Bài tập về nhà số 6

Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

Chủ đề: Mô hình luồng chuẩn hóa

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

Xét mô hình luồng tự hồi quy được sử dụng để biến đổi phân phối cơ sở $f_Z(\mathbf{z})$ với D chiều (có thể là phân phối đều trên $[0,1]^D$ hay phân phối chuẩn tắc trên $\mathbb{R}^D$) thành phân phối mục tiêu $f_X(\mathbf{x})$ cũng có D chiều. Cơ chế luồng tự hồi quy này sẽ tính lần lượt từng phần tử x_i như sau:

- Trước hết, xác định $\mathbf{h}_i = c_i(\mathbf{z}_{1:i-1})$, còn được gọi là cơ chế điều kiện (conditioner) thứ i.
- Sau đó, xác định thành phần $x_i = \tau(z_i; \mathbf{h}_i)$, trong đó τ là cơ chế biến đổi (transformer) thứ i, phải là một hàm đơn điệu ngặt theo z_i.

1. Hãy trả lời các câu hỏi định tính sau về mô hình luồng tự hồi quy này:

   (a) Tại sao cơ chế biến đổi τ phải là một hàm đơn điệu ngặt theo biến z_i?

   (b) Bằng cách xác định cấu trúc của ma trận Jacobian J_{f_ϕ} ứng với hàm số $\mathbf{x} = f_\phi(\mathbf{z})$, nêu cách tính định thức của ma trận J_{f_ϕ} một cách hiệu quả.

   (c) Hình minh họa thể hiện quá trình biến đổi từ $\mathbf{z}$ sang $\mathbf{x}$. Hãy vẽ một hình tương tự thể hiện quá trình biến đổi từ $\mathbf{x}$ sang $\mathbf{z}$, có chú thích rõ ràng.

   Lời giải:

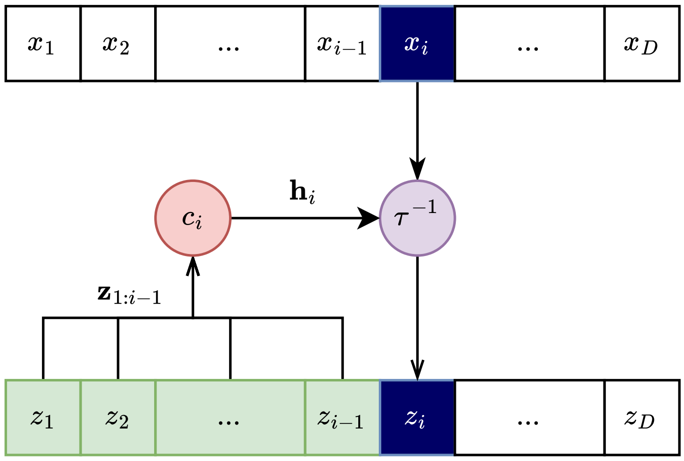
   (a) Cơ chế biến đổi τ phải là hàm đơn điệu ngặt theo z_i để đảm bảo phép biến đổi $x_i = \tau(z_i; \mathbf{h}_i)$ là khả nghịch theo z_i cho mỗi $\mathbf{h}_i$. Điều này có nghĩa là từ x_i và $\mathbf{h}_i$, ta có thể tính ngược lại z_i một cách duy nhất. Tính khả nghịch này là yêu cầu cốt lõi của mô hình luồng chuẩn hóa, cho phép chuyển đổi hai chiều giữa phân phối cơ sở và phân phối mục tiêu.

   (b) Do mô hình mang tính tự hồi quy, hàm f_ϕ có dạng tam giác dưới: x_i chỉ phụ thuộc vào $z_1, z_2, \ldots, z_i$. Vì vậy, ma trận Jacobian J_{f_ϕ} là một ma trận tam giác dưới, với các phần tử trên đường chéo chính là $\frac{\partial x_i}{\partial z_i} = \frac{\partial \tau(z_i; \mathbf{h}_i)}{\partial z_i}$, và các phần tử phía trên đường chéo bằng 0. Định thức của ma trận tam giác dưới được tính bằng tích các phần tử trên đường chéo:

$$\det J_{f_\phi} = \prod_{i=1}^{D} \frac{\partial \tau(z_i; \mathbf{h}_i)}{\partial z_i}.$$

Cách tính hiệu quả là chỉ cần tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial \tau}{\partial z_i}$ cho từng i và lấy tích, thay vì xây dựng và tính định thức của toàn bộ ma trận.

(c) Hình vẽ bên dưới. Trong đó, $\mathbf{z_i}$ chính là kết quả của phép biến đổi nghịch đảo $\tau^{-1}(x_i; \mathbf{h_i})$



■

2. Giả sử biểu thức của các cơ chế điều kiện và cơ chế biến đổi là:

$$\tau(z_i; \mathbf{h}_i) = z_i + h_i, \quad \mathbf{h}_i = c_i(\mathbf{z}_{1:i-1}) = h_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} z_j, & i > 1 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm $f_\phi(\mathbf{z})$, hàm ngược $f_\phi^{-1}(\mathbf{x})$, và định thức $\det J_{f_\phi}$.

Lời giải:

- **Hàm $f_\phi(\mathbf{z})$:** Áp dụng công thức

$$x_1 = \tau(z_1; h_1) = z_1 + 0 = z_1,$$

$$x_2 = \tau(z_2; h_2) = z_2 + h_2 = z_2 + z_1,$$
$$x_3 = \tau(z_3; h_3) = z_3 + h_3 = z_3 + (z_1 + z_2),$$
$$\vdots$$
$$x_i = z_i + \sum_{j=1}^{i-1} z_j = \sum_{j=1}^{i} z_j.$$

Vậy

$$f_\phi(\mathbf{z}) = \left(z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + z_3, \ldots, \sum_{j=1}^{D} z_j \right). \tag{1}$$

- **Hàm ngược $f_\phi^{-1}(\mathbf{x})$:** Từ $x_i = \sum_{j=1}^{i} z_j$, ta suy ra

$$z_1 = x_1,$$

$$z_2 = x_2 - x_1,$$
$$z_3 = x_3 - x_2,$$
$$\vdots$$
$$z_i = x_i - x_{i-1} \quad (\text{với } x_0 = 0).$$

Vậy

$$f_\phi^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_D - x_{D-1}) \,. \tag{2}$$

- **Định thức** $\det J_{f_\phi}$**:** Với $\tau(z_i; h_i) = z_i + h_i$, trong đó h_i không phụ thuộc z_i, nên

$$\frac{\partial \tau(z_i; h_i)}{\partial z_i} = 1. \tag{3}$$

Do đó

$$\det J_{f_\phi} = \prod_{i=1}^{D} 1 = 1.$$

■