# Bài tập về nhà số 3

# Nền tảng toán học của các mô hình tạo sinh – PIMA

## Chủ đề: Phương pháp lấy mẫu

Người giải: Võ Hoàng Nhật Khang

1. Chứng minh rằng nếu phân phối $\pi$ thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết, thì $\pi$ là phân phối ổn định của xích Markov

**Lời giải:**

Xét một xích Markov với vô hạn trạng thái được đánh số $0, 1, 2, \ldots$, có ma trận chuyển trạng thái $T$ được định nghĩa như sau

$$T_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i+1 \text{ và } i \geq 0 \\ \mu, & j = i-1 \text{ và } i \geq 1 \\ 1-\lambda-\mu, & i = j \text{ và } i \geq 1 \\ 1-\lambda, & i = j = 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với $\lambda$ và $\mu$ là các hằng số dương thỏa mãn $\lambda < \mu$ và $\lambda + \mu \leq 1$. Yêu cầu chứng minh rằng nếu phân phối $\pi$ thỏa mãn điều kiện cân bằng chi tiết $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$ với mọi $i, j$, thì $\pi$ là phân phối ổn định, tức là $\pi T = \pi$.

Để chứng minh, ta xuất phát từ điều kiện cân bằng chi tiết $\pi_i T_{ij} = \pi_j T_{ji}$. Ta cần chỉ ra rằng

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$$

với mọi $j$.

Từ giả thiết điều kiện cân bằng chi tiết, ta tiến hành cố định $j$. Lấy tổng $2$ vế

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j T_{ji} \tag{1}$$

Vì $\pi_j$ không phụ thuộc vào $i$, ta đưa $\pi_j$ ra ngoài tổng, được

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} \tag{2}$$

Mà $\sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = 1$ do $T$ là ma trận chuyển trạng thái, nên $\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} T_{ji} = \pi_j \cdot 1 = \pi_j$.
Vậy $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i T_{ij} = \pi_j$, tức là $\pi T = \pi$. Ngoài ra, $\pi$ là phân phối xác suất nên $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. Do đó, $\pi$ thỏa mãn mọi điều kiện của phân phối ổn định. ■

2. Xác định phân phối ổn định $\pi$ của xích Markov đã cho

**Lời giải**

Ta sử dụng điều kiện cân bằng chi tiết để tìm $\pi$. Xét $j = i + 1$, ta có

$$\pi_i T_{i,i+1} = \pi_{i+1} T_{i+1,i} \tag{3}$$

Từ ma trận $T$, $T_{i,i+1} = \lambda$ và $T_{i+1,i} = \mu$, nên

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \tag{4}$$

Suy ra $\pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i$ với mọi $i \geq 0$

Từ đây, ta biểu diễn $\pi_i$ theo $\pi_0$: $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$, $\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$, và tổng quát

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \tag{5}$$

Để $\pi$ là phân phối xác suất, ta cần $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.

Thay vào, ta được

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1 \tag{6}$$

Vì $\lambda < \mu$, chuỗi hình học hội tụ và $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

Do đó: $\pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1$, suy ra $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Vậy, phân phối ổn định là $\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots$. ■

3. Phân phối ổn định $\pi$ giống phân phối rời rạc nào? Đề xuất cách lấy mẫu

**Lời giải**

Từ $\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$, ta nhận thấy đây là dạng của phân phối hình học $P(X = k) = p(1-p)^k$, với $p = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ và $1 - p = \frac{\lambda}{\mu}$.

Vậy $\pi$ là phân phối hình học với tham số $p = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Để lấy mẫu từ phân phối $\pi$, ta sử dụng phương pháp xích Markov Monte Carlo dựa trên ma trận chuyển trạng thái $T$. Tại mỗi bước, xích Markov chuyển từ trạng thái hiện tại $i$ sang trạng thái tiếp theo theo các xác suất được định nghĩa bởi $T_{ij}$

$$T_{ij} = \begin{cases} 1-p, & j = i+1 \text{ và } i \geq 0 \\ p, & j = 0 \text{ và } i \geq 0 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}$$

với $p = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$. Sau khi thực hiện một số lượng lớn các bước, các trạng thái mà xích đi qua sẽ có phân phối gần đúng với phân phối ổn định $\pi$. ■