]([0,2,1]); u3:= Vector[row]([0,-2,-1]);
```

$$u1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$u2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$u3 := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=[v1,v2];B:=[u1,u2,u3];
```

$$A := \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$
$$B := \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right]$$

```
> Basis([u1,u2,u3]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

```
> SumBasis([A,B]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

```
> IntersectionBasis([A,B]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

```
> v1-v2; 2*v2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu $A = \langle v_1, v_2\rangle$ và $B = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ là các không gian con của không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$ thì kết quả hiển thị, ta thấy:

1. *Không gian tổng $A + B$ là không gian 2-chiều với một cơ sở là $\{(0, 2, 1),\ (-1, 0, 0)\}$.*
2. *Không gian con $A \cap B$ là không gian 1-chiều với một cơ sở là $\{(0, 2, 1)\}$.*

A.2 Ma trận

Một số lệnh dùng để tạo ma trận:

> `RandomMatrix(m,n);` tạo ra một ma trận m hàng n cột với hệ số nguyên, mỗi phần tử của ma trận là số nguyên trong đoạn $[-99; 99]$.

> `Matrix(m,n,[list]);` tạo ma trận m hàng n cột có các phần tử là các phần tử của `list` lần lượt được viết theo từng hàng.

> `Matrix([[a11, a12,..., a1n],[a21, a22, ..., a2n],...,[am1, am2,..., amn]]);`
tạo ma trận có các hàng lần lượt là các đối tượng đã được liệt kê.

> `«a11| a12| ...| a1n>, <a21| a22| ...| a2n>,...,<am1| am2| ...| amn»;`
tạo ma trận có các hàng lần lượt là các vectơ hàng đã được liệt kê.

> `«a11, a21,..., am1>|<a12, a22,..., am2>|...|<a1n, a2n, ..., amn»;`
tạo ma trận có các cột lần lượt là các vectơ cột đã được liệt kê.

> `Matrix(m,n,symbol=a);`
tạo ma trận m hàng n cột có các phần tử được ký hiệu là a_{ij} với $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

> `IdentityMatrix(n);` tạo ma trận đơn vị cấp n.

> `ZeroMatrix(m,n);` tạo ma trận không có kích cỡ m hàng n cột.

> `DiagonalMatrix([a1, a2, ..., an]);`
tạo ma trận đường chéo có các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Một số lệnh thường gặp khi thực hành tính toán trên ma trận:

> `A[i,j];` chỉ ra phần tử ở hàng i cột j của ma trận A.

> `Transpose(A);` tìm ma trận chuyển vị của ma trận A.

> `A + B;` cộng hai ma trận cùng kích cỡ.

> `A.B;` nhân ma trận A với ma trận B.

> `a*A;` nhân vô hướng a vào ma trận A.
> `Rank(A);` chỉ ra hạng của ma trận A.
> `Determinant(A);` tính định thức của ma trận A.
> `MatrixInverse(A);` tính ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Sau đây là một ví dụ đã được thực hiện bằng phần mềm MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:= Matrix([[1,2,3],[0,-1,2],[0,0,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(A); Determinant(A);
```

$$3$$

$$-4$$

```
> MatrixInverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A.3 Hệ phương trình tuyến tính

Trong phần này, ta xét các hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn.

Một số lệnh thường gặp như sau:

> `GenerateMatrix([pt1, pt2,...,ptm], [x_1, ..., x_n]);` lệnh này cho ra kết quả là ma trận hệ số và ma trận hệ số tự do của hệ phương trình. Ở đây `pt1, ..., ptm` lần lượt là m phương trình của hệ và `x_1, ..., x_n` là danh sách các ẩn của hệ phương trình.

> `LinearSolve(A, b);` giải hệ phương trình `AX=b`.

> `GenerateEquation(A, an, b);` tạo ra lại hệ phương trình khi biết ma trận hệ số `A`, vectơ ẩn `an`, và cột hệ số tự do `b`.

> `GaussianElimination(A);` biến đổi ma trận `A` về ma trận bậc thang bằng phương pháp khử Gauss.

> `ReducedRowEchelonForm(‘<|>‘(A, b));` cho ra kết quả sau khi dùng phương pháp Gauss-Jordan để biến đổi ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình `AX=b`.

Sau đây là một ví dụ đã được thực hiện bằng phần mềm MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
> hpt:=[x_1+x_2-x_3=5, -x_1+x_2+2*x_3=2, 2*x_1-2*x_2-4*x_3=-4]:
  an:=[x_1,x_2,x_3]:
> A,b:=GenerateMatrix(hpt,an);
```

$$A, b := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

```
> LinearSolve(A,b);
```

$$\begin{bmatrix} 12 - 3\_t3_2 \\ \_t3_2 \\ 7 - 2\_t3_2 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(A); ReducedRowEchelonForm(`<|>`(A, b));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A.4 Chéo hóa ma trận

Một số lệnh thường gặp trong quá trình chéo hóa ma trận:

`> CharacteristicPolynomial(A, x);` tính đa thức đặc trưng của ma trận A. Các nghiệm của đa thức này chính là các giá trị riêng của ma trận A.

`> Eigenvalues(A);` tính các giá trị riêng của ma trận A.

`> Eigenvectors(A);` chỉ ra các vectơ riêng của ma trận A. Kết quả hiển thị bao gồm một vectơ cột v chứa các giá trị riêng của A và một ma trận mà các cột là các vectơ riêng của A, chú ý rằng cột thứ i của ma trận này là vectơ riêng ứng với giá trị riêng ở hàng thứ i của vectơ cột v. **Quan sát kết quả ở phần này ta có thể kết luận được ma trận A có chéo hóa được hay không.**

Sau đây là một ví dụ được thực hiện bằng phần mềm MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix(3,3,[1,1,-1,-1,1,2,2,-2,-4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> p:=CharacteristicPolynomial(A, x); solve(p, x);
```

$$p := x^3 + 2\,x^2$$

$$0,\, 0,\, -2$$

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhìn vào kết quả hiển thị, ta thấy Giá trị riêng 0 *là nghiệm bội* 2 *nhưng Không gian riêng ứng với giá trị riêng* 0 *là không gian một chiều (sinh bởi* $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *và* $(0,0,0)$*). Như vậy, ma trận A ở ví dụ này không chéo hóa được.*