I. Định nghĩa và ví dụ

Tập khác rỗng V + Hai phép toán

- Cộng
- Nhân véctơ với 1 số

8 tiên đề

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. Tồn tại véc tơ không, ký hiệu 0 sao cho $x + 0 = x$
4. Mọi x thuộc V, tồn tại vectơ, ký hiệu $-x$ sao cho $x + (-x) = 0$
5. Với mọi số $\alpha, \beta \in K$ và mọi vectơ x: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. Với mọi số $\alpha \in K$, với mọi $x, y \in V$: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
8. $1x = x$

I. Định nghĩa và các ví dụ

Tính chất của không gian véctơ

1) Véctơ không là duy nhất.

2) Phần tử đối xứng của véctơ x là duy nhất.

3) $0x = 0$

Với mọi vectơ x thuộc V và mọi số $\alpha \in K$:

4) $\alpha 0 = 0$

5) $-x = (-1)x$

I. Định nghĩa và các ví dụ

Ví dụ 1

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in R\}$$

Định nghĩa phép cộng hai véctơ như sau:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Định nghĩa phép nhân véctơ với một số thực như sau:

$$\alpha \cdot x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Định nghĩa sự bằng nhau: $x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ V_1 - Không gian véctơ R_3 trên trường số thực

I. Định nghĩa và các ví dụ

Ví dụ 2

$$V_2 = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in R\}$$

Định nghĩa phép cộng hai véctơ: là phép cộng hai đa thức thông thường, đã biết ở phổ thông.

Định nghĩa phép nhân véctơ với một số: là phép nhân đa thức với một số thực thông thường, đã biết ở phổ thông.

Định nghĩa sự bằng nhau: hai véc tơ bằng nhau nếu hai đa thức bằng nhau, tức là các hệ số tương ứng bằng nhau).

$\Rightarrow$ V_2 - Không gian véctơ $P_2[x]$

I. Định nghĩa và các ví dụ

Ví dụ 3

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

Định nghĩa phép cộng hai véctơ: là phép cộng hai ma trận đã biết trong chương ma trận.

Định nghĩa phép nhân véctơ với một véc tơ: là phép nhân ma trận với một số đã biết.

Định nghĩa sự bằng nhau của hai véctơ: hai véc tơ bằng nhau hai ma trận bằng nhau.

$\Rightarrow$ $\boxed{V_3 \text{ - Không gian véctơ } M_2[R]}$

I. Định nghĩa và các ví dụ

Ví dụ 4

$$V_4 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in R \wedge 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$$

Phép cộng hai véctơ và nhân véctơ với một số giống như trong ví dụ 1.

$\Rightarrow$ $\boxed{V_4 \text{ - là KGVT}}$

CHÚ Ý: Có nhiều cách khác nhau để định nghĩa hai phép toán trên V_1, (hoặc V_2, hoặc V_3) sao cho V_1 (hoặc V_2, hoặc V_3) là không gian véctơ.

I. Định nghĩa và các ví dụ

Ví dụ 5

$$V_5 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in R \wedge x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$$

Phép cộng hai véctơ và nhân véctơ với một số giống như trong ví dụ 1.

$\Rightarrow$ $\boxed{V_5 \text{ - KHÔNG là KGVT}}$

$$x = (1,2,1) \in V_5, \quad y = (2,3,2) \in V_5$$

$$x + y = (3,5,3) \notin V_5$$

II. Độc lập tuyến tính

V- KGVT trên K

Tập con

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

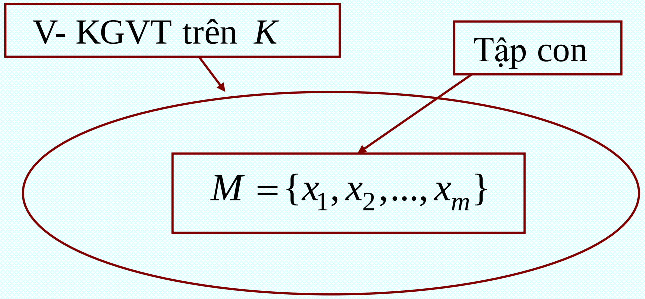
$\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in K$ không đồng thời bằng 0

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$ $\Rightarrow$ M– PTTT

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$

$\to \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_m = 0$ $\Rightarrow$ M – độc lập tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính



Vectơ x thuộc V được gọi là Tổ hợp tuyến tính của M, nếu

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in K$$

$$\Longrightarrow \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ 5

Trong không gian R_3 cho họ véc tơ

$$M = \{(1,1,1); (2,1,3), (1,2,0)\}$$

1. Hỏi M độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

2. Véctơ x = (2,-1,3) có là tổ hợp tuyến tính của họ M?

Giải câu 1. Giả sử $\alpha(1,1,1) + \beta(2,1,3) + \gamma(1,2,0) = 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 3\beta) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow r(A) = 2$$

Hệ có vô số nghiệm, suy ra M phụ thuộc tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

Giải câu 2. Giả sử $\alpha(1,1,1) + \beta(2,1,3) + \gamma(1,2,0) = x$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 3\beta) = (2,-1,3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + 3\beta = 3 \end{cases} \qquad (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$r(A\,|\,b) \neq r(A)$$

Hệ phương trình vô nghiệm, suy ra không tồn tại bộ số α, β, γ

Vậy véctơ x không là tổ hợp tuyến tính của M.

