Bài tập về nhà số 1

Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

Chủ đề: Ôn tập xác suất thống kê

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

1. **Để luyện tập tính toán các đại lượng ngẫu nhiên, cho $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ và các phân phối xác suất $P(X)$ và $Q(X)$ được cho như trong bảng dưới đây.**

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.25	0.25	0	0.5
$Q(x)$	0.25	0.25	0.25	0.25

Hãy tính $D_{KL}(P\|Q)$, $D_{KL}(Q\|P)$ và $d(P, Q)$ trong trường hợp này. Quy ước 0 log 0 = 0.

Lời giải:

Ta tính $D_{KL}(P\|Q)$ theo công thức

$$D_{KL}(P\|Q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x) \ln \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Với $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, ta có

$$\begin{aligned} D_{KL}(P\|Q) &= 0.25 \ln \frac{0.25}{0.25} + 0.25 \ln \frac{0.25}{0.25} + 0 \ln \frac{0}{0.25} + 0.5 \ln \frac{0.5}{0.25} \\ &= 0.25 \ln 1 + 0.25 \ln 1 + 0 + 0.5 \ln 2 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0.5 \ln 2. \end{aligned}$$

Vì $\ln 2 \approx 0.693$, nên $D_{KL}(P\|Q) \approx 0.5 \times 0.693 = 0.3465$.

Tương tự, tính $D_{KL}(Q\|P)$

$$\begin{aligned} D_{KL}(Q\|P) &= 0.25 \ln \frac{0.25}{0.25} + 0.25 \ln \frac{0.25}{0.25} + 0.25 \ln \frac{0.25}{0} + 0.25 \ln \frac{0.25}{0.5} \\ &= 0.25 \ln 1 + 0.25 \ln 1 + 0.25 \ln \infty + 0.25 \ln 0.5. \end{aligned}$$

Theo quy ước, $0 \ln \dfrac{0.25}{0} = 0 \ln \infty$ được hiểu là giới hạn, nhưng trong bài này không tính được do có giá trị vô cực. Do đó, $D_{KL}(Q\|P)$ không xác định trong trường hợp này.

Tính khoảng cách L^1, $d(P,Q)$

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= |P(1)-Q(1)| + |P(2)-Q(2)| + |P(3)-Q(3)| + |P(4)-Q(4)| \\ &= |0.25-0.25| + |0.25-0.25| + |0-0.25| + |0.5-0.25| \\ &= 0+0+0.25+0.25 = 0.5. \end{aligned}$$

Vậy $d(P,Q) = 0.5$ ■

2. **Chứng minh bất đẳng thức log-sum sau đây: gọi $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là $2n$ số thực dương, và đặt $a = \sum_{i=1}^n a_i, b = \sum_{i=1}^n b_i$. Khi đó $\sum_{i=1}^n a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geq a \ln \frac{a}{b}$.**

   Lời giải:

   Ta chứng minh bằng bất đẳng thức Jensen. Xét hàm $f(x) = x \ln x$ là hàm lồi trên $(0,\infty)$ (vì $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$). Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho các số a_i, b_i với trọng số $\frac{b_i}{b}$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{b}\left(\frac{a_i}{b_i}\ln\frac{a_i}{b_i}\right) &\geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}\cdot\frac{b_i}{b}\right)\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}\cdot\frac{b_i}{b}\right) \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b}\cdot\right)\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b}\right) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \ln\frac{a_i}{b_i} &\geq a\ln\left(\frac{a}{b}\right) \textbf{ (Q.E.D)} \end{aligned}$$

   Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_i}{a} = \frac{b_i}{b}$ hay $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a}{b}$ cho mọi i. Như vậy, $D_{KL}(P\|Q)$ đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi $P = Q$, và đạt giá trị lớn nhất (có thể là vô cực) khi tồn tại x sao cho $P(x) > 0$ nhưng $Q(x) = 0$. ■

3. **Chứng minh bất đẳng thức Pinsker: $D_{KL}(P\|Q) \geq \frac{1}{2}d^2(P,Q)$.**

   Lời giải:

   Đặt $\mathcal{X}_1 = \{a : P(a) \geq Q(a)\}$, $p = \sum_{x\in\mathcal{X}_1} P(x)$ và $q = \sum_{x\in\mathcal{X}_1} Q(x)$. Ta có $0 < q \leq p \leq 1$.

