Bài tập về nhà số 3

Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

Chủ đề: Phương pháp lấy mẫu

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

1. Chứng minh rằng nếu phân phối π thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết, thì π là phân phối ổn định của xích Markov

Lời giải:

Xét một xích Markov với vô hạn trạng thái được đánh số $0, 1, 2, \ldots$, có ma trận chuyển trạng thái T được định nghĩa như sau

$$T_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \text{ và } i \geq 0 \\ \mu, & j = i - 1 \text{ và } i \geq 1 \\ 1 - \lambda - \mu, & i = j \text{ và } i \geq 1 \\ 1 - \lambda, & i = j = 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với λ và μ là các hằng số dương thỏa mãn $\lambda < \mu$ và $\lambda + \mu \leq 1$. Yêu cầu chứng minh rằng nếu phân phối π thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$ với mọi i, j, thì π là phân phối ổn định, tức là $\pi T = \pi$.

Để chứng minh, ta xuất phát từ điều kiện cân bằng chi tiết $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$. Ta cần chỉ ra rằng

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$$

với mọi j.

Từ giả thiết điều kiện cân bằng chi tiết, ta tiến hành cố định j. Lấy tổng 2 vế

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j T_{ji} \tag{1}$$

Vì π_j không phụ thuộc vào i, ta đưa π_j ra ngoài tổng, được

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} \tag{2}$$

Mà $\sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = 1$ do T là ma trận chuyển trạng thái, nên $\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = \pi_j \cdot 1 = \pi_j$.
Vậy $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$, tức là $\pi T = \pi$. Ngoài ra, π là phân phối xác suất nên $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. Do đó, π thỏa mãn mọi điều kiện của phân phối ổn định. ■

2. Xác định phân phối ổn định π của xích Markov đã cho

   Lời giải

   Ta sử dụng điều kiện cân bằng chi tiết để tìm π. Xét $j = i + 1$, ta có

   $$\pi_i T_{i,i+1} = \pi_{i+1} T_{i+1,i} \tag{3}$$

   Từ ma trận T, $T_{i,i+1} = \lambda$ và $T_{i+1,i} = \mu$, nên

   $$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \tag{4}$$

   Suy ra $\pi_{i+1} = \dfrac{\lambda}{\mu} \pi_i$ với mọi $i \geq 0$

   Từ đây, ta biểu diễn π_i theo π_0: $\pi_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} \pi_0$, $\pi_2 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$, và tổng quát

   $$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \tag{5}$$

   Để π là phân phối xác suất, ta cần $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.

   Thay vào, ta được

   $$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1 \tag{6}$$

   Vì $\lambda < \mu$, chuỗi hình học hội tụ và $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}}$

   Do đó: $\pi_0 \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}} = 1$, suy ra $\pi_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$

   Vậy, phân phối ổn định là $\pi_i = \left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right) \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots$. ■

3. Phân phối ổn định π giống phân phối rời rạc nào? Đề xuất cách lấy mẫu

   Lời giải

   Từ $\pi_i = \left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right) \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i$, ta nhận thấy đây là dạng của phân phối hình học $P(X = k) = p(1 - p)^k$, với $p = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$ và $1 - p = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

   Vậy π là phân phối hình học với tham số $p = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Để lấy mẫu từ phân phối π, ta sử dụng phương pháp xích Markov Monte Carlo dựa trên ma trận chuyển trạng thái T. Tại mỗi bước, xích Markov chuyển từ trạng thái hiện tại i sang trạng thái tiếp theo theo các xác suất được định nghĩa bởi T_{ij}

$$T_{ij} = \begin{cases} 1-p, & j = i+1 \text{ và } i \geq 0 \\ p, & j = 0 \text{ và } i \geq 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với $p = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$. Sau khi thực hiện một số lượng lớn các bước, các trạng thái mà xích đi qua sẽ có phân phối gần đúng với phân phối ổn định π. ■