II. Độc lập tuyến tính

$$\boxed{M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}}$$

$\boxed{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0} \Longleftrightarrow$ Hệ thuần nhất *AX=0*

Có duy nhất nghiệm *X = 0* $\longrightarrow$ M – độc lập tuyến tính

Có nghiệm khác không $\longrightarrow$ M – phụ thuộc tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

$$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = x$ $\Longleftrightarrow$ Hệ thuần pt $AX = b$

Hệ có nghiệm $\longrightarrow$ x là tổ hợp tuyến tính của M

Hệ vô nghiệm $\longrightarrow$ x không là tổ hợp tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho họ

$$M = \{x, y, 2x + 3y, z\}$$

a. Véctơ 2x + 3y có là tổ hợp tuyến tính của x, y, z.

b. M độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho họ M = { x, y, z} độc lập tuyến tính.
Chứng tỏ {x+y+2z, 2x+3y+z, 3x+4y+z} độc lập tuyến tính.

Giả sử $\alpha(x + y + 2z) + \beta(2x + 3y + z) + \gamma(3x + 4y + z) = 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + 3\gamma)x + (\alpha + 3\beta + 4\gamma)y + (2\alpha + \beta + \gamma)z = 0$$

Vì M độc lập tuyến tính nên ta có

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Vậy M độc lập tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho họ $M = \{x, y\}$ ĐLTT

Các tập hợp con sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a. $M_1 = \{2x, 3y\}$

b. $M_2 = \{x+y, 2x+3y\}$

c. $M_3 = \{x+y, 2x+3y, x-y\}$

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho $\{x, y\}$ độc lập tuyến tính, z không là tổ hợp tuyến tính của x và y.

Chứng minh rằng $\{x, y, z\}$ độc lập tuyến tính

II. Độc lập tuyến tính

Nếu M chứa véctơ 0, thì M phụ thuộc tuyến tính.

$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ - phụ thuộc tt $\Longleftrightarrow$ $\exists x_i$ - là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại trong M

II. Độc lập tuyến tính

Thêm một số véctơ vào họ phụ thuộc tuyến tính ta thu được một họ phụ thuộc tuyến tính.

Bỏ đi một số véctơ của họ độc lập tuyến tính ta thu được họ độc lập tuyến tính.

Cho họ véctơ M chứa m véctơ $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

Cho họ véctơ N chứa n véctơ $N = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

Nếu mỗi véctơ y_k của N là tổ hợp tuyến tính của M và $n > m$, thì N là tập phụ thuộc tuyến tính.

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho họ M = { x, y} tùy ý.

Hỏi M_1 ={2x+y, x+3y, 3x+y} độc lập hay phụ thuộc tt?

Giả sử $\alpha(2x+y)+\beta(x+3y)+\gamma(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow (2\alpha+\beta+3\gamma)x+(\alpha+3\beta+\gamma)y=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma = 0 \\ \alpha+3\beta+\gamma = 0 \end{cases}$ Hệ VSN nên M phụ thuộc tuyến tính

Thật vậy, kiểm tra thấy mỗi vecto của M_1 là tổ hợp tt của M

Vì số lượng véctơ trong M_1 là 3 nhiều hơn trong M là 2

Theo bổ đề cơ bản, M_1 phụ thuộc tuyến tính.

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho hai họ $M = \{x, y, z\}$

và $M_1 = \{x + y + z, 2x + 3y - z, 3x + 4y + z\}$

a. Chứng minh rằng nếu M ĐLTT tính thì M_1 ĐLTT

b. Chứng minh rằng nếu M_1 ĐLTT tính thì M ĐLTT

III. Hạng của họ véctơ

Định nghĩa hạng của họ véctơ

$$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\} \subset V$$

Hạng của họ M là k_0 nếu tồn tại k_0 véctơ độc lập tuyến tính của M và mọi tập con của M chứa nhiều hơn k_0 véctơ thì phụ thuộc tuyến tính.

Hạng của họ M là số tối đại các véctơ độc lập tuyến tính của M.

