

## Bài tập về nhà số 3

# Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

### Chủ đề: Phương pháp lấy mẫu

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

1. Chứng minh rằng nếu phân phối  $\pi$  thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết, thì  $\pi$  là phân phối ổn định của xích Markov

**Lời giải:**

Xét một xích Markov với vô hạn trạng thái được đánh số  $0, 1, 2, \dots$ , có ma trận chuyển trạng thái  $T$  được định nghĩa như sau

$$T_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \text{ và } i \geq 0 \\ \mu, & j = i - 1 \text{ và } i \geq 1 \\ 1 - \lambda - \mu, & i = j \text{ và } i \geq 1 \\ 1 - \lambda, & i = j = 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với  $\lambda$  và  $\mu$  là các hằng số dương thỏa mãn  $\lambda < \mu$  và  $\lambda + \mu \leq 1$ . Yêu cầu chứng minh rằng nếu phân phối  $\pi$  thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết  $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$  với mọi  $i, j$ , thì  $\pi$  là phân phối ổn định, tức là  $\pi T = \pi$ .

Để chứng minh, ta xuất phát từ điều kiện cân bằng chi tiết  $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$ . Ta cần chỉ ra rằng

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$$

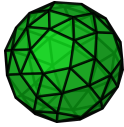
với mọi  $j$ .

Từ giả thiết điều kiện cân bằng chi tiết, ta tiến hành cố định  $j$ . Lấy tổng 2 vế

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j T_{ji} \tag{1}$$

Vì  $\pi_j$  không phụ thuộc vào  $i$ , ta đưa  $\pi_j$  ra ngoài tổng, được

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} \tag{2}$$



Mà  $\sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = 1$  do  $T$  là ma trận chuyển trạng thái, nên  $\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = \pi_j \cdot 1 = \pi_j$ .

Vậy  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$ , tức là  $\pi T = \pi$ . Ngoài ra,  $\pi$  là phân phối xác suất nên  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ . Do đó,  $\pi$  thỏa mãn mọi điều kiện của phân phối ổn định. ■

## 2. Xác định phân phối ổn định $\pi$ của xích Markov đã cho

### Lời giải

Ta sử dụng điều kiện cân bằng chi tiết để tìm  $\pi$ . Xét  $j = i + 1$ , ta có

$$\pi_i T_{i,i+1} = \pi_{i+1} T_{i+1,i} \quad (3)$$

Từ ma trận  $T$ ,  $T_{i,i+1} = \lambda$  và  $T_{i+1,i} = \mu$ , nên

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \quad (4)$$

Suy ra  $\pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i$  với mọi  $i \geq 0$

Từ đây, ta biểu diễn  $\pi_i$  theo  $\pi_0$ :  $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$ ,  $\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$ , và tổng quát

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \quad (5)$$

Để  $\pi$  là phân phối xác suất, ta cần  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ .

Thay vào, ta được

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1 \quad (6)$$

Vì  $\lambda < \mu$ , chuỗi hình học hội tụ và  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

Do đó:  $\pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1$ , suy ra  $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

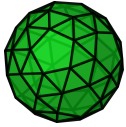
Vậy, phân phối ổn định là  $\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$  với  $i = 0, 1, 2, \dots$  ■

## 3. Phân phối ổn định $\pi$ giống phân phối rời rạc nào? Đề xuất cách lấy mẫu

### Lời giải

Từ  $\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ , ta nhận thấy đây là dạng của phân phối hình học  $P(X = k) = p(1-p)^k$ , với  $p = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$  và  $1-p = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Vậy  $\pi$  là phân phối hình học với tham số  $p = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ .



Để lấy mẫu từ phân phối  $\pi$ , ta sử dụng phương pháp xích Markov Monte Carlo dựa trên ma trận chuyển trạng thái  $T$ . Tại mỗi bước, xích Markov chuyển từ trạng thái hiện tại  $i$  sang trạng thái tiếp theo theo các xác suất được định nghĩa bởi  $T_{ij}$

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 - p, & j = i + 1 \text{ và } i \geq 0 \\ p, & j = 0 \text{ và } i \geq 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với  $p = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ . Sau khi thực hiện một số lượng lớn các bước, các trạng thái mà xích đi qua sẽ có phân phối gần đúng với phân phối ổn định  $\pi$ . ■