Bài tập về nhà số 4

Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

Chủ đề: Phương pháp ước lượng tham số

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

1. Xác định hàm hợp lý $L(x_1, \dots, x_N; \sigma)$ ứng với N mẫu dữ liệu và ước lượng hợp lý cực đại $\hat{\sigma}_{\text{MLE}}$ của σ. Chứng minh rằng $\hat{\sigma}_{\text{MLE}}$ là một ước lượng không chệch của σ.

   Lời giải:

   Do các mẫu độc lập, hàm hợp lý là tích các hàm mật độ:

$$L(x_1, \dots, x_N; \sigma) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \sigma) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}.$$

   Vậy:

$$L(x_1, \dots, x_N; \sigma) = \left(\frac{1}{2\sigma}\right)^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|}{\sigma}\right).$$

   Để tìm MLE, ta tối đa hóa log-hàm hợp lý:

$$\ln L(x_1, \dots, x_N; \sigma) = \ln\left[\left(\frac{1}{2\sigma}\right)^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|}{\sigma}\right)\right] = -N\ln(2\sigma) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|}{\sigma}.$$

   Rút gọn:

$$\ln L = -N\ln 2 - N\ln\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{N} |x_i|.$$

   Lấy đạo hàm theo σ và đặt bằng 0:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \ln L = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} |x_i| = 0.$$

   Giải:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} |x_i| = \frac{N}{\sigma} \implies \sum_{i=1}^{N} |x_i| = N\sigma \implies \sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i|.$$

Vậy, ước lượng MLE là:

$$\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i|.$$

Kiểm tra điểm cực đại bằng đạo hàm bậc hai:

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ln L = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(-\frac{N}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|x_i|\right) = \frac{N}{\sigma^2}-\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}|x_i|.$$

Tại $\sigma = \hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}$, $\sum_{i=1}^{N}|x_i| = N\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}$:

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ln L\right|_{\sigma=\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}} = \frac{N}{\hat{\sigma}^2_{\mathsf{MLE}}}-\frac{2N\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}}{\hat{\sigma}^3_{\mathsf{MLE}}} = \frac{N}{\hat{\sigma}^2_{\mathsf{MLE}}}-\frac{2N}{\hat{\sigma}^2_{\mathsf{MLE}}} = -\frac{N}{\hat{\sigma}^2_{\mathsf{MLE}}} < 0,$$

xác nhận đây là điểm cực đại.

Chứng minh $\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}$ không chệch:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i|\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[|x_i|] = \mathbb{E}[|X|].$$

Tính $\mathbb{E}[|X|]$:

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx = 2\int_{0}^{\infty}x\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx.$$

Đặt $u = \dfrac{x}{\sigma} \to x = \sigma u \to dx = \sigma\,du$. Vậy:

$$\int_0^\infty x\cdot\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \int_0^\infty(\sigma u)\cdot\frac{1}{\sigma}e^{-u}\cdot\sigma\,du = \sigma\int_0^\infty ue^{-u}\,du.$$

Tích phân: $\int ue^{-u}\,du = -e^{-u}(u+1)$, đánh giá từ 0 đến ∞ cho 1. Vậy:

$$\mathbb{E}[|X|] = 2\cdot\sigma\cdot 1 = 2\sigma.$$

Do đó:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}] = \sigma.$$

Vậy, $\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}$ là không chệch. ■

2. Xác định ước lượng $\hat{\sigma}_{\mathsf{MM}}$ của σ theo phương pháp moment, dựa trên $x_1, \ldots, x_N$, bằng cách tính các moment μ_m, ước lượng moment mẫu S_m, và giải tìm σ.

Lời giải

Gọi $X \sim \mathsf{Laplace}(\sigma)$. Moment bậc m là:

$$\mu_m = \mathbb{E}[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty}x^m\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx.$$

Với m lẻ, $\mu_m = 0$ do tính đối xứng. Tính moment bậc hai ($m = 2$):

$$\mu_2 = \mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-d\frac{x}{\sigma}}\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx.$$

Đặt $u = \frac{x}{\sigma} \to x = \sigma u \to dx = \sigma\, du$. Vậy:

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} (\sigma u)^2 \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-u} \cdot \sigma\, du = \sigma^2 \int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\, du.$$

Tính: $\int u^2 e^{-u}\, du = -(u^2 + 2u + 2)e^{-u}$, đánh giá từ 0 đến ∞ cho 2. Vậy:

$$\mu_2 = \sigma^2 \cdot 2 = 2\sigma^2.$$

Moment mẫu:

$$S_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2.$$

Đặt $S_2 = \mu_2$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 2\hat{\sigma}_{\text{MM}}^2 \implies \hat{\sigma}_{\text{MM}}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \implies \hat{\sigma}_{\text{MM}} = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

Vậy:

$$\hat{\sigma}_{\text{MM}} = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

■

3. Kiểm tra xem $\hat{\sigma}_{\text{MLE}}$ có đạt phương sai tối thiểu (chặn dưới Cramer-Rao) hay không, với phương sai tối thiểu được cho bởi $\frac{1}{I_{x_1,\dots,x_N}(\sigma)}$, trong đó $I_{x_1,\dots,x_N}(\sigma) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L(x_1, \dots, x_N; \sigma)\right]$.

Lời giải

Chặn dưới Cramer-Rao:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}) \geq \frac{1}{I_{x_1,\dots,x_N}(\sigma)},$$

với thông tin Fisher:

$$I_{x_1,\dots,x_N}(\sigma) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L\right].$$

Từ:

$$\ln L = -N \ln 2 - N \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{N} |x_i|,$$

ta có:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} |x_i|,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L = \frac{N}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{N} |x_i|.$$

Tính:

$$I = -\mathbb{E}\left[\frac{N}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{N} |x_i|\right] = -\frac{N}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^3} \cdot N \cdot \mathbb{E}[|X|] = -\frac{N}{\sigma^2} + \frac{2N \cdot \sigma}{\sigma^3} = \frac{N}{\sigma^2}.$$

Vậy, ta cần chứng minh:

$$\mathsf{Var}(\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}) = \frac{\sigma^2}{N}.$$

Tính phương sai của $\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}$:

$$\mathsf{Var}(\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}) = \mathsf{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i|\right) = \frac{1}{N}\mathsf{Var}(|X|).$$

Với $Y = |X|$, pdf: $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} e^{-\dfrac{y}{\sigma}}$, $y \geq 0$. Tính:

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^{\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\dfrac{y}{\sigma}} \, dy = \sigma^2 \cdot 2 = 2\sigma^2.$$

$$\mathsf{Var}(Y) = 2\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2.$$

Vậy:

$$\mathsf{Var}(\hat{\sigma}_{\mathsf{MLE}}) = \frac{\sigma^2}{N}.$$

hay ta có điều phải chứng minh ■