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ

Trong không gian véctơ V cho họ $M = \{x, y\}$ ĐLTT

Tìm hạng của các họ véc tơ sau đây.

a. $M_1 = \{2x, 3y\}$

b. $M_2 = \{x, y, 2x + 3y\}$

c. $M_3 = \{x, y, 2x + 3y, 0\}$

II. Độc lập tuyến tính

Tính chất của hạng họ véctơ

1. Hạng của họ véctơ M không đổi nếu ta nhân một véctơ của M với một số khác không.

2. Cộng vào một véctơ của họ M, một véctơ khác đã được nhân với một số thì hạng không thay đổi.

3. Thêm vào họ M một véctơ x là tổ hợp tuyến tính của M thì hạng không thay đổi.

III. Hạng của họ véctơ

Ví dụ 11

Tìm hạng của họ véctơ sau.

$$M = \{(1,1,1,0);(1,2,1,1);(2,3,2,1),(1,3,1,2)\}$$

III. Hạng của họ véctơ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Họ véctơ hàng của A

$$M = \{x_1 = (1,2,1,-1); x_2 = (3,1,0,5); x_3 = (-2,4,1,6)\}$$

Họ véctơ cột của A

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

III. Hạng của họ véctơ

Định lý về hạng:

Cho A là ma trận cở m×n trên trường K.

Hạng của ma trận A bằng với hạng của họ véctơ hàng A.

Hạng của ma trận A bằng với hạng của họ véctơ cột của A.

III. Hạng của họ véctơ

Ví dụ 11

Tìm hạng của họ véctơ sau

$$M = \{(1,1,1,0);(1,1,-1,1);(2,3,1,1),(3,4,0,2)\}$$

Lời giải

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

M là họ véctơ hàng của A. Suy ra hạng của M bằng hạng r(A) của ma trận A.

III. Hạng của họ véctơ

Cho tập hợp M chứa m véctơ.

1. Nếu hạng của M bằng với m (số véctơ của M) thì M độc lập tuyến tính.
2. Nếu hạng của M nhỏ hơn m (số véctơ của M) thì M phụ thuộc tuyến tính.
3. Nếu hạng của M bằng với hạng của M thêm véctơ x, thì x là tổ hợp tuyến tính của M.

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ 7

Hãy xác định tập hợp các véctơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

$$M = \{(1,1,1);(2,1,3),(1,2,0)\}$$

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ 8

Hãy xác định tập hợp các véctơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

$$M = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 2, 2x + 1\}$$

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ 9

Hãy xác định tập hợp các ma trận sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

$$M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

II. Độc lập tuyến tính

Ví dụ 10

Xác định tất cả các giá trị của hằng số thực *m*, để họ véctơ sau phụ thuộc tuyến tính

$$M = \{(1,1,0);(1,2,1);(m,0,1)\}$$

IV. Cơ sở và chiều

Định nghĩa tập sinh

$$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\} \subset V$$

Tập hợp M được gọi là tập sinh của không gian véctơ V nếu mọi véctơ *x* của V là tổ hợp tuyến tính của M.

M sinh ra V

Không gian véctơ V được sinh ra bởi M

IV. Cơ sở và chiều

Ví dụ 12

Kiểm tra tập sau đây có là tập sinh của không gian R_3

$$M = \{(1,1,1);(1,2,1);(2,3,1)\}$$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3.$

Giả sử

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,1) + \alpha_3(2,3,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm

Khi đó x là tổ hợp tt của M, hay M sinh ra R_3.

IV. Cơ sở và chiều

Ví dụ 13

Kiểm tra tập sau đây có là tập sinh của không gian R_3

$$M = \{(1,1,-1);(2,3,1);(3,4,0)\}$$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3.$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,1,-1) + \alpha_2(2,3,1) + \alpha_3(3,4,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = x_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = x_3 \end{cases}$$

Tồn tại x để hệ vô nghiệm, ví dụ: $\mathbf{u} = (1,2,1)$

Hay u không là tổ hợp của M. Do đó M không sinh ra R_3.

IV. Cơ sở và chiều

Ví dụ 14

$$M = \{x^2 + x + 1; 2x^2 + 3x + 1; x^2 + 2x\}$$

M có là tập sinh của không gian $P_2[x]$?

$$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$

$$p(x) = \alpha_1(x^2 + x + 1) + \alpha_2(2x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^2 + 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ \alpha_1 + \alpha_2 = c \end{cases}$$

Tồn tại p(x) để hệ vô nghiệm, ví dụ: $p_0 = 2x^2 + x$

Suy ra M không là tập sinh.

II. Độc lập tuyến tính

Ví du

Trong không gian véctơ V cho tập sinh M = {x, y, z}.

Hỏi M_1 = {2x, x + y, z} có là tập sinh của V?

$\forall v \in V \quad \Leftrightarrow v$ là tổ hợp tuyến tính của M (vì M là tập sinh)

$$\Leftrightarrow v = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$\Leftrightarrow v = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) 2x + \beta(x + y) + \gamma z = 0$$

Có nghĩa là v là tổ hợp tuyến tính của M_1

Hay M_1 sinh ra vectơ v, mà vì v tùy ý nên M_1 sinh ra kg V

II. Độc lập tuyến tính

Ví du

Trong không gian véctơ V cho tập sinh M = {x, y, z}.

