Bài tập về nhà số 3
Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PiMA

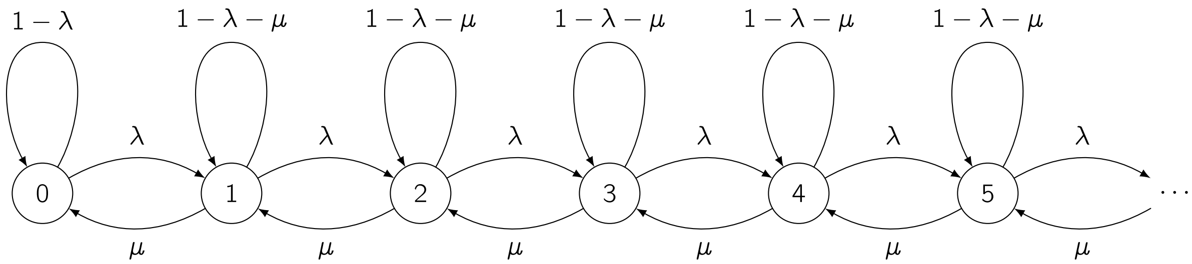
Chủ đề: Phương pháp lấy mẫu

1 Bài tập lý thuyết: Phân phối ổn định của xích Markov

Xét một xích Markov gồm có vô hạn trạng thái được đánh số $0, 1, 2, \ldots$. Khi xích đang ở trạng thái i, tại thời điểm kế tiếp nó sẽ chuyển sang trạng thái j với xác suất T_{ij} được định nghĩa như sau:

$$T_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \wedge i \geq 0 \\ \mu, & j = i - 1 \wedge i \geq 1 \\ 1 - \lambda - \mu, & i = j \wedge i \geq 1 \\ 1 - \lambda, & i = j = 0 \\ 0, & \text{còn lại}, \end{cases}$$

trong đó λ và μ là các hằng số dương thỏa mãn $\lambda < \mu$ và $\lambda + \mu \leq 1$. Xích này là một mô hình toán học đơn giản hóa cho hàng đợi M/M/1 trong vận trù học, trong đó λ đại diện cho xác suất có người bước vào hàng đợi, và μ đại diện cho xác suất người rời khỏi hàng.



Ta sẽ xác định phân phối ổn định π của xích Markov này.

1. Trong bài giảng, ta đã biết phân phối ổn định π của xích Markov này với ma trận chuyển trạng thái T phải thỏa mãn định nghĩa $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ và $\pi T = \pi$. Trong trường hợp vô hạn trạng thái này, điều kiện thứ hai có thể được viết lại thành $\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i T_{ij}$ với mọi trạng thái j.

   Ngoài ra, bài giảng còn nhắc điều kiện cân bằng chi tiết (detailed balance) có dạng $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$ với mọi trạng thái i và j.

   Chứng minh rằng nếu phân phối π thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết, thì π chính là phân phối ổn định của xích Markov theo định nghĩa.

2. Sử dụng định nghĩa, hãy xác định phân phối ổn định π của xích Markov đã cho.

3. Phân phối ổn định π giống với phân phối rời rạc nào mà bạn đã biết? Từ đó, hãy đề xuất một cách đơn giản, liên quan đến phương pháp xích Markov Monte Carlo, để lấy mẫu từ phân phối rời rạc đó.

2 Bài tập lập trình: Các phương pháp lấy mẫu

Miêu tả bài tập và trình chấm tự động đã được ghi sẵn trong Python Notebook đi kèm, hãy hoàn thành bài tập trên Google Colab hoặc tải xuống thiết bị để hoàn thành bài tập.