Theoretische Informatik
Sommersemester 2021

Übung 5

A1. Sei die Sprache $L = \{yy \mid y \in \{0,1\}^*\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

LÖSUNG

Annahme: L ist regulär.
Dann gibt es laut Pumping-Lemma eine Zahl n, so dass alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung $w = uvw$ gibt mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$, so dass $uv^iw \in L$ für alle $i \geq 0$ (insbesondere auch $uw \in L$).
Wähle $w = 0^n10^n1$. Es gilt $w \in L$ und $|w| = 2n + 2$.
Sei $w = uvw$ eine Zerlegung mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$, so dass $uw \in L$.
Der Teil v besteht folglich nur aus Nullen. Das Wort $uw = 0^{n-|v|}10^n1 \notin L$, da es nicht aus zwei gleichen Hälften besteht.
Das steht im Widerspruch zu $uw \in L$. Folglich ist die Annahme falsch und die Sprache somit nicht regulär.

A2. Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ die Sprache der binären Wörter, die mehr Einsen als Nullen besitzt. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

LÖSUNG

Annahme: L ist regulär.
Dann gibt es laut Pumping-Lemma eine Zahl n, so dass alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung $w = uvw$ gibt mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$, so dass $uv^iw \in L$ für alle $i \geq 0$ (insbesondere auch $uw \in L$).
Wähle $w = 1^n0^{n-1}$. Es gilt $w \in L$ und $|w| = 2n-1$.
Sei $w = uvw$ eine Zerlegung mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$, so dass $uw \in L$. Der Teil v besteht folglich nur aus Einsen.
Das Wort $uw = 1^{n-|v|}0^{n-1} \notin L$, da es höchstens so viele Einsen wie Nullen besitzt.
Das steht im Widerspruch zu $uw \in L$. Folglich ist die Annahme falsch und die Sprache somit nicht regulär.

A3. Sei $L = \{0^i 1^i 2^i \mid i > 0\}$. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

LÖSUNG

Sei n die Pumping-Lemma Zahl n.
Sei $w = 0^n 1^n 2^n$. Somit ist klar, dass $w \in L$ und $|w| \geq n$.
Aus dem Lemma folgt $u = uvw \geq n$, $|uv| \leq n$, $|v| > 1$.
Da $|uv| \leq n$ und in unserem Wort w $|0^n| = n$, müssen sowohl u, als auch v nur aus Nullen bestehen. Der Teil v muss wegen $|v| > 1$ mindestens eine Null beinhalten.
Wählen wir $k = 2$, dann hat das Wort $w = uv^k w$ mindestens eine Null mehr als Einsen oder Zweien, und ist somit nicht in L enthalten. Folglich ist die Sprache nicht regulär.
Der Widerspruch lässt sich hier auch mit $k = 0$ oder $k > 1$ herbeiführen.

A4. Sei $L = \{w \mid \#_0(w) > 2\#_1(w)\}$. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
(Die Funkion $\#_0(x)$ gibt die Anzahl von Nullen im Wort x an)

LÖSUNG

Sei n die Pumping-Lemma Zahl n.
Sei $w = 0^{2n+1} 1^n$. Somit ist klar, dass $w \in L$ und $|w| \geq n$.
Aus dem Lemma folgt $u = uvw \geq n$, $|uv| \leq n$, $|v| > 1$.
Wir haben w so gewählt, dass der Teil uv nur aus Nullen besteht (da $|uv| \leq n$).
Wählen wir $k = 0$, dann hat das Teilwort uv^0 wegen $|v| > 1$ höchstens $2n$ Nullen. Somit gilt $\#_0(w) \not> 2\#_1(w)$, und $w = uv^0 w$ ist nicht in L enthalten. Folglich ist die Sprache nicht regulär.