Hỏi M_2 = {x, x+y, x - y} có là tập sinh của V?

Trường hợp 1. z là tổ hợp tuyến tính của x và y.

Khi đó ta chứng minh M_2 là tập sinh của không gian véctơ V

Trường hợp 2. z không là tổ hợp tuyến tính của x và y.

Khi đó ta chứng minh M_2 là không tập sinh của không gian véctơ V.

Thật vậy, ta chứng minh M_2 không sinh ra được véctơ z.

IV. Cơ sở và chiều

$$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\} \subset V$$

M sinh ra *V* + *M*- độc lập TT

$\Rightarrow$ *M*- cơ sở của V

M cơ sở hữu hạn $\rightarrow$ *V* – là không gian hữu hạn chiều dim *V* = Số véctơ trong một cơ sở của *V*

Nếu *V* không được sinh ra bởi tập hữu hạn, thì V được gọi là không gian vô hạn chiều

II. Độc lập tuyến tính

Ví du

Trong không gian véctơ V, cho M = {x, y, z} là cơ sở của V.

Hỏi M_1 = {2x + y + z, x + 2y + z, x + y + z} có là cơ sở của V?

Chứng minh rằng M_1 là tập sinh của V.

Chứng minh rằng M_1 độc lập tuyến tính bằng định nghĩa.

II. Độc lập tuyến tính

Ví du

Trong không gian véctơ V, cho M = {x, y, z} là cơ sở của V.

Hỏi M_1 = {2x, 3y, z, x + y + z} có là tập sinh của V?

Đáp án. M_1 là cơ sở của V. Thật vậy chỉ cần chứng tỏ 2x, 3y, z là tập sinh của V.

IV. Cơ sở và chiều

Định lý.

Giả sử V là không gian hữu hạn chiều.

1. Tồn tại vô số cơ sở của không gian vectơ V.

2. Số lượng vectơ trong mọi cơ sở đều bằng nhau.

Chứng minh

IV. Cơ sở và chiều

$\dim(R_n) = n.$ Dễ dàng chứng tỏ tập E sau đây là cơ sở

$$E = \{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$$

$\dim(P_n[x]) = n+1.$ Chứng tỏ tập E sau đây là cơ sở

$$E = \{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$$

$\dim(M_n[R]) = n^2.$ Chứng tỏ tập E sau đây là cơ sở

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

IV. Cơ sở và chiều

$\boxed{\dim(V) = n}$

☞ Mọi tập con của V chứa nhiều hơn n véctơ thì phụ thuộc tuyến tính.

☞ Mọi tập con của V chứa ít hơn n véctơ không sinh ra V.

☞ Mọi tập độc lập tuyến tính có đúng n véctơ là cơ sở của V

☞ Mọi tập sinh của V có đúng n véctơ là cơ sở của V

IV. Cơ sở và chiều

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ - tập con của V, $H = \text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$

a. Nếu S là tập phụ thuộc tuyến tính, thì có thể bỏ đi một phần tử của S ta vẫn được tập sinh của H.

b. Nếu S là tập độc lập tuyến tính, thì không thể bỏ đi bất kỳ phần tử nào của S để được tập sinh của H.

IV. Cơ sở và chiều

Ví dụ 14

Kiểm tra tập hợp sau có là cơ sở của R_3.

$$M = \{(1,1,1); (2,3,1); (3,1,0)\}$$

IV. Cơ sở và chiều

Ví dụ 14

Kiểm tra tập hợp sau có là tập sinh của R_3.

$$M = \{(1,1,1); (2,0,1); (1,1,0), (1,-2,1)\}$$

5.1 Tích vô hướng

Định nghĩa tích vô hướng

Tích vô hướng trong R-kgvt V là một hàm thực sao cho mỗi cặp véctơ *u* và *v* thuộc *V*, tương ứng với một số thực ký hiệu (*u*,*v*) thỏa 4 tiên đề sau:

a. $(\forall u,v\in V)\quad (u,v)=(v,u)$

b. $(\forall u,v,w\in V)\quad (u+v,w)=(u,w)+(v,w)$

c. $(\forall \alpha\in R,\forall u,v\in V)\quad (\alpha u,v)=\alpha(u,v)$

d. $(\forall u\in V)\quad (u,u)\ge 0;(u,u)=0\Leftrightarrow u=0$

Không gian thực hữu hạn chiều cùng với một tích vô hướng trên đó được gọi là không gian Euclid.

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_2 cho qui tắc

$\forall x=(x_1,x_2)\in R_2;\ \forall y=(y_1,y_2)\in R_2$

$(x,y)=((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+10x_2y_2$

1. Chứng tỏ (x,y) là tích vô hướng.

2. Tính tích vô hướng của hai véctơ $u=(2,1),v=(1,-1)$

Giải.