   Không mất tính tổng quát, ta xét bất đẳng thức trên tập $\mathcal{X}_1$. Ta có

$$D_{KL}(P\|Q) = \sum_{x\in\mathcal{X}_1} P(x)\ln\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] + \sum_{x\notin\mathcal{X}_1} P(x)\ln\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] \tag{1}$$

   Ta biết

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} P(x) = \sum_{x\in\mathcal{X}_1} P(x) + \sum_{x\notin\mathcal{X}_1} P(x) = 1 \tag{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{x\notin\mathcal{X}_1} P(x) = 1 - \sum_{x\in\mathcal{X}_1} P(x) = 1 - p \tag{3}$$

Tương tự

$$\sum_{x \notin \mathcal{X}_1} Q(x) = 1 - \sum_{x \in \mathcal{X}_1} Q(x) = 1 - q \tag{4}$$

Từ đó

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_1} P(x) \ln \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] + \sum_{x \notin \mathcal{X}_1} P(x) \ln \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] \geq p \ln \left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \ln \left(\frac{1-p}{1-q}\right) \tag{5}$$

Về vế phải, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} d^2(P, Q) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in \mathcal{X}} |P(x) - Q(x)|\right]^2 && (6)\\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in \mathcal{X}_1} (P(x) - Q(x)) + \sum_{x \notin \mathcal{X}_1} (Q(x) - P(x))\right]^2 && (7)\\
&= \frac{1}{2} \left[p - q + (1 - q - (1-p))\right]^2 && (8)\\
&= \frac{1}{2} [2(p-q)]^2 && (9)\\
&= 2(p-q)^2 && (10)
\end{aligned}$$

Do đó, cần chứng minh

$$p \ln \left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \ln \left(\frac{1-p}{1-q}\right) \geq 2(p-q)^2, \quad \text{với } 0 < q \leq p \leq 1. \tag{11}$$

Xét hàm số

$$f(p,q) = p \ln \left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \ln \left(\frac{1-p}{1-q}\right) - 2(p-q)^2, \quad 0 < q \leq p \leq 1. \tag{12}$$

Không mất tính tổng quát, ta cố định p. Tính đạo hàm theo q, ta được

$$f_q(p,q) = (p-q) \left[4 - \frac{1}{q(1-q)}\right]. \tag{13}$$

- Do $p \geq q \Rightarrow p - q \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $p = q$
- Với $q(1-q) \leq \left(\frac{q+1-q}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 - \frac{1}{q(1-q)} \leq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $q = \frac{1}{2}$

Vậy $f_q(p,q) \leq 0$ với $0 < q \leq 1$, hay $f(p,q)$ nghịch biến với $0 < q \leq 1$.

Xét các trường hợp sau:

- Với $p = q$, ta có $f(p,q) = f(p,p) = 0$. Do $f(p,q)$ nghịch biến, nên $f(p,q)$ đạt cực tiểu tại $p = q \Rightarrow f(p,q) = 0$

- Với $q = \frac{1}{2}$, ta có:

$$f\left(p, \frac{1}{2}\right) = p\ln(2p) + (1-q)\ln[2(1-p)] - 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \tag{14}$$

Xét

$$f'\left(p, \frac{1}{2}\right) = \ln(2) + \ln(p) + 1 - \ln(2) - \ln(1-q) - 1 - 4\left(p - \frac{1}{2}\right) \tag{15}$$
$$= \ln(p) - \ln(1-p) - 4p + 2 \tag{16}$$

Và $f''\left(p, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 4 \geq 0$ (theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz), hay $f'\left(p, \frac{1}{2}\right)$ đồng biến với $0 < q \leq 1$. Do $f'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$, nên $p = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'\left(p, \frac{1}{2}\right) = 0$.

Khảo sát hàm số, ta được $f\left(p, \frac{1}{2}\right)$ đạt cực tiểu tại $p = \frac{1}{2}$, khi đó $f\left(p, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$

Trong cả hai trường hợp, giá trị nhỏ nhất của $f(p,q)$ là 0, hay $f(p,q) \geq 0$. Vậy bất đẳng thức Pinsker được chứng minh

$$D_{KL}(P\|Q) \geq \frac{1}{2}d^2(P,Q).$$

Đẳng thức đạt được khi $p = q$. ■