2. Tính tích vô hướng của hai véctơ $u=(2,1),v=(1,-1)$ là

$(u,v)=((2,1),(1,-1))$

$=2.1+2.2.(-1)+2.1.1+10.1.(-1)=-10$

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian $P_2[x]$ cho qui tắc

$\forall p(x)=a_1x^2+b_1x+c_1;\ q(x)=a_2x^2+b_2x+c_2\in P_2[x].$

$$(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx$$

1. Chứng tỏ (*p*,*q*) là tích vô hướng.

2. Tính tích vô hướng của $p(x)=2x^2-3x+1,q(x)=x+1$

2. Tích vô hướng của hai véctơ (*p*,*q*) là

$$(p,q)=\int_0^1 p(x).q(x)dx=\int_0^1(2x^2-3x+1)(x+1)dx=\frac{1}{6}$$

5.1. Tích vô hướng

Định nghĩa độ dài véctơ

Độ dài véctơ u là số thực dương ký hiệu bởi ||u|| và được định nghĩa như sau

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}$$

Véctơ có độ dài bằng 1 gọi là véctơ đơn vị.

Chia một véctơ cho độ dài của nó ta được véctơ đơn vị.

Quá trình tạo ra véctơ đơn vị được gọi là chuẩn hóa.

5.1. Tích vô hướng

Bất đẳng thức Cauchy-Schwatz

Trong không gian Euclid V, ta có bất đẳng thức sau

$$|(u,v)| \le \|u\| . \|v\|$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi u và v phụ thuộc tuyến tính.

Bất đẳng thức tam giác.

Cho hai véctơ u và v của không gian Euclid V.

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

5.1. Tích vô hướng

Định nghĩa khoảng cách giữa hai véctơ

Cho hai véctơ u và v của không gian Euclid V, khoảng cách giữa hai véctơ u và v, ký hiệu bởi d(u,v), là độ dài của véctơ $u - v$. Vậy d(u,v) = $\|u - v\|$

Định nghĩa góc giữa hai véctơ

Cho hai véctơ u và v của không gian Euclid V.

Góc α giữa hai véctơ u và v là đại lượng thỏa

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\| . \|v\|}$$

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_3 cho qui tắc

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3;\ \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in R_3$

$$(x,y) = ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$= 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

1. Chứng tỏ (x,y) là tích vô hướng.

2. Tính tích vô hướng của hai véctơ $u = (2,1,0), v = (3,-2,4)$

2. $(u,v) = ((2,1,0),(3,-2,4)) = 5.2.3 + 2.2.(-2) + 2.1.3 + 3.1.(-2) + 0.4$

$$(u,v) = 22.$$

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_3 cho qui tắc

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3;\ \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in R_3$

$$(x,y) = ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$= 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

3. Tìm độ dài của véctơ $u = (3,2,1)$

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{((3,2,1),(3,2,1))}$$
$$\|u\| = \sqrt{5.3.3 + 2.3.2 + 2.2.3 + 3.2.2 + 1.1}$$
$$\|u\| = \sqrt{82}$$

Chú ý: So sánh với độ dài véctơ ở phổ thông! Cùng một véctơ nhưng "dài" hơn!!!

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_3 cho qui tắc

$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in R_3;\ \forall y=(y_1,y_2,y_3)\in R_3$

$$(x,y)=((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$$

$$=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_2y_2+x_3y_3$$

4. Tìm khoảng cách giữa hai véctơ $u=(1,2,1)$ và $v=(3,0,2)$

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(u-v,u-v)}=\sqrt{((-2,2,-1),(-2,2,-1))}$$

$$d(u,v)=\sqrt{5.(-2).(-2)+2.(-2).2+2.2.(-2)+3.2.2+1.1}$$

$$d(u,v)=\sqrt{17}$$

Chú ý: So sánh với khoảng cách giữa hai véctơ ở phổ thông.
Khoảng cách giữa hai điểm “lớn” hơn!!!

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_3 cho qui tắc

$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in R_3;\ \forall y=(y_1,y_2,y_3)\in R_3$

$$(x,y)=((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$$

$$=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_2y_2+x_3y_3$$

5. Tìm góc giữa hai véctơ $u=(1,0,1)$ và $v=(2,1,0)$

$$\cos\alpha=\frac{(u,v)}{\|u\|.\|v\|}=\frac{12}{\sqrt{6}.\sqrt{31}}=\frac{12}{\sqrt{186}}$$

$$\Rightarrow a=\arccos\frac{12}{\sqrt{186}}$$

5.1. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $p(x)$ và $q(x)$ của R-Kgvt $P_2[x]$, đặt

$$(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$$

1. Chứng tỏ (p,q) là tích vô hướng.
2. Tính (p,q) với $p(x)=2x^2-3x+1; q(x)=x-3$

$$(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x).q(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x^2-3x+1)(x-3)dx$$

$$=-12$$

5.1. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $p(x)$ và $q(x)$ của R-Kgvt $P_2[x]$, đặt

$$(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$$

3. Tìm độ dài của véctơ $p(x)=2x+3$

$$\|p\|=\sqrt{(p,p)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}p(x).p(x)dx}$$

$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}(2x+3)^2dx}=\sqrt{\frac{62}{3}}$$

5.1. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $p(x)$ và $q(x)$ của R-Kgvt $P_2[x]$, đặt

$$(p,q)=\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

4. Tính khoảng cách giữa hai véctơ $p(x)$ và $q(x)$ với

$$p(x)=x^2+x+2; q(x)=x^2-2x+3$$

$$d(p,q)=\|p-q\|=\sqrt{(p-q,p-q)}$$

$$=\sqrt{(3x-1,3x-1)} \quad =\sqrt{\int_{-1}^{1}(3x-1)^2dx}$$

$$=2\sqrt{2}$$

5.1. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $p(x)$ và $q(x)$ của R-Kgvt $P_2[x]$, đặt

$$(p,q)=\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

5. Tính góc giữa hai véctơ $p(x)=x^2+x; q(x)=2x+3$

$$\cos\alpha=\frac{(p,q)}{\|p\|.\|q\|}$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx}{\sqrt{\int_{-1}^{1}[p(x)]^2dx}\sqrt{\int_{-1}^{1}[q(x)]^2dx}}$$

5.2. Tích vô hướng

Định nghĩa sự vuông góc

Hai vectơ u và v được gọi là vuông góc nhau, nếu

$(u,v)=0$, ký hiệu $u\perp v$

Định nghĩa

Véctơ x vuông góc với tập hợp M, nếu

$(\forall y\in M)\ x\perp y$

5.1. Tích vô hướng

Định nghĩa họ trực giao

Tập hợp con M của không gian Euclid V được gọi là họ trực giao, nếu

$(\forall x,y\in M)\ (x\neq y)$ thì $x\perp y$.

Định nghĩa họ trực chuẩn

Tập hợp con M của không gian Euclid V được gọi là họ trực chuẩn, nếu

1. M truc giao.

2. $(\forall x\in M)\ \|x\|=1$.

5.1. Tích vô hướng

Mệnh đề

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với tập sinh của F.

Chứng minh.

$\Rightarrow$ Hiển nhiên.

$\Leftarrow$ Giả sử x vuông góc với tập sinh $f_1, f_2, \dots, f_m$.

$$\forall f \in F \quad \Leftrightarrow \quad f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m$$

Xét tích vô hướng $(x, f) = (x, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m)$

$$\Leftrightarrow (x, f) = \alpha_1 (x, f_1) + \alpha_2 (x, f_2) + \dots + \alpha_m (x, f_m)$$

$\Leftrightarrow (x, f) = 0$ hay x vuông góc f.

Vậy x vuông góc với F.

5.1. Tích vô hướng

Ví dụ

Trong không gian R_3 với tích vô hướng chính tắc cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

cho véctơ x = (2, 3, m). Tìm tất cả m để x vuông góc với F.

Bước 1. Tìm tập sinh của F $\quad \{(4,-3,1)\}$

Bước 2. $\quad x \perp F \Leftrightarrow x$ vuông góc với tập sinh của F.

$$\Leftrightarrow x \perp (4,-3,1) \quad \Leftrightarrow ((2,3,m),(4,-3,1)) = 0 \Leftrightarrow 4.2 + (-3).3 + 1.m = 0$$

chú ý tích vô hướng!!

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Định nghĩa bù vuông góc của không gian con

Cho không con F của không gian Euclid V. Tập hợp

$$F^{\perp} = \{x \in V \mid x \perp F\}$$

được gọi là bù vuông góc của không gian con F.

Định lý

Cho không con F của không gian Euclid V. Khi đó

1. $F^{\perp}$ là không gian con của V.
2. $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim V$

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Các bước tìm cơ sở và chiều của không gian $F^{\perp}$

Bước 1. Tìm một tập sinh của F. Giả sử đó là

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

Bước 2. Tìm không gian con bù vuông góc.

$$\forall y \in F^{\perp} \Leftrightarrow y \perp F \Leftrightarrow y \perp f_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \perp f_1 \\ y \perp f_2 \\ \dots \\ y \perp f_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y, f_1) = 0 \\ (y, f_2) = 0 \\ \dots \\ (y, f_m) = 0 \end{cases}$$

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Ví dụ. Cho $F = <(1,1,1),(2,1,0),(1,0,-1)>$ là không gian con của R^3. Tìm cơ sở và chiều của $F^{\perp}$.

Giải. $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \perp (1,1,1) \\ x \perp (2,1,0) \\ x \perp (1,0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x = (\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1,-2,1)$$

$\Rightarrow F^{\perp} = <(1,-2,1)>$ $\Rightarrow$ cơ sở: {(1,-2,1)}; Dim$F^{\perp}$ =1.

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Ví dụ. Cho

$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in R_3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\&\, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

là không gian con của R_3. Tìm cơ sở và chiều của $F^{\perp}$.

Giải. Bước 1. Tìm tập sinh của *F*.

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x = (2\alpha, -3\alpha, \alpha) = \alpha(2,-3,1)$$

$\Rightarrow$ Vậy tập sinh của *F* là {(2,-3,1)}

Bước 2. Tương tự như ở ví dụ trước.

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Định lý

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là tập hợp con, trực giao, không chứa véctơ không của không gian Euclid V. Khi đó *S* độc lập tt.

Chứng minh (bằng định nghĩa của độc lập tuyến tính)

Giả sử $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$

Khi đó $(u_1, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m) = (u_1, 0) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_1 (u_1, u_1) + \alpha_2 (u_1, u_2) + \ldots + \alpha_m (u_1, u_m) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_1 (u_1, u_1) = 0$

vì S không chứa véctơ 0 nên $(u_1, u_1) > 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Tương tự ta chứng minh được $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$

Vậy S độc lập tuyến tính.

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Định lý

Giả sử $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V. Khi đó với mọi $x \in V$, *x* có thể biểu diễn duy nhất ở dạng $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

với $x_i = (x, e_i)$

Chứng minh. $x \in V \Leftrightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

khi đó $(x, e_i) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, e_i)$

$(x, e_i) = x_1 (e_1, e_i) + x_2 (e_2, e_i) + \ldots + x_n (e_n, e_i)$

vì E là cơ sở trực chuẩn nên $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{neá } i \neq j \\ 1, & \text{neá } i = j \end{cases}$

vậy ta có $x_i = (x, e_i)$

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Ví dụ

Cho cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V

$$E=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6},\frac{-2}{\sqrt6}\right);\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right);\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)\right\}$$

Tìm tọa độ của véctơ $v=(3,-2,1)$ trong cơ sở E.

$$[v]_E=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow v=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$$

$$v_1=(v,e_1)=\frac{3}{\sqrt6};\quad v_2=(v,e_2)=\frac{1}{\sqrt2};\quad v_3=(v,e_3)=\frac{6}{\sqrt3}$$

5.2. Bù vuông góc của không gian con

Cho cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V

$$E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$$

Cho hai véctơ của V: $x=x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n$

$$y=y_1e_1+y_2e_2+..+y_ne_n$$

Xét tích vô hướng của x và y:

$(x,y)=(x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n, y_1e_1+y_2e_2+..+y_ne_n)$

$(x,y)=x_1y_1(e_1,e_1)+x_2y_2(e_2,e_2)+..+x_ny_n(e_n,e_n)$

$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+..+x_ny_n$

Khi làm việc với cơ sở trực chuẩn thì công việc tính tích vô hướng của hai véctơ rất nhanh gọn!!

5.3 Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Khi làm việc với không gian Euclid V, ta làm việc với cơ sở của không gian véctơ.

Theo định lý trên và ví dụ ở slide trước ta thấy nếu cơ sở là trực chuẩn thì công việc tính toán rất nhanh (tính tọa độ, tính tích vô hướng của hai véctơ, tính độ dài, khoảng cách, …)

Yêu cầu đặt ra: tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V.

Bước 1. Trước hết, ta chọn một cơ sở tùy ý E của V.

Bước 2. Dùng quá trình Gram – Schdmidt sau đây đưa E về cơ sở trực giao.

Bước 3. Chia mỗi véctơ cho độ dài của nó ta được cơ sở trực chuẩn.

5.3 Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Quá trình Gram – Schmidt là quá trình đơn giản dùng để tìm một cơ sở trực giao, sau đó là cơ sở trực chuẩn cho một không gian con của không gian Euclid.

Định lý (quá trình Gram – Schmidt)

Cho $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ là họ độc lập tuyến tính của không gian Euclid V.

Khi đó có thể xây dựng từ E một họ trực giao

$$F=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$$

sao cho $<f_1,f_2,\dots,f_m>=<e_1,e_2,\dots,e_m>$

5.3 Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Quá trình trực giao hóa Gram – Schmidt

Chọn $f_1 = e_1$ Tìm $f_2 = e_2 + \alpha_1 f_1$

$$\Rightarrow (f_2, f_1) = (e_2, f_1) + \alpha_1 (f_1, f_1) \Leftrightarrow 0 = (e_2, f_1) + \alpha_1 (f_1, f_1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} \quad \Rightarrow f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$$

Tìm f_3 ôûdaïng $f_3 = e_3 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$

$$f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$$

$$f_k = e_k - \frac{(e_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_k, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \cdots - \frac{(e_k, f_{k-1})}{(f_{k-1}, f_{k-1})} f_{k-1}$$

Khi đó $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ là cơ sở trực giao của W.

5.3 Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Ví dụ

Trong R_4 cho họ đltt E= {(1,0,1,1),), (0,1,1,1), (1,1,1,1)}
Dùng quá trình Gram –Schmidt tìm họ trực giao, họ trực chuẩn.

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$ Chọn $f_1 = e_1 = (1,0,1,1)$

Tìm $f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0,1,1,1) - \frac{2}{3}(1,0,1,1) = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Chọn $f_2 = (-2,3,1,1)$

Tìm $f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{5})$

Chọn $f_3 = (2,2,-1,-1)$ Họ trực giao cần tìm $F = \{f_1, f_2, f_3\}$

Chia mỗi vectơ cho độ dài của nó ta được họ trực chuẩn

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$$

5.3 Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Ví dụ

Trong không gian R_4 với tích vô hướng chính tắc cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Tìm chiều và một cơ sở trực chuẩn của F.

Bước 1. Chọn một cơ sở tùy ý của F: $E = \{(2,-1,1,0); (0,-1,0,1)\}$

Bước 2. Dùng quá trình Gram Schmidt đưa E về cơ sở trực giao

$F = \{f_1, f_2\}$ Chọn $f_1 = e_1 = (2,-1,1,0)$

Tìm f_2 ở dạng $f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (2,5,1,-6)$

Bước 3. Cơ sở trực chuẩn là:

$$\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right), \left(\frac{2}{\sqrt{66}}, \frac{5}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{-6}{\sqrt{66}} \right) \right\}$$

5.4. Hình chiếu vuông góc, khoảng cách.

Trong không gian Euclid V cho không gian con F và một véctơ v tùy ý.

Véctơ v có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$v = f + g \mid f \in F \;\&\; g \in F^{\perp}$$

véctơ f được gọi là hình chiếu vuông góc của v xuống F:

$$f = \mathrm{pr}_F v$$

Nếu coi véctơ v là một điểm, thì độ dài của véctơ g là khoảng cách từ v đến không gian con F.

$$\mathrm{d}(v, F) = \| g \| = \| v - \mathrm{pr}_F v \|$$

5.4. Hình chiếu vuông góc, khoảng cách.

Bài toán. Cho không gian con F và một vectơ v.

1) Tìm hình chiếu vuông góc của v xuống F.

2) Tìm khoảng cách từ v đến F.

Giải câu 1). Tìm một cơ sở của F. Giả sử đó là: $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

$$v = f + g = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_m f_m + g$$

$$\begin{cases} x_1(f_1, f_1) + x_2(f_1, f_2) + \dots + x_m(f_1, f_m) + (g, f_1) & = & (v, f_1) \\ x_1(f_2, f_1) + x_2(f_2, f_2) + \dots + x_m(f_2, f_m) + (g, f_2) & = & (v, f_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(f_m, f_1) + x_2(f_m, f_2) + \dots + x_m(f_m, f_m) + (g, f_m) & = & (v, f_m) \end{cases}$$

Giải hệ tìm $x_1, x_2, \dots, x_m \Rightarrow \mathrm{pr}_F v = f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots x_m f_m$

câu 2). $d(v, F) = \| g \| = \| v - \mathrm{pr}_F v \|$

5.4. Hình chiếu vuông góc, khoảng cách.

Ví dụ

Trong không gian véctơ $P_2[x]$ với tích vô hướng

$$(p, q) = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

Cho không gian con $F = \{p(x) \mid p(1) = 0\}$

1) Tìm hình chiếu của $f(x) = 2x^2 - x + 1$ xuống F.

2) Tìm khoảng cách từ $f(x) = 2x^2 - x + 1$ đến F.

1). Tìm một cơ sở của F: $E = \{f_1 = x^2 - x,\ f_2 = x - 1\}$

$$\begin{cases} \alpha_1(f_1, f_1) + \alpha_2(f_1, f_2) & = & (f, f_1) \\ \alpha_1(f_2, f_1) + \alpha_2(f_2, f_2) & = & (f, f_2) \end{cases}$$

Sử dụng tích vô hướng đã cho, tìm hệ ptrình, giải, tìm α_1, α_2

Suy ra hình chiếu vuông góc và khoảng cách.

5.4. Hình chiếu vuông góc, khoảng cách.

Ví dụ

Trong không gian R_4 với tích vô hướng chính tắc cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

1) Tìm hình chiếu vuông góc của véctơ $x = (1,1,0,1)$ xuống F.

2) Tìm khoảng cách từ véctơ $x = (1,1,0,1)$ đến F.

1). Tìm một cơ sở của F: $E = \{f_1 = (2,-1,1,0),\ f_2 = (-2,1,0,1)\}$

$$\begin{cases} x_1(f_1, f_1) + x_2(f_1, f_2) & = & (x, f_1) \\ x_1(f_2, f_1) + x_2(f_2, f_2) & = & (x, f_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 & = & 1 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{11}, x_2 = \frac{-1}{11} \Rightarrow pr_F x = x_1 f_1 + x_2 f_2 = \left(\frac{4}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{11}\right)$$

2). $d(x, F) = \| g \| = \| x - \mathrm{pr}_F x \| = \left\| \left(\frac{7}{11}, \frac{13}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{12}{11} \right) \right\| = \sqrt